

**Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ)
Μαθηματικά (Άλγεβρα)
Γ' Λυκείου ΕΠΑΛ**

Εκφωνήσεις



2024-2025

Ασκησόπολις

Στέλιος Μιχαήλογλου / Δημήτρης Πατσιμάς / Νίκος Τούντας

www.Askisopolis.gr



Τα θέματα προέρχονται από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

Διαφορικός λογισμός

Συναρτήσεις

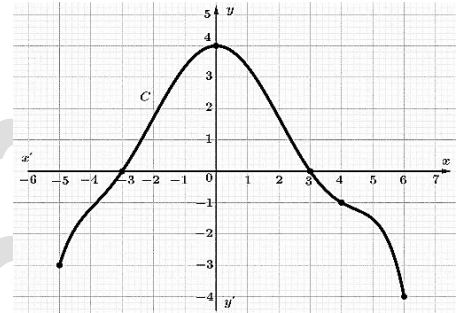
2^ο Θέμα

24347. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.
- β) Να δείξετε ότι $f(x) = x + 2$ για κάθε x του πεδίου ορισμού A.
- γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

24355. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης f . Μελετώντας το σχήμα:

- α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β) Για τη συνάρτηση f , να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της και να βρείτε το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστό της.
- γ) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.



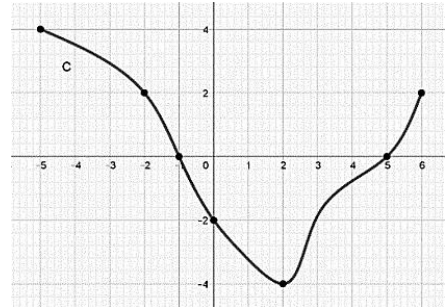
24356. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2 - 1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)$.
- β) Να αποδείξετε ότι η $g(x) = \frac{x-2}{x+1}$.
- γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

24358. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης f .

Μελετώντας το σχήμα:

- α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β) Για τη συνάρτηση f , να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της και να βρείτε το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστό της.
- γ) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$.



25874. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
- β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = x + 1$.
- γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

31085. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x}{x}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
- β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = x - 1$.
- γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

31086. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
- β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = x - 2$.
- γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

32248. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-2}$ και $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

- α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f , g .
- β) Να δείξετε ότι για $x \neq 2$ είναι: $f(x) - g(x) = x + 1$.
- γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - g(x)]$.

33624. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi = f(0) + 3f(2)$.
- γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

34591. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
- β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = x - 2$.
- γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Παράγωγοι
2^ο Θέμα

25326. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \sqrt{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x > 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $f'(4)$.

25875. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 4x$, $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1,1)$. Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = 4$.

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $y = 4x - 3$.

25876. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1,-1)$. Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = 0$.

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $y = -1$.

26146. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 - \frac{1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $f'(2)$.

27843. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^3 + x^2 - 4$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης είναι $f'(x) = -6x^2 + 2x$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(-1,-1)$. Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = -8$.

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $y = -8x - 9$.

31084. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2023$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να υπολογίσετε το $f'(-1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι: $f'(-1) + f'(1) = 2$.

31088. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3 \cdot \frac{1}{x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f'(x) = \frac{3}{x^2}$.

γ) Να υπολογίσετε το $f'(-3)$.

31089. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 \cdot \frac{1}{x} - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $f'(-2)$.

31090. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $f'(-2) + f(2)$.

31091. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x > 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $f'(9)$.

31693. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της

$A\left(-1, \frac{2}{3}\right)$. Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = 1$.

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $y = x + \frac{5}{3}$.

31695. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5 \cdot \frac{1}{x}$ με $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x) = -\frac{5}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της

A(1,5). Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = -5$.

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $y = -5x + 10$.

33622. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 4$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την $f'(x)$.

β) Να βρείτε την $f''(x)$.

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi = f(0) + f'(0) + f''(0)$.

33624. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi = f(0) + 3f(2)$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

33625. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 7x$ με $x \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(2, -6)$, τότε:

α) να δείξετε ότι $f'(x) = 4x - 7$.

β) να δείξετε ότι $\lambda = 1$.

γ) να δείξετε ότι $\beta = -8$.

34592. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} + 2$. Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Την παράγωγο f' της συνάρτησης.

γ) Την τιμή $f'(2)$.

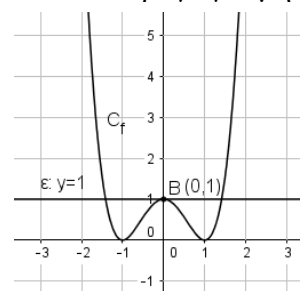
34736. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε, με βάση το παραπάνω σχήμα, τη μονοτονία της συνάρτησης σε καθένα από τα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$.

β) Αν η ευθεία (ε): $y = 1$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο B(0,1), τότε:

i) Να βρείτε την $f(0)$ και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$.

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί $f'(0) = 0$.



34845. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - x^3$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της A(1,0). Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = -3$.

γ) η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $y = -3x + 3$.

4^ο Θέμα

28286. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$.

α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$.

β) Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

γ) Ο Γιάννης υπολόγισε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ και βρήκε ότι σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135 μοιρών και επίσης ότι δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Συμφωνείτε με τον Γιάννη; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

28617. Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha x^2 - 2x$, $x \in [0, +\infty)$, όπου α ένας πραγματικός αριθμός.

α) Αν ισχύει $f'(1) = 0$ να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

β) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{2}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

ii) Να λύσετε την εξίσωση $g(x) = 0$.

γ) Για $\alpha = 1$

i) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f}{g}(x)$.

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.

34510. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης είναι $f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(3, 4)$.

ii. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) διέρχεται από το σημείο $B(1, 10)$.

γ) Αν η εφαπτομένη (η) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $\Gamma(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση $y = f'(x_0)x$, να βρείτε το x_0 .

34529. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους: $f(x) = \frac{2}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$ και

$$g(x) = x^2 - 2x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(2) = -\frac{1}{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 3$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $(2, g(2))$.

γ) i) Να δείξετε ότι το σημείο $(2, g(2))$ ανήκει και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

ii) Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f

και g στο κοινό τους σημείο $(2,1)$, είναι κάθετες μεταξύ τους. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του Γιάννη; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

(δίνεται ότι: δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα, είναι κάθετες μεταξύ τους εάν ισχύει: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$)

34734. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x}, x > 0$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο $A(1,4)$.

Στη συνέχεια δίνεται ότι $\alpha = 4$.

β) i) Να υπολογίσετε τον $f'(1)$.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,4)$.

γ) i) Να βρείτε τα σημεία τομής K, Λ της (ε) με τους άξονες $x'x, y'y$ αντίστοιχα.

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η (ε) με τους άξονες $x'x, y'y$.

Εφαρμογές των παραγώγων**2^ο Θέμα**

24357. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x) = -2x + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε την $f'(5)$.

γ) Για $x > 1$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

25459. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 6x + 2023$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 6x - 6$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να υπολογίσετε το $f'(1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, για $x > 1$.

4^ο Θέμα

24359. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

α) i. Για $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f .

ii. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M((2, f(2)))$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

24360. Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα (m), πλάτος y μέτρα (m) και εμβαδό 400 τετραγωνικά μέτρα (m^2).

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $\Pi(x) = 2x + \frac{800}{x}$ με $x > 0$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\Pi(x)$ ως προς τη μονοτονία της.

γ) Για ποια τιμή του x η περίμετρος του οικοπέδου γίνεται ελάχιστη, και ποια είναι η ελάχιστη τιμή της;

24361. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - x$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά.

α) Αν ισχύει $f'(1) = 0$, να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Για $\lambda = -1$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της.

γ) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x$.

24363. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι: $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$ με $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της.

γ) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο

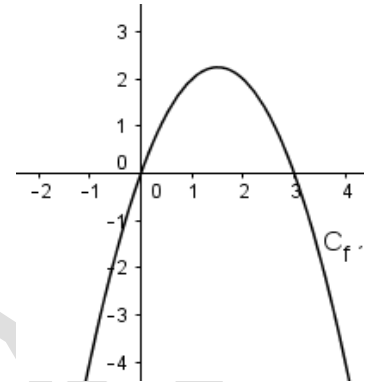
$$M(2, f(2)), \text{ είναι η ευθεία } (\epsilon): y = -\frac{3}{25}x + \frac{16}{25}.$$

25461. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f , όπου f' είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού.

α) Να αιτιολογήσετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[3, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 3]$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(1)$ και $f(2)$.

γ) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(3, 2)$, τότε να βρείτε τα ακρότατα της f .



25458. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

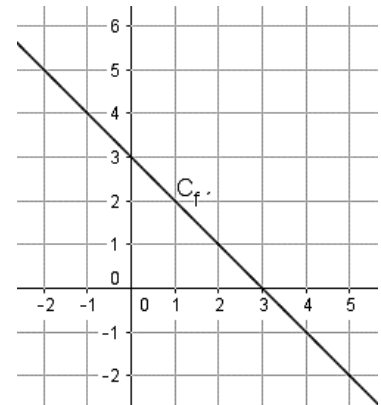
δ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης.

25643. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση $C_{f'}$ της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f . Αν η $C_{f'}$ είναι ευθεία η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(3, 0)$, τότε:

α) Να αιτιολογήσετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(3)$ και $f(4)$.

γ) Να βρείτε το είδος και την τιμή του ακροτάτου που παρουσιάζει η f αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$.



26895. Δύο θετικοί αριθμοί x, y συνδέονται με τη σχέση $2x + y = 20$.

α) i. Να δείξετε ότι το γινόμενο των δύο αριθμών, ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο $f(x) = -2x^2 + 20x$.

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της παραπάνω συνάρτησης.

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρείτε τη τιμή του x ώστε το γινόμενο των δύο αριθμών να γίνει μέγιστο.

28125. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 8x + 18$ και $g(x) = -(x-4)^4 + 2$.

α) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων f και g .

β) Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων αυτών.

γ) Να δείξετε ότι $f(x) \geq g(x)$, $x \in \frac{1}{2}\mathbb{R}$.

28280. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με διαστάσεις $AB=4$ και $B\Gamma=2$. Θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία K, Λ, M και N των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔA αντίστοιχα έτσι ώστε $AK = B\Lambda = \Gamma M = \Delta N = x$.

α) Να δείξετε ότι

i. το εμβαδόν του AKN ως συνάρτηση του x είναι

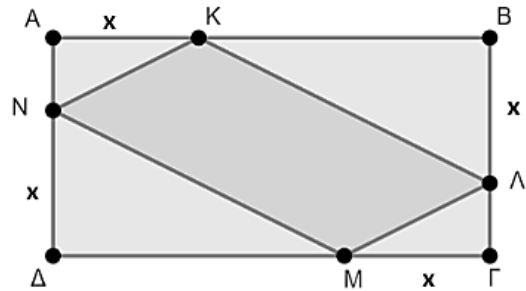
$$E_1(x) = \frac{1}{2}(2-x) \cdot x, \quad x \in (0, 2) \text{ και το εμβαδόν του}$$

KBL ως συνάρτηση του x είναι $E_2(x) = \frac{1}{2}(4-x) \cdot x, \quad x \in (0, 2)$.

ii. το εμβαδόν του $KLMN$ ως συνάρτηση του x είναι $E(x) = 2(x^2 - 3x + 4), \quad x \in (0, 2)$.

β) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ως προς το x όταν $x = \frac{3}{2}$.

γ) Να βρείτε την τιμή του x , για την οποία το $E(x)$ γίνεται ελάχιστο.



28282. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά $AB=4$.

Θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία K, Λ, M και N των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔA αντίστοιχα έτσι ώστε

$AK = B\Lambda = \Gamma M = \Delta N = x$.

α) Να δείξετε ότι

i. το εμβαδόν του AKN ως συνάρτηση του x είναι

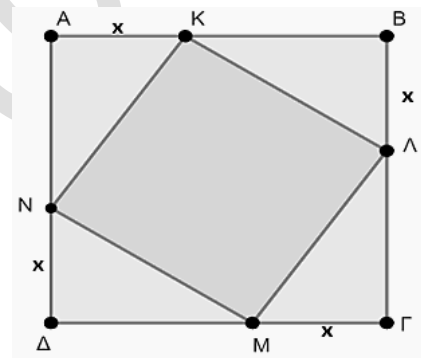
$$E_1(x) = \frac{1}{2}(4-x) \cdot x, \quad x \in (0, 4).$$

ii. το εμβαδόν του $KLMN$ ως συνάρτηση του x είναι

$$E(x) = 2(x^2 - 4x + 8), \quad x \in (0, 4).$$

β) Να υπολογίσετε τη πρώτη παράγωγο του εμβαδού $E(x)$.

γ) Να βρείτε την τιμή του x , για την οποία το $E(x)$ γίνεται ελάχιστο.



28618. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + \frac{2}{3}, \quad x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f .

β) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονotonία και τα ακρότατα.

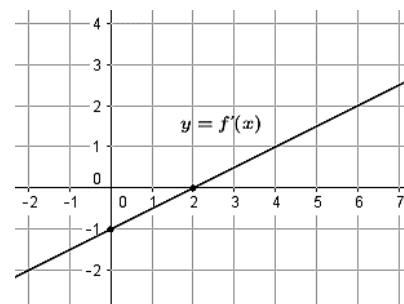
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο της $A(1, 1)$.

30975. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(2) = 5$ και $f(0) = 6$. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' της συνάρτησης, η οποία είναι ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2 και τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -1 .

α) Να αιτιολογήσετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$.

β) Να βρείτε τα ακρότατα της f .

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0, f(0))$.



32260. Δίνεται το ορθογώνιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με εμβαδόν 4 m^2 .

α) Αν το μήκος της πλευράς $AB = x \text{ m}$, να δείξετε ότι η πλευρά ΒΓ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ

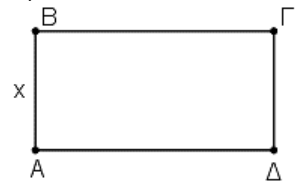
συναρτήσει του x είναι $B\Gamma = \frac{4}{x}$, $x > 0$.

β) Να αποδείξετε ότι, η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από

τη συνάρτηση: $f(x) = 2x + \frac{8}{x}$, $x > 0$.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με σταθερό εμβαδό, παίρνει την ελάχιστη τιμή της, όταν αυτό γίνει τετράγωνο. Συμφωνείτε με την άποψη του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



32365. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x + 6$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 3x^2 + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να υπολογίσετε το $f'(0)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

32366. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$g(x) = 6x^2 - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - 5}{g'(x) - 10}$.

32367. Μια επιχείρηση παραγωγής αιθέριων ελαίων εκτιμά ότι το ημερήσιο κόστος $C(x)$ (σε εκατοντάδες ευρώ) για την παραγωγή x κιλών λεβάντας είναι: $C(x) = 2x^3 - 4x^2 - 8x + 30$, $x \geq 0$.

α) Πόσο είναι το ημερήσιο κόστος για την παραγωγή 2 κιλών λεβάντας;

β) Να υπολογίσετε το $C(0)$. Τι εκφράζει;

γ) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $C(x)$.

δ) Να βρείτε πόσα κιλά λεβάντας πρέπει να παράγονται ημερησίως ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος. Πόσο είναι το ελάχιστο ημερήσιο κόστος;

33662. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$, $x > 0$.

α) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση $f'(x)$ και το πρόσημο της f' .

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

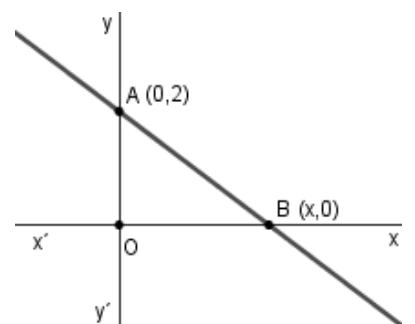
γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό $x > 0$.

33628. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα σημεία $A(0, 2)$ και $B(x, 0)$ με $x > 0$.

α) Να δείξετε ότι η απόσταση των σημείων A και B συναρτήσει του x είναι:

$$d(x) = (AB) = \sqrt{x^2 + 4} \text{ με } x > 0.$$

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων A και B ως προς x όταν $x = 3$.



γ) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι, καθώς το σημείο B κινείται προς τα δεξιά στον ημιάξονα Ox , το μήκος του AB αυξάνεται. Να αιτιολογήσετε γιατί συμβαίνει αυτό, αξιοποιώντας το ερώτημα (β).

33629. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x)$.

β) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$.

γ) i. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

δ) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2023)$ και $f(2301)$ της συνάρτησης f .

33632. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$, $x > 0$.

α) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση $f'(x)$ και το πρόσημο της f' .

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό $x > 0$.

33859. Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα, πλάτος y μέτρα και περίμετρο 200 μέτρα.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = 100x - x^2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(x)$ ως προς τη μονοτονία της.

γ) Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο, και ποια είναι η μέγιστη τιμή του; Για την τιμή που βρήκατε τι σχήμα προκύπτει;

33860. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + \lambda x + 5$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά.

α) Αν ισχύει $f'(1) = 0$, να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Για $\lambda = 3$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{7}{3}\right)$

και $f\left(\frac{13}{4}\right)$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - x}$.

34259. Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = ax^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$, όπου a ένας πραγματικός αριθμός.

α) i) Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f .

ii) Αν η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $a = 1$.

Για $a = 1$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\sqrt{x} - 1}$.

34801. Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) ενός δωματίου σε συνάρτηση με τον χρόνο t σε ώρες δίνεται από τον τύπο $\theta(t) = t^3 - 3t^2 + 2t + c$, $0 \leq t \leq 4$, όπου c ένας πραγματικός αριθμός.

α) Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του δωματίου τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι ίση με 8 βαθμούς Κελσίου, να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού c .

Για $c = 8$

β) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας όταν $t = 2$.

γ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας γίνεται ελάχιστος και την τιμή του ελάχιστου ρυθμού μεταβολής.

34802. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + c$, $x \in \mathbb{R}$, όπου c ένας πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε το c αν ισχύει $f(2) + f'(2) + f''(2023) = 0$.

Για $c = 2$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

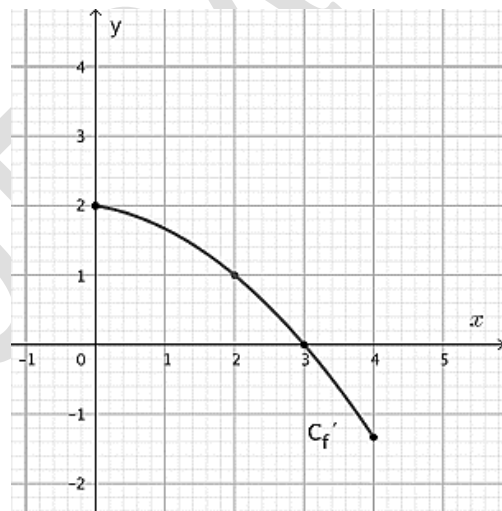
γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(2023)$, $f(2024)$.

34824. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0, 4]$. Η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από το σημείο $(2, 1)$ και τέμνει τον άξονα x' σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη 3. Μελετώντας το σχήμα να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

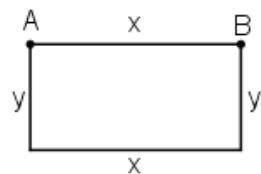
α) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x = 2$;

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο $[0, 3]$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 3$.



34828. Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει σε ένα χωράφι μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις x , y ώστε να έχει εμβαδόν 800 m^2 . Η πλευρά AB της περιοχής, μήκους x , όπως φαίνεται στο σχήμα, θα είναι πέτρινη, ενώ για τις υπόλοιπες πλευρές θα χρησιμοποιήσει συρμάτινο φράχτη. Αν το κόστος περίφραξης για την πέτρινη πλευρά είναι 6 ευρώ ανά μ και για τον συρμάτινο φράχτη είναι 2 ευρώ ανά μ , τότε:



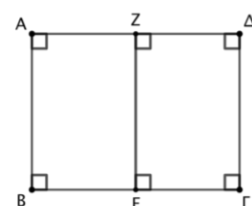
α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος της περίφραξης, συναρτήσει

του x , είναι: $K(x) = 8x + \frac{3200}{x}$, $x > 0$.

β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κτήματος ώστε το συνολικό κόστος περίφραξης να είναι ελάχιστο.

γ) Ποιο είναι το ελάχιστο κόστος περίφραξης;

34832. Ένας αγρότης διαθέτει συρματοπλέγμα μήκους 200 m και θέλει να περιφράξει με αυτό σε ένα χωράφι του μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ με ενδιάμεσο χώρισμα EZ , όπως φαίνεται στο σχήμα.



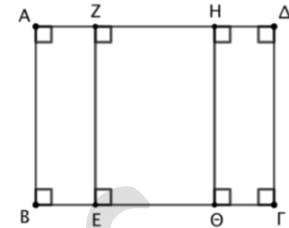
α) Αν $A\Delta = x$ και $AB = y$, να αποδείξετε ότι το συνολικό εμβαδόν του

σχήματος, συναρτήσει του x , είναι: $E(x) = \frac{200x - 2x^2}{3}$, $0 < x < 100$.

β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ ώστε το συνολικό εμβαδόν να είναι μέγιστο.

γ) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του σχήματος.

34835. Ένας αγρότης διαθέτει συρματοπλέγμα μήκους 200 m και να θέλει να περιφράξει με αυτό σε ένα χωράφι του μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ με δύο ενδιάμεσα χωρίσματα EZ και ΘH , όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Αν $A\Delta = x$ και $AB = y$ να αποδείξετε ότι το συνολικό εμβαδόν του

σχήματος, συναρτήσει του x , είναι: $E(x) = \frac{100x - x^2}{2}$, $0 < x < 100$.

β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ ώστε το συνολικό εμβαδόν του να είναι μέγιστο.

γ) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος.

34838. Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x}$, $x \geq 0$, και το σημείο $A(3,0)$, όπως φαίνονται στο σχήμα. Αν $M(x,y)$

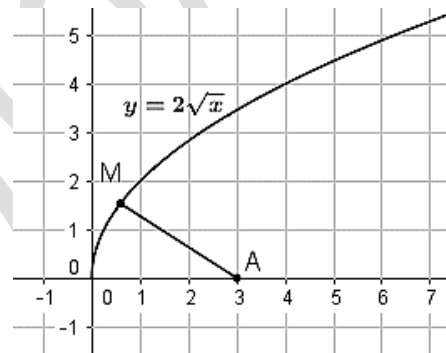
είναι τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση AM , συναρτήσει του x ,

είναι: $d(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 9}$, $x \geq 0$.

β) Να βρείτε για ποιο σημείο M η απόσταση AM γίνεται ελάχιστη. Θεωρείστε ότι η ελάχιστη απόσταση θα παρουσιαστεί όταν το υπόριζο $x^2 - 2x + 9$, $x \geq 0$, γίνει ελάχιστο.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση AM .



34846. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - x - 4$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

α) Την παράγωγο της συνάρτησης.

β) Τα ακρότατα της συνάρτησης.

γ) i. Τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτόμενη της είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 3x + 3$. (Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι η μια από τις εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f με συντελεστή διεύθυνσης 3 και σημείο επαφής με αρνητική τετμημένη διέρχεται από το σημείο $M\left(3, \frac{31}{3}\right)$.

36811. Ένα σώμα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος του σε μέτρα (m) μετά από t δευτερόλεπτα (s) από την εκτόξευσή του δίνεται από την συνάρτηση $h(t) = 8t - t^2$, $0 \leq t \leq 8$.

α) Να υπολογίσετε το ύψος του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s.

β) Να αποδείξετε ότι η ταχύτητα του σώματος σε χρόνο t δίνεται από τη συνάρτηση $v(t) = 8 - 2t$, $0 \leq t \leq 8$.

γ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 2$ s. **δ)** Σε ποια χρονική στιγμή το σώμα φτάνει στο μέγιστο ύψος; Ποιο είναι το μέγιστο ύψος του σώματος;

36812. Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, και το σημείο $A(3,0)$, όπως φαίνονται στο σχήμα. Αν $M(x,y)$ είναι τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση AM , συναρτήσει του x , είναι:

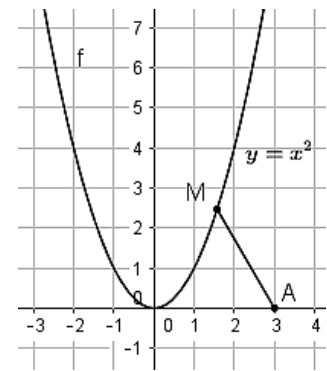
$$d(x) = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

β) i. Να αποδείξετε ότι .

ii. Να βρείτε για ποιο σημείο M η απόσταση AM γίνεται ελάχιστη.

Θεωρείστε ότι η ελάχιστη απόσταση θα παρουσιαστεί όταν το υπόριζο $x^4 + x^2 - 6x + 9$, $x \in \mathbb{R}$, γίνει ελάχιστο.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση AM .



3^ο Θέμα

27959. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 6x + 2023$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 6x - 6$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2020$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

27898. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x) = -2x + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.

γ) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \leq 5$.

32363. Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τη συνάρτηση $x(t) = t^2 - 4t - 1$, $t \geq 0$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα (s) και το $x(t)$ σε μέτρα (m).

α) Να βρείτε την ταχύτητα $v(t)$ του σημείου σε χρόνο t .

β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του υλικού σημείου τις χρονικές στιγμές $t_1 = 1s$ και $t_2 = 3s$.

γ) Σε ποια χρονική στιγμή το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο;

δ) Πότε το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;

Στατιστική

Βασικές έννοιες Παρουσίαση Στατιστικών Δεδομένων 2^ο Θέμα

32245. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται σε ευρώ, το ποσό που ξόδεψαν 20 μαθητές στο κυλικείο του σχολείου τους, στη διάρκεια μιας μέρας.

α) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στην κόλλα σας, και να συμπληρώσετε τα κενά.

β) Πόσοι μαθητές ξόδεψαν τη συγκεκριμένη ημέρα, το πολύ 2 ευρώ;

γ) Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που ξόδεψαν τη συγκεκριμένη ημέρα, τουλάχιστον 2 ευρώ;

Ποσό σε ευρώ x_i	v_i	N_i	f_i	$f_i \%$
0	1			
1	9			
2	8			
3	2			
Σύνολο	20			

32246. Στον διπλανό πίνακα, δίνεται ο αριθμός των μαθητών ενός τμήματος του σχολείου με 25 μαθητές, που απουσίασαν από 0 έως και 5 ημέρες στη διάρκεια του προηγούμενου χειμώνα.

α) Να βρείτε τον αριθμό των μαθητών κ , που απουσίασε από το σχολείο 3 ημέρες.

β) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που δεν απουσίασε από το σχολείο.

γ) Να βρείτε τον αριθμό των μαθητών που απουσίασε τουλάχιστον 1 ημέρα από το σχολείο.

Ημέρες απουσίας	Αριθμός μαθητών που απουσίασε
0	10
1	2
2	2
3	κ
4	2
5	1

33626. Οι 50 εκπαιδευτικοί ενός σχολείου μιας μεγάλης πόλης, για να μεταβούν στη δουλειά τους (στο σχολείο), χρησιμοποιούν τα εξής μέσα:

2 χρησιμοποιούν TAXI, 20 χρησιμοποιούν το ιδιωτικό τους ΙΧ, 10 πηγαίνουν με τη ΜΗΧΑΝΗ τους, 14 χρησιμοποιούν τα ΜΕΣΑ ΜΑΖΙΚΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ και 4 που μένουν κοντά στο σχολείο, πηγαίνουν με τα ΠΟΔΙΑ.

α) Αν x_i είναι οι τιμές της μεταβλητής X : «μεταφορικό μέσο των καθηγητών» και v_i το πλήθος των καθηγητών που το

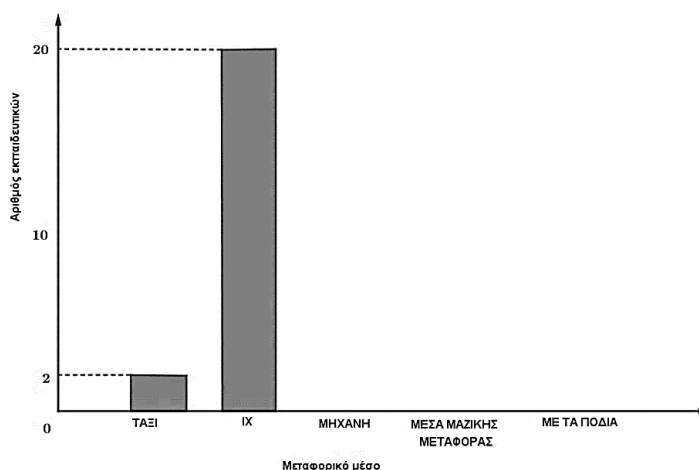
χρησιμοποιεί, να μεταφέρετε στην κόλλα

σας και να συμπληρώσετε για τα παραπάνω δεδομένα το διπλανό πίνακα.

β) Αφού μεταφέρετε το παρακάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων στην κόλλα σας, να βάλετε τα αριθμητικά δεδομένα που σας χρειάζονται στον κατακόρυφο άξονα και να σχεδιάσετε τις ράβδους που λείπουν.

Μεταφορικό μέσο x_i	Αριθμός εκπαιδευτικών v_i
Σύνολο	50

Ραβδόγραμμα Συχνοτήτων



34354. Στον επόμενο πίνακα σχετικών συχνοτήτων, φαίνεται η κλιμάκωση των γραπτών βαθμών του συνόλου των μαθητών της Γ' Λυκείου στο μάθημα των Μαθηματικών το προηγούμενο σχολικό έτος.

α) Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που έγραψαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 8 και μικρότερο του 12.

β) Αν οι μαθητές που έγραψαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 12 είναι 42400 να υπολογίσετε το πλήθος του συνόλου των μαθητών.

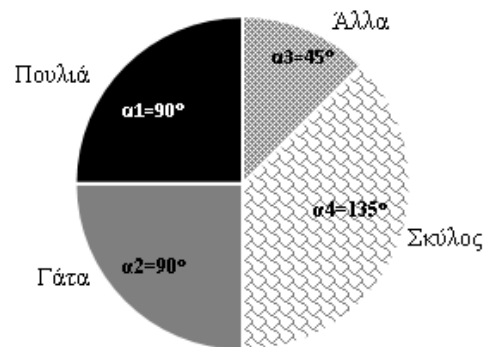
γ) Πόσοι μαθητές έγραψαν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 16; α_1

Κλάσεις [-)	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
0-4	10
4-8	10
8-12	
12-16	35
16-20	15

34431. Στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα φαίνονται σε μοίρες τα μέτρα των γωνιών $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ τα οποία αντιστοιχούν στους τέσσερις κυκλικούς τομείς, σχετικά με το αγαπημένο κατοικίδιο των μαθητών της Γ' λυκείου ενός ΕΠΑΛ.

α) Να υπολογίσετε τις σχετικές συχνότητες f_1, f_3 , αυτών που προτιμούν πουλιά ή άλλα κατοικίδια αντίστοιχα.

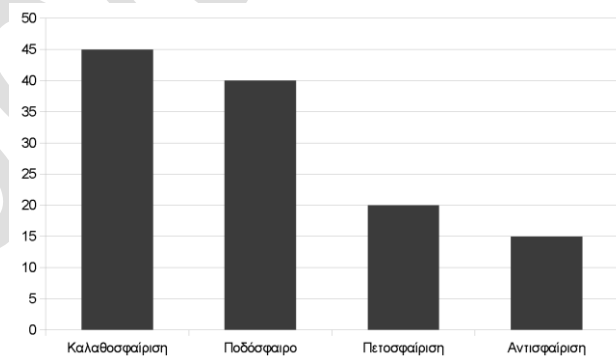
β) Αν το σύνολο των μαθητών που ρωτήθηκαν ήταν $n = 120$, να βρείτε πόσοι μαθητές της τάξης αυτής προτιμούν τα πουλιά για κατοικίδιο.



34432. Στο παρακάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων φαίνεται πόσοι μαθητές της Γ' Λυκείου ενός ΕΠΑΛ επέλεξαν καθένα από τέσσερα αθλήματα για να διαγωνιστούν στο σχολικό πρωτάθλημα. Αξίζει να σημειωθεί ότι καθένας από τους μαθητές επέλεξε ένα μόνο από τα αθλήματα.

α) Να υπολογίσετε το σύνολο των μαθητών της Γ' λυκείου αυτού του ΕΠΑΛ.

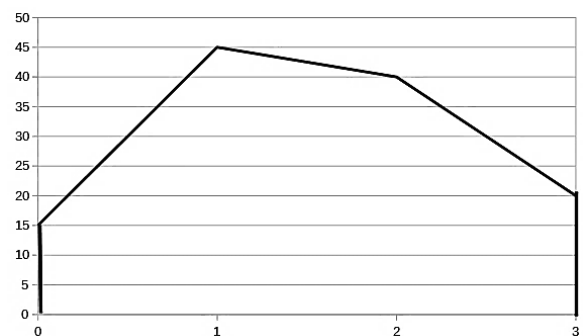
β) Να υπολογίσετε τις σχετικές συχνότητες f_1, f_2, f_3, f_4 , καθενός από τα αθλήματα που επέλεξαν οι μαθητές.



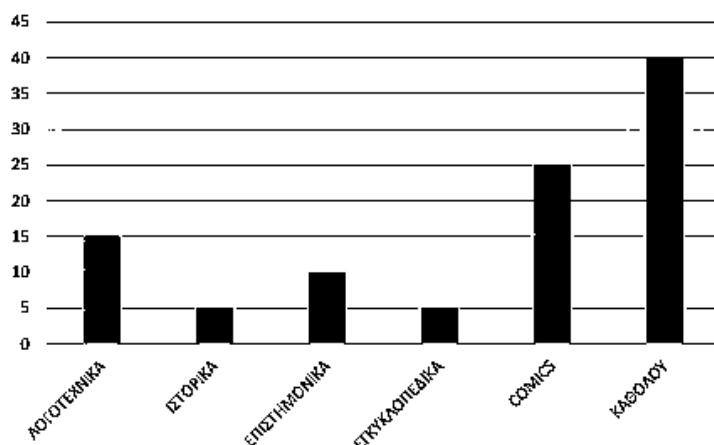
34434. Στο παρακάτω πολύγωνο συχνοτήτων φαίνεται πόσοι μαθητές ενός δείγματος της Γ' Λυκείου ενός ΕΠΑΛ βαθμολογήθηκαν με άριστα σε 0, 1, 2 ή 3 μαθήματα από τα τέσσερα των πανελλαδικών εξετάσεων.

α) Να υπολογίσετε το σύνολο των μαθητών του δείγματος αυτού.

β) Να υπολογίσετε τις σχετικές συχνότητες f_1, f_2, f_3, f_4 , του πλήθους των μαθητών, οι οποίοι βαθμολογήθηκαν με άριστα σε 0, 1, 2 ή 3 μαθήματα αντίστοιχα.



34766. Δίνεται το παρακάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων για το διάβασμα βιβλίων μαθητών γυμνασίου. Κάθε μαθητής απάντησε για ένα μόνο είδος βιβλίου ή καθόλου αν δεν διαβάζει κανένα βιβλίο.. Ο κατακόρυφος άξονας περιέχει τον αριθμό των μαθητών και ο οριζόντιος άξονας τα είδη των βιβλίων.

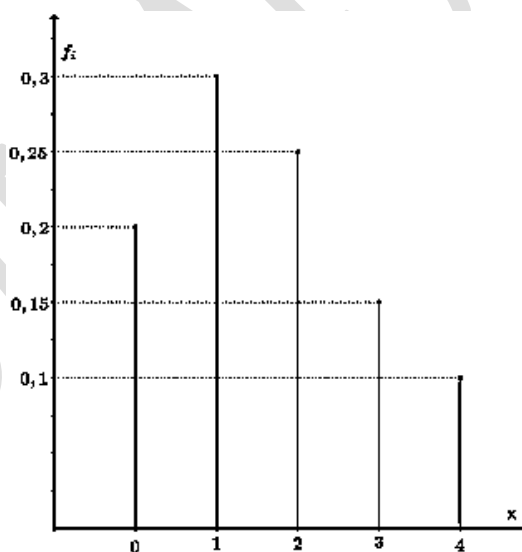


- α) Ποιο είναι το μέγεθος του δείγματος των μαθητών γυμνασίου που συμμετέχουν στην έρευνα, όπως φαίνεται από το ραβδόγραμμα;
 β) Πόσοι μαθητές διαβάζουν λογοτεχνικά βιβλία και πόσοι επιστημονικά;
 γ) i. Πόσοι μαθητές διαβάζουν βιβλία;
 ii. Τι ποσοστό μαθητών δεν διαβάζει καθόλου βιβλία;

34813. Ο αριθμός των ετήσιων επισκέψεων (άξονας των x) ενός δείγματος 160 μαθητών ενός σχολείου στα διάφορα μουσεία της χώρας δίνεται από το παρακάτω διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Για το παραπάνω δείγμα βρείτε:

- α) το ποσοστό των μαθητών που έκανε ακριβώς δύο επισκέψεις ετησίως.
 β) πόσοι μαθητές πραγματοποίησαν ακριβώς μία επίσκεψη ετησίως.
 γ) το ποσοστό των μαθητών που έκανε δύο τουλάχιστον επισκέψεις ετησίως.



34844. Βιοτεχνία θέλει να προμηθευτεί κουτιά συσκευασίας για τα 100 προϊόντα που παρήγαγε σε μια εβδομάδα, τα οποία μοίρασε σε τέσσερις κλάσεις ανάλογα με τον όγκο της συσκευασίας σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

- α) Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα κατανομής σχετικών συχνοτήτων.
 β) Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων v_i και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής.

Όγκος (cm ³) [-)	v_i	f_i	$f_i \%$
50-60	20		
60-70	10		
70-80	40		
80-90	30		
Σύνολο	100		

34927. Κατάστημα υποδημάτων κατέγραψε στον παρακάτω πίνακα κατανομής συχνοτήτων τις πωλήσεις σε ένα μήνα ενός σχεδίου γυναικείου παπουτσιού ανάλογα με το νούμερό του.

Νούμερο x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα $f_i \%$
36	8		
37	12		
38	20		
39	10		
Σύνολο			

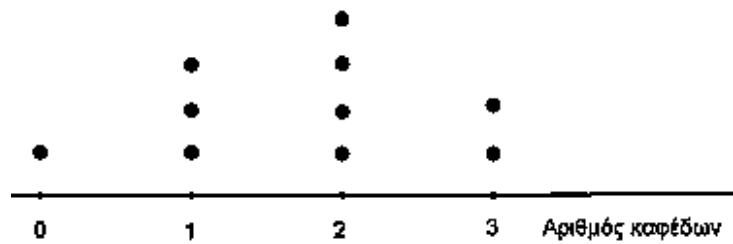
Για την κατανομή αυτή:

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα σχετικών συχνοτήτων.

β) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων v_i .

35777. Στο παρακάτω σημειόγραμμα, βλέπουμε τον αριθμό των καφέδων που πίνουν οι 10 υπάλληλοι μιας ιδιωτικής εταιρείας κάθε ημέρα στην εργασία τους.

α) Μελετώντας το σημειόγραμμα να συμπληρώσετε τα κενά στον παρακάτω πίνακα.



Αριθμός καφέδων x_i	Αριθμός υπαλλήλων v_i	Σχετική συχνότητα f_i
0		
1		
2		
3		
Σύνολο	10	1

β) Να βρείτε τον αριθμό των υπαλλήλων της εταιρείας, που πίνουν κάθε ημέρα στην εργασία τους το πολύ 2 καφέδες.

γ) Να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων της εταιρείας, που πίνουν κάθε ημέρα στην εργασία τους 3 καφέδες.

4^ο Θέμα

32253. Οι 20 μαθητές της ΣΤ' Δημοτικού, ενός σχολείου, που πήραν μέρος σε ένα ετήσιο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, πήραν τους παρακάτω βαθμούς (κλίμακα 0-10).

4 10 8 8 5 6 9 7 8 9 10 9 5 6 6 7 8 8 7 6

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Βαθμός x_i	v_i	N_i	$f_i \%$	$F_i \%$
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
Σύνολο				

β) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα των συχνοτήτων v_i , καθώς και το διάγραμμα των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων $F_i \%$.

γ) Αν η διεύθυνση του σχολείου θελήσει να βραβεύσει τους μαθητές που πέτυχαν επίδοση μεγαλύτερη ή ίση του 8, πόσους μαθητές θα βραβεύσει;

δ) Αν η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, βραβεύσει το 25% των μαθητών που πήραν μέρος στο διαγωνισμό, τι επίδοση πρέπει να έχει κάποιος μαθητής για να βραβευτεί;

32259. Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των παγωτών που κατανάλωσαν οι μαθητές της Γ' τάξης ενός σχολείου στη διάρκεια της πενθήμερης εκδρομής τους.

Αριθμός παγωτών x_i	v_i	f_i	$f_i \%$	N_i	$F_i \%$
0					
1					70
2	10				90
3			10		100
Σύνολο			100		

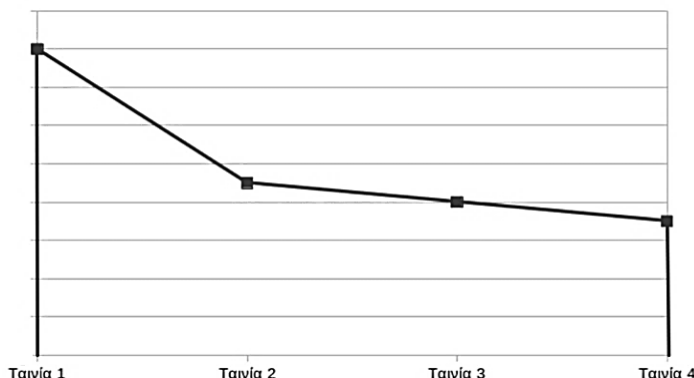
Δίνεται το $f_4 \% = 10$ και ότι το 40% των μαθητών δεν έφαγε παγωτό.

- α) Να δείξετε ότι η αθροιστική σχετική συχνότητα $F_1 \% = 40$ και η σχετική συχνότητα $f_3 = 0,2$.
 β) Να δείξετε ότι το πλήθος των μαθητών που συμμετείχαν στην εκδρομή, είναι $n = 50$.
 γ) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τα κενά.
 δ) Πόσοι μαθητές έφαγαν τουλάχιστον ένα παγωτό;

34733. Σε έναν κινηματογράφο τα εισιτήρια που έκοψαν τέσσερις ταινίες τον μήνα Νοέμβριο φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

- α) Ένας μαθητής κατασκεύασε το επόμενο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων % για τους θεατές που παρακολούθησαν τον μήνα Νοέμβριο τις παραπάνω ταινίες:

Ταινία 1	150
Ταινία 2	130
Ταινία 3	70
Ταινία 4	50

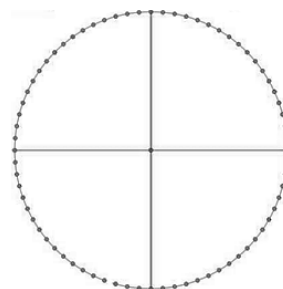


Να αιτιολογήσετε αν το πολύγωνο αυτό είναι σωστό ή λανθασμένο.

- β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Ταινία	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα f_i
Ταινία 1	150	
Ταινία 2	130	
Ταινία 3	70	
Ταινία 4	50	
Σύνολο		

- γ) Να υπολογίσετε σε μοίρες τη γωνία που θα αντιστοιχεί σε ένα κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων για καθεμία από τις παραπάνω ταινίες. Στη συνέχεια να κατασκευάσετε ένα κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, χρησιμοποιώντας τον παρακάτω κυκλικό δίσκο, ο οποίος είναι χωρισμένος σε τόξα 5° .



34816. Στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται το μορφωτικό επίπεδο των 1200 εργαζομένων μιας επιχείρησης χωρισμένο σε πέντε κατηγορίες.

Α' Κατηγορία: Απόφοιτοι Γυμνασίου

Β' Κατηγορία: Απόφοιτοι Λυκείου

Γ' Κατηγορία: Πτυχιούχοι Ανώτατης Εκπαίδευσης

Δ' Κατηγορία: Κάτοχοι Μεταπτυχιακού Τίτλου

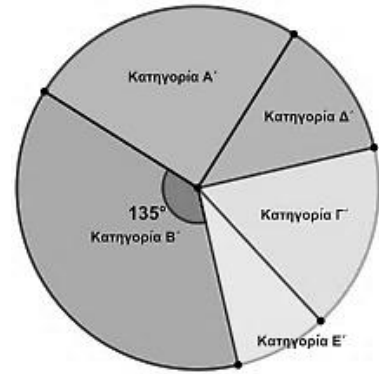
Ε' Κατηγορία: Κάτοχοι Διδακτορικού Τίτλου

Κάθε εργαζόμενος ανήκει σε μία μόνο από τις κατηγορίες αυτές.

Στις κατηγορίες Α' και Δ' ανήκει το 25% και το 12,5% των εργαζομένων αντίστοιχα.

Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στους εργαζόμενους της Β' κατηγορίας είναι 135° .

Τέλος οι εργαζόμενοι της Γ' κατηγορίας είναι διπλάσιοι από τους εργαζόμενους της Ε' κατηγορίας.



α) Να αποδειχθεί ότι οι εργαζόμενοι στην κατηγορία Β' είναι 450.

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό των εργαζομένων σε κάθε κατηγορία.

γ) i. Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

ii. Εάν συνταξιοδοτηθούν όλοι οι εργαζόμενοι της κατηγορίας Γ' τι ποσοστό των εργαζομένων της εταιρείας θα αντιπροσωπεύουν πλέον οι εργαζόμενοι της κατηγορίας Ε' ;

3^ο Θέμα

34921. Οι 50 εκπαιδευτικοί ενός σχολείου μιας μεγάλης πόλης, για να μεταβούν στη δουλειά τους (στο σχολείο), χρησιμοποιούν τα εξής μέσα:

2 χρησιμοποιούν TAXI, 20 χρησιμοποιούν το ιδιωτικό τους ΙΧ, 10 πηγαίνουν με τη ΜΗΧΑΝΗ τους, 14 χρησιμοποιούν τα ΜΕΣΑ ΜΑΖΙΚΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ και 4 που μένουν κοντά στο σχολείο, πηγαίνουν με τα ΠΟΔΙΑ.

α) Αν x_i είναι οι τιμές της μεταβλητής

X: «μεταφορικό μέσο των καθηγητών» και v_i το πλήθος των καθηγητών που το χρησιμοποιεί, να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε για τα παραπάνω δεδομένα το διπλανό πίνακα.

β) Να σχεδιάσετε το ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

γ) Να βρείτε τη σχετική συχνότητα για το κάθε μέσο μεταφοράς και να γράψετε το ποσοστό των εκπαιδευτικών που χρησιμοποιεί το κάθε μέσο.

Μεταφορικό μέσο x_i	Αριθμός εκπαιδευτικών v_i
Σύνολο	50

Μέτρα θέσης και διασποράς

2^ο Θέμα

25460. Οι βαθμοί 10 φοιτητών στο μάθημα της Στατιστικής ήταν: 4, 7, 3, 5, 8, 6, 5, 9, 6, 6.

- α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των βαθμών όλων των φοιτητών του δείγματος.
 β) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων.
 γ) Ποιο είναι το ποσοστό των φοιτητών με βαθμό μεγαλύτερο του 8;

28615. Εξετάσαμε ένα δείγμα δέκα μαθητών ενός λυκείου ως προς τη μεταβλητή 'Βάρος' και διαπιστώσαμε ότι οι τιμές του βάρους τους ήταν σε kg: 76, 74, 75, 75, 78, 72, 70, 80, 75, 75.

- α) Τι είδους μεταβλητή είναι η μεταβλητή 'Βάρος'; Ποιοτική, Ποσοτική Διακριτή ή Ποσοτική Συνεχής;
 β) Να βρείτε:
 i. τη μέση τιμή $\bar{x}$ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.
 ii. τη διάμεσο δ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.

28616. Εξετάσαμε ένα δείγμα δέκα μαθητών ενός λυκείου ως προς τη μεταβλητή 'Βάρος' και διαπιστώσαμε ότι οι τιμές του βάρους τους ήταν σε kg: 80, 70, 75, 75, 78, 72, 70, 80, 75, 75

- α) Να κατασκευάσετε το σημειόγραμμα της κατανομής του βάρους των δέκα μαθητών.
 β) Να βρείτε:
 i. τη μέση τιμή $\bar{x}$ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.
 ii. τη διάμεσο δ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.

30974. Οι προφορικοί βαθμοί έξι μαθητών στα μαθηματικά είναι 10, 13, 11, 15, 9, 14.

- α) Να υπολογίσετε την μέση τιμή $\bar{x}$ του δείγματος των έξι μαθητών.
 β) i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα.
 ii. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 του δείγματος.

t_i	$t_i - \bar{x}$	$(t_i - \bar{x})^2$
9		
10		
11		
13		
14		
15		

31087. Οι ημέρες απουσίας 11 μαθητών το μήνα Σεπτέμβριο ήταν: 1, 4, 4, 7, 3, 6, 10, 3, 1, 2, 3.

- α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο των δοσμένων τιμών για τις ημέρες απουσίας.
 β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των δοσμένων τιμών για τις ημέρες απουσίας.
 γ) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων των δοσμένων τιμών για τις ημέρες απουσίας.

32243. Στον παρακάτω πίνακα, αναγράφεται ανά ημέρα, το πλήθος των απόντων μαθητών ενός τμήματος της Γ' Λυκείου.

Ημέρα	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή
Πλήθος απόντων μαθητών	4	3	2	2	4

Για το δείγμα των απόντων μαθητών να υπολογίσετε:

- α) το εύρος R β) τη διάμεσο δ γ) τη μέση τιμή $\bar{x}$.

32250. Στη διάρκεια του χειμώνα, από το σύνολο των μαθητών μιας τάξης, οι δέκα σημείωσαν τις εξής ημέρες απουσίας από το σχολείο: 6, 7, 1, 2, 3, 5, 2, 4, 4, 6. Να βρείτε:

- α) το εύρος των ημερών απουσίας που σημειώθηκαν.
 β) τη διάμεσο των ημερών απουσίας που σημειώθηκαν.
 γ) τη μέση τιμή των ημερών απουσίας που σημειώθηκαν.

33627. Οι βαθμοί που έγραψε ένας μαθητής σε τέσσερα τεστ, στο μάθημα των Μαθηματικών το πρώτο τετράμηνο της τρέχουσας χρονιάς είναι: 19, 10, 13, 20.

α) Να βρείτε τη διάμεσο των βαθμών αυτών.

β) Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας που πέτυχε ο μαθητής στα τέσσερα τεστ.

γ) Να βρείτε το σταθμικό μέσο της βαθμολογίας που πέτυχε ο μαθητής στα τέσσερα τεστ, αν τα παραπάνω τεστ είχαν αντίστοιχα συντελεστές βαρύτητας τους αριθμούς: 1, 4, 3, 2.

34258. Εξετάσαμε ένα δείγμα δέκα μαθητών ενός λυκείου ως προς τη μεταβλητή 'Βάρος' και διαπιστώσαμε ότι οι τιμές του βάρους τους ήταν σε kg: 76, 74, 75, 75, 78, 72, 70, 80, 75, 75

α) Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ της μεταβλητής 'Βάρος' των δέκα μαθητών.

β) Αν η τυπική απόκλιση s της κατανομής του βάρους των δέκα μαθητών κατά προσέγγιση είναι $s = 3\text{kg}$, να βρείτε τον συντελεστή μεταβλητότητας CV του δείγματος.

γ) Είναι το δείγμα ομοιογενές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

34814. Ένα δείγμα εργαζομένων μιας εταιρείας εξετάστηκε ως προς το χρόνο (σε ώρες) υπερωριακής απασχόλησης κατά της διάρκεια του μήνα Απριλίου. Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τις αθροιστικές συχνότητες N_i των ωρών της υπερωριακής απασχόλησης, οι οποίες έχουν χωριστεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους.

Ώρες υπερωριακής απασχόλησης Κλάσεις [-)	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Κεντρική τιμή x_i	$x_i \cdot v_i$
0-2		5	1	
2-4		15	3	
4-6		20	5	
6-8		35	7	
8-10		40	9	
ΣΥΝΟΛΟ				

α) να βρεθεί το μέγεθος του δείγματος.

β) να συμπληρωθεί ο παραπάνω πίνακας.

γ) να βρεθεί η μέση τιμή των ωρών της υπερωριακής απασχόλησης.

34815. Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές x_i , $i=1, 2, 3, 4$ μιας μεταβλητής X με τις αντίστοιχες συχνότητες τους v_i , $i=1, 2, 3, 4$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η μέση τιμή $\bar{x}$ ισούται με 3.

β) Η διάμεσος δ ισούται με 3,5.

x_i	v_i
1	1
2	2
3	1
4	4

34818. Οι βαθμοί ενός μαθητή σε πέντε μαθήματα στις εξετάσεις ήταν:
8, 18, 12, 14, 13.

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο των βαθμών του μαθητή.

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των βαθμών του μαθητή.

γ) Αν τα μαθήματα είχαν συντελεστές στάθμισης 2, 1, 3, 3 και 1 αντίστοιχα, ποια θα ήταν η μέση τιμή των βαθμών του μαθητή;

34820. Οι πόντοι που πέτυχε ένας καλαθοσφαιριστής στους τελευταίους πέντε (5) αγώνες της ομάδας του ήταν: 20, 17, 21, 19, 23.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των πόντων του καλαθοσφαιριστή.

β) Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 του δείγματος. Δίνεται ότι $\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{x})^2 = 20$, όπου

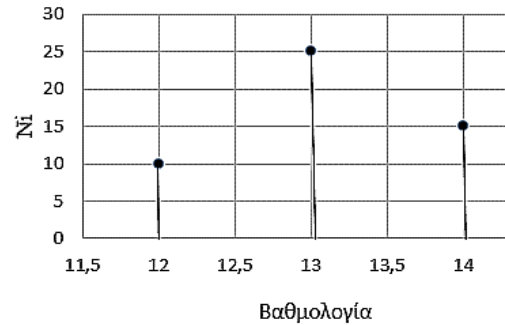
$t_i, i = 1, 2, \dots, 5$, είναι οι πόντοι του καλαθοσφαιριστή στους 5 αγώνες.

γ) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

34843. Στο παρακάτω διάγραμμα συχνοτήτων παρουσιάζονται οι βαθμολογίες 50 μαθητών σε μια γραπτή δοκιμασία.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα σχετικών συχνοτήτων.

Βαθμολογία x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα $f_i \%$
12			
13			
14			
Σύνολο			



β) Να βρείτε την μέση τιμή $\bar{x}$ της κατανομής της βαθμολογίας των μαθητών.

35475. Οι εισπράξεις σε χιλιάδες ευρώ ενός δείγματος δέκα καταστημάτων σε ένα εμπορικό κέντρο κατά το μήνα Απρίλιο του 2023 ήταν: 50, 15, 15, 20, 15, 30, 15, 20, 50, 50.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των εισπράξεων.

β) Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία του.

Εισπράξεις (σε χιλ. ευρώ) x_i	Συχνότητα v_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
15				
20				
30				
50				
Σύνολο				

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι για τη διακύμανση ισχύει ο τύπος: $S^2 = \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$

Να υπολογίσετε τη διακύμανση S^2 των εισπράξεων.

35479. Μια μεταβλητή X παίρνει τις τιμές $x_1 = a$, $x_2 = a+5$, $x_3 = a+10$ και $x_4 = a+35$, όπου a πραγματικός αριθμός. Οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες των τιμών δίνονται στον παρακάτω πίνακα: όπου λ θετικός ακέραιος.

β) Να βρείτε τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_1 , F_2 , F_3 και F_4 αλλά και τις σχετικές συχνότητες f_1 , f_2 , f_3 και f_4 .

γ) Αν η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 19$, να βρείτε την τιμή του a .

x_i	F_i
a	$\frac{4}{\lambda}$
$a+5$	$\frac{11}{\lambda}$
$a+10$	$\frac{18}{\lambda}$
$a+35$	$\frac{25}{\lambda}$

35769. Σε μία έρευνα, για ένα δείγμα 20 οικογενειών που επιλέχτηκαν, καταγράφηκε ο αριθμός των παιδιών της κάθε οικογένειας, όπως φαίνεται στο διπλανό πίνακα.

α) Να βρείτε τη διάμεσο του αριθμού των παιδιών.

β) Να συμπληρώσετε την τρίτη στήλη του παρακάτω πίνακα.

Αριθμός παιδιών x_i	Πλήθος οικογενειών v_i	$x_i v_i$
0	1	
1	5	
2	9	
3	3	
4	2	
Σύνολο	20	

Αριθμός παιδιών x_i	Πλήθος οικογενειών v_i
0	1
1	5
2	9
3	3
4	2
Σύνολο	20

γ) Να βρείτε τη μέση τιμή του αριθμού των παιδιών για το δείγμα που επιλέχτηκε.

35767. Η μέση τιμή του βάρους έξι μαθητών της Γ' Λυκείου είναι 72 κιλά.

α) Να δείξετε ότι το άθροισμα του βάρους των έξι μαθητών είναι 432 κιλά.

β) Στην ομάδα των έξι μαθητών προστίθενται άλλοι δύο, με βάρος 77 και 83 κιλά αντίστοιχα. Να βρείτε:

i. το άθροισμα των βαρών των οκτώ μαθητών.

ii. τη μέση τιμή του βάρους των οκτώ μαθητών.

35770. Ένα ξενοδοχείο του Ναυπλίου διαθέτει 15 δωμάτια. Στο διπλανό πίνακα, καταγράφηκε ο αριθμός των κρεβατιών ανά δωμάτιο, καθώς και ο αριθμός των δωματίων που τα έχουν. Να βρείτε:

α) τη διάμεσο του αριθμού των κρεβατιών ανά δωμάτιο.

β) το συνολικό αριθμό των κρεβατιών του ξενοδοχείου.

γ) τη μέση τιμή του αριθμού των κρεβατιών ανά δωμάτιο.

Αριθμός κρεβατιών x_i	Αριθμός δωματίων v_i
1	1
2	2
3	8
4	4
Σύνολο	15

35772. Η κατανομή των ηλικιών των νέων κατασκηνοτών ενός κάμπινγκ της Αμοργού, είναι περίπου κανονική με μέση τιμή $\bar{x} = 25$ έτη και συντελεστή μεταβολής $CV = 0,08$.

α) Να βρεθεί η τυπική απόκλιση της κατανομής.

β) Να βρεθεί το εύρος των ηλικιών της κατανομής.

γ) Αν γνωρίζουμε ότι 200 είναι όλοι οι κατασκηνοτές του κάμπινγκ, να βρείτε πόσοι από αυτούς έχουν ηλικία μικρότερη από τα 25 έτη.

35774. Οι βαθμοί που έγραψε στα πέντε τεστ του 1^{ου} τετραμήνου, για το μάθημα των Μαθηματικών, ένας μαθητής της Γ' Λυκείου είναι:

12, 14, 8, 20, 16.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ της βαθμολογίας του μαθητή, για τα πέντε τεστ.

β) i. Να συμπληρώσετε τα κενά στον παρακάτω πίνακα.

ii. Αξιοποιώντας τον συμπληρωμένο πίνακα του ερωτήματος (β, i), να βρείτε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση, της βαθμολογίας του μαθητή για τα πέντε τεστ.

Βαθμός x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
12		
14		
8		
20		
16		
Σύνολο		

35779. Δίνονται οι πέντε αριθμοί 6, 5, 28, 3, 8.

- α) Να βρείτε τη μέση τιμή των παραπάνω πέντε αριθμών.
 β) Να βρείτε τη διάμεσο των παραπάνω πέντε αριθμών.
 γ) Στους παραπάνω πέντε αριθμούς, δίνεται ως έκτος, ο αριθμός 16.
 Να βρείτε τη διάμεσο των έξι αριθμών.

35780. Δίνονται οι αριθμοί: 2, 3, 4, 6, 10.

- α) Να βρεθεί η μέση τιμή τους.
 β) Να δείξετε ότι η διασπορά τους είναι $s^2 = 8$.
 γ) Να βρείτε την τυπική απόκλιση, του παραπάνω δείγματος των πέντε αριθμών.

35781. Οι υπάλληλοι μιας μεγάλης εταιρείας πετρελαιοειδών, χρησιμοποιούν το καφέ και το εστιατόριο της εταιρείας καθημερινά. Αν τα χρήματα που ξοδεύουν ακολουθούν περίπου κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x} = 10$ ευρώ και συντελεστή μεταβολής $CV = 0,2$ τότε:

- α) να δείξετε ότι η τυπική απόκλιση της κατανομής των χρημάτων που ξοδεύουν οι υπάλληλοι της εταιρείας καθημερινά, είναι $s = 2$ ευρώ.
 β) i. να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων της εταιρείας που ξοδεύει καθημερινά το πολύ 10 ευρώ.
 ii. να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων της εταιρείας που ξοδεύει καθημερινά περισσότερα από 14 ευρώ.

36570. Οι βαθμοί των γραπτών δοκιμασιών στο μάθημα των μαθηματικών ενός μαθητή είναι 14, 18, 20, 14, 12, 12, και αποτελούν τις τιμές ενός δείγματος. Η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι $s = 3$.

- α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του παραπάνω δείγματος βαθμών.
 β) Να βρείτε τη διάμεσο δ και το εύρος R του δείγματος.
 γ) Αν $\bar{x} = 15$, να υπολογίσετε την τιμή του συντελεστή μεταβολής CV .

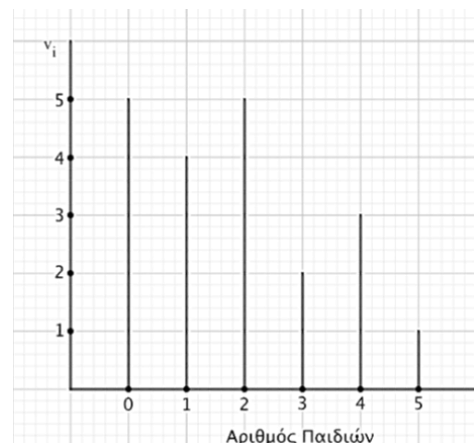
36571. Οι βαθμοί των γραπτών δοκιμασιών στο μάθημα των μαθηματικών ενός μαθητή για το Α' τετράμηνο είναι 16, 18, 18, 12, 16, 10, και αποτελούν τις τιμές ενός δείγματος. Αν η μέση τιμή των βαθμών είναι $\bar{x} = 15$ και η τιμή της διασποράς $s^2 = 9$.

- α) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση s και τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος των βαθμών.
 β) Να βρείτε τη διάμεσο δ του δείγματος.
 γ) Οι βαθμοί των γραπτών δοκιμασιών στο μάθημα των μαθηματικών του μαθητή για το Β' τετράμηνο αυξήθηκαν όλοι κατά δύο μονάδες. Να υπολογίσετε την νέα μέση τιμή των βαθμών του Β' τετράμηνου.

36813. Στο παρακάτω διάγραμμα συχνοτήτων φαίνεται ο αριθμός των παιδιών (οριζόντιος άξονας) είκοσι (20) οικογενειών.

- α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Αριθμός Παιδιών x_i	Αριθμός Οικογενειών v_i	$x_i \cdot v_i$
0		
1		
2		
3	2	6
4		
5		
Σύνολο	$v = 20$	



- β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του αριθμού των παιδιών των 20 οικογενειών.
 γ) Ποιο είναι το πλήθος των οικογενειών με τουλάχιστον 3 παιδιά;

4^ο Θέμα

32251. Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι (σε λεπτά), που χρειάζονται οι μαθητές ενός σχολείου για να πάνε το πρωί από το σπίτι τους στο σχολείο, ακολουθούν κανονική κατανομή. Δίνεται ότι ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος των χρόνων είναι $CV = 20\%$ και η διακύμανσή του $s^2 = 4$.

- α) Να δείξετε ότι η μέση τιμή $\bar{x} = 10$.
 β) Να υπολογίσετε (προσεγγιστικά), το εύρος του δείγματος των χρόνων.
 γ) Να βρείτε κατά προσέγγιση το ποσοστό των μαθητών, που χρειάζονται για να πάνε από το σπίτι τους στο σχολείο:
 i. το πολύ 10 λεπτά ii. πάνω από 14 λεπτά iii. από 6 έως 12 λεπτά.

32256. Στις τέσσερις κλάσεις του παρακάτω πίνακα, παρουσιάζονται τα χρόνια εργασίας του συνόλου των εκπαιδευτικών ενός Λυκείου της Αθήνας.

- α) Αφού μεταφέρετε στην κόλλα σας τον πίνακα, να συμπληρώσετε τα κενά του, συναρτήσει του κ , όπου αυτό είναι αναγκαίο.

Χρόνια υπηρεσίας	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$
[0, 10)		10	
[10, 20)		15	
[20, 30)		κ	
[30, 40)		5	
Σύνολο			

- β) Αν ο μέσος χρόνος εργασίας των παραπάνω εκπαιδευτικών είναι τα 19 χρόνια, να δείξετε ότι το $\kappa = 20$. Πόσοι ήταν συνολικά οι εκπαιδευτικοί του σχολείου;

Για $\kappa = 20$,

- γ) να μεταφέρετε στην κόλλα σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά.

Χρόνια υπηρεσίας	v_i	f_i	N_i	F_i	$F_i \%$
[0, 10)	10				
[10, 20)	15				
[20, 30)	20				
[30, 40)	5				
Σύνολο					

- δ) να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, και να βρείτε τη διάμεσο του χρόνου εργασίας.

32257. Η βαθμολογία δέκα μαθητών σε ένα διαγώνισμα στη Στατιστική ήταν:

10, 10, 18, 8, 20, 7, 9, 17, 11, 10.

- α) Να βρείτε το εύρος και τη διάμεσο της βαθμολογίας.
 β) Να δείξετε ότι η μέση τιμή της βαθμολογίας είναι $\bar{x} = 12$.
 γ) Να δείξετε ότι η διασπορά της βαθμολογίας είναι $s^2 = 18,8$ και να δείξετε ότι το δείγμα των βαθμών δεν είναι ομοιογενές. Δίνεται ότι: $\sqrt{18,8} \approx 4,3$.
 δ) Ένας μαθητής της τάξης ισχυριζόμενος ότι το δείγμα των βαθμών δεν είναι ομοιογενές, διατύπωσε την άποψη ότι αν σε κάθε βαθμό προσθέσουμε τον αριθμό 33, θα προκύψει ένα δείγμα αριθμών (όχι βαθμών) που θα είναι ομοιογενές. Συμφωνείτε με την άποψη του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

33573. Δύο διαφορετικά δείγματα μίας μεταβλητής X ενός πληθυσμού έχουν τις παρακάτω τιμές:

Δείγμα 1: 8, 9, 10, 11, 12 και

Δείγμα 2: 8, 10, 10, 10, 12

α) Για κάθε δείγμα να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και τη διάμεσο δ .

β) Για κάθε δείγμα να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 και την τυπική απόκλιση s .

γ) Για κάθε δείγμα να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV .

δ) Ένας μαθητής διατύπωσε την άποψη:

«Αν δύο διαφορετικά δείγματα έχουν ίδια μέση τιμή και διάμεσο, τότε εμφανίζουν και την ίδια ομοιογένεια.»

Συμφωνείτε με αυτήν την άποψη; Χρησιμοποιώντας τα δείγματα που δόθηκαν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

33631. Ένας καθηγητής Μαθηματικών που διδάσκει στο ΕΠΑΛ μιας πόλης, κατέγραψε τη βαθμολογία που πέτυχαν οι 20 μαθητές του, στις Πανελλαδικές Εξετάσεις, στην κλίμακα 0 – 20. Στη συνέχεια κατασκεύασε το διπλανό πίνακα, όπου σημείωσε τους βαθμούς που πέτυχαν οι μαθητές του (η στήλη των x_i) και το πλήθος-συχνότητα των μαθητών που τους πέτυχε (η στήλη των v_i). N_i είναι η αθροιστική συχνότητα.

Βαθμός x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$	N_i
6	3		
8	2		
10	4		
11	1		
14	5		
15	1		
18	3		
20	1		
Σύνολο	20		

α) Να συμπληρώσετε τις δύο στήλες του πίνακα που δεν έχουν συμπληρωθεί.

β) Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας, που πέτυχαν οι μαθητές του ΕΠΑΛ αυτού.

γ) Όταν ο σύλλογος των διδασκόντων του ΕΠΑΛ αυτού, συζήτησε τα αποτελέσματα που πέτυχαν οι μαθητές τους, ο καθηγητής των Μαθηματικών υποστήριξε ότι:

- το πανελλαδικό ποσοστό, όσων μαθητών έγραψε κάτω από τη βάση (κάτω από 10) ξεπερνάει το 52% και είναι υπερδιπλάσιο από το αντίστοιχο ποσοστό των μαθητών του σχολείου.
- το πανελλαδικό ποσοστό, όσων μαθητών έγραψε άριστα (από 18 έως 20) είναι μόλις το 5%, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό των μαθητών του σχολείου είναι τετραπλάσιο αυτού.

Συμφωνείτε με τις απόψεις που διατύπωσε ο Μαθηματικός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

34448. Μελετήσαμε ένα δείγμα Ι.Χ. αυτοκινήτων που κυκλοφορούν στο κέντρο της Αθήνας ως προς τον αριθμό των επιβατών συμπεριλαμβανομένου και του οδηγού. Μερικά από τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Αριθμός επιβατών x_i	Αριθμός αυτοκινήτων v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
1	50	0,125				
2	110	0,275				
3		0,3				
4	30	0,075				
5	90					
ΣΥΝΟΛΑ	$v=400$					

α) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

β) Να υπολογίσετε την μέση τιμή και τη διάμεσο του δείγματος.

γ) Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι το δείγμα είναι ομοιογενές. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του Γιάννη; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{7} = 2,65$)

34817. Στις 10 το πρωί, η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) δύο πόλεων Α και Β, το πρώτο δεκαήμερο του Μαΐου ήταν:

Πόλη Α: 20 17 18 20 17 16 17 16 18 10

Πόλη Β: 18 22 20 17 16 16 15 17 12 16

α) Να βρείτε τη μέση και τη διάμεσο θερμοκρασία των πόλεων Α και Β, για το πρώτο δεκαήμερο του Μαΐου.

β) Ο Γιάννης υπολόγισε την τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών (σε βαθμούς Κελσίου) των πόλεων Α και Β και βρήκε ότι είναι: $S_A = 2,66$ και $S_B = 2,59$

αντίστοιχα. Να δικαιολογήσετε σε ποια από τις δύο πόλεις οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη διασπορά.

γ) Εκ των υστέρων διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στην πόλη Α παρουσίαζε, λόγω κατασκευαστικού λάθους, αυξημένη θερμοκρασία κατά 5 βαθμούς. Αφού υπολογίσετε τις σωστές θερμοκρασίες της πόλης Α, να βρείτε σε ποια από τις δύο πόλεις Α και Β οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη ομοιογένεια. Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας

(Δίνεται ότι: $\frac{2,59}{16,9} = 0,153$ και $\frac{2,66}{11,9} = 0,223$).

34527. Ο κυβισμός των κινητήρων Χ, σε κυβικά εκατοστά ενός δείγματος 10000 αυτοκινήτων, ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Στο παραπάνω δείγμα βρέθηκαν 5000 αυτοκίνητα με κυβισμό μικρότερο από 1800 κυβικά εκατοστά.

α) Να αποδειχθεί ότι η μέση τιμή $\bar{x}$ του κυβισμού των κινητήρων των αυτοκινήτων του δείγματος, είναι 1800 κυβικά εκατοστά.

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι στο παραπάνω δείγμα υπάρχουν 3400 αυτοκίνητα που ο κυβισμός τους είναι από 1800 κυβικά εκατοστά έως 2000 κυβικά εκατοστά, να βρείτε την τυπική απόκλιση s του κυβισμού των κινητήρων των αυτοκινήτων του δείγματος.

γ) Να εκτιμήσετε το εύρος R του κυβισμού των κινητήρων των αυτοκινήτων του δείγματος.

35476. Μια εταιρεία απασχολεί 7 υπαλλήλους, οι 4 από αυτούς εργάζονται στο τμήμα Α και οι υπόλοιποι 3 στο τμήμα Β.

Οι μισθοί (σε ευρώ) των 4 εργαζομένων στο τμήμα Α είναι:

990, 910, 960, 940.

Ενώ των 3 εργαζομένων στο τμήμα Β είναι:

990, 980, 1000.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών των εργαζομένων στο τμήμα Α της εταιρείας.

β) Να υπολογίσετε το ποσοστό των εργαζομένων στο τμήμα Α της εταιρείας, που έχουν μισθό μικρότερο από το μέσο μισθό των εργαζομένων στο τμήμα Β.

γ) Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των μισθών των 4 εργαζομένων στο τμήμα Α είναι 960 ευρώ ενώ η μέση τιμή των μισθών των 3 εργαζομένων στο τμήμα Β είναι 990 ευρώ. Η εταιρεία θέλει να προσλάβει έναν υπάλληλο στο τμήμα Β ώστε η νέα μέση τιμή των μισθών των εργαζομένων του τμήματος Β να είναι ίση με αυτή του τμήματος Α, ποιος πρέπει να είναι ο μισθός του υπαλλήλου που θα προσληφθεί;

35092. Έστω α ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Δίνεται η παρακάτω κατανομή συχνοτήτων:

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμές x_i	v_i	$x_i v_i$
30-40		α	
40-50		2α	
50-60		3α	
60-70		4α	
Σύνολο		10α	

α) i. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα, αφού τον μεταφέρετε στην κόλλα σας.

ii. Να δείξετε ότι η μέση τιμή της κατανομής είναι $\bar{x} = 55$.

β) i. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, αφού τον μεταφέρετε στην κόλλα σας.

Κλάσεις [-)	Κεντρικές τιμή x_i	v_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
30-40		α			
40-50		2α			
50-60		3α			
60-70		4α			
Σύνολο		10α			

ii. Να βρείτε την διακύμανση s^2 της κατανομής.

γ) Να βρείτε την μέση τιμή και την διακύμανση της κατανομής συχνοτήτων του παρακάτω πίνακα.

Κλάσεις [-)	v_i
30-40	10
40-50	20
50-60	30
60-70	40
Σύνολο	100

35477. Ο χρόνος αναμονής των πολιτών μέχρι να εξυπηρετηθούν σε μια δημόσια υπηρεσία ακολουθεί την κανονική κατανομή, με μέση τιμή 5 λεπτά και τυπική απόκλιση 1 λεπτό.

α) Να βρείτε πόσο είναι περίπου το ποσοστό των πολιτών που εξυπηρετούνται σε χρόνο:

i. Από 4 έως 6 λεπτά. **ii.** Από 3 έως 6 λεπτά.

β) Αν το πλήθος των πολιτών που εξυπηρετήθηκαν το μήνα Μάιο σε αυτή την υπηρεσία ήταν 5000 πόσοι περίπου πολίτες περίμεναν από 5 έως 6 λεπτά μέχρι να εξυπηρετηθούν;

γ) Να εκτιμήσετε το εύρος της κατανομής του χρόνου αναμονής των πολιτών.

δ) Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής της κατανομής του χρόνου αναμονής.

35478. Οι χρόνοι σε λεπτά, που

χρειάστηκαν οι μαθητές

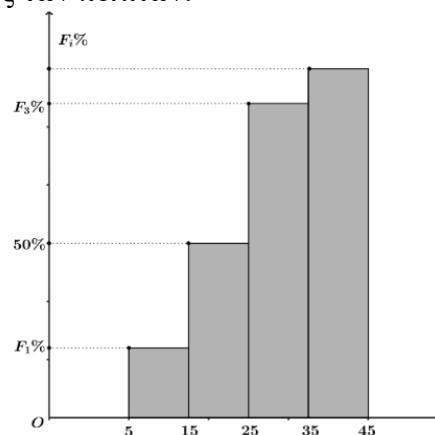
μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό

πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα $[5,45)$ και έχουν

ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα

των χρόνων εμφανίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα

αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.



α) Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

β) i. Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι $\alpha=8$.

ii. και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας.

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5,15)		$\alpha+4$			
[15,25)		$3\alpha-6$			
[25,35)		$2\alpha+8$			
[35,45)		$\alpha-2$			
Σύνολο					

36971. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 20 \cdot s \cdot x^2 - 2 \cdot \bar{x} \cdot x + 3$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $\bar{x}$, s η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα ενός δείγματος n παρατηρήσεων.

α) Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f .

Αν ισχύει ότι $f'(1) = 0$, τότε:

β) Να δείξετε ότι το δείγμα των n παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $s = 1$, τότε να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων.

δ) Για $s = 1$ και $\bar{x} = 20$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.