

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο

6.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΘΕΩΡΙΑ 1 (Καρτεσιανές Συντεταγμένες)

Ένα ζεύγος δύο κάθετων αξόνων $x'x$ και $y'y$, με κοινή αρχή ένα σημείο O , το ονομάζουμε **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων** και το συμβολίζουμε Oxy , ενώ το επίπεδο στο οποίο ορίστηκε αυτό το σύστημα το ονομάζουμε **καρτεσιανό επίπεδο**. Ο άξονας $x'x$ λέγεται **άξονας των τετμημένων**, ενώ ο κατακόρυφος λέγεται **άξονας των τεταγμένων**. Με την βοήθεια ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος (α, β) πραγματικών αριθμών σε ένα σημείο M του επιπέδου και αντιστρόφως. Οι αριθμοί α και β ονομάζονται **συντεταγμένες** του σημείου M . Ειδικότερα, το α ονομάζεται **τετμημένη** και το β **τεταγμένη** του σημείου M .

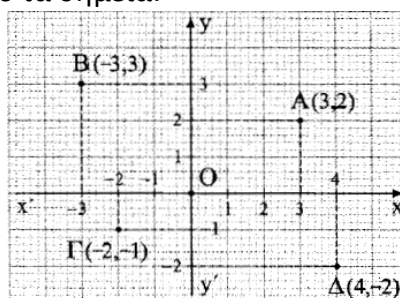
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να σημειώσετε σε ένα καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία:

$A(3,2)$, $B(-3,3)$, $\Gamma(-2,-1)$, $\Delta(4,-2)$

ΛΥΣΗ

Στο διπλανό καρτεσιανό σύστημα Συντεταγμένων Oxy οι μονάδες των αξόνων $x'x$ και $y'y$ έχουν το ίδιο μήκος. Στην περίπτωση αυτή το σύστημα Oxy λέγεται **ορθοκανονικό**.



ΘΕΩΡΙΑ 2

Ένα σημείο $M(\alpha,0)$ βρίσκεται στον άξονα $x'x$

Ένα σημείο $M(0,\beta)$ βρίσκεται στον άξονα $y'y$.

Ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ βρίσκεται:

- στον άξονα $x'x$, όταν $\beta=0$
- στον άξονα $y'y$, όταν $\alpha=0$

Η αρχή των αξόνων, που είναι κοινό σημείο και των δύο αξόνων, είναι το σημείο $O(0,0)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

(α) Δίνεται το σημείο $M(2\alpha-8, 9-3\alpha)$. Να βρείτε το σημείο M , όταν αυτό βρίσκεται: (i) στον άξονα $x'x$ (ii) στον άξονα $y'y$.

(β) Να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο $N(|\alpha|-2, \alpha^2-2\alpha-8)$ να ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων.

ΛΥΣΗ

(α) (i) Το $M(2\alpha-8, 9-3\alpha)$ βρίσκεται στον άξονα $x'x$, όταν η τεταγμένη του είναι ίση με μηδέν, δηλαδή: $9-3\alpha=0 \Leftrightarrow -3\alpha=-9 \Leftrightarrow \alpha=3$. Για $\alpha=3$ έχουμε: $2\alpha-8=2\cdot 3-8=-2$. Άρα το σημείο που θέλουμε είναι το $M(-2,0)$.

(ii) Το $M(2\alpha-8, 9-3\alpha)$ βρίσκεται στον άξονα $y'y$, όταν η τετμημένη του είναι ίση με μηδέν, δηλαδή: $2\alpha-8=0 \Leftrightarrow 2\alpha=8 \Leftrightarrow \alpha=4$. Για $\alpha=4$ έχουμε: $9-3\alpha=9-3\cdot 4=-3$. Άρα το σημείο που θέλουμε είναι το $M(0,-3)$.

(β) Το $N(|\alpha|-2, \alpha^2-2\alpha-8)$ ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων όταν η τετμημένη και η τεταγμένη του είναι ίσες με μηδέν, δηλαδή: $|\alpha|-2=0$ και $\alpha^2-2\alpha-8=0$.
 $\Leftrightarrow |\alpha|-2=0$ και $\alpha=-2$ ή $\alpha=4 \Leftrightarrow \alpha=2$ ή $\alpha=-2$ και $\alpha=-2$ ή $\alpha=4$.

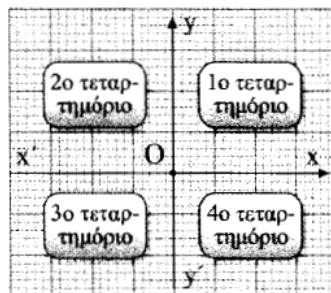
Τελικά $\alpha = -2$.

ΘΕΩΡΙΑ 3 (Τεταρτημόρια)

Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα τεταρτημόρια, το 1^ο, το 2^ο, το 3^ο, το 4^ο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Αν το $M(\alpha, \beta)$ είναι σημείο του:

- 1^ο τεταρτημορίου, τότε $\alpha > 0$ και $\beta > 0$,
- 2^ο τεταρτημορίου, τότε $\alpha < 0$ και $\beta > 0$,
- 3^ο τεταρτημορίου, τότε $\alpha < 0$ και $\beta < 0$,
- 4^ο τεταρτημορίου, τότε $\alpha > 0$ και $\beta < 0$,



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

(α) Να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο ανήκει καθένα από τα σημεία

$A(3, 5)$, $B(-4, 2)$, $\Gamma(-1, -6)$, $\Delta(5, -7)$.

(β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, το σημείο $M(|\alpha - 1| - 4, \alpha^2 - \alpha - 2)$

βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο.

ΛΥΣΗ

(α) Ισχύει $3 > 0$ και $5 > 0$, άρα το $A(3, 5)$ είναι σημείο του 1^ο τεταρτημορίου.

Ισχύει $-4 < 0$ και $2 > 0$, άρα το $B(-4, 2)$ είναι σημείο του 2^ο τεταρτημορίου.

Ισχύει $-1 < 0$ και $-6 < 0$, άρα το $\Gamma(-1, -6)$ είναι σημείο του 3^ο τεταρτημορίου.

Ισχύει $5 > 0$ και $-7 < 0$, άρα το $\Delta(5, -7)$ είναι σημείο του 4^ο τεταρτημορίου.

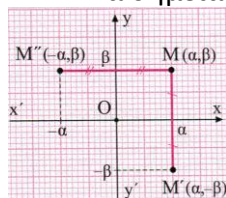
(β) Το σημείο $M(|\alpha - 1| - 4, \alpha^2 - \alpha - 2)$ βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο, όταν ισχύουν:

$$|\alpha - 1| - 4 < 0 \text{ και } \alpha^2 - \alpha - 2 > 0 \Leftrightarrow |\alpha - 1| < 4 \Leftrightarrow -4 < \alpha - 1 < 4 \Leftrightarrow -3 < \alpha < 5 \text{ και}$$

$\alpha < -1$ ή $\alpha > 2$. Συναληθεύοντας έχουμε: $\alpha \in (-3, -1) \cup (2, 5)$.

ΘΕΩΡΙΑ 4 (Σημεία Συμμετρικά ως προς τους άξονες)

- Τα σημεία $M(\alpha, \beta)$ και $M'(\alpha, -\beta)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.
- Τα σημεία $M(\alpha, \beta)$ και $M''(-\alpha, \beta)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

(α) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $M(-3, 2)$ ως προς τον άξονα $x'x$ και ως προς τον άξονα $y'y$.

(β) Δίνονται τα σημεία $A(2\alpha - 3, -5)$ και $B(7, 4 - \beta)$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε τα σημεία A και B να είναι συμμετρικά:

(i) ως προς τον άξονα $x'x$ (ii) ως προς τον άξονα $y'y$.

ΛΥΣΗ

(α) Το συμμετρικό του σημείου $M(-3, 2)$ ως προς τον άξονα $x'x$ είναι $M'(-3, -2)$.

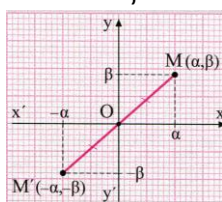
Το συμμετρικό του σημείου $M(-3, 2)$ ως προς τον άξονα $y'y$ είναι $M''(3, 2)$.

(β) (i) Τα σημεία $A(2\alpha - 3, -5)$ και $B(7, 4 - \beta)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ όταν: $2\alpha - 3 = 7$ και $-5 = -(4 - \beta) \Leftrightarrow 2\alpha = 10$ και $-5 = -4 + \beta \Leftrightarrow \alpha = 5$ και $\beta = -1$.

(ii) Τα σημεία $A(2\alpha - 3, -5)$ και $B(7, 4 - \beta)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$ όταν: $2\alpha - 3 = -7$ και $-5 = 4 - \beta \Leftrightarrow 2\alpha = -4$ και $\beta = 4 + 5 \Rightarrow \alpha = -2$ και $\beta = 9$.

ΘΕΩΡΙΑ 5 (Σημεία ως προς την αρχή των αξόνων)

- Τα σημεία $M(\alpha, \beta)$ και $M'(-\alpha, -\beta)$ είναι συμμετρικά ως προς την αρχή $O(0,0)$ των αξόνων.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

(α) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $M(-4, 7)$ ως προς την αρχή των αξόνων.

(β) Δίνονται τα σημεία $A(|\alpha - 1|, \alpha^2)$ και $B(-4, 2\alpha - 3)$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε τα σημεία A και B να είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων.

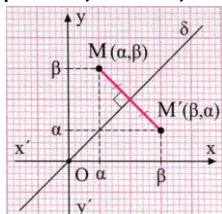
ΛΥΣΗ

(α) Το συμμετρικό του σημείου $M(-4, 7)$ ως προς την αρχή των αξόνων είναι $M'(4, -7)$.

(β) Τα σημεία $A(|\alpha - 1|, \alpha^2)$ και $B(-4, 2\alpha - 3)$ είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων, όταν: $|\alpha - 1| = 4$ και $\alpha^2 = -(2\alpha - 3) \Leftrightarrow \alpha - 1 = 4$ ή $\alpha - 1 = -4$ και $\alpha^2 - 2\alpha + 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 5$ ή $\alpha = -3$ και $\alpha = 1$ ή $\alpha = -3$. Τελικά $\alpha = -3$.

ΘΕΩΡΙΑ 6 (Συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της 1^{ης} και της 3^{ης} γωνίας των αξόνων)

Η γωνία $x\hat{O}y$ είναι η 1^η και η γωνία $x'\hat{O}y'$ είναι η 3^η γωνία των αξόνων. Τα σημεία $M(\alpha, \beta)$ και $M'(\beta, \alpha)$ είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο δ της 1^{ης} και της 3^{ης} γωνίας των αξόνων.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

(α) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $M(5, -2)$ ως προς τη διχοτόμο της 1^{ης} και της 3^{ης} γωνίας των αξόνων.

(β) Δίνονται τα σημεία $A(3\alpha - 1, 5)$ και $B(\alpha + 2\beta, 8)$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε τα σημεία A και B να είναι συμμετρικά ως προς της 1^{ης} και της 3^{ης} γωνίας των αξόνων.

ΛΥΣΗ

(α) Το συμμετρικό του σημείου $M(5, -2)$ ως προς την αρχή των αξόνων είναι $M'(-2, 5)$.

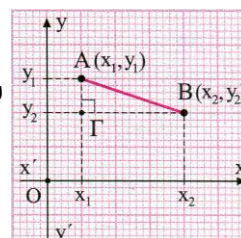
(β) Τα σημεία $A(3\alpha - 1, 5)$ και $B(\alpha + 2\beta, 8)$ είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της 1^{ης} και της 3^{ης} γωνίας των αξόνων, όταν:

$3\alpha - 1 = 8$ και $\alpha + 2\beta = 5 \Leftrightarrow 3\alpha = 9$ και $2\beta = 5 - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 3$ και $2\beta = 5 - 3 \Leftrightarrow \alpha = 3$ και $\beta = 1$.

ΘΕΩΡΙΑ 7 (Απόσταση σημείων)

Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου. Η απόσταση (AB) δίνεται από τον τύπο:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Δίνονται τα σημεία $A(-1, 2)$, $M(2, 1)$ και $M(-2, -1)$.

(α) Να βρείτε τις αποστάσεις (AB) , (BG) και (AG) .

(β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABG είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

ΛΥΣΗ

(α) Έχουμε:

- $(AB) = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$
- $(BG) = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$
- $(AG) = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$

(β) Ισχύει $(AB) = (AG) = \sqrt{10}$, άρα το τρίγωνο ABG είναι ισοσκελές. Επίσης έχουμε:

$(BG)^2 = \sqrt{20}^2 = 20$ και $(AB)^2 + (AG)^2 = \sqrt{10}^2 + \sqrt{10}^2 = 10 + 10 = 20$. Άρα από το αντίστροφο του πυθαγορείου θεωρήματος, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

ΘΕΩΡΙΑ 8 (Γραφική παράσταση Συνάρτησης)

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A \subseteq \mathbb{R}$. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy , το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, για κάθε $x \in A$, το λέμε γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Η γραφική παράσταση της f συμβολίζεται με C_f . Έστω ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , μόνο όταν ισχύει: $f(\alpha) = \beta$. Η εξίσωση $y = f(x)$ λέγεται και εξίσωση της γραφικής παράστασης της f .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 6$.

(α) Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(-1, 9)$ και $B(4, 10)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(β) Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο $\Gamma(\alpha - 1, 2\alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

ΛΥΣΗ

(α) Έχουμε:

- $f(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 6 = 1 + 2 + 6 = 9$

Άρα το σημείο $A(-1, 9)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f . Επίσης έχουμε:

- $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 6 = 16 - 8 + 6 = 14 \neq 10$

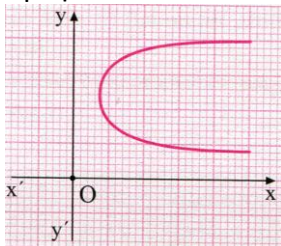
Άρα το σημείο $B(4, 10)$ δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(β) Το σημείο $\Gamma(\alpha - 1, 2\alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , μόνο όταν: $f(\alpha - 1) = 2\alpha \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 - 2(\alpha - 1) + 6 = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 - 2\alpha + 2 + 6 = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$.

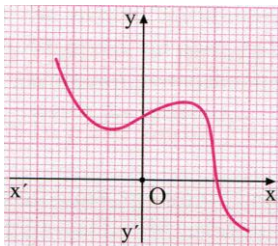
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω καμπύλες είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων:

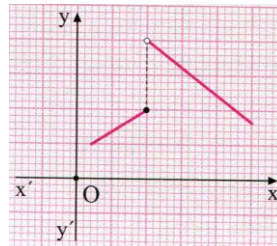
(α)

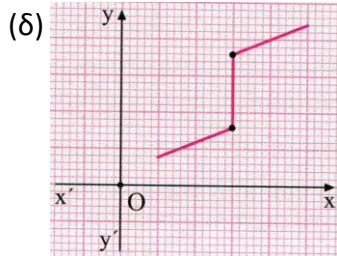


(β)



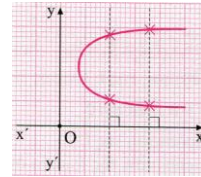
(γ)



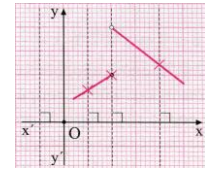
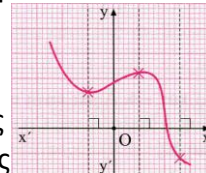


ΛΥΣΗ

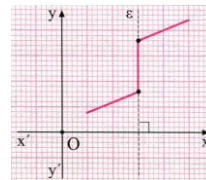
(α) Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα υπάρχουν κατακόρυφες ευθείες που τέμνουν την καμπύλη σε περισσότερα από ένα σημεία. Άρα η καμπύλη αυτή δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.



(β), (γ) Όπως φαίνεται στα διπλανά σχήματα οποιαδήποτε κατακόρυφη ευθεία τέμνει τις καμπύλες το πολύ σε ένα σημείο. Άρα καθεμία από τις καμπύλες αυτές είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.



(δ) Παρατηρούμε ότι η κατακόρυφη ευθεία ε τέμνει την καμπύλη σε περισσότερα από ένα σημεία. Άρα η καμπύλη αυτή δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{|x-3|-2} \cdot (x^2 + 2x - 8)$. Να βρείτε:

(α) Το πεδίο ορισμού της f .

(β) Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f :

(i) με τον άξονα $x'x$ (ii) με τον άξονα $y'y$.

ΛΥΣΗ

(α) Πρέπει: $|x-3|-2 \geq 0 \Leftrightarrow |x-3| \geq 2 \Leftrightarrow x-3 \leq -2$ ή $x-3 \geq -2 \Leftrightarrow x \leq 1$ ή $x \geq 5$.

Άρα το πεδίο ορισμού είναι: $A = (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$.

(β) (i) Λύνουμε την εξίσωση: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x-3|-2} \cdot (x^2 + 2x - 8) = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{|x-3|-2} = 0 \text{ ή } x^2 + 2x - 8 = 0.$$

- $\sqrt{|x-3|-2} = 0 \Leftrightarrow |x-3|-2 = 0 \Leftrightarrow |x-3| = 2 \Leftrightarrow x-3 = 2 \text{ ή } x-3 = -2$
 $\Leftrightarrow x = 5 \text{ ή } x = 1.$

- $x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -4.$

Η λύση $x = 2 \notin A$, οπότε απορρίπτεται.

Τελικά η εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς 5, 1 και -4. Αυτές είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$. Τα σημεία τομής είναι τα $K(5,0)$, $\Lambda(1,0)$ και $M(-4,0)$

(ii) Το $0 \in A = (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$, άρα έχουμε:

$$f(0) = \sqrt{|0-3|-2} \cdot (0^2 + 2 \cdot 0 - 8) = \sqrt{1} \cdot (-8) = -8. \text{ Το } -8 \text{ είναι η τεταγμένη του}$$

σημείου τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$.

Το σημείο τομής είναι το $N(0,-8)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3-2x| - 7$. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η

γραφική παράσταση της f βρίσκεται:

(α) πάνω από τον άξονα $x'x$ (ii) κάτω από τον άξονα $x'x$.

ΛΥΣΗ

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

(α) Η f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, όταν $f(x) > 0$. Άρα:

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\Leftrightarrow |3-2x|-7 > 0 \Leftrightarrow |3-2x| > 7 \Leftrightarrow 3-2x < -7 \text{ ή } 3-2x > 7 \\ &\Leftrightarrow -2x < -10 \text{ ή } -2x > 4 \Leftrightarrow x > 5 \text{ ή } x < -2. \text{ Τελικά } x \in (-\infty, -2) \cup (5, +\infty). \end{aligned}$$

(β) Η f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, όταν $f(x) < 0$. Άρα:

$$\begin{aligned} f(x) < 0 &\Leftrightarrow |3-2x|-7 < 0 \Leftrightarrow |3-2x| < 7 \Leftrightarrow -7 < 3-2x < 7 \Leftrightarrow -10 < -2x < 4 \\ &\Leftrightarrow -2 < x < 5. \text{ Τελικά } x \in (-2, 5). \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 8x - 12$ και $g(x) = -x^2 + 2x + 8$.

Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων f και g .

ΛΥΣΗ

Το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g είναι το $\mathbb{R}$. Λύνουμε την εξίσωση:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^2 + 8x - 12 = -x^2 + 2x + 8 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -5. \text{ Οι αριθμοί } 2 \text{ και } -5 \text{ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων. Για} \\ &\text{να βρούμε τις τεταγμένες, αντικαθιστούμε τους αριθμούς αυτούς στον τύπο μιας} \\ &\text{από τις δύο συναρτήσεις. Δηλαδή είναι: } f(2) = 2^2 + 8 \cdot 2 - 12 \text{ και} \\ &f(-5) = (-5)^2 + 8 \cdot (-5) - 12 = -27. \text{ Άρα τα κοινά σημεία των γραφικών} \\ &\text{παραστάσεων των συναρτήσεων } f \text{ και } g \text{ είναι τα } A(2, 8) \text{ και } B(-5, -27). \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3x - 10$ και $g(x) = -x^2 + 5x + 14$.

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

ΛΥΣΗ

Το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g είναι το $\mathbb{R}$. Λύνουμε την ανίσωση:

$$\begin{aligned} f(x) > g(x) &\Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 > -x^2 + 5x + 14 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 24 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 > 0 \\ &\Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > 6. \text{ Όπως προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα προσήμων με το} \\ &\text{τριώνυμο του τριωνύμου } x^2 - 4x - 12. \end{aligned}$$

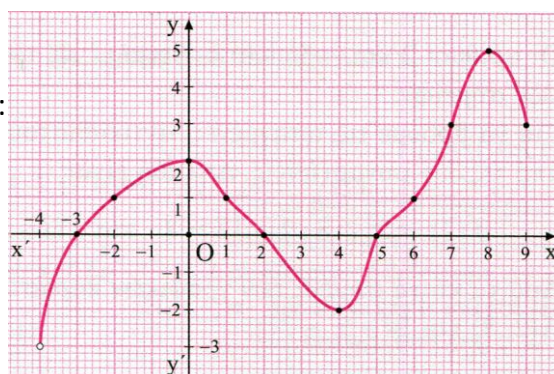
Άρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , όταν $x \in (-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$.

x	$-\infty$	-2	6	$+\infty$	
$x^2-4x-12$	+	0	-	0	+

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να βρείτε:

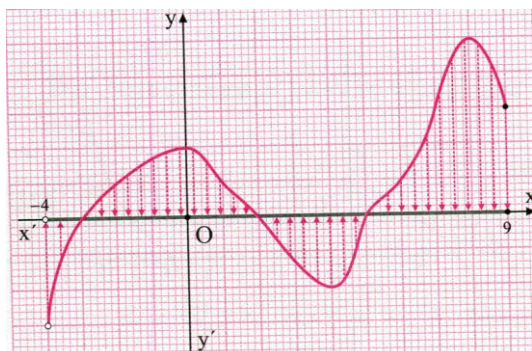
- (α) το πεδίο ορισμού της f ,
- (β) το σύνολο ορισμού της f ,
- (γ) τις τιμές $f(-2)$, $f(4)$ και $f(8)$,
- (δ) Για ποια x ισχύει $f(x) = 3$,
- (ε) Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες,
- (στ) Τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται:
 - (i) πάνω από τον άξονα $x'x$,
 - (ii) κάτω από τον άξονα $x'x$.



(ζ) Τα διαστήματα στα οποία ισχύει: $f(x) < 1$.

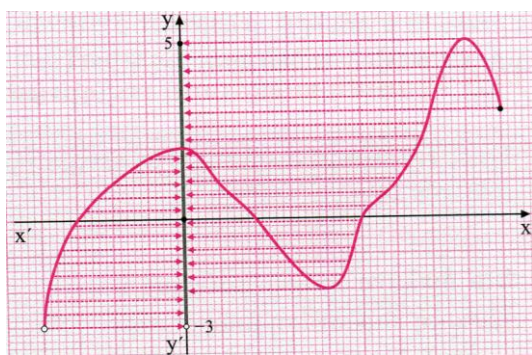
ΛΥΣΗ

(α) Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , <<προβάλλουμε>> τη γραφική της παράσταση στον άξονα $x'x$.



Όπως προκύπτει από το σχήμα, το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A = (-4, 9]$.

(β) Για να βρούμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f , <<προβάλλουμε>> τη γραφική της παράσταση στον άξονα $y'y$.



Όπως προκύπτει από το σχήμα, το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $B = [-3, 5]$.

(γ) Με βάση το σχήμα είναι:

$$f(-2) = -1, f(4) = -2 \text{ και } f(8) = 5.$$

(δ) Ισχύει το $f(x) = 3$ για τις τιμές:

$x=7$ ή $x=9$, δηλαδή είναι:

$$f(7) = 3 \text{ και } f(9) = 3.$$

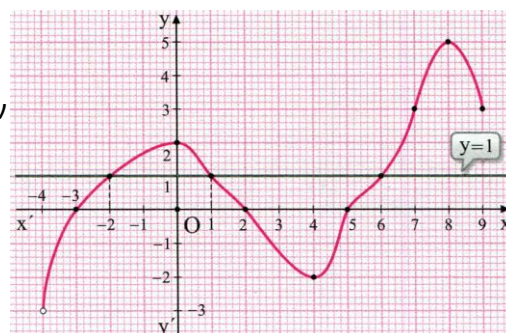
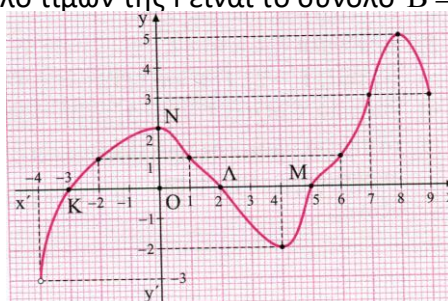
(ε) Η γραφική παράσταση f :

- Τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $K(-3, 0)$, $L(2, 0)$ και $M(5, 0)$,
- Τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $N(0, 2)$.

(στ) (i) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, όταν: $x \in (-3, 2) \cup (5, 9]$.

(ii) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, όταν: $x \in (-4, -3) \cup (2, 5)$.

(ζ) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 1$ είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f , των οποίων η τεταγμένη είναι μικρότερη του 1. Όπως προκύπτει από το διπλανό σχήμα, ισχύει $f(x) < 1$, όταν $x \in (-4, -2) \cup (1, 6)$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να σημειώσετε σε ένα καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία:

$A(-1,2)$, $B(2,-3)$, $\Gamma(-4,-2)$, $\Delta(3,2)$, $E(-4,0)$, $Z(0,2)$, $H(0,-3)$, $\Theta(4,0)$.

Άσκηση 2

Να σχεδιάσετε το τετράπλευρο με κορυφές τα παρακάτω σημεία:

$A(4,2)$, $B(-1,2)$, $\Gamma(-1,-2)$, $\Delta(4,-2)$.

(α) Τι είδους τετράπλευρο είναι το $AB\Gamma\Delta$;

(β) Ποια είναι η περίμετρος του $AB\Gamma\Delta$;

Άσκηση 3

Δίνεται το σημείο $M(2\alpha+6, \alpha+5)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του M , αν αυτό είναι σημείο: (α) του άξονα $x'x$, (β) του άξονα $y'y$.

Άσκηση 4

Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$:

(α) το σημείο του $A(\alpha+2, 3-\alpha)$ ανήκει στο 1^ο τεταρτημόριο,

(β) το σημείο του $B(3\alpha-9, 8+2\alpha)$ ανήκει στο 2^ο τεταρτημόριο,

(γ) το σημείο του $\Gamma(|\alpha|-3, 1-\alpha)$ ανήκει στο 3^ο τεταρτημόριο,

(δ) το σημείο του $\Delta(|2\alpha-1|-3, |\alpha-1|-5)$ ανήκει στο 4^ο τεταρτημόριο.

Άσκηση 5

Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε τα παρακάτω σημεία να ταυτίζονται με την αρχή των αξόνων: (α) $A(\alpha^2-9, \alpha^2+2\alpha-3)$, (β) $A(\alpha^2-4\alpha, \alpha^2-2\alpha-8)$

(γ) $\Gamma(|\alpha|-2, \alpha^2-5\alpha+6)$, (δ) $\Delta(|2\alpha-5|-3, |\alpha-3|-2)$.

Άσκηση 6

Δίνεται το σημείο: $M(\alpha^2+2\alpha-15, |\alpha-3|-2\alpha)$. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε το M να είναι σημείο: (α) του θετικού ημιάξονα Oy , (β) του αρνητικού ημιάξονα Ox' .

Άσκηση 7

(α) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $A(2,-3)$ ως προς:

(i) τον άξονα $x'x$, (ii) τον άξονα $y'y$, (iii) την αρχή των αξόνων, (iv) τη διχοτόμο της 1^{ης} και της 3^{ης} γωνίας των αξόνων.

(β) Ομοίως, για τα σημεία: $B(3,5)$, $\Gamma(-4,7)$, $\Delta(-2,-6)$, $E(4,0)$ και $Z(0,-5)$.

Άσκηση 8

Δίνονται τα σημεία $A(|x|-5, |1-2y|-7)$ και $B(2,4)$. Να βρείτε τα $x, y \in \mathbb{R}$, ώστε τα σημεία A και B να είναι συμμετρικά ως προς:

(α) τον άξονα $x'x$, (β) τον άξονα $y'y$, (γ) την αρχή των αξόνων, (δ) τη διχοτόμο της 1^{ης} και της 3^{ης} γωνίας των αξόνων.

Άσκηση 9

Δίνονται τα σημεία $A(\alpha^2+2\alpha, 2-2\alpha)$ και $B(\alpha+6, \alpha^2-\alpha)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.

(α) Να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$. (β) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς: (i) τον άξονα $x'x$, (ii) τον άξονα $y'y$ (iii) τη διχοτόμο της 1^{ης} και της 3^{ης} γωνίας των αξόνων.

Άσκηση 10

Δίνονται τα σημεία $A(|2\alpha - 5|, |\alpha - 2|)$ και $B(2, 3)$ είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της 1^{ης} και της 3^{ης} γωνίας των αξόνων.

(α) Να βρείτε τον αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$. (β) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς: (i) τον άξονα $x'x$, (ii) τον άξονα $y'y$ (iii) την αρχή των αξόνων.

Άσκηση 11

Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων:

(α) $A(2, 4)$ και $B(5, 8)$, (β) $A(-5, 1)$ και $B(7, 6)$, (γ) $A(4, 0)$ και $B(0, 5)$,

(δ) $A(-7, -3)$ και $B(-3, 0)$, (ε) $A(-6, 8)$ και $O(0, 0)$.

Άσκηση 12

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(1, 4)$, $B(5, 2)$ και $\Gamma(-2, -2)$ είναι ορθογώνιο.

Άσκηση 13

Δίνονται τα σημεία $A(2, -2)$, $B(-2, 2)$ και $\Gamma(-2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο.

Άσκηση 14

Δίνονται τα σημεία $A(-2, \alpha)$ και $B(9 - \alpha, 2\alpha + 3)$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(AB)=10$.

Άσκηση 15

Δίνονται τα σημεία $A(-5, 7)$ και $B(1, 5)$. Να βρείτε σημείο M του άξονα $x'x$, το οποίο ισαπέχει από τα A και B.

Άσκηση 16

Το σημείο $A(\alpha - 7, 3\alpha - 9)$ ανήκει στον άξονα $x'x$, και το σημείο $B(2\beta + 4, 4 - \beta)$ ανήκει στον άξονα $y'y$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

(β) Αν το σημείο $\Gamma(\gamma, \gamma - 5)$ ισαπέχει από τα A και B, να βρείτε την τιμή του $\gamma \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 17

(α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων O και ακτίνα $\rho=3$.

(β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$.

Άσκηση 18

Δίνεται το σημείο $A(5, 5)$ και έστω C ο κύκλος που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων O και ακτίνα $\rho=(OA)$.

(α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C.

(β) Να βρείτε την τιμή $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο $B(\alpha, \alpha - 6)$ να ανήκει στον κύκλο C.

Άσκηση 19

Δίνεται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt[4]{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{4}$ και $\beta = \sqrt{8} \cdot \sqrt{\sqrt{6} - 2} \cdot \sqrt{\sqrt{6} + 2}$

(α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

(β) Να σημειώσετε τα σημεία $A(\beta, \alpha + \beta)$, $B(\beta, \alpha)$, $\Gamma(\alpha - \beta, \alpha)$ και

$\Delta(\alpha - \beta, \alpha + \beta)$. Τι σχήμα είναι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ;

(γ) Το σημείο $M(x, y)$ βρίσκεται μέσα στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ.

(i) Ποιοι είναι οι περιορισμοί που ισχύουν για τα x και y ;

(ii) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $K = 2x - 3y$.

Άσκηση 20

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x - 2$. Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στη γραφική παράσταση της f : $A(2,4)$, $B(-1,-6)$, $\Gamma(0,-2)$, $\Delta(-4,-10)$.

Άσκηση 21

Δίνεται το σημείο $M(-3, 2)$. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να εξετάσετε αν το σημείο M ανήκει στη γραφική της παράσταση.

(α) $f(x) = \frac{x-7}{x-2}$, (β) $f(x) = \frac{5-3x}{x^2+2x-3}$, (γ) $f(x) = \sqrt{9-|2x+1|}$.

Άσκηση 22

Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 3x - 5$ που έχει τετμημένη: (α) 2, (β) 0, (γ) -1, (δ) $\frac{5}{3}$.

Άσκηση 23

Για καθεμία από τις επόμενες συναρτήσεις να βρείτε το πεδίο ορισμού της και τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες:

(α) $f(x) = \frac{x+6}{x-2}$, (β) $g(x) = \sqrt{4-x}$, (γ) $g(x) = \sqrt{|x|-3}$, (δ) $h(x) = \frac{x^2-3x-10}{|x-1|-3}$.

Άσκηση 24

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} |x|-3, & \alpha\nu x \leq 1 \\ x^2-4, & \alpha\nu x > 1 \end{cases}$, Να βρείτε:

(α) το πεδίο ορισμού της f ,

(β) Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

Άσκηση 25

Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τους άξονες: (α) $f(x) = |x-2| - |2x+1|$,

(β) $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$, (γ) $g(x) = x^2 - 6|x| + 5$, (δ) $\varphi(x) = x^5 + 27x^2$.

Άσκηση 26

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4} \cdot (|2x-1| - 3)$. Να βρείτε:

(α) Το πεδίο ορισμού, (β) Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

Άσκηση 27

Το σημείο $A(4,-3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της $f(x) = |x-1| + \alpha$. Να βρείτε:

(α) Τον αριθμό α , (β) Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

Άσκηση 28

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 6x + 4\alpha + 4$ διέρχεται από το σημείο $M(\alpha, 3)$. Να βρείτε:

(α) Τον αριθμό α , (β) Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

Άσκηση 29

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x^2 + 8x + 12|} + \alpha$ διέρχεται από το σημείο $M(1, 4)$. Να βρείτε:

(α) Τον αριθμό α , (β) Το πεδίο ορισμού της f .

Άσκηση 30

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |2x - 5| + \lambda$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 2. Να βρείτε:

(α) Τον αριθμό λ ,

(β) Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 31

Οι γραφικές παραστάσεις των επόμενων συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x-1} - 2$ και $g(x) = x^2 + \lambda x - 5$ τέμνουν τον άξονα $x'x$ στο ίδιο σημείο. Να βρείτε:

(α) Το πεδίο ορισμού της f , (β) Τον αριθμό λ ,

(γ) Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της g με τους άξονες.

Άσκηση 32

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x - 2| - 5$. Να βρείτε:

(α) Το πεδίο ορισμού της f , (β) Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες,

(γ) Τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται:

(i) πάνω από τον άξονα $x'x$, (ii) κάτω από τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 33

Σε καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις να βρείτε τα διαστήματα του x , στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(α) $f(x) = x^2 - 3x - 10$, (β) $f(x) = -3x^2 + 4x + 4$.

Άσκηση 34

Δίνεται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 - x + 2$ και $g(x) = -2x^2 + 5x - 4$. Να αποδείξετε:

(α) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$,

(β) Η γραφική παράσταση της g βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 35

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 5x + 6$ και $g(x) = -x^2 - 2x + 15$. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία:

(α) η C_f δεν βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$,

(β) η C_g δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$,

(γ) η C_f δεν βρίσκεται κάτω από τη C_g .

Άσκηση 36

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |2x - 7| + \alpha$ η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη 4.

(α) Να βρείτε τον αριθμό α ,

(β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται:

(i) πάνω από τον άξονα $x'x$, (ii) κάτω από τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 37

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 - \lambda x + 2$ και $g(x) = \mu x^2 + x + 8$. Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη 2, ενώ η C_g διέρχεται από το σημείο $K(-2, 2)$.

Να βρείτε: (α) τους αριθμούς λ και μ , (β) τα κοινά σημεία των C_f και C_g ,

(γ) Τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 38

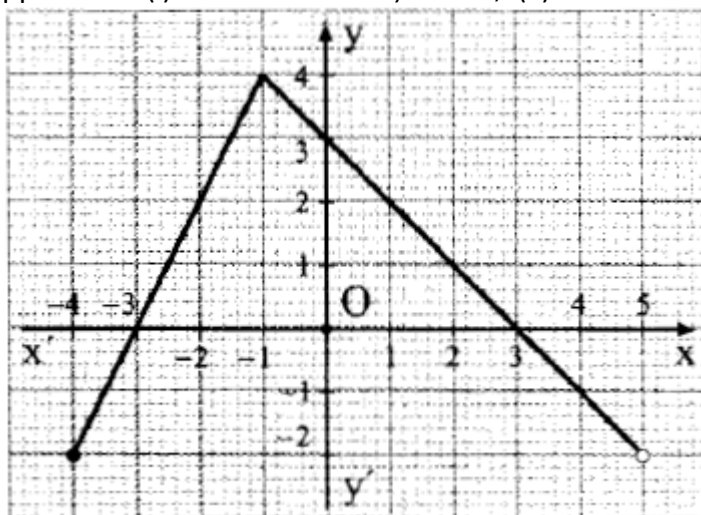
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

Να βρείτε: (α) Το πεδίο ορισμού της f , (β) Το σύνολο τιμών της f ,

(γ) τις τιμές $f(-1)$, $f(2)$ και $f(5)$, (δ) τα x για τα οποία ισχύει $f(x) = 2$,

(ε) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες (στ) τα διαστήματα στα οποία η C_f

βρίσκεται: (i) πάνω από τον άξονα $x'x$, (ii) κάτω από τον άξονα $x'x$.



Άσκηση 39

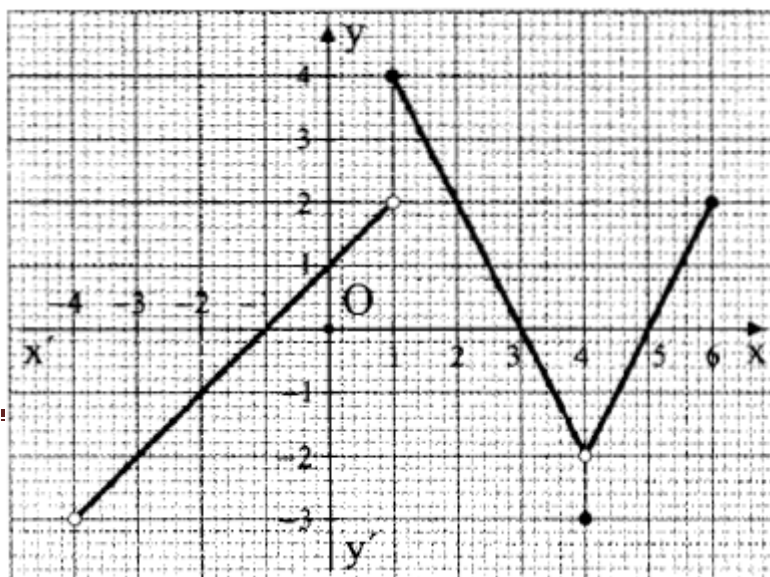
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

Να βρείτε: (α) Το πεδίο ορισμού της f , (β) Το σύνολο τιμών της f ,

(γ) τις τιμές $f(-2)$, $f(1)$ και $f(4)$, (δ) τα x για τα οποία ισχύει $f(x) = 2$,

(ε) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες (στ) τα διαστήματα στα οποία η C_f

βρίσκεται: (i) κάτω από τον άξονα $x'x$, (ii) πάνω από τον άξονα $x'x$, (ζ) τα διαστήματα στα οποία ισχύει: $f(x) \geq -2$.



Άσκηση 40

Δίνεται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 - 3x + \lambda$ και $g(x) = |2x + 5| + \mu$. Το σημείο $K(-1, 6)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(α) Να βρείτε τον αριθμό λ . (β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνουν τον άξονα $y'y$ στο ίδιο σημείο, να βρείτε τον αριθμό μ . (γ) Για τις παραπάνω τιμές των λ και μ , να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία: (i) η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, (ii) (i) η C_g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 41

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = \frac{x^2 + (\lambda - 4)|x| + 8}{x^2 + \lambda|x|}$ διέρχεται από το

σημείο $A(-1, -3)$.

(α) Να βρείτε τον αριθμό λ . (β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να απλοποιήσετε τον τύπο της. (γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < -\frac{1}{3}$.

Άσκηση 42

Το τριώνυμο: $f(x) = x^2 + (\lambda - 2)x - 3(\lambda + 1)$ είναι τέλειο τετράγωνο.

(α) Να βρείτε τον αριθμό λ . (β) Για $\lambda = -4$: (i) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \sqrt[4]{f(403)}$ (ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < f(f(2))$.

Άσκηση 43

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 + \lambda x + \lambda - 6$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2, 4)$.

(α) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$. (β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται και από το συμμετρικό σημείο του A ως προς την αρχή των αξόνων.

(γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ το σημείο $M(\alpha - 1, 2\alpha - 3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f . (δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq f(f(-1))$.

(ε) Θεωρούμε το σημείο $B(\mu + 5, \mu)$ και έστω Γ το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(B\Gamma) = 5$.