

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο

5.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

ΘΕΩΡΙΑ 1

Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού. Ο αριθμός αυτός συμβολίζεται με ω και λέγεται **διαφορά της προόδου**. Κατά συνέπεια μια ακολουθία ονομάζεται αριθμητική πρόοδος (α_n) με διαφορά ω αν ισχύουν τα παρακάτω: $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \omega$ ή $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \omega$.

Γενικά για μια αριθμητική πρόοδο ισχύει:

- Αν $\omega > 0$, τότε οι όροι της μεγαλώνουν,
- Αν $\omega < 0$, τότε οι όροι της μικραίνουν,
- Αν $\omega = 0$, τότε όλοι οι όροι της είναι ίσοι (σταθερή αριθμητική πρόοδος).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_n) με $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_2 = 7$. Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου και τους πέντε πρώτους όρους της.

ΛΥΣΗ

Από τον ορισμό της αριθμητικής προόδου έχουμε: $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 \Leftrightarrow \omega = 7 - 3 \Leftrightarrow \omega = 4$.

Κατά συνέπεια οι πέντε πρώτοι όροι είναι: $3 \xrightarrow{+4} 7 \xrightarrow{+4} 11 \xrightarrow{+4} 15 \xrightarrow{+4} 19$.

ΘΕΩΡΙΑ 2 (Γενικός (ν-οστός) όρος αριθμητικής προόδου)

Ο γενικός όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_n) με πρώτο όρο τον α_1 και διαφορά ω είναι: $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$.

Απόδειξη

Από τον ορισμό της αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$\alpha_1 = \alpha_1$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \omega$$

$$\alpha_4 = \alpha_3 + \omega$$

$\vdots$

$$\alpha_{n-1} = \alpha_{n-2} + \omega$$

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \omega$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1} + (n-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, ... Να βρείτε:

(α) Τον ν-οστό όρο της, (β) Τον 31^ο όρο της,

(γ) Ποιος όρος της είναι ίσος με 140 και ποιος ίσος με 120.

ΛΥΣΗ

(α) Από τα δεδομένα μας το $\alpha_1 = 2$ και $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 5 - 2 \Leftrightarrow \omega = 3$. Άρα ο ν-οστός όρος της είναι: $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega \Leftrightarrow \alpha_n = 2 + (n-1) \cdot 3 \Leftrightarrow \alpha_n = 3n - 1$.

(β) Αντικαθιστούμε όπου $n=31$ στο ερώτημα (α) και έχουμε:

$$\alpha_{31} = 3 \cdot 31 - 1 \Leftrightarrow \alpha_{31} = 92.$$

(γ) Έχουμε $\alpha_n = 140$ και θέλουμε να βρούμε το n .

$$\text{Άρα } \alpha_n = 140 \Leftrightarrow 3n - 1 = 140 \Leftrightarrow 3n = 141 \Leftrightarrow n = 47.$$

Κατά συνέπεια ο 47^{ος} όρος της είναι ίσος με 140.

Όμοια έχουμε $\alpha_n = 120$ και θέλουμε να βρούμε το n .

$$\text{Άρα } \alpha_n = 120 \Leftrightarrow 3n - 1 = 120 \Leftrightarrow 3n = 121 \Leftrightarrow n = \frac{121}{3}.$$

Όμως το $n \in \mathbb{N}^*$, άρα η παραπάνω τιμή απορρίπτεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_n) της οποίας ο 7^{ος} όρος είναι 9, ενώ το άθροισμα του 4^{ου} και του 9^{ου} όρου είναι 16. Να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της.

ΛΥΣΗ

Από τον γενικό όρο της αριθμητικής προόδου έχουμε:

- Για $n=7$ είναι $\alpha_7 = \alpha_1 + 6\omega$
- Για $n=4$ είναι $\alpha_4 = \alpha_1 + 3\omega$
- Για $n=9$ είναι $\alpha_9 = \alpha_1 + 8\omega$

Επομένως έχουμε $\alpha_7 = 9 \Leftrightarrow \alpha_1 + 6\omega = 9$ και

$$\alpha_4 + \alpha_9 = 16 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega + \alpha_1 + 8\omega = 16 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 11\omega = 16$$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε: $\alpha_1 = -3$ και $\omega = 2$.

ΘΕΩΡΙΑ 3

Για να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία (α_n) είναι αριθμητική πρόοδος εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε τον όρο α_{n+1} , θέτοντας όπου n το $n+1$, στον τύπο του α_n .
- Υπολογίζουμε τη διαφορά $\alpha_{n+1} - \alpha_n$.
- Αν η παραπάνω διαφορά είναι σταθερός αριθμός (δηλαδή ανεξάρτητος του n), τότε η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, με διαφορά ω ίση με τον σταθερό αυτό αριθμό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Ο n -οστός όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_n = 3n - 5$. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά και τον πρώτο όρο.

ΛΥΣΗ

Αρχικά βρίσκουμε το α_{n+1} , θέτοντας όπου n το $n+1$, στον τύπο $\alpha_n = 3n - 5$.

Έχουμε $\alpha_{n+1} = 3(n+1) - 5 \Leftrightarrow \alpha_{n+1} = 3n + 3 - 5 \Leftrightarrow \alpha_{n+1} = 3n - 2$. Υπολογίζουμε τη διαφορά τη διαφορά $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ και έχουμε: $\alpha_{n+1} - \alpha_n = (3n - 2) - (3n - 5) = 3$.

Παρατηρούμε ότι η διαφορά είναι σταθερός αριθμός κατά συνέπεια η παραπάνω ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με $\omega=3$. Τέλος ο πρώτος όρος είναι:

$$\alpha_1 = 3 \cdot 1 - 5 \Leftrightarrow \alpha_1 = -2.$$

ΘΕΩΡΙΑ 4 (Διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου – Αριθμητικός μέσος)

Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν

$$\text{ισχύει: } \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τρεις διαδοχικούς όρους α, β, γ μιας αριθμητικής προόδου με διαφορά ω . Ισχύει ότι: $\beta - \alpha = \omega$ και $\gamma - \beta = \omega$. Αφού τα δεύτερα μέλη είναι ίσα άρα και τα

$$\text{πρώτα. Κατά συνέπεια έχουμε: } \beta - \alpha = \gamma - \beta \Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Αντίστροφα

Αν για τρεις αριθμούς α, β, γ ισχύει ότι $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$, τότε έχουμε:

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} \Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta - \alpha = \gamma - \beta. \text{ Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι οι αριθμοί } \alpha, \beta, \gamma \text{ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.}$$

Αριθμητικός Μέσος

- Ο αριθμός $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ λέγεται αριθμητικός μέσος των αριθμών α και γ .
- Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου, τότε ο αριθμός β είναι ο αριθμητικός μέσος των α και γ .
- Ο αριθμητικός μέσος των αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι ο αριθμός:

$$\mu = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Οι αριθμοί $x-6, 4x-13, 2x+5$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(α) Να βρείτε τον αριθμό x .

(β) Για την τιμή του x που βρήκατε, να υπολογίσετε τον αριθμητικό μέσο των αριθμών x και 33 .

ΛΥΣΗ

(α) Οι αριθμοί $x-6, 4x-13, 2x+5$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει: $2(4x-13) = (x-6) + (2x+5) \Leftrightarrow 8x-26 = x-6+2x+5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 8x-x-2x = 26-6+5 \Leftrightarrow 5x = 25 \Leftrightarrow x = 5.$$

(β) Ο αριθμητικός μέσος των αριθμών 5 και 33 είναι ο αριθμός:

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{5+33}{2} = \frac{38}{2} = 19.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι και οι αριθμοί $\alpha^2 + \beta\gamma, \alpha\beta, \beta\gamma - \gamma^2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ΛΥΣΗ

Οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, άρα ισχύει:

$$2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} \quad (1).$$

Για να αποδείξετε ότι και οι αριθμοί $\alpha^2 + \beta\gamma, \alpha\beta, \beta\gamma - \gamma^2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$2\alpha\beta = (\alpha^2 + \beta\gamma) + (\beta\gamma - \gamma^2) \Leftrightarrow 2\alpha\beta = \alpha^2 + 2\beta\gamma - \gamma^2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2\alpha \cdot \frac{\alpha + \gamma}{2} = \alpha^2 + 2 \cdot \frac{\alpha + \gamma}{2} \cdot \gamma - \gamma^2 \Leftrightarrow \alpha(\alpha + \gamma) = \alpha^2 + (\alpha + \gamma) \cdot \gamma - \gamma^2 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha\gamma = \alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha\gamma = \alpha^2 + \alpha\gamma \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Μεταξύ των αριθμών 2 και 50 να βρεθούν άλλοι 7 αριθμοί, ώστε όλοι μαζί να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

ΛΥΣΗ

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_7$ οι επτά αριθμοί που ψάχνουμε. Τότε οι αριθμοί: 2, $x_1, x_2, \dots, x_7, 50$ αποτελούν 9 διαδοχικούς όρους μιας αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_9 = 50$. Για $n=9$ έχουμε: $\alpha_9 = \alpha_1 + 8\omega \Leftrightarrow 50 = 2 + 8\omega \Leftrightarrow 8\omega = 48 \Leftrightarrow \omega = 6$. Άρα οι όροι είναι: 2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50.

ΘΕΩΡΙΑ 5 (Άθροισμα n διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου)

Έστω (α_n) μια αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω . Το άθροισμα S_n των πρώτων n όρων της δίνεται από τον τύπο: $S_n = \frac{n}{2}(\alpha_1 + \alpha_n)$.

Αν στον παραπάνω τύπο αντικαταστήσουμε το α_n με τη σχέση $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$, έχουμε ότι: $S_n = \frac{n}{2}[2\alpha_1 + (n-1)\omega]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Δίνεται αριθμητική πρόοδος -5, -1, 3, Να βρείτε:

(α) Το άθροισμα των 40 πρώτων όρων της προόδου,

(β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να πάρουμε, ώστε να έχουν άθροισμα 72.

ΛΥΣΗ

Από τα δεδομένα μας έχουμε $\alpha_1 = -5$ και $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = -1 - (-5) \Leftrightarrow \omega = 4$.

$$(α) S_{40} = \frac{40}{2}(2\alpha_1 + 39\omega) = 20[2 \cdot (-5) + 39 \cdot 4] = 2.920.$$

$$S_n = 72 \Leftrightarrow \frac{n}{2}[2\alpha_1 + (n-1)\omega] = 72 \quad (β) \text{ Έχουμε } S_n = 72 \text{ και θέλουμε να βρούμε τον αριθμό } n.$$

Άρα

$$S_n = 72 \Leftrightarrow \frac{n}{2}[2\alpha_1 + (n-1)\omega] = 72 \Leftrightarrow \frac{n}{2}[2 \cdot (-5) + (n-1)4] = 72 \Leftrightarrow \frac{n}{2}(4n - 14) = 72$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 - 7n - 72 = 0 \Leftrightarrow n = 8 \text{ ή } \Leftrightarrow n = -\frac{9}{2} \text{ Απορρίπτεται αφού το } n \in \mathbb{N}^*. \text{ Άρα } n=8.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Να υπολογίσετε το άθροισμα $7+10+13+\dots+187$.

ΛΥΣΗ

Οι αριθμοί 7, 10, 13, ..., 187 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 7$ και $\omega = 3$. Για να υπολογίσουμε το άθροισμα τους, πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε το πλήθος τους. Είναι $\alpha_n = 187$ και ψάχνουμε τον αριθμό n . Έχουμε:

$$\alpha_n = 187 \Leftrightarrow \alpha_1 + (n-1)\omega = 187 \Leftrightarrow 7 + 3(n-1) = 187 \Leftrightarrow 7 + 3n - 3 = 187 \Leftrightarrow 3n = 187$$

$$\Leftrightarrow n = 61. \text{ Επομένως έχουμε: } S_{61} = \frac{61}{2}(\alpha_1 + \alpha_{61}) = \frac{61}{2}(7 + 187) = 5.917.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) με $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$. Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = \alpha_{20} + \alpha_{21} + \dots + \alpha_{50}$.

ΛΥΣΗ

Για να υπολογίσουμε το παραπάνω άθροισμα γράφουμε το άθροισμα S_{50} των πρώτων 50 όρων της αριθμητικής προόδου ως εξής:

$$S_{50} = \underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{19}}_{S_{19}} + \underbrace{\alpha_{20} + \dots + \alpha_{50}}_S \Leftrightarrow S_{50} = S_{19} + S \Leftrightarrow S = S_{50} - S_{19}$$

Θα υπολογίζουμε τα αθροίσματα S_{50} και S_{19} .

$$S_{50} = \frac{50}{2}(2\alpha_1 + 49\omega) = 25(2 \cdot 2 + 49 \cdot 3) = 3.775$$

$$S_{19} = \frac{19}{2}(2\alpha_1 + 18\omega) = \frac{19}{2}(2 \cdot 2 + 18 \cdot 3) = 551.$$

Επομένως, το ζητούμενο άθροισμα S είναι: $S = S_{50} - S_{19} = 3.775 - 551 = 3.224$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) ο 6^{ος} όρος είναι 5 και το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της είναι 40. Να βρείτε τον α_1 και τη διαφορά ω της προόδου.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\alpha_6 = 5 \Leftrightarrow \alpha_1 + 5\omega = 5$ (1)

$$S_{10} = 40 \Leftrightarrow \frac{10}{2}(2\alpha_1 + 9\omega) = 40 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 9\omega = 8$$
 (2)

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$$\begin{cases} \alpha_1 + 5\omega = 5 \\ 2\alpha_1 + 9\omega = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 5 - 5\omega \\ 2(5 - 5\omega) + 9\omega = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 5 - 5\omega \\ 10 - 10\omega + 9\omega = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 5 - 5\omega \\ \omega = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -5 \\ \omega = 2 \end{cases}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) με $\alpha_1 = -1$ και $\omega = 4$. Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{51}$.

ΛΥΣΗ

Οι όροι $\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_{51}$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά: $\omega' = 2\omega = 2 \cdot 4 = 8$. Για να υπολογίσουμε το άθροισμα τους, πρέπει να βρούμε το πλήθος τους. Αρκεί να βρούμε το πλήθος των αριθμών 1, 3, ..., 51, οι οποίοι αποτελούν αριθμητική πρόοδο (β_n) με $\beta_1 = 1$ και $\omega' = 2$. Έχουμε:

$$\beta_n = 51 \Leftrightarrow \beta_1 + (n-1)\omega' = 51 \Leftrightarrow 1 + (n-1) \cdot 2 = 51 \Leftrightarrow 2n - 1 = 51 \Leftrightarrow 2n = 52 \Leftrightarrow n = 26.$$

Άρα το ζητούμενο άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{51}$ είναι το άθροισμα των πρώτων 26 όρων μιας αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = -1$ και $\omega' = 8$.

$$\text{Άρα } S = \frac{26}{2}[2 \cdot (-1) + 25 \cdot 8] = 13(-2 + 200) = 2.574.$$

ΘΕΩΡΙΑ 5

Για να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, όταν γνωρίζουμε το άθροισμα S_n των πρώτων n όρων της εργαζόμαστε ως εξής:

$$S_n = \underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}}_{S_{n-1}} + \alpha_n \Leftrightarrow S_n = S_{n-1} + \alpha_n \Leftrightarrow \alpha_n = S_n - S_{n-1}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13

Το άθροισμα των πρώτων n όρων μιας ακολουθίας (α_n) είναι $S_n = 2n^2 - n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (α_n) είναι αριθμητική πρόοδος της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω και τον πρώτο όρο α_1 .

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω παρατήρηση $\alpha_n = S_n - S_{n-1}$ θα βρούμε τον γενικό όρο α_n . Για $n \geq 2$ ισχύει:

$$S_{n-1} = 2(n-1)^2 - (n-1) = 2(n^2 - 2n + 1) - n + 1 = 2n^2 - 4n + 2 - n + 1 = 2n^2 - 5n + 3.$$

$$\alpha_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - n - 2n^2 + 5n - 3 = 4n - 3, \quad n \geq 2.$$

Επίσης είναι: $\alpha_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1$. Για να αποδείξουμε ότι η αρχική ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος υπολογίζουμε την διαφορά: $\alpha_n - \alpha_{n+1}$.

$$\text{Το } \alpha_{n+1} = 4(n+1) - 3 = 4n + 4 - 3 = 4n + 1. \text{ Άρα}$$

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} = (4n - 3) - (4n + 1) = 4n - 3 - 4n - 1 = -4. \text{ Άρα η αρχική ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με } \omega = -4 \text{ και } \alpha_1 = 4 \cdot 1 - 3 = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14

(α) Να βρείτε πέντε ακέραιους αριθμούς, που αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και έχουν άθροισμα 20 και γινόμενο -560.

(β) Να βρείτε τέσσερις ακέραιους αριθμούς, που αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και έχουν άθροισμα 4 και γινόμενο 105.

ΛΥΣΗ

(α) Θέλουμε να βρούμε 5 (περιττό πλήθος) διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Έστω x ο μεσαίος ($3^{\text{ος}}$) όρος και ω η διαφορά τους. Συμβολίζουμε αυτούς τους αριθμούς ως εξής: $x - 2\omega, x - \omega, x, x + \omega, x + 2\omega$.

Το άθροισμα τους είναι 20, άρα έχουμε:

$$x - 2\omega + x - \omega + x + x + \omega + x + 2\omega = 20 \Leftrightarrow 5x = 20 \Leftrightarrow x = 4.$$

Το γινόμενο τους είναι -560, άρα έχουμε:

$$(x - 2\omega)(x - \omega) \cdot x \cdot (x + \omega)(x + 2\omega) = -560 \Leftrightarrow (x^2 - 4\omega^2)(x^2 - \omega^2) \cdot x = -560 \stackrel{x=4}{\Leftrightarrow}.$$

$$\stackrel{x=4}{\Leftrightarrow} (16 - 4\omega^2)(16 - \omega^2) \cdot 4 = -560 \Leftrightarrow 4(4 - \omega^2)(16 - \omega^2) \cdot 4 = -560 \Leftrightarrow \omega^4 - 20\omega^2 + 99 = 0$$

Αν θέσουμε $y = \omega^2$, η παραπάνω εξίσωση γίνεται: $y^2 - 20y + 99 = 0$.

$$\text{Έχουμε } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4 \text{ και λύσεις: } y = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow y = 11 \text{ ή } y = 9.$$

Για $y = 11 \Leftrightarrow \omega^2 = 11 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{11}$, που απορρίπτεται, διότι έτσι προκύπτουν αριθμοί που δεν είναι ακέραιοι.

Για $y = 9 \Leftrightarrow \omega^2 = 9 \Leftrightarrow \omega = \pm 3$, οπότε:

- Αν $\omega = 3$ και $x = 4$ προκύπτουν οι αριθμοί: -2, 1, 4, 7, 10,
- Αν $\omega = -3$ και $x = 4$ προκύπτουν οι αριθμοί: 10, 7, 4, 1, -2.

Σε κάθε περίπτωση, οι 5 ζητούμενοι αριθμοί είναι οι: **-2, 1, 4, 7, 10.**

(β) Θέλουμε να βρούμε 4 (άρτιο πλήθος) διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Συμβολίζουμε αυτούς τους αριθμούς ως εξής: $x-3\rho, x-\rho, x+\rho, x+3\rho$.

Το άθροισμα τους είναι 4, άρα έχουμε:

$$x-3\rho+x-\rho+x+\rho+x+3\rho=4 \Leftrightarrow 4x=4 \Leftrightarrow x=1.$$

Το γινόμενο τους είναι 105, άρα έχουμε:

$$(x-3\rho)(x-\rho)(x+\rho)(x+3\rho)=105 \Leftrightarrow (x^2-9\rho^2)(x^2-\rho^2)=105 \stackrel{x=1}{\Leftrightarrow}.$$

$$\stackrel{x=1}{\Leftrightarrow} (1-9\rho^2)(1-\rho^2)=105 \Leftrightarrow 9\rho^4-10\rho^2+1=105 \Leftrightarrow 9\rho^4-10\rho^2-104=0$$

Αν θέσουμε $y=\omega^2$, η παραπάνω εξίσωση γίνεται: $9y^2-10y-104=0$.

$$\text{Έχουμε λύσεις: } y=\frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow y=4 \text{ ή } y=-\frac{26}{9}.$$

$$\text{Για } y=-\frac{26}{9} \Leftrightarrow \rho^2=-\frac{26}{9}, \text{ που είναι αδύνατη,}$$

$$\text{Για } y=4 \Leftrightarrow \omega^2=4 \Leftrightarrow \rho=\pm 2, \text{ οπότε:}$$

- Αν $\rho=2$ και $x=1$ προκύπτουν οι αριθμοί: -5, -1, 3, 7,
- Αν $\rho=-2$ και $x=1$ προκύπτουν οι αριθμοί: 7, 3, -1, -5.

Σε κάθε περίπτωση, οι 4 ζητούμενοι αριθμοί είναι οι: **-5, -1, 3, 7.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρείτε τον 31^ο όρο των παρακάτω αριθμητικών προόδων:

(α) 1, 2, 7, ... (β) -9, -5, -1, ... (γ) 7, 5, 3, ...

Άσκηση 2

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι: $\alpha_1 = -15$ και $\alpha_7 = 9$. Να βρείτε:

(α) τη διαφορά ω της προόδου, (β) τον 11^ο όρο της προόδου

(γ) Ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 41.

Άσκηση 3

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι: $\alpha_5 = 11$ και $\alpha_9 = 31$. Να βρείτε:

(α) τον πρώτο όρο και τη διαφορά ω της προόδου, (β) τον α_{14} όρο,

(γ) Ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 86.

Άσκηση 4

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) με διαφορά $\omega=3$, ο όρος α_{13} είναι διπλάσιος από τον όρο α_6 . Να βρείτε:

(α) τον πρώτο όρο της προόδου, (β) τον α_{29} όρο,

(γ) Ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 63.

Άσκηση 5

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύει: $\alpha_4 + \alpha_{12} = 0$ και $\alpha_7 + \alpha_{19} = -30$. Να βρείτε:

(α) τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου,

(β) τον α_n όρο για τον οποίο ισχύει: $\alpha_n = n$.

Άσκηση 6

Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των αριθμών:

(α) 3 και 23 (β) -5 και 37 (γ) -11 και 11

Άσκηση 7

Να βρείτε για ποια τιμή του x , ο αριθμός 15 είναι ο αριθμητικός μέσος των αριθμών $2x+1$ και $7x+2$.

Άσκηση 8

Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{Q}$, οι αριθμοί: $x+5$, $3x-5$ και $2x+6$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Άσκηση 9

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδο (α_n). Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί:

$$\alpha_4 + \alpha_5, \alpha_7 + \alpha_9 \text{ και } \alpha_{10} + \alpha_{13}$$

είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Άσκηση 10

Αν οι αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και για τους αριθμούς:

$$\beta + \gamma, \gamma + \alpha \text{ και } \alpha + \beta.$$

Άσκηση 11

Αν οι αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και για τους αριθμούς:

$$(\beta + \gamma)^2 - \alpha^2, (\gamma + \alpha)^2 - \beta^2 \text{ και } (\alpha + \beta)^2 - \gamma^2.$$

Άσκηση 12

Αν οι αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και για τους αριθμούς:

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2, \alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2 \text{ και } \beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2.$$

Άσκηση 13

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_1 = -14$ και $\omega = 3$. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 20 όρων της προόδου.

Άσκηση 14

Να υπολογίσετε τα επόμενα αθροίσματα:

(α) $1 + 4 + 7 + \dots + 94$ (β) $-5 - 1 + 3 + 7 + \dots + 135$

Άσκηση 15

Να βρείτε το άθροισμα:

- (α) των αρτίων αριθμών μεταξύ 21 και 153,
 (β) των περιττών αριθμών μεταξύ 10 και 170
 (γ) των πολλαπλάσιων του 3 μεταξύ 40 και 200.

Άσκηση 16

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) , είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{15} = 58$. Να βρείτε:

- (α) το άθροισμα των πρώτων 15 όρων της,
 (β) το άθροισμα των πρώτων 30 όρων της,
 (γ) πόσοι πρώτοι όροι της αριθμητικής προόδου (α_n) έχουν άθροισμα 800.

Άσκηση 17

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) , είναι $\alpha_1 = 2$, το άθροισμα των πρώτων 10 όρων είναι 200. Να βρείτε:

- (α) τη διαφορά της προόδου,
 (β) τον 18^ο όρο της,
 (γ) το άθροισμα των πρώτων 25 όρων της.

Άσκηση 18

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) , ο τέταρτος όρος είναι 10, ενώ το άθροισμα των πρώτων 12 όρων είναι 210. Να βρείτε:

- (α) τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου,
 (β) ποιος όρος ισούται με 118,
 (γ) το άθροισμα των πρώτων 40 όρων της.

Άσκηση 19

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) , με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει ότι $\alpha_{21} = 3\alpha_{16}$. Να βρείτε:

- (α) τον πρώτο όρο της (α_n) ,
 (β) το άθροισμα των αρνητικών όρων της (α_n) .

Άσκηση 20

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) , ο όγδοος όρος είναι 30, και το άθροισμα των 5 πρώτων όρων είναι 50. Να βρείτε:

- (α) τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου,
 (β) το άθροισμα των όρων της (α_n) , που είναι μεγαλύτεροι του 40 και μικρότεροι του 80.

Άσκηση 21

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) , με διαφορά ω για την οποία ισχύει:

$$\alpha_5 + \alpha_{11} = 15\omega$$

- (α) να αποδείξετε ότι $\omega = 2\alpha_1$.

- (β) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{S_{20}}{S_{10}}$.

Άσκηση 22

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_6 = 8$ και $\alpha_{11} = 23$. Να βρείτε:

- (α) τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου,
- (β) πόσοι πρώτοι όροι της προόδου έχουν άθροισμα 14,
- (γ) το άθροισμα $S_1 = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \dots + \alpha_{25}$,
- (δ) το άθροισμα $S_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{39}$.

Άσκηση 23

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) με διαφορά $\omega=3$, ισχύει $\alpha_n = 23$ και $S_n = 100$.

Να βρείτε:

- (α) τον αριθμό n και τον πρώτο όρο της προόδου,
- (β) το άθροισμα $S_1 = \alpha_{12} + \alpha_{13} + \dots + \alpha_{22}$,
- (γ) το άθροισμα $S_2 = \alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{32}$.

Άσκηση 24

Δίνεται ακολουθία (α_n) , της οποίας ο n -οστός όρος είναι $\alpha_n = 7 - 2n$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (α_n) είναι αριθμητική πρόοδος.
- (β) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 26 όρων της (α_n) .

Άσκηση 25

Δίνεται ακολουθία (α_n) , της οποίας ο n -οστός όρος είναι $\alpha_n = 4n - 15$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (α_n) είναι αριθμητική πρόοδος.
- (β) Να βρείτε το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{25}$.

Άσκηση 26

Το άθροισμα των πρώτων n όρων μιας ακολουθίας (α_n) είναι της οποίας ο n -οστός όρος είναι $\alpha_n = 4n - 15$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (α_n) είναι αριθμητική πρόοδος.
- (β) Να βρείτε το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{25}$.

Άσκηση 27

Μεταξύ των αριθμών 6 και 50 θέλουμε να βρούμε 10 αριθμούς, ώστε όλοι μαζί να είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.

Άσκηση 28

Μεταξύ των αριθμών 12 και 60 παρεμβάλουμε ορισμένους αριθμούς με άθροισμα 252, ώστε όλοι μαζί να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.

Άσκηση 29

Δίνονται πέντε διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου που έχουν άθροισμα 55, ενώ το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 695. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.

Άσκηση 30

Τρεις ακέραιοι αριθμοί, που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, έχουν άθροισμα 33 και γινόμενο 440.

- (α) Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.
- (β) Ο μεγαλύτερος από τους παραπάνω αριθμούς είναι ο $10^{\text{ος}}$ όρος και ο μικρότερος είναι ο $4^{\text{ος}}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_n) . Μα βρείτε:
 - (i) Τον πρώτο όρο και τη διαφορά της (α_n)
 - (ii) Πόσοι πρώτοι όροι της (α_n) έχουν άθροισμα 14,
 - (iii) Το άθροισμα $S = \alpha_{13} + \alpha_{14} + \alpha_5 + \dots + \alpha_{27}$.