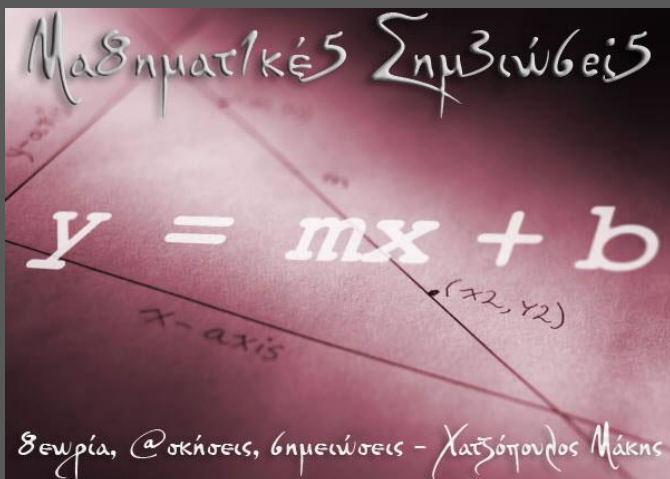




ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

lisari team

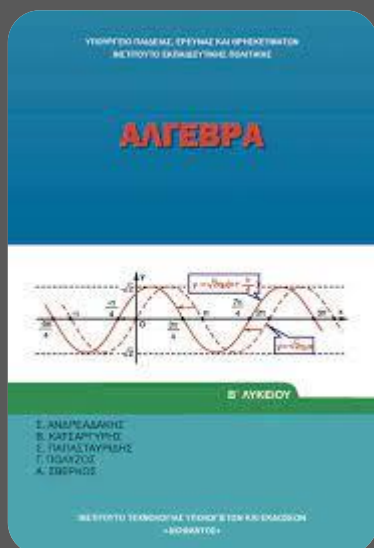
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2024

1η έκδοση

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ - ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ – ΕΠΑ.Λ

Μάιος 2024



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Μιχάλης Γιαννόπουλος

Οι εκφωνήσεις - απαντήσεις είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς των μελών της **lisari team** και κυρίως όσων αναφέρονται στο εξώφυλλο.

1η έκδοση: 14 – 5 – 2023 (συνεχής ανανέωση)

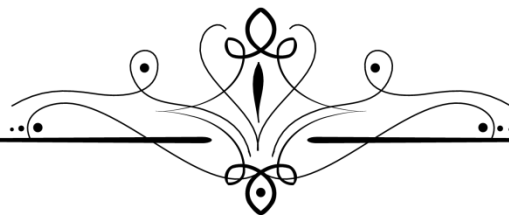


Το αρχείο διατίθεται **αποκλειστικά**

από το μαθηματικό ιστότοπο

lisari.blogspot.com





ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

A
B
Γ

ΓΥΜΝΑΣΙΟ



Διαγώνισμα Προσομοίωσης

Η **lisari team** θα προσφέρει σε όλους τους μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου διαγωνίσματα Προσομοίωσης σε όλα τα αντικείμενα των μαθηματικών.



Σχολικό Έτος **2023 - 24**

Επειδή κάθε έτος έχει τις δικές του ιδιαιτερότητες, προσφέρουμε ανανεωμένα διαγωνίσματα προσομοίωσης για κάθε μαθητή Γυμνασίου και Γενικού Λυκείου.

Θεματοδότες

Τα θέματα επιμελούνται μέλη της **lisari team** όπου θα αναφέρονται ρητώς στο εξώφυλλο κάθε έργου.



Συντονισμός

Συντονίζει την προσπάθεια το μέλος της **lisari team** Μάκης Χατζόπουλος (Πρότυπο ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής).

Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις επί των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

lisari^{team}

Μάιος 2024

1. Αντωνόπουλος Νίκος (3ο ΓΕΛ Άργους)
2. Αυγερινός Βασίλης (Φροντιστήριο "Διάταξη" - Ν. Σμύρνη)
3. Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο "Βελαώρας" - Λιβαδεά Βοιωτίας)
4. Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο "Ευθύνη" - Ρέθυμνο)
5. Γιαννόπουλος Μιχάλης (Θεσσαλονίκη - Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)
6. Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο "Λύση" - Άρτα)
7. Δούδης Δημήτρης (3ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)
8. Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια "Πουκαμισιάς" Γλυφάδας)
9. Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο "Ωθηση" - Μαρούσι)
10. Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο "Παπαπαναγιώτου – Κάκανος" - Σέρρες)
11. Κανάβης Χρήστος (6ο ΓΕΛ Αιγάλεω)
12. Κατζιώτη Χαρά (2ο Γυμνάσιο Πρέβεζας)
13. Κουλούρης Ανδρέας (3ο ΓΕΛ Γαλατσίου)
14. Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο "Στόχος" - Περιστέρι)
15. Κοπάδης Αθανάσιος (Φροντιστήριο 19+ στο Πολύγωνο και Ευρωπαϊκό Πρότυπο)
16. Κοσόγλου Ιορδάνης (ΓΕ.Λ Εξαπλατάνου)
17. Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο "Ρηγάκης" και Φροντιστήριο 20' – Κοζάνη)
18. Μαρούγκας Χρήστος (3ο ΓΕΛ Κηφισιάς)
19. Μπαδέμης Δημήτρης (Καθηγητής μαθηματικών στην Ιδιωτική Εκπαίδευση)
20. Νάννος Μιχάλης (1ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)
21. Νικολόπουλος Αθανάσιος (2ο ΓΕΛ, Ζάκυνθος)
22. Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο "Εις τη ν" - Αγγρίνιο)
23. Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός "Ρόμβος")
24. Ποδηματάς Θωμάς (Σπουδαστήριο Μαθηματικών Θωμάς και Ρόζα Ποδηματά - Βόλος)
25. Πολύζος Γιώργος (τ. πάρεδρος στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, συγγραφέας)
26. Ράπτης Γιώργος (6ο ΓΕΛ Βόλου)
27. Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο "Μπαχαράκης" - Θεσσαλονίκη)
28. Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – 1ο Λύκειο Χαλκίδας)
29. Σπλήνης Νίκος (Φροντιστής)
30. Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)
31. Σταυρόπουλος Σταύρος (Πρόεδρος Ε.Μ.Ε Κορινθίας - ΓΕΛ Ζευγολατιού)
32. Τάσος Νίκος (Σύμβουλος Ι.Ε.Π.)
33. Τσακαλάκος Τάκης (Συνταξιούχος αλλά ενεργός μαθηματικός)
34. Τσιριόπουλος Μπάμπης (Συνταξιούχος , συγγραφέας)
35. Χαραλάμπους Σταύρος (Μουσικό Σχολείο Λαμίας)
36. Χασάπης Γεώργιος (Ιδιωτικός υπάλληλος)
37. Χατζόπουλος Μάκης (Πρότυπο ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής)

ΤΑΞΗ:	Β΄ ΕΠΑ.Λ
ΜΑΘΗΜΑ:	ΑΛΓΕΒΡΑ / Γενικής Παιδείας

Ημερομηνία: Σάββατο 18 Μαΐου 2024
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α.** Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.
- β.** Για κάθε γωνία ω ισχύει $-1 \leq \eta\omega \leq 1$.
- γ.** Ο αριθμός 4 είναι πιθανή ρίζα της εξίσωσης $x^{2023} - 3x^{2024} - 5 = 0$
- δ.** Αν a θετικός αριθμός και $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τότε $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1+x_2}$.
- ε.** Αν $0 < a \neq 1$, $\theta > 0$ και $k \in \mathbb{R}$, τότε $\log_a \theta^k = k \log_a \theta$.

Μονάδες 10

- A2.** Να αποδείξετε ότι $\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$, αν $0 < a \neq 1$ και $\theta_1, \theta_2 > 0$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x$.

- B1.** Να βρείτε την περίοδο T της f .

Μονάδες 5

- B2.** Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .

Μονάδες 10

- B3.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο $[0, 2\pi]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x + 1$, $x > 0$ και $g(x) = 2^{x-1}$.

- Γ1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμό της συνάρτησης f και στη συνέχεια να υπολογίσετε τις τιμές $f(1)$ και $f(e)$.

Μονάδες 8



Γ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμό της συνάρτησης g και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = \frac{g(-2023)}{g(-2024)}$.

Μονάδες 9

Γ3. Να βρείτε με ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $F(x) = \ln x$ θα προκύψει η γραφική παράσταση της f και με ποια μετατόπιση της $G(x) = 2^x$ θα προκύψει η γραφική παράσταση της g .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται το πολώνυμο $P(x) = x^3 - 3x + \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει ρίζα το 1.

Δ1. Να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες 5

Δ2. Για $\alpha = 2$:

i. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x-1)$ και να αποδείξετε ότι $P(x) = (x-1)(x^2 + x - 2)$.

Μονάδες 10

ii. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

Μονάδες 10

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ****ΘΕΜΑ Α**

A1. α. Σωστό β. Σωστό γ. Λάθος δ. Λάθος ε. Σωστό

A2. Έστω ότι είναι

$$\log_a \theta_1 = x_1 \text{ και } \log_a \theta_2 = x_2 \quad (1) .$$

Τότε έχουμε

$$a^{x_1} = \theta_1 \text{ και } a^{x_2} = \theta_2 .$$

Οπότε

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = \theta_1 \cdot \theta_2 \Leftrightarrow a^{x_1+x_2} = \theta_1 \cdot \theta_2 .$$

Από τον ορισμό του λογάριθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την

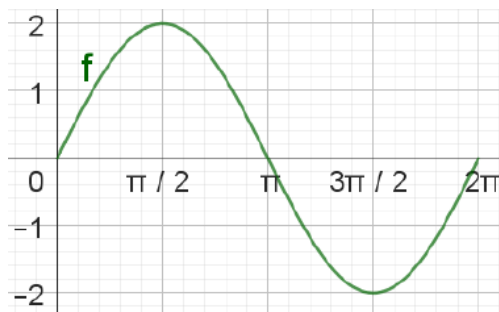
$$\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = x_1 + x_2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2 .$$

ΘΕΜΑ Β

B1. Η περίοδος T της συνάρτησης $f(x) = 2\eta\mu x = 2\eta\mu(1 \cdot x)$ είναι $T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$.

B2. Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f είναι 2 και η ελάχιστη -2 .

B3.

**ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Για τη συνάρτηση f πρέπει $x > 0$. Επομένως, το πεδίο ορισμού της f είναι $A = (0, +\infty)$. Έχουμε

- $f(1) = \ln 1 + 1 = 0 + 1 = 1$
- $f(e) = \ln e + 1 = 1 + 1 = 2$.

Γ2. Για τη συνάρτηση g δεν έχουμε κάποιο περιορισμό, επομένως $A = \mathbb{R}$. Έχουμε

$$\Pi = \frac{g(-2023)}{g(-2024)} = \frac{2^{-2023-1}}{2^{-2024-1}} = \frac{2^{-2024}}{2^{-2025}} = 2^{-2024-(-2025)} = 2^{-2024+2025} = 2^1 = 2 .$$

Γ3. Έχουμε

$$f(x) = \ln x + 1 = F(x) + 1.$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της f προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της F κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

Επίσης,

$$g(x) = 2^{x-1} = G(x-1).$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της G κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x + \alpha$ έχει ρίζα το 1 αν και μόνο αν

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow 1^3 - 3 \cdot 1 + \alpha = 0 \Leftrightarrow 1 - 3 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3 - 1 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

Δ2. Για $\alpha = 2$ το πολυώνυμο $P(x)$ γίνεται $P(x) = x^3 - 3x + 2$.

i. Για τη διαίρεση $(x^3 - 3x + 2):(x-1)$ θα εφαρμόσουμε το σχήμα Horner.

1	0	-3	2	1
↓	1	1	-2	
1	1	-2	0	

Επομένως, η διαίρεση $(x^3 - 3x + 2):(x-1)$ έχει πηλίκο $\pi(x) = x^2 + x - 2$ και υπόλοιπο $v = 0$ (τέλεια διαίρεση).

Σύμφωνα με την ταυτότητα της διαίρεσης $\Delta(x) = \pi(x) \cdot \delta(x) + v(x)$, έχουμε

$$P(x) = (x-1)(x^2 + x - 2).$$

ii. Έχουμε

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) < 0.$$

- $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $x^2 + x - 2 = 0$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} x_1 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{matrix}$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+
$x^2 + x - 2$	+	0	-	0
$P(x)$	-	0	+	0

Άρα

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2).$$