

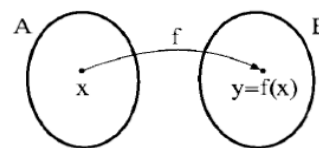
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο

6.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΩΡΙΑ 1 (Ορισμός Συνάρτησης)

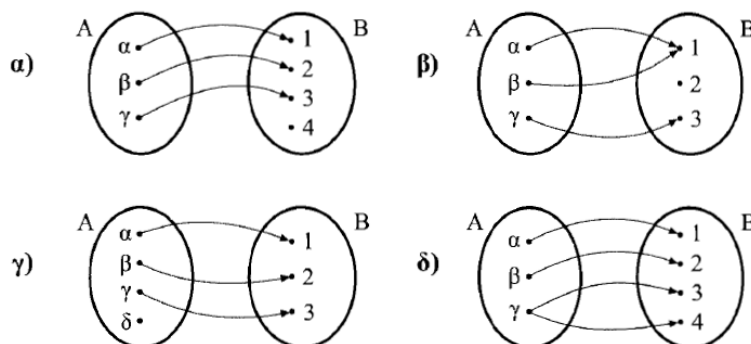
Συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B ονομάζουμε μια διαδικασία (κανόνα) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου B.

- Οι συναρτήσεις παριστάνονται συνήθως με μικρά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου f, g, h κ.λπ.
- Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση f από το σύνολο A στο σύνολο B.
- Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού της f** .
- Αν με τη συνάρτηση f , το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$ τότε γράφουμε:
 $y = f(x)$
- Το y ή το $f(x)$ λέγεται τιμή της f στο x .
- Το x , που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το y , που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x , ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.
- Η παραπάνω συνάρτηση συμβολίζεται ως εξής: $f : A \rightarrow B$.
- Το σύνολο που έχει ως στοιχεία του τις τιμές της f για όλα τα $x \in A$ λέγεται **σύνολο τιμών της f** και συμβολίζεται με $f(A)$. Ισχύει $f(A) \subseteq B$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (Βελοδιαγράμματα)

Να εξετάσετε αν τα παρακάτω βελοδιαγράμματα παριστάνουν συναρτήσεις από το A στο B.



ΛΥΣΗ

(α) Το βελοδιάγραμμα (α) παριστάνει συνάρτηση, αφού κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του B. Παρατηρούμε ότι στο στοιχείο $4 \in B$ δεν αντιστοιχίζεται κάποιο στοιχείο του A, αλλά αυτό δεν είναι υποχρεωτικό να συμβαίνει.

(β) Το βελοδιάγραμμα (β) παριστάνει συνάρτηση. Δεν υπάρχει πρόβλημα που τα στοιχεία α και β του συνόλου A αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο B.

(γ) Το βελοδιάγραμμα (γ) δεν παριστάνει συνάρτηση, αφού το στοιχείο $\delta \in A$ δεν αντιστοιχίζεται σε κανένα στοιχείο του συνόλου B.

(δ) Το βελοδιάγραμμα (δ) δεν παριστάνει συνάρτηση, αφού το στοιχείο $\gamma \in A$ αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του συνόλου B.

ΘΕΩΡΙΑ 2

Η συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ λέγεται **πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής**, όταν ισχύει: $A \subseteq \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$.

- Με το $A \subseteq \mathbb{R}$ δηλώνουμε ότι οι τιμές της μεταβλητής x είναι πραγματικοί αριθμοί, δηλαδή ότι $x \in \mathbb{R}$. Με το $B \subseteq \mathbb{R}$ δηλώνουμε ότι οι τιμές $f(x)$ είναι πραγματικοί αριθμοί, δηλαδή ότι $f(x) \in \mathbb{R}$.
 - Όταν μια συνάρτηση δίνεται μόνο με τον τύπο της $f(x)$, τότε το πεδίο ορισμού A της f είναι το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο το $f(x)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού, δηλαδή: $A = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$.
- Το σύνολο B είναι ολόκληρο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Πίνακας με πεδία ορισμού

Συνάρτηση	Περιορισμός
$f(x) = \frac{B(x)}{A(x)}$	$A(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt[n]{A(x)}$	$A(x) \geq 0$
$f(x) = \frac{B(x)}{\sqrt[n]{A(x)}}$	$A(x) > 0$
$f(x) = \frac{K(x)}{A(x)} + \frac{\Lambda(x)}{B(x)}$	$A(x) \neq 0$ και $B(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt[n]{A(x)} + \sqrt[n]{B(x)}$	$A(x) \geq 0$ και $B(x) \geq 0$
$f(x) = \sqrt[n]{A(x)} + \frac{\Gamma(x)}{B(x)}$	$A(x) \geq 0$ και $B(x) \neq 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x - 2$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(β) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(-5)$ και $f(x^2)$

(γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί 2 και -6 ανήκουν στο σύνολο τιμών της f .

ΛΥΣΗ

(α) Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, άρα το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$.

(β) Έχουμε: $f(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 - 2 = -2$, $f(-5) = (-5)^2 + 3 \cdot (-5) - 2 = 25 - 15 - 2 = 8$ και

$$f(x^2) = (x^2)^2 + 3x^2 - 2 = x^4 + 3x^2 - 2$$

(γ) Για να ανήκει ο αριθμός 2 στο $f(A)$, αρκεί να υπάρχει $x \in \mathbb{R}$, ώστε:

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow f(x) = x^2 + 3x - 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -4. \text{ Άρα το } 2$$

ανήκει στο σύνολο τιμών της f . Ομοίως, για να ανήκει ο αριθμός -6 στο $f(A)$, αρκεί να υπάρχει $x \in \mathbb{R}$, ώστε: $f(x) = -6 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 2 = -6 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 4 = 0$ (1)

Όμως το τριώνυμο $x^2 + 3x + 4$ έχει $\Delta = -7 < 0$, άρα η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$. Επομένως το -6 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 (Πεδίο Ορισμού ρητής συνάρτησης)

Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$(α) f(x) = \frac{3}{x} \quad (β) f(x) = \frac{x-5}{x^2+2x-3} \quad (γ) f(x) = \frac{x+1}{|2x-1|-5} \quad (δ) f(x) = \frac{3}{x^2-x+2}.$$

ΛΥΣΗ

(α) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{3}{x}$ έχει νόημα όταν $x \neq 0$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

(β) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-5}{x^2+2x-3}$ έχει νόημα όταν $x^2+2x-3 \neq 0$. Άρα πρέπει $x \neq 1$ ή $x \neq -3$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{1, -3\}$.

(γ) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{|2x-1|-5}$ έχει νόημα όταν $|2x-1|-5 \neq 0 \Leftrightarrow |2x-1| \neq 5$.
 $\Leftrightarrow 2x-1 \neq 5$ και $2x-1 \neq -5 \Leftrightarrow x \neq 3$ και $x \neq -2$. Άρα πρέπει $x \neq 3$ ή $x \neq -2$.
 Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{3, -2\}$.

(δ) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{3}{x^2-x+2}$ έχει νόημα όταν $x^2-x+2 \neq 0$. Όμως το
 τριώνυμο x^2-x+2 έχει $\Delta = -7 < 0$. Άρα $D_f = \mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 (Πεδίο Ορισμού άρρητης συνάρτησης)

Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \sqrt{2x-6} + x - 1$ (β) $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}$ (γ) $f(x) = \sqrt{|x-2|-5}$

(δ) $f(x) = \sqrt{x^2-3x-10}$.

ΛΥΣΗ

(α) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2x-6} + x - 1$ έχει νόημα όταν
 $2x-6 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 3$. Άρα $D_f = [3, +\infty)$.

(β) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}$ έχει νόημα όταν $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ και
 $5-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$. Άρα $D_f = [-3, 5]$.

(γ) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{|x-2|-5}$ έχει νόημα όταν $|x-2|-5 \geq 0 \Leftrightarrow |x-2| \geq 5$
 $\Leftrightarrow x-2 \leq -5$ ή $x-2 \geq 5 \Leftrightarrow x \leq -3$ ή $x \geq 7$. Άρα $D_f = (-\infty, -3] \cup [7, +\infty)$.

(δ) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2-3x-10}$ έχει νόημα όταν $x^2-3x-10 \geq 0$.

Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2-3x-10$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Άρα έχουμε: $x \leq -2$ ή $x \geq 5$.

Άρα $D_f = (-\infty, -2] \cup [5, +\infty)$.

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$	
$x^2-3x-10$	+	0	-	0	+

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 (Πεδίο Ορισμού συνάρτησης με ρίζα σε παρονομαστή)

Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{12-3x}}$ (β) $f(x) = \frac{1+\sqrt[3]{x^2+x-2}}{\sqrt{-x^2-2x+8}}$.

ΛΥΣΗ

(α) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{12-3x}}$ έχει νόημα όταν

$12-3x > 0 \Leftrightarrow -3x \geq -12 \Leftrightarrow x < 4$. Άρα $D_f = (-\infty, 4)$.

(β) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1+\sqrt[3]{x^2+x-2}}{\sqrt{-x^2-2x+8}}$ έχει νόημα όταν:

$x^2+x-2 \geq 0$ και $-x^2-2x+8 > 0$.

Λύνουμε κάθε ανίσωση ξεχωριστά:

Για το τριώνυμο $-x^2-2x+8$ έχουμε το παρακάτω πίνακα προσήμων.

Επομένως $-x^2-2x+8 > 0 \Leftrightarrow x \in (-4, 2)$

x	$-\infty$	-4		2		$+\infty$
$-x^2-2x+8$	-	0	+	0	-	

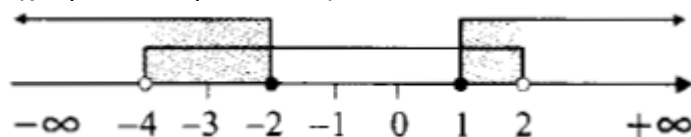
Για το τριώνυμο $x^2 + x - 2$ έχουμε το παρακάτω πίνακα προσήμων.

Επομένως $x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$

Παριστάνοντας τις λύσεις των δύο ανισώσεων

Έχουμε τον παρακάτω άξονα:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
x^2+x-2	+	0	-	0	+



Άρα $D_f = (-4, -2] \cup [1, 2)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

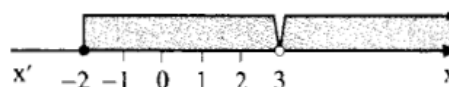
Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = \sqrt{x+2} - \frac{1}{x-3}$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+2} - \frac{1}{x-3}$ έχει νόημα όταν:

$x+2 \geq 0$ και $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$ και $x \neq 3$.

Άρα $D_f = [-2, 3) \cup (3, +\infty)$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 4}$.

ΛΥΣΗ

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

(γ) Να βρείτε τις τιμές $f(-3)$, $f(0)$ και $f(2)$.

(δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.

ΛΥΣΗ

(α) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 4}$ έχει νόημα όταν: $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$.

Άρα $D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$

(β) Για $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$, έχουμε:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 4} = \frac{x^2(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2}{x+2}.$$

(γ) Το $f(-3) = \frac{(-3)^2}{-3+2} = \frac{9}{-1} = -9$, $f(0) = \frac{0^2}{0+2} = \frac{0}{2} = 0$,

Το 2 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, άρα το $f(2)$ δεν έχει νόημα.

(δ) Έχουμε: $f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+2} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -1$.

Όμως η λύση $x=2$ απορρίπτεται, διότι το δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x-2, & \text{αν } x \geq 1 \\ -x^2+2x+8, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(β) Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(1)$ και $f(4/3)$.

ΛΥΣΗ

(α) Ο τύπος $f(x) = 3x - 2$ ορίζεται για $x \geq 1$, δηλαδή έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A_1 = [1, +\infty)$. Ο τύπος $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ ορίζεται για $x < 1$, δηλαδή έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A_2 = (-\infty, 1)$. Άρα η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το σύνολο: $A = A_1 \cup A_2 = [1, +\infty) \cup (-\infty, 1) = \mathbb{R}$.

(β) Επειδή $-2 \in (-\infty, 1)$, άρα έχουμε: $f(-2) = -(-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 8 = -4 - 4 + 8 = 0$

Επειδή $1 \in [1, +\infty)$ και $\frac{4}{3} \in [1, +\infty)$, άρα έχουμε: $f(1) = 3 \cdot 1 - 2 = 1$ και

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = 3 \cdot \frac{4}{3} - 2 = 2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x - \beta, & \alpha \nu \ x \leq -1 \\ \beta x - 2, & \alpha \nu \ x > -1 \end{cases}$,

για την οποία ισχύει $f(1) = -1$ και $f(-2) = -7$.

(α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $K = \frac{f(-3)}{f(-1) + f(0) + f(3)}$.

ΛΥΣΗ

(α) Έχουμε $f(1) = \beta \cdot 1 - 2 = -1 \Leftrightarrow \beta - 2 = -1 \Leftrightarrow \beta = 1$ και

$$f(-2) = \alpha \cdot (-2) - \beta = -7 \Leftrightarrow -2\alpha - \beta = -7 \Leftrightarrow -2\alpha - 1 = -7 \Leftrightarrow -2\alpha = -6 \Leftrightarrow \alpha = 3.$$

(β) Για $\alpha = 3$ και $\beta = 1$ έχουμε: $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \alpha \nu \ x \leq -1 \\ x - 2, & \alpha \nu \ x > -1 \end{cases}$

$$f(-3) = 3 \cdot (-3) - 1 = -9 - 1 = -10, \quad f(-1) = 3 \cdot (-1) - 1 = -3 - 1 = -4$$

$$f(0) = 0 - 2 = -2, \quad f(3) = 3 - 2 = 1.$$

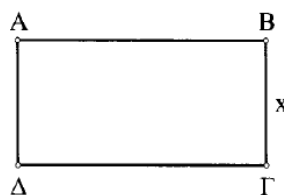
$$\text{Άρα } K = \frac{f(-3)}{f(-1) + f(0) + f(3)} = \frac{-10}{-4 - 2 + 1} = \frac{-10}{-5} = 2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 20m και πλάτος x m.

(α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x .

(β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 21 m^2 .



ΛΥΣΗ

(α) Από την περίμετρο έχουμε

$$AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 20 \Leftrightarrow 2AB + 2B\Gamma = 20 \Leftrightarrow 2AB + 2x = 20 \Leftrightarrow AB = 10 - x.$$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι: $E(x) = AB \cdot B\Gamma = (10 - x) \cdot x = 10x - x^2$.

Πρέπει $AB > 0$ και $B\Gamma > 0$, άρα πρέπει $10 - x > 0 \Leftrightarrow x < 10$ και $x > 0$. Τελικά $0 < x < 10$

Άρα η συνάρτηση $E(x) = 10x - x^2$, έχει πεδίο ορισμού το $D_f = (0, 10)$

(β) Λύνουμε την εξίσωση: $E(x) = 21 \Leftrightarrow 10x - x^2 = 21 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 21 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = 7 \text{ που είναι δεκτές.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha) f(x) = x^3 - 5x + 6 \quad (\beta) g(x) = \frac{3x+2}{12+4x} \quad (\gamma) h(x) = \sqrt{10-5x} \quad (\delta) f(x) = x + \frac{1}{x^2-4}$$

$$(\epsilon) g(x) = \frac{2x-1}{2x^2+8x} \quad (\sigma\tau) h(x) = \frac{x-5}{x^2+2x+3}.$$

Άσκηση 2

Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha) f(x) = \frac{x+3}{x^3+8} \quad (\beta) g(x) = \frac{5x-12}{x^3+x^2+x} \quad (\gamma) h(x) = \frac{x+2}{16x^6-x^2} \quad (\delta) f(x) = \frac{x-1}{|2x-1|-5}$$

$$(\epsilon) g(x) = \frac{x+1}{5-|1-3x|} \quad (\sigma\tau) h(x) = \frac{x-3}{|x-2|-|2x-1|} \quad (\zeta) h(x) = \frac{3-2x}{|3x-4|-|x|}.$$

Άσκηση 3

Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha) f(x) = \frac{x+21}{x^4-3x^2-4} \quad (\beta) g(x) = \frac{7-x}{x^2-7|x|+10} \quad (\gamma) h(x) = \frac{1}{x^2+4|x|+3}$$

$$(\delta) f(x) = \frac{x-3}{x^6+7x^3-8} \quad (\epsilon) g(x) = \sqrt{9-3x} \quad (\sigma\tau) h(x) = \sqrt{|x|-6} \quad (\zeta) h(x) = \sqrt{|x+3|-2}.$$

Άσκηση 4

Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha) f(x) = \frac{1}{\sqrt{14-2x}} \quad (\beta) g(x) = \frac{x-3}{\sqrt{|x|-5}} \quad (\gamma) h(x) = \frac{x^2}{\sqrt{|2x-3|-5}}$$

$$(\delta) f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{7-|2x+1|}} \quad (\epsilon) g(x) = \frac{1}{2x-6} + \sqrt{x+2} \quad (\sigma\tau) h(x) = \frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{4-x}}$$

$$(\zeta) h(x) = \frac{\sqrt{10-2|x|}}{x^2+3x} \quad (\eta) f(x) = \frac{\sqrt{7-|2x-3|}}{|x-1|-2} \quad (\theta) g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} + \sqrt{2-|x|}.$$

Άσκηση 5

Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha) f(x) = \sqrt{x^2-2x-3} \quad (\beta) g(x) = \sqrt{x^2-4x+5} \quad (\gamma) h(x) = \sqrt{x^2-6x+9}$$

$$(\delta) f(x) = \sqrt{-x^2+3x-4} \quad (\epsilon) g(x) = \sqrt{x^2-4x+3} + \sqrt{-x^2+4x+12}$$

$$(\sigma\tau) h(x) = \frac{\sqrt{-x^2-2x+3}-x}{\sqrt{x^2+2x+1}} \quad (\zeta) h(x) = \sqrt{x^2+2x-3} - \sqrt{-x^2+x+12}.$$

Άσκηση 6

Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha) f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-2} \quad (\beta) g(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{x-2} - \sqrt{4-x} \quad (\gamma) h(x) = \sqrt{|x|-2} + \sqrt{6-|x|}$$

$$(\delta) f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{|x^2-3x|+|x^2-9|} \quad (\epsilon) g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}} - \sqrt{5-|x|}$$

$$(\sigma\tau) f(x) = \frac{x-3}{x(|x|-2)(x^2-16)} \quad (\zeta) g(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{(|x|-1)(x^2+2x)(x^2-9)}.$$

.

Άσκηση 7

Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(α) f(x) = \sqrt{(x+1)(x^2+x-6)} \quad (β) g(x) = \sqrt{\frac{(x+1)(x^2-2x+3)}{x^2+x-6}} \quad (γ) h(x) = \frac{1}{|x|-x}$$

$$(δ) f(x) = \sqrt{|x|-x} \quad (ε) g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}} \quad (στ) h(x) = \sqrt{|x|+x}.$$

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x - 4$

(α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;

(β) Να βρείτε τις τιμές: (i) $f(-1)$ (ii) $f(0)$ (iii) $f(4)$ (iv) $f(5)$

(γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = -6$.

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2}$

(α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;

(β) Να βρείτε τις τιμές: (i) $f(6)$ (ii) $f(11)$ (iii) $f\left(\frac{41}{16}\right)$ (iv) $f(1)$.

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & \alpha\nu x \geq 0 \\ -x^2+7, & \alpha\nu x < 0 \end{cases}$

(α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;

(β) Να βρείτε τις τιμές: (i) $f(-3)$ (ii) $f\left(\frac{5}{2}\right)$ (iii) $f(-1)$

(iv) $f(0)$ (v) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ (vi) $f(-\sqrt{3})$

(γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 3$.

Άσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 - |x-1|$

(α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = f(3) - f(-1)$

(γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 2$

(δ) Να γράψετε τον τύπο της f χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής

(ε) Να λύσετε την ανίσωση: $f(f(4)) \cdot x^2 + f(-6) \cdot x + f(10) \geq 0$.

Άσκηση 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-16}{2x^2+8x}$

(α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f;

(β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

(γ) Να βρείτε τις τιμές: (i) $f(2)$ (ii) $f(4)$ (iii) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ (iv) $f(-4)$

(δ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq 0$.

Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + \alpha$ για την οποία ισχύει: $f(4) = 6$

(α) Να βρείτε τον αριθμό α .

(β) Να βρείτε τις τιμές: (i) $f(-3)$ (ii) $f(-1)$ (iii) $f(0)$ (iv) $f(2)$

(γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 12$

(δ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) < 6$.

Άσκηση 14

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+\alpha}{x^2+3x-4}$ για την οποία ισχύει: $f(-5) = -2$

(α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

(β) Να βρείτε τον αριθμό α .

(γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = \frac{3}{2}$

(δ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \leq 0$.

Άσκηση 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \lambda x + 3$ για την οποία ισχύει: $f(2) + f(5) = 7$.

(α) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί 8 και -2 ανήκουν στο σύνολο τιμών της f .

(γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) > 15$.

Άσκηση 16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - \alpha|x|}{|x| - 3}$ για την οποία ισχύει: $f(2) = 2$

(α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

(β) Να βρείτε τον αριθμό α .

(γ) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .

(δ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) < 5$.

Άσκηση 17

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 6|x| + \alpha}{x^2 - 9}$ για την οποία ισχύει: $f(5) = \frac{1}{4}$.

(α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

(β) Να βρείτε τον αριθμό α .

(γ) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .

(δ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = \frac{1}{2}$

(ε) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \leq \frac{1}{3}$.

Άσκηση 18

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + \alpha|x| + 1}{|x| - 1}$ για την οποία ισχύει: $f(-3) = 2$

(α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

(β) Να βρείτε τον αριθμό α .

(γ) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .

(δ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \leq f(-2)$.

Άσκηση 19

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x - \sqrt{x-2}$ για την οποία ισχύει: $f(11) - f(6) = 14$.

(α) Να βρείτε τον αριθμό α και το πεδίο ορισμού της f .

(β) Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{17}{f(2) - f(4)}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

Άσκηση 20

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + \lambda|x| - \lambda - 1}{|x| - 1}$ για την οποία ισχύει: $f(-4) = 7$

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τον αριθμό λ .
- (β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .
- (γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση $f(x-4)$.
- (δ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x-4) \leq 5$.

Άσκηση 21

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5x^2 - 4\alpha x - 3\beta$ για την οποία ισχύει: $f(\alpha) + f(\beta) = -9$

- (α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β .
- (β) Να λύσετε την εξίσωση: $\|2x - 3\| + f(0) + f(5) = 0$.

Άσκηση 22

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \lambda x - 8$ για την οποία ισχύει: $f(f(-1)) = 55$

- (α) Να βρείτε την τιμή του λ .
- (β) Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.
- (γ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης: $K = f(2011) \cdot f(0) \cdot f(-2012)$.
- (δ) Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{f(x+3)}{f(x-1)} \leq 1$.

Άσκηση 23

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \lambda x + \lambda - 5$

- (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (β) Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε για τις ρίζες x_1 και x_2 της εξίσωσης $f(x) = 0$ να ισχύει: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{2}$.
- (γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να λύσετε τις ανισώσεις:
(i) $f(x+2) + f(x) > -2$ (ii) $\frac{f(x-1)}{f(x)-2} \leq 1$.

Άσκηση 24

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 4x - 2, & \alpha \nu x \leq 1 \\ \frac{x + \alpha}{8}, & \alpha \nu x > 1 \end{cases}$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση: $x^2 + f(-1) \cdot x + f(75) = 0$ (1) έχει μοναδική ρίζα.

- (α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$ και να βρείτε τη ρίζα της εξίσωσης (1).
 - (β) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν: $P(A \cap B) = f(4)$, $f(P(A)) = 0$ και $f(P(A \cup B)) = 1$.
- Να βρείτε την πιθανότητα $P(B)$.