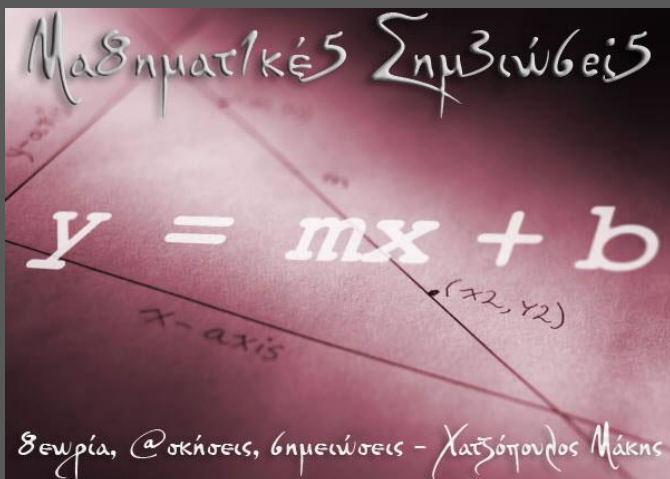




ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

lisari team

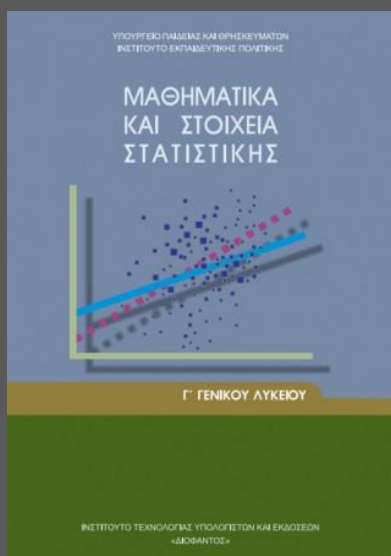
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2024

1η έκδοση

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – ΕΠΑ.Λ

Μάιος 2024



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Μιχάλης Γιαννόπουλος

Οι εκφωνήσεις - απαντήσεις είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς των μελών της **lisari team** και κυρίως όσων αναφέρονται στο εξώφυλλο.

1η έκδοση: 14 – 5 – 2023 (συνεχής ανανέωση)

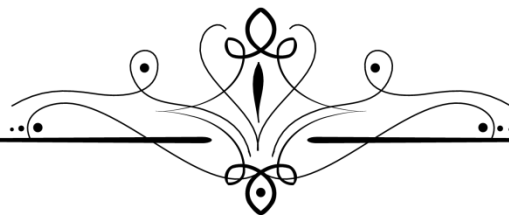


Το αρχείο διατίθεται **αποκλειστικά**

από το μαθηματικό ιστότοπο

lisari.blogspot.com





ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

A
B
Γ

ΓΥΜΝΑΣΙΟ



Διαγώνισμα Προσομοίωσης

Η **lisari team** θα προσφέρει σε όλους τους μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου διαγωνίσματα Προσομοίωσης σε όλα τα αντικείμενα των μαθηματικών.



Σχολικό Έτος 2023 - 24

Επειδή κάθε έτος έχει τις δικές του ιδιαιτερότητες, προσφέρουμε ανανεωμένα διαγωνίσματα προσομοίωσης για κάθε μαθητή Γυμνασίου και Γενικού Λυκείου.

Θεματοδότες

Τα θέματα επιμελούνται μέλη της **lisari team** όπου θα αναφέρονται ρητώς στο εξώφυλλο κάθε έργου.



Συντονισμός

Συντονίζει την προσπάθεια το μέλος της **lisari team** Μάκης Χατζόπουλος (Πρότυπο ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής).

Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις επί των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

lisari^{team}

Μάιος 2024

1. Αντωνόπουλος Νίκος (3ο ΓΕΛ Άργους)
2. Αυγερινός Βασίλης (Φροντιστήριο "Διάταξη" - Ν. Σμύρνη)
3. Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο "Βελαώρας" - Λιβαδεά Βοιωτίας)
4. Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο "Ευθύνη" - Ρέθυμνο)
5. Γιαννόπουλος Μιχάλης (Θεσσαλονίκη - Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)
6. Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο "Λύση" - Άρτα)
7. Δούδης Δημήτρης (3ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)
8. Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια "Πουκαμισιά" Γλυφάδας)
9. Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο "Ωθηση" - Μαρούσι)
10. Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο "Παπαπαναγιώτου – Κάκανος" - Σέρρες)
11. Κανάβης Χρήστος (6ο ΓΕΛ Αιγάλεω)
12. Κατζιώτη Χαρά (2ο Γυμνάσιο Πρέβεζας)
13. Κουλούρης Ανδρέας (3ο ΓΕΛ Γαλατσίου)
14. Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο "Στόχος" - Περιστέρι)
15. Κοπάδης Αθανάσιος (Φροντιστήριο 19+ στο Πολύγωνο και Ευρωπαϊκό Πρότυπο)
16. Κοσόγλου Ιορδάνης (ΓΕ.Λ Εξαπλατάνου)
17. Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο "Ρηγάκης" και Φροντιστήριο 20' – Κοζάνη)
18. Μαρούγκας Χρήστος (3ο ΓΕΛ Κηφισιάς)
19. Μπαδέμης Δημήτρης (Καθηγητής μαθηματικών στην Ιδιωτική Εκπαίδευση)
20. Νάννος Μιχάλης (1ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)
21. Νικολόπουλος Αθανάσιος (2ο ΓΕΛ, Ζάκυνθος)
22. Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο "Εις τη ν" - Αγγρίνιο)
23. Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός "Ρόμβος")
24. Ποδηματάς Θωμάς (Σπουδαστήριο Μαθηματικών Θωμάς και Ρόζα Ποδηματά - Βόλος)
25. Πολύζος Γιώργος (τ. πάρεδρος στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, συγγραφέας)
26. Ράπτης Γιώργος (6ο ΓΕΛ Βόλου)
27. Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο "Μπαχαράκης" - Θεσσαλονίκη)
28. Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – 1ο Λύκειο Χαλκίδας)
29. Σπλήνης Νίκος (Φροντιστής)
30. Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)
31. Σταυρόπουλος Σταύρος (Πρόεδρος Ε.Μ.Ε Κορινθίας - ΓΕΛ Ζευγολατιού)
32. Τάσος Νίκος (Σύμβουλος Ι.Ε.Π.)
33. Τσακαλάκος Τάκης (Συνταξιούχος αλλά ενεργός μαθηματικός)
34. Τσιριόπουλος Μπάμπης (Συνταξιούχος , συγγραφέας)
35. Χαραλάμπους Σταύρος (Μουσικό Σχολείο Λαμίας)
36. Χασάπης Γεώργιος (Ιδιωτικός υπάλληλος)
37. Χατζόπουλος Μάκης (Πρότυπο ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής)

ΤΑΞΗ:	Γ΄ ΕΠΑ.Λ
ΜΑΘΗΜΑ:	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / Γενικής Παιδείας

Ημερομηνία: Σάββατο 18 Μαΐου 2024

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

β. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

γ. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι: $(x^2)' = 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών ποσοτικών μεταβλητών.

ε. Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θεωρείται ομοιογενές, όταν ο συντελεστής μεταβολής είναι μεγαλύτερος του 10%.

Μονάδες 10

A2. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται σε ευρώ, το ποσό που ξόδεψαν 20 μαθητές στο κυλικείο του σχολείου τους, στη διάρκεια μιας μέρας.

Ποσό σε ευρώ x_i	v_i	N_i	f_i	$f_i \%$
0	1			
1	9			
2	8			
3	2			
Σύνολο	20			



B1. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τα κενά.

Μονάδες 14

B2. Πόσοι μαθητές ξόδεψαν τη συγκεκριμένη ημέρα το πολύ 2 ευρώ;

Μονάδες 6

B3. Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που ξόδεψαν τη συγκεκριμένη ημέρα τουλάχιστον 2 ευρώ;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 2

Γ2. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{f(x)}$.

Μονάδες 8

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(-2, f(-2))$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 20 \cdot s \cdot x^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot x + 3$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $\bar{x}$, s η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα ενός δείγματος n παρατηρήσεων.

Δ1. Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f .

Μονάδες 4

Αν ισχύει ότι $f'(1) = 0$, τότε:

Δ2. Να δείξετε ότι το δείγμα των n παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 10

Δ3. Αν επιπλέον ισχύει ότι $s = 1$, τότε να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

Δ4. Για $s = 1$ και $\bar{x} = 20$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ****ΘΕΜΑ Α**

A1. α. Σωστό β. Λάθος γ. Σωστό δ. Λάθος ε. Λάθος

A2. Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$.

Έχουμε

$$F(x+h) - F(x) = (f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x)) = (f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x))$$

και για $h \neq 0$,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Επομένως,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

Άρα $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

ΘΕΜΑ Β

B1. Εφαρμόζοντας τους τύπους

- $N_i = v_1 + v_2 + \dots + v_i$
- $f_i = \frac{v_i}{v}$ και
- $f_i \% = 100f_i$

έχουμε

Ποσό σε ευρώ x_i	v_i	N_i	f_i	$f_i \%$
0	1	1	0,05	5
1	9	10	0,45	45
2	8	18	0,40	40
3	2	20	0,10	10
Σύνολο	20		1	100

B2. Το πολύ 2 ευρώ ξόδεψαν $N_3 = 18$ μαθητές.

B3. Το ποσοστό των μαθητών που ξόδεψαν τη συγκεκριμένη ημέρα τουλάχιστον 2 ευρώ είναι $f_3 \% + f_4 \% = 40 + 10 = 50$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Πρέπει $x \neq 0$. Άρα $A = \mathbb{R} - \{0\}$.



Γ2. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\frac{x^2 - 4}{x}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x^2 - 3x + 2)}{x^2 - 4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-1)}{x+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Γ3. Έχουμε

$$f(-2) = \frac{(-2)^2 - 4}{-2} = \frac{0}{-2} = 0.$$

Επομένως, $A(-2, 0)$. Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ έχουμε:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 4}{x} \right)' = \frac{(x^2 - 4)' \cdot x - (x^2 - 4) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 4)}{x^2} =$$

$$\frac{2x^2 - x^2 + 4}{x^2} = \frac{x^2 + 4}{x^2}.$$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(-2, 0)$ είναι της μορφής

$$\varepsilon: y = \lambda x + \beta$$

$$\text{όπου } \lambda = f'(-2) = \frac{(-2)^2 + 4}{(-2)^2} = \frac{8}{4} = 2.$$

Άρα

$$\varepsilon: y = 2x + \beta$$

Για $x = -2$ και $y = 0$, η εφαπτομένη (ε) γίνεται:

$$0 = 2 \cdot (-2) + \beta \Leftrightarrow \beta = 4.$$

Τελικά

$$\varepsilon: y = 2x + 4.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f'(x) = (20 \cdot s \cdot x^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot x + 3)' = 20 \cdot s \cdot 2x - 2 \cdot \bar{x} \cdot 1 + 0 = 40s \cdot x - 2\bar{x}.$$

Δ2. Έχουμε,

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 40s - 2\bar{x} = 0 \Leftrightarrow 2\bar{x} = 40s \Leftrightarrow \bar{x} = 20s \quad (1).$$

Επομένως,

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{s}{20s} = \frac{1}{20} = 0,05 = 5\% < 10\%.$$

Άρα, το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.



Δ3. Για $s = 1$, η σχέση (1) γίνεται

$$\bar{x} = 20 \cdot 1 = 20.$$

Δ4. Για $s = 1$ και $\bar{x} = 20$ έχουμε

$$f(x) = 20x^2 - 40x + 3 \text{ και } f'(x) = 40x - 40.$$

Λύνουμε την εξίσωση

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 40x - 40 = 0 \Leftrightarrow 40x = 40 \Leftrightarrow x = 1.$$

Έχουμε,

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f			

Η συνάρτηση f είναι:

- γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$
- γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με τιμή

$$f(1) = 20 \cdot 1^2 - 40 \cdot 1 + 3 = 20 - 40 + 3 = -17.$$