ΝΕΑ

ΕΚΔΟΣΗ 2020

Μαθηματικά Γ΄Λυκείου ΕΠΑΛ

Επιμέλεια : Μπέκας Χρήστος

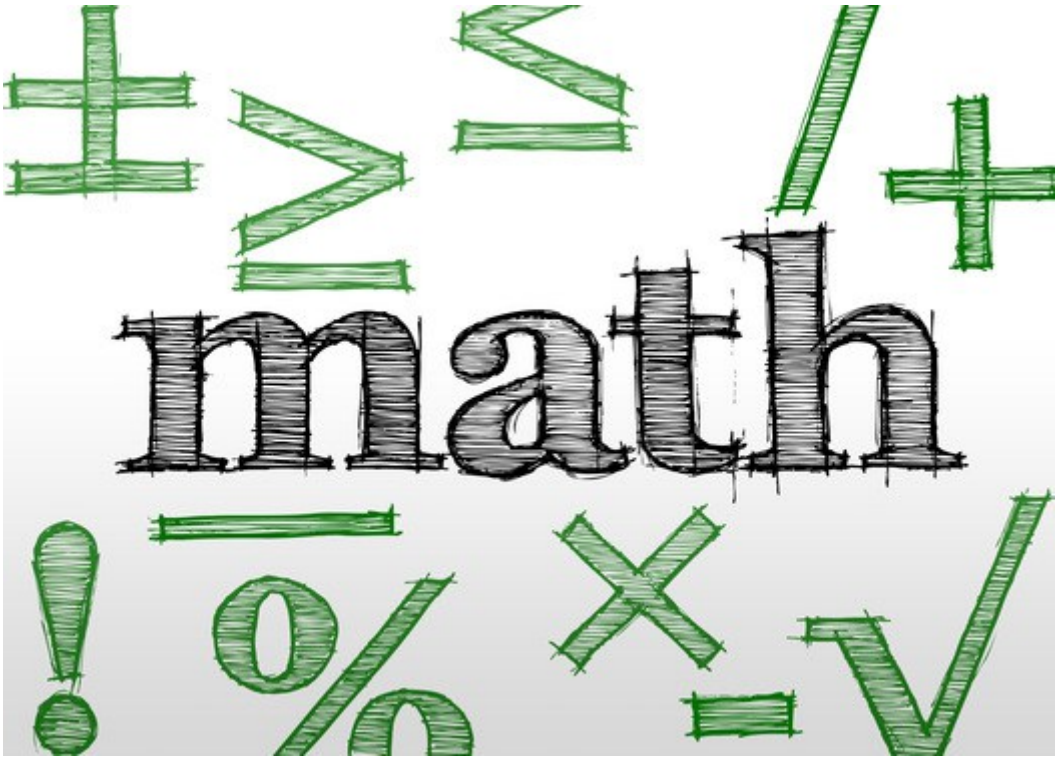
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 0ο (ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο (ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο (ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ)

(ΚΕΦΑΛΑΙΟ 0ο)

ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ



ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

- $(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$
- $(\alpha \pm \beta)^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3$
- $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha \pm \beta)^2 \mp 2\alpha\beta$
- $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)\cdot(\alpha + \beta)$
- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)\cdot(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)\cdot(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
- $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Θυμίζουμε τις βασικές μεθόδους μετατροπής πολυωνύμου σε γινόμενο:

α) Κοινός παράγοντας

Βγάζουμε κοινό παράγοντα από όλους τους όρους ή κατά ομάδες.

Παραδείγματα

- $3x^2 + x = x(3x + 1)$
- $9x^2 + 3x = 3x(3x + 1)$
- $x^3 + 3x^2 - x - 3 = x^2(x + 3) - (x + 3) = (x + 3)(x^2 - 1)$

β) Ταυτότητες

Χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες:

- $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$
- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

Παραδείγματα

- $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$
- $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
- $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

γ) Τριώνυμο

Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ γράφεται:

- $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$, όπου x_1,x_2 οι ρίζες αν $\Delta>0$
- $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_0)^2$, όπου x_0 η διπλή ρίζα αν $\Delta=0$

Παράδειγμα

- $x^2-5x+6=1(x-2)(x-3)$

δ) Σχήμα Horner

Χρησιμοποιείται όταν το τριώνυμο είναι δευτέρου ή ανώτερου βαθμού:

Παράδειγμα

- $2x^3+x^2+1=(x+1)(2x^2-x+1)$

2	1	0	1	-1
↓	-2	1	-1	
2	-1	1	0	

ΑΠΟΛΥΤΑ – ΡΙΖΕΣ

- $|x|=\begin{cases} x & ,x\geq 0 \\ -x & ,x<0 \end{cases}$
- Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού x είναι ο ίδιος ο αριθμός.
- Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού x είναι ο αντίθετος αριθμός.
- $|x|\geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.
- $|x|\geq -x$ και $|x|\geq x$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.
- Με συνδυασμό των παραπάνω έχουμε: $-|x|\leq x\leq |x|$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.
- $|x|\leq\theta\Leftrightarrow -\theta\leq x\leq\theta$, αν $\theta\geq 0$.
- $|x|\geq\theta\Leftrightarrow x\geq\theta$ ή $x\leq -\theta$, αν $\theta\geq 0$.
- $|x|=\theta\Leftrightarrow x=\theta$ ή $x=-\theta$, αν $\theta\geq 0$.
- $\big||\alpha|-|\beta|\big|\leq|\alpha\pm\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
- $\sqrt[2\nu]{x^{2\nu}}=|x|$, $x\in\mathbb{R}$ και $\mu,\nu\in\mathbb{N}^*$.
- $\sqrt[\nu]{x^{\nu}}=x$, $x\geq 0$ και $\nu\in\mathbb{N}^*$.
- $\sqrt[\nu]{x^{\mu}}=x^{\frac{\mu}{\nu}}$, $x\geq 0$ και $\mu,\nu\in\mathbb{N}^*$.

ΔΙΑΤΑΞΗ

- Οι θετικοί και αντίστροφοι αριθμοί έχουν άθροισμα μεγαλύτερο του 2, δηλαδή: $x+\frac{1}{x}\geq 2$ για κάθε $x>0$.
- Οι αρνητικοί και αντίστροφοι αριθμοί έχουν άθροισμα μικρότερο του -2, δηλαδή $x+\frac{1}{x}\leq -2$ για κάθε $x<0$.
- Οι περιττές δυνάμεις άνισων αριθμών είναι ομοιοτρόπως άνισες:
  Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τότε $\alpha<\beta\Leftrightarrow\alpha^{2\nu+1}<\beta^{2\nu+1}$ όπου ν θετικός ακέραιος.
  Προσοχή!! Αυτό ισχύει για τις άρτιες δυνάμεις μόνο αν α,β θετικοί αριθμοί.
  Δηλαδή αν $0<\alpha<\beta\Leftrightarrow\alpha^{2\nu}<\beta^{2\nu}$.
- Οι αντίστροφοι ομόσημων αριθμών είναι αντιστρόφως άνισοι:
  Αν α,β ομόσημοι, με $\alpha<\beta\Leftrightarrow\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$.

ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ

- $[\alpha,\beta]=\{\chi\,/\,\alpha\leq\chi\leq\beta\}$ κλειστό διάστημα
- $(\alpha,\beta)=\{\chi\,/\,\alpha<\chi<\beta\}$ ανοικτό διάστημα
- $(\alpha,\beta]=\{\chi\,/\,\alpha<\chi\leq\beta\}$ ανοικτό-κλειστό διάστημα
- $[\alpha,\beta)=\{\chi\,/\,\alpha\leq\chi<\beta\}$ κλειστό-ανοικτό διάστημα

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν ένα διάστημα έχει ως άκρο το $+\infty$ ή το $-\infty$, τότε αυτό το άκρο είναι πάντα ανοικτό (στα μαθηματικά το ∞ είναι συμβολισμός και όχι αριθμός, άρα δεν μπορεί ο αριθμός x να είναι ίσος μ' αυτό).

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Α. Εξίσωση 1ου βαθμού

Έστω η εξίσωση $ax+\beta=0$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Τότε:

- Αν $\alpha\neq 0$ έχει μοναδική λύση την $x=-\frac{\beta}{\alpha}$.
- Αν $\alpha=0$ και $\beta\neq 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.
- Αν $\alpha=0$ και $\beta=0$ είναι αόριστη ή ταυτότητα ή έχει άπειρες λύσεις.

Β. Εξίσωση 2ου βαθμού

Έστω η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}^*$ και $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

Ι . Ρίζες

Για την εύρεση των ριζών χρησιμοποιούμε την παράσταση $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ που ονομάζεται διακρίνουσα.

- Αν $\Delta>0$ τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες: $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν $\Delta=0$ τότε η εξίσωση έχει μία διπλή πραγματική ρίζα: $x_0=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$
- Αν $\Delta<0$ τότε δεν υπάρχουν πραγματικές ρίζες .

ΙΙ. Σχέσεις ριζών

Αν x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, τότε

$S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$, $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$ (οι παραπάνω ονομάζονται τύποι του Vieta).

Γ. Εξίσωση ανωτέρου βαθμού

Κάθε εξίσωση από τρίτου βαθμού και πάνω θα καλείται πλέον ανωτέρου βαθμού. Όσο αναφορά την λύση τους δεν γνωρίζουμε κάποιο ειδικό τρόπο επίλυσης πέραν της παραγοντοποίησης.

Αφού εκτελέσουμε τις σημειωμένες πράξεις πηγαίνουμε όλους τους όρους στο ένα μέλος και κάνουμε παραγοντοποίηση.

Μετά απ' αυτό θα έχουμε μία παράσταση της μορφής:

$$A_1(x)\cdot A_2(x)\cdot\ldots\cdot A_v(x)=0\Rightarrow\begin{cases}A_1(x)=0\\A_2(x)=0\\\quad\ldots\\A_v(x)=0\end{cases}.$$

Η παραγοντοποίηση εκτελείται με τις κλασικές μεθόδους ή με το σχήμα Horner.

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Α. Ανισώσεις 1ου βαθμού

Έστω η ανίσωση $\alpha x+\beta>0$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

- Αν $\alpha>0$ τότε $x>-\frac{\beta}{\alpha}$.
- Αν $\alpha<0$ τότε $x<-\frac{\beta}{\alpha}$.
- Αν $\alpha=0$ τότε $0\cdot x>-\beta$ και η λύση εξαρτάται από το β (Αδύνατη αν $\beta\le 0$ ή Αόριστη αν $\beta>0$).

Ένας άλλος τρόπος επίλυσης (που θα προτιμούμε) είναι η επίλυση μέσω πίνακα . Αν δηλαδή έχουμε την ανίσωση $\alpha\chi+\beta>0$, πρώτα λύνουμε την εξίσωση $\alpha\chi+\beta=0$ και:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$\alpha x+\beta$	ετερόσημο του α	0	ομόσημο του α

Β . Ανισώσεις 2ου βαθμού

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την ανίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$ με $\alpha\in\mathbb{R}^*$ και $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ Τότε:

Αν $\Delta>0$, υπάρχουν δύο ρίζες, έστω x_1,x_2 (με $x_1<x_2$) και ισχύει:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$	ομόσημο του α	0 ετερόσημο του α	0	ομόσημο του α

Αν $\Delta=0$, υπάρχει διπλή ρίζα, έστω το x_o και ισχύει:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$	ομόσημο του α	0	ομόσημο του α

Αν $\Delta<0$, δεν υπάρχουν πραγματικές ρίζες και το τριώνυμο είναι παντού ομόσημο του α.

x	$-\infty$	$+\infty$
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$	ομόσημο του α	

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Α. Βασικές τριγωνομετρικές σχέσεις

- $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\eta\mu^2\omega=1-\sigma\upsilon\nu^2\omega\\ \sigma\upsilon\nu^2\omega=1-\eta\mu^2\omega\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\eta\mu\omega=\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega}\\ \sigma\upsilon\nu\omega=\pm\sqrt{1-\eta\mu^2\omega}\end{cases}$.
- $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ και $\sigma\varphi\omega=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$.
- $\varepsilon\varphi\omega\cdot\sigma\varphi\omega=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{1}{\sigma\varphi\omega}\\ \sigma\varphi\omega=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\omega}\end{cases}$.
- $\sigma\upsilon\nu^2\omega=\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$ και $\eta\mu^2\omega=\dfrac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$.

Β. Βασικές Τριγωνομετρικές εξισώσεις

- $\eta\mu x=\eta\mu\theta \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\kappa\pi+\theta\\ \text{ή}\\ x=2\kappa\pi+\pi-\theta\end{cases}$ με $\kappa\in\mathbb{Z}$.
- $\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\kappa\pi+\theta\\ \text{ή}\\ x=2\kappa\pi-\theta\end{cases}$ με $\kappa\in\mathbb{Z}$.
- $\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\theta$ με $\kappa\in\mathbb{Z}$.
- $\sigma\varphi x=\sigma\varphi\theta \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\theta$ με $\kappa\in\mathbb{Z}$.

Γ. Βασικοί τριγωνομετρικοί αριθμοί

	30°	45°	60°
ημ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συν	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
σφ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

0°	90°	180°	270°
0	1	0	−1
1	0	−1	0
0	–	0	–
–	0	–	0

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΠΡΑΞΕΙΣ

1) Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

α) $2x+3x+4x-5x=$

β) $3xy-4xy-2xz+3xz=$

γ) $3x^2y-4x^2y+4xy^2=$

δ) $2x-3x-4y-2y-15=$

2) Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $-2^4=....$ β) $(-2)^3=....$ γ) $-2^3=....$ δ) $(-2)^4=....$

3) Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

$A=\left[(-2)^{-3}\right]^2$ $\quad \Gamma=-\left[(-2)^3\right]^2$ $\quad E=\left(-2^2\right)^3$

$B=\left[(-2)^3\right]^2$ $\quad \Delta=(-1)^2\cdot(-2)^3$

4) Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x^3+4x^2+3x-1$ και $Q(x)=x^4-2x^3+3$.

Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $P(x)+Q(x)$

β) $P(x)-Q(x)$

γ) $P(-x)$

δ) $P(x)-P(-x)$

ε) $Q(2x)$

στ) $2P(x)+3Q(x)$

ζ) $P(x)\cdot Q(x)$

η) $P(-1)+Q(-1)$

5) Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(x+2)\cdot(x+3)-x(x+5)-5$

β) $(x-1)(x+4)+6-x(x+3)$

γ) $(x-4)(x-5)+x(9-x)-17$

δ) $(2x+3)(2x-3)-4(x^2-4)$

6) Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις.

α) $6\alpha x+3\alpha$

β) $2\alpha^5-10\alpha$

γ) $24\kappa^2\lambda-16\kappa\lambda^2$

δ) $15\mu^2+20\mu$

ε) $220\omega^2+33\omega^3$

στ) $3x^2-9x+12x^3$

ζ) $26\mu^2-39\mu$

η) $25z^2-75z$

θ) $\alpha^2-\alpha$

ι) $\alpha^3-\alpha^2-\alpha$

ια) $14\alpha^2+49\alpha\beta+70\alpha\beta^3$

ιβ) $4\nu\rho-6\nu^2\rho^3+8\rho^2\nu$

ιγ) x^2-16y^2

ιδ) $25x^2-4$

ιε) $81k^2-9x^2$

ιστ) $25x^2y^2-16$

ιζ) x^4-16y^4

ιη) x^4-1

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

7) Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2x = 4$
β) $6x = 0$
γ) $0x = 3$
δ) $0x = 0$
ε) $5x = -25$
στ) $-7x = 1$
ζ) $4x + 3 = 7$
η) $-2x + 4 = 0$
θ) $5x + 7 = -3$
ι) $-7x + 2 = 43$
ια) $-0.5x + 2 = -0.15$

8) Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $6x - 2(-x + 5) = 20 - 3(x - 1)$
β) $6x - 4(-5 - x) + 4 = -2(3x - 4)$
γ) $12x - 4(3x - 2) = 6(-2x - 3) + 15$
δ) $2(2 - 2x) = 2(-6 - 2x)$
ε) $4\omega - 3 = -3 + \omega$
στ) $4(x - 1) - 8x + 1 = 10(x - 9) - 9(x - 8)$
ζ) $8x - 4(3x - 1) = 1 - (4x + 1)$

9) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $\frac{7x+4}{5} - x = \frac{3x-5}{2}$
β) $\frac{2x-5}{3} - \frac{5x-3}{4} + \frac{8}{3} = 0$
γ) $\frac{5y-3}{2} - \frac{3y}{4} = y - 5$
δ) $\frac{5x-7}{2} - \frac{2x+7}{3} = 3x - 14$

10) Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $x^2 - x = 0$
ii) $x^2 + 2x = 0$
iii) $x^2 - 3x = 0$
iv) $2x^2 - 4x = 0$
v) $3x^2 + 9x = 0$
vi) $-x^2 + 6x = 0$
vii) $x^2 - 1 = 0$
viii) $x^2 - 4 = 0$
ix) $x^2 - 9 = 0$
x) $x^2 - 25 = 0$
xi) $x^3 - 4x = 0$
xii) $x^2 + 1 = 0$
xiii) $4x^2 - 1 = 0$
xiv) $9x^2 - 25 = 0$
xv) $x^3 - 4x^2 = 0$

11) Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $2x^2 + x - 15 = 0$
ii) $5x^2 - 18x - 8 = 0$
iii) $x^2 - 6x + 7 = 0$
iv) $x^2 + 3x - 10 = 0$
v) $x^2 - 3x + 5 = 0$
vi) $-x^2 + x + 6 = 0$
vii) $-2x^2 + 6x - 4 = 0$
viii) $4x^2 - 3x - 1 = 0$
ix) $9x - x^2 = 20$
x) $x^2 = 7x - 6$

12) Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

i) $x^2 - 5x + 6$
ii) $x^2 + 7x + 6$
iii) $x^2 - 4x + 3$
iv) $x^2 + 5x + 4$
v) $x^2 - x - 12$
vi) $x^2 + 3x - 4$
vii) $2x^2 + 2x - 84$
viii) $x^2 - 2x - 15$

13) Να απλοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις:

α) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+5x-4}$

β) $\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-5x-3}$

γ) $\dfrac{2x^2+x-6}{4x^2-12x+9}$

δ) $\dfrac{9x^2-6x+1}{3x^2+8x-3}$

ε) $\dfrac{6x^2-7x-3}{3x^2+7x+2}$

στ) $\dfrac{-x^2+4x+5}{-2x^2+2x+4}$

14) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $(x^2+x)^4-(x^2+x)^2-6=0$

β) $(8x^3+27)\cdot(3x^4-48)=0$

γ) $\dfrac{x^2}{4}-x+1=0$

δ) $\sqrt{x-3}=4$

ε) $(x^2-1)-(x+1)\cdot(x-1)^2=0$

στ) $x(x^2-4)-(2-x)=0$

ζ) $(x^2+3x+2)^2+(x+1)^2=0$

η) $\dfrac{2x^2+x-1}{9x^2+36x+13}=0$

15) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $|x-3|=-4$

β) $x^2+3|x|+2=0$

γ) $|x-4|=3x-2$

δ) $2-|3x+6|=5$

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

16) Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $2x-3<x-1$

β) $-3x+5-x<-8x+3$

γ) $2-3x\geq 3x-10$

δ) $5-x>6-2x+x-3$

17) Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $2(x-3)+x<-3(5x-1)-2$

β) $-3(2x-1)+3(x-1)\geq 0$

γ) $3x-2(x-5)>7-(x-2)$

δ) $x+2(3-5x)\leq x-(10x-4)$

18) Να βρεθεί το πρόσημο των παρακάτω τριωνύμων:

α) x^2-4x+4

β) x^2-6x+9

γ) x^2-5x+6

δ) $2x^2-7x+5$

ε) x^2+x-1

στ) x^2+x+5

19) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $x^2-6x>0$

β) $9x^2-1\leq 0$

γ) $x^2+21<0$

δ) $x^2-7x+6>0$

ε) $x^2-5x+4<0$

στ) $2x^2-5x+2<0$

ζ) $x^2 + x - 2 \geq 0$

η) $x^2 - 6x + 5 \leq 0$

20) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $4 - |2x - 3| > 2$

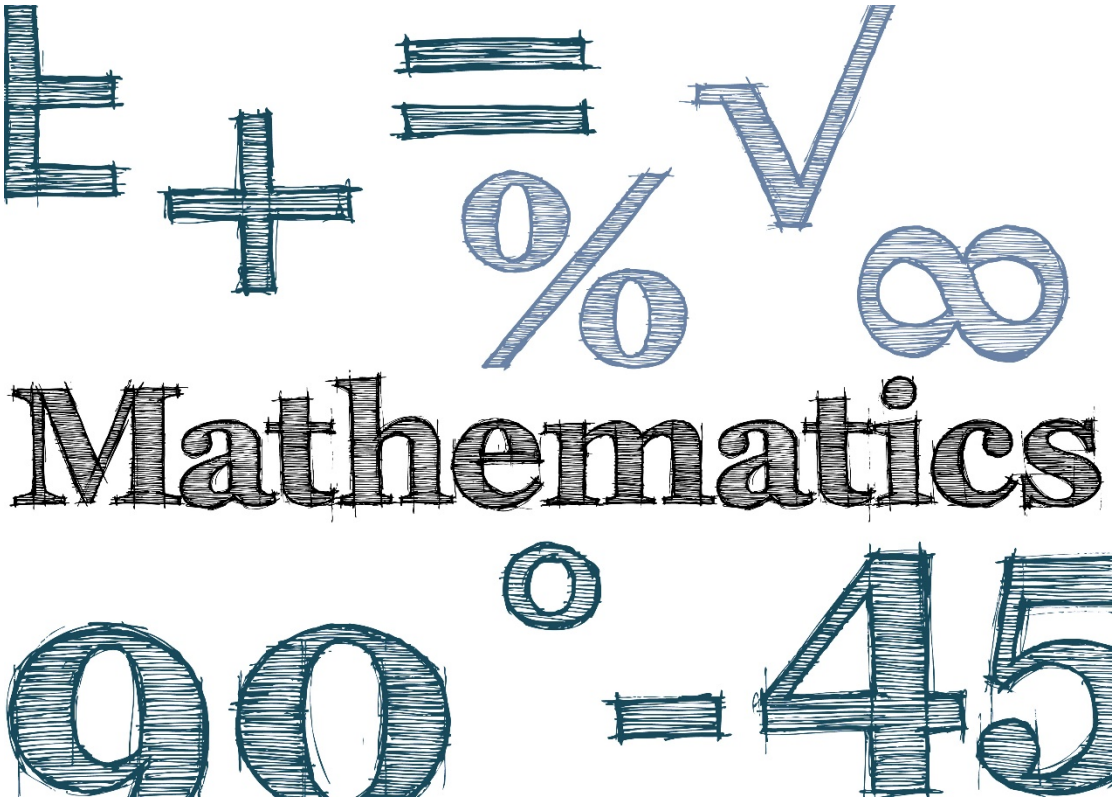
β) $|2x - 1| + 3 \geq 0$

γ) $3 + |x + 1| < 2$

δ) $\frac{2|x| - 3}{2} + 3 \geq \frac{|x| + 2}{3}$

(ΚΕΦΑΛΑΙΟ $1^{Ο}$)

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ



ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.1 (ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ)

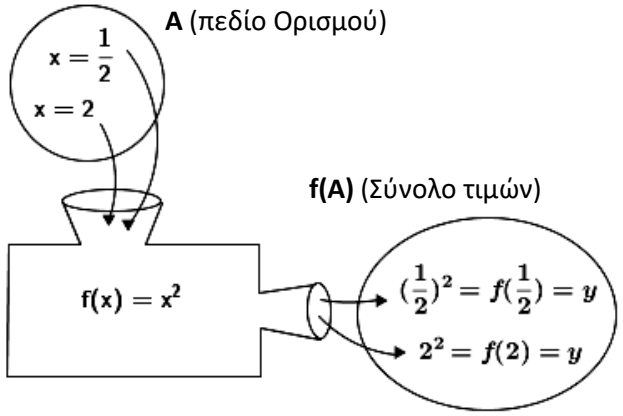
ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

1) Η έννοια της συνάρτησης, πεδίο ορισμού
2) Μονοτονία ακρότατα
3) Όριο
4) Συνέχεια

1ΟΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Σχηματικά η ιδέα του μηχανισμού μιας συνάρτησης αποδίδεται ως μια μηχανή



- $x \in A$ ανεξάρτητη μεταβλητή.
- $y \in f(A)$ εξαρτημένη μεταβλητή.
- $A \subseteq \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση
  $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ πραγματικής μεταβλητής
- Η συνάρτηση συμβολίζεται συνήθως με f, g, h, φ, σ, κ.λ.π.
- Για να εκφράσουμε την διαδικασία της συνάρτησης γράφουμε:
  $f : A \to R \quad , \quad x \to y = f(x)$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Συνάρτηση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία απεικονίζουμε τα στοιχεία ενός συνόλου Α, στα στοιχεία ενός συνόλου Β, έτσι ώστε, κάθε στοιχείο του συνόλου Α να αντιστοιχίζεται σε ένα και μόνο στοιχείο του συνόλου Β.

ΤΙΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ x_0

Στη συνάρτηση $f : A \to B$, κάθε στοιχείο y_o του συνόλου Β, στο οποίο αντιστοιχίζεται στοιχείο x_o του πεδίου ορισμού, λέγεται τιμή της f στο x_o και συμβολίζεται $f(x_o)$.

Παράδειγμα 1ο : Να βρεθούν οι τιμές των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\sqrt{4-x}$, για $x_o=2$ ii) $g(x)=\dfrac{5x+3}{x^2-5x+6}$, για $x_o=1$

Λύση

i) Για $x=2$ έχουμε $f(2)=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$.

ii) Για $x=1$ έχουμε $g(1)=\dfrac{5\cdot 1+3}{1^2-5\cdot 1+6}=\dfrac{8}{2}=4$.

Παράδειγμα 2ο : Να βρεθούν οι τιμές της συνάρτησης:

$f(x)=\begin{cases}-3x^2+2 & , x\geq 0\\ x+2 & , x<0\end{cases}$, για τις τιμές $x_o=-1, x_o=0$.

Λύση

Για x=-1 έχουμε $f(-1)=-1+2=1$.

Για x=0 έχουμε $f(0)=-3\cdot 0^2+2=2$.

ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ

Όταν το f(x) εκφράζεται μόνο με ένα αλγεβρικό τύπο, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το ευρύτερο υποσύνολο του R στο οποίο η f(x) έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Για να βρούμε το πεδίο ορισμού βρίσκουμε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες το f(x) έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΥΡΕΣΗΣ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ

1Η ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ

Αν η συνάρτηση είναι πολυωνυμικής μορφής τότε το πεδίο ορισμού της θα είναι ολόκληρο το R.

Δηλ. $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}x^{\nu-2}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$, A=R.

Παράδειγμα 3ο : Βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)=3x^4-3x+5$

Λύση

Το πεδίο ορισμού είναι όλο το R .

2Η ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ

Αν η συνάρτηση είναι ρητή (κλασματική) με παρονομαστή $B(x)$ τότε πρέπει:

$B(x) \neq 0$ Δηλ. αν $f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ πρέπει: $B(x) \neq 0$ και το πεδίο ορισμού έχει την μορφή $A = \mathbb{R} - \underset{\text{ρίζες του } B(x)}{\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, ...\}}$.

Παράδειγμα 4ο : Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 3x + 2}$.

Λύση

Πρέπει: $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq 2$.

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} x_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1 \end{matrix}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι: $A = \mathbb{R} - \{1, 2\}$.

3Η ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ

Αν η συνάρτηση περιέχει ριζικό $f(x) = \sqrt[\nu]{\Phi(x)}$ τότε πρέπει: $\Phi(x) \geq 0$ και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι: $A = \{x \in \mathbb{R} : \Phi(x) \geq 0\}$.

Παράδειγμα 5ο : Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Λύση

Πρέπει: $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Επειδή $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Παράδειγμα 6ο : Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\dfrac{5x+3}{x^2-5x+6}$ ii) $g(x)=\sqrt{|x|-4}-3$

Λύση

i) Πρέπει $x^2-5x+6\neq 0$. Οι ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης είναι το x=2 , x=3
Επομένως το Π.Ο. είναι: $A=\mathbb{R}-\{2,3\}$.

ii) Πρέπει $|x|-4\geq 0 \Leftrightarrow |x|\geq 4 \Leftrightarrow x\leq -4$ ή $x\geq 4$.

Επομένως το Π.Ο. είναι: $A=(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$.

4Η ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ

Αν $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in A_1 \\ f_2(x), & x\in A_2 \end{cases}$ (πολλαπλού τύπου)

το πεδίο ορισμού της f είναι: $A=A_1\cup A_2$.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Εάν f/A και g/B συναρτήσεις με το ίδιο πεδίο ορισμού $(A\equiv B)$ ή κοινό $(A\cap B\neq\varnothing)$ τότε θα ορίζουμε τις παρακάτω πράξεις:

- $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ άθροισμα των f,g
- $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ διαφορά των f,g
- $(-f)(x)=-f(x)$ αντίθετη της f
- $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ γινόμενο των f,g
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, με $g(x)\neq 0$ πηλίκο των f,g

Αντιπαράδειγμα

Αναφέραμε ότι εάν δεν υπάρχει κοινό πεδίο ορισμού οι παραπάνω πράξεις δεν ορίζονται για παράδειγμα:

Εαν $f:[4,7]\to\mathbb{R}$ και $g:[-5,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=2x+1$ και $g(x)=x^2$ αντίστοιχα τότε δεν ορίζετε η συνάρτηση $(f+g)(x)$, αφού $A\cap B\equiv[4,7]\cap[-5,1]=\varnothing$.

Παράδειγμα 7ο : Αν $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}$ να ορίσετε τις συναρτήσεις : $f\pm g$, $f\cdot g$.

Λύση

Πεδίο ορισμού της f: Πρέπει $x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$, άρα $A=\mathbb{R}-\{1\}$.

Πεδίο ορισμού της g: Πρέπει $x\neq 0$, άρα $B=\mathbb{R}-\{0\}$ ή $B=\mathbb{R}^*$.

Βρίσκουμε το $A\cap B=\mathbb{R}-\{0,1\}$ και ορίζουμε:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x}=\frac{x^2+x-1}{x(x-1)} \quad \text{με} \quad x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{x^2-x+1}{x(x-1)} \quad \text{με} \quad x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\frac{x}{x-1}\cdot\frac{1}{x}=\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x-1)}=\frac{1}{x-1} \quad \text{με} \quad x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$$

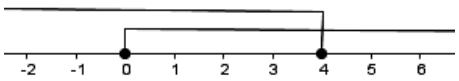
Παράδειγμα 8ο : Αν $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=\sqrt{4-x}$ να ορίσετε τις συναρτήσεις: $f+g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$.

Λύση

Πεδίο ορισμού της f: Πρέπει $x\geq 0$, άρα $A=[0,+\infty)$

Πεδίο ορισμού της g: Πρέπει $4-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 4$, άρα $B=(-\infty,4]$

Βρίσκουμε το $A\cap B=[0,4]\neq\varnothing$ και ορίζουμε:



$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x}+\sqrt{4-x} \quad \text{με} \quad x\in[0,4]$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{4-x}=\sqrt{x\cdot(4-x)}=\sqrt{4x-x^2} \quad \text{με} \quad x\in[0,4]$$

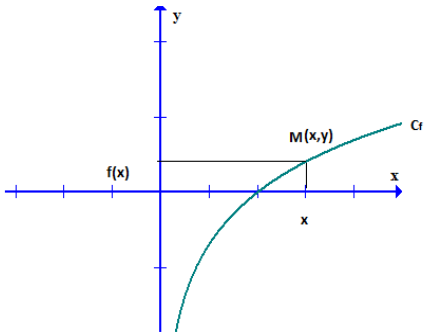
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}}=\sqrt{\frac{x}{4-x}}$$

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της πρέπει: $x\in[0,4]$ και $g(x)\neq 0$,

δηλαδή $\sqrt{4-x}\neq 0\Leftrightarrow 4-x\neq 0\Leftrightarrow x\neq 4$ άρα $x\in[0,4)$.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με Π.Ο. ένα σύνολο Α ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου Μ(x,y) για τα οποία είναι y=f(x).



Σημείωση

Η εξίσωση y=f(x) επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x,y) και x, y πλέον θα είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου της γραφικής παράστασης της f.

Η εξίσωση y=f(x) καλείται δε και ως εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.

Επίσης, σύμφωνα με τον ορισμό της συνάρτησης για να είναι μία γραμμή του επιπέδου γραφική παράσταση συνάρτησης, θα πρέπει κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$ να την τέμνει σε ένα το πολύ σημείο.

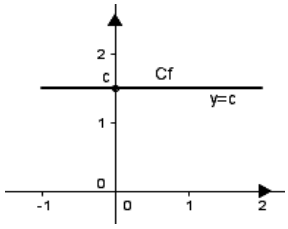
Για παράδειγμα, ο κύκλος δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Το σημείο Α(α,β) ανήκει στη γραφική παράσταση της f αν και μόνο αν f(α)=β.
2. Η C_f τέμνει τον xx' όταν $f(x)=0$.
3. Η C_f τέμνει τον yy' όταν $f(0)=y$
4. Η C_f βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον xx' όταν $f(x)>0$ ή $f(x)<0$.
5. Η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g όταν $f(x)>g(x)$.
6. Η C_f έχει κοινές τετμημένες με την C_g όταν $f(x)=g(x)$.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Α) Η ευθεία f(x)=c , c ∈ R

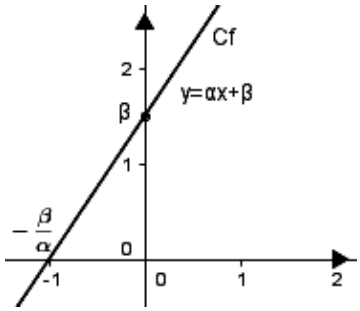


Πεδίο ορισμού: A=R.

Σύνολο τιμών: f(A)=R.

Γραφική παράσταση: Από το y=c φέρουμε παράλληλη προς τον άξονα xx'.

Β) Η ευθεία f(x)=αx+β



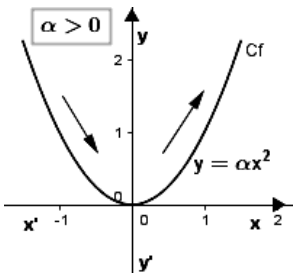
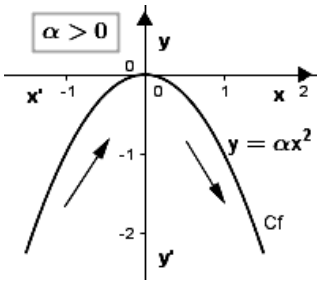
Πεδίο ορισμού: A=R.

Σύνολο τιμών: f(A)=R.

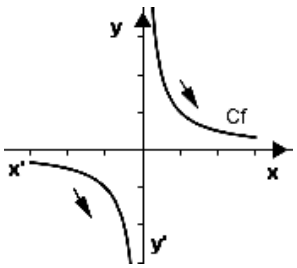
Γραφική παράσταση: βρίσκουμε δύο σημεία (συνήθως τα σημεία τομής με τους άξονες)

- Για x=0 τότε y=β
- Για y=0 τότε $\alpha x+\beta=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\beta}{\alpha}$

Γ) Η παραβολή $f(x)=\alpha x^2$

	
Πεδίο ορισμού : $A=\mathbb{R}$ Σύνολο τιμών : $f(A)=[0,+\infty)$ Ελάχιστο το $f(0)=0$ Γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ Γνήσια αύξουσα στο $[0,+\infty)$ Άξονας συμμετρίας ο yy'	Πεδίο ορισμού : $A=\mathbb{R}$ Σύνολο τιμών : $f(A)=(-\infty,0]$ Μέγιστο το $f(0)=0$ Γνήσια αύξουσα στο $(-\infty,0]$ Γνήσια φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ Άξονας συμμετρίας ο yy'

Δ) Η υπερβολή $f(x)=\frac{1}{x}$



Πεδίο ορισμού: $A=\mathbb{R}^*$ ή $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

Σύνολο τιμών: $f(A)=\mathbb{R}^*$

Γνήσια φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$

Ασύμπτωτες οι άξονες xx' και yy'

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ 1 ΑΠΟ 4

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

(Α΄ Ομάδα)

1) Έστω $f(x)=x^3+3\lambda x^2+4x-2\lambda+1$. Αν $f(-2)=5$ να βρεθεί ο $\lambda\in R$.

2) Έστω $f(x)=3x^2-(4\lambda-1)x-\lambda+2$. Αν $f(-1)=2\lambda+7$ να βρεθεί ο $\lambda\in R$.

3) Έστω $f(x)=3\kappa x^2-\lambda x+1$. Αν $f(1)=5$ και $f(2)=15$ βρείτε τους αριθμούς κ,λ

[Απ: κ=2 , λ=5]

4) Να προσδιορισθεί $\lambda\in\mathbb{R}$ αν το διάγραμμα της f με τύπο $f(x)=\lambda x^3-(2\lambda+1)x^2+5x-\lambda+2$ περνάει από το σημείο $A(-1,3)$.

[Απ: $\lambda=-\frac{7}{4}$]

5) Να προσδιορισθεί ο $\mu\in\mathbb{R}$ αν το διάγραμμα της f με τύπο $f(x)=x^2+(2\mu+1)x-4$ περνάει από το σημείο $A(-1,8-\mu)$.

[Απ: $\mu=-12$]

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(2\kappa-1)x^3-(\kappa-\lambda)x^2+2x-1$. Να υπολογισθούν τα $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ αν το διάγραμμα της f περνάει από τα σημεία $A(1,0)$ και $B(-1,2)$.

[Απ: κ=-1,λ=1]

7) Δίνεται $f(x)=\begin{cases}4x^2-\alpha x-2\beta+1 & ,x\le 1\\ (2\alpha+1)x-\beta+3 & ,x>1\end{cases}$.

Να υπολογισθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ αν ισχύουν $f(-1)+f(0)=6$ και $f(2)-f(1)=42$.

8) Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$, $g(x)=\frac{x}{x-1}$.

Να ορισθούν οι συναρτήσεις $f-g$, $f\cdot g$, $\frac{g}{f}$.

[Απ: $(f+g)(x)=\frac{-x^2-1}{x^2-1}$, $(f\cdot g)(x)=\frac{x}{x^2-1}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$]

9) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+x+4$ και $g(x)=x^2-4$ να ορίσετε τις συναρτήσεις: $f+g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$.

[Απ : $(f+g)(x)=2x^2+x,\quad x\in\mathbb{R}$ $(f\cdot g)(x)=x^4+x^3-4x-16,\quad x\in\mathbb{R}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2+x+4}{x^2-4},\quad x\in\mathbb{R}-\{\pm 2\}$]

10) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$ να ορίσετε τις συναρτήσεις: $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$.

[Απ: $(f+g)(x)=\dfrac{1}{x(1-x)}$, $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$ $(f-g)(x)=\dfrac{1-2x^2}{x(1-x)}$, $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$

$(f\bullet g)(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$, $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$ $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$]

(Β΄ Ομάδα)

11) Έστω δύο συναρτήσεις f,g για τις οποίες ισχύουν $2f(x)-g(x)=x^2+x-1$ και $2g(x)-3f(x)=2x^2-3$. Να βρεθούν οι f,g.

[Απ : $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{4}$, $g(x)=\dfrac{-x^2+x+2}{2}$]

12) Αν $f(x)=3x-1$ και $f(x)+g(x)=6x^2+3x-2$, να ορίσετε τη συνάρτηση g.

[Απ: $g(x)=6x^2-1$]

13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$

α) Αν $f(2)=5$ και $f(-3)=-10$ να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και την $f(x)$.

β) Δείξτε επίσης ότι παράσταση $\dfrac{f(x-2h)-f(x)}{4h}$ είναι ανεξάρτητη του x για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

[Απ: α=3, β=-1, f(x)=3x-1]

14) Αν για την συνάρτηση f ισχύει η σχέση: $f(x)\left(f(x)-x\right)\le x\left(f(x)-x\right)$ βρείτε τον τύπο της f.

[Απ: $f(x)=x$]

15) Να βρεθούν οι συναρτήσεις f,g αν γι' αυτές ισχύει:
$f^2(x)+4g^2(x)-6f(x)+4xg(x)\le -x^2-9$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

[Απ: f(x)=3, $g(x)=\dfrac{-x^2}{2}$]

16) Αν $f(x)=\alpha x+2$ και $f(f(-2))=-2\alpha+6-2\alpha^2$ υπολογίστε το α.

[Απ:α=1]

17) Αν $f(x)=\dfrac{2-x^2}{3x}, x\in\mathbb{R}^*$ τότε $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$

[Απ: $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{2x^2-1}{3x}$]

18) Αν $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x}$, $x\in\mathbb{R}^*-\{\pm1\}$ και $g(x)=\dfrac{x^2+1}{1-x^2}$, $x\in\mathbb{R}^*-\{\pm1\}$ δείξτε ότι $\left(\dfrac{1}{f}\right)^2+\left(\dfrac{1}{g}\right)^2=c$ (όπου c σταθερός αριθμός).

[Απ : c=1]

ΠΕΔΙΑ ΟΡΙΣΜΟΥ

(Α΄ Ομάδα)

19) Να βρεθεί το Π.Ο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+3x}$

β) $f(x)=\dfrac{x^4+x}{x^2-25}$

γ) $f(x)=\dfrac{x+1}{x+5}$

δ) $f(x)=\dfrac{x^3+2}{2x^2-5x+2}$

ε) $f(x)=\dfrac{2x}{3x-12}+\dfrac{1}{x^2-9}$

στ) $f(x)=\dfrac{x^5}{2x^3-8x}$

ζ) $f(x)=\dfrac{3+\dfrac{1}{2x-1}}{3x^2-4x+1}$

η) $f(x)=\dfrac{4x^4+x^2+1}{2x^3-4x^2+x-2}$

20) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt{4x-12}$ β) $f(x)=\sqrt{9-3x}$ γ) $f(x)=\dfrac{x+5}{\sqrt{x+2}}$

δ) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{5-x}}+\dfrac{1}{x+1}$ ε) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+6}+1}{x^2-4}$ στ) $f(x)=\sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}$

ζ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x+15}}{\sqrt{7-x}}$ (η) $f(x)=\dfrac{5-\sqrt{14-7x}}{(x+2)\sqrt{x+4}}$ (θ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+6}}{\sqrt{5-x}}$

[Απ: α) $A_f=[3,+\infty)$, β) $A_f=(-\infty,3]$, γ) $A_f=(2,+\infty)$ δ) $A_f=(-\infty,-1)\cup(-1,5)$

ε) $A_f=[-6,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$, στ) $A_f=[-3,2]$, ζ) $A_f=[-5,7)$,

η) $A_f=(-4,-2)\cup(-2,2]$, θ) $A_f=[-3,5]$]

21) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$ β) $f(x)=\dfrac{3x+5}{\sqrt{x^2-x-6}}$ γ) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{-x^2+9}}$

δ) $f(x)=\sqrt{x^3-9x}$ ε) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-x-2}+4}{\sqrt{x^2-x-6}}$ στ) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{25-x^2}}{\sqrt{x^2-7x+12}}$

ζ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-64}}{\sqrt{x-5}}+\dfrac{1}{x-9}$ η) $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{-x^2+36}}{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2}}$

[Απ : α) $A_f=(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$, β) $A_f=(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$, γ) $A_f=(-\infty,-3)\cup[-1,3)$
δ) $A_f=[-3,0]\cup[3,+\infty)$, ε) $A_f=(-\infty,-2]\cup(3,+\infty)$,στ) $A_f=[-5,3]\cup(4,5]$,
ζ) $A_f=[8,9)\cup(9,+\infty)$, η) $A_f=[-6,-1)\cup(-1,0)\cup[1,2)\cup(2,6]$]

22) Βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i) $f(x)=\dfrac{2x+5}{|x-3|-4}$ ii) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x-2|-1}$ iii) $f(x)=\dfrac{1}{|3x-8|-|x|}$

iv) $f(x)=\sqrt{|x-2|}-2$ v) $f(x)=\dfrac{3+x}{\sqrt{2-|x-5|}}$ vi) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-|3x-1|}}{\sqrt{x}+2}$

[Απ: i)$A=\mathbb{R}-\{-1,7\}$ ii)$A=\mathbb{R}-\{1,3\}$ iii)$A=\mathbb{R}-\{2,4\}$ iv)$A=\mathbb{R}$ v)$A=[3,7]$
vi)$A=[0,1]$]

23) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{3x+1}{|x|-2}$ β) $f(x)=\dfrac{4x-2}{|x+3|-1}$ γ) $f(x)=\sqrt{|x-2|}-2$

δ) $f(x)=\dfrac{3+x}{\sqrt{2-|x-5|}}$ ε) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-|3x+1|}}{\sqrt{x}+2}$.

[Απ: α) $A_f=\mathbb{R}-\{-2,2\}$ β) $A_f=\mathbb{R}-\{-4,-2\}$ γ) $A_f=\mathbb{R}$ δ) $A_f=(3,7)$,ε) $A_f=[0,1]$]

(Β΄ Ομάδα)

24) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-5x+\lambda-1}$.Προσδιορίστε το $\lambda\in R$ ώστε $A_f=\mathbb{R}$.

[Απ: $\lambda>\dfrac{29}{4}$]

25) Δίνεται $f(x)=\sqrt{x^2+\lambda x+1}$. Να προσδιορισθεί ο $\lambda \in R$ ώστε $A_f=\mathbb{R}$.

[Απ: $-2<\lambda<2$]

26) Αν $f(x)=g(2x-4)$ και $A_g=[3,5]$, βρείτε το A_f.

[Απ: $A_f=\left[\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right]$]

27) Αν $f(x)=g(x+2)$ και $A_f=[-2,6]$ να βρείτε το A_g.

[Απ: $A_g=[0,8]$]

28) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-x+1 & , \quad -1\le x<1\\ 2 & , \quad x=1\\ x^2 & , \quad x>1\end{cases}$, να βρείτε:

i) τις τιμές $f(0)$, $f(1)$ και $f(2)$.

ii) το Π.Ο. της συνάρτησης f .

iii) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης.

[Απ: (i) $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f(2)=4$ (ii) $[-1,+\infty)$ (iii) $(0,+\infty)$]

29) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2+2}{x+4}$.

i) Να βρείτε το Π.Ο. της συνάρτησης f.

ii) Σε ποια σημεία η καμπύλη της f τέμνει τον άξονα xx' ;

iii) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία $\left(1,\frac{3}{5}\right)$, $(2,-1)$, $(2,1)$ βρίσκονται πάνω στην καμπύλη της f .

[Απ: (i) $\mathbb{R}-\{-4\}$ (ii) σε κανένα (iii) ναι , όχι , ναι]

30) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x-\beta}{x-\alpha}$. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β, αν είναι γνωστό ότι η καμπύλη της f διέρχεται από το σημείο $(2,0)$ και ότι το $f(1)$ δεν ορίζεται.

[Απ :α=1, β=2]

2ος ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται, σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της:

- **γνησίως αύξουσα** όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

και

- **γνησίως φθίνουσα** όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα) σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της θα ονομάζεται γνησίως μονότονη.

Επισημάνσεις

➔ Η γραφική παράσταση μιας γνησίως αύξουσας συνάρτησης από αριστερά προς τα δεξιά συνεχώς 'ανεβαίνει' ενώ μιας γνησίως φθίνουσας 'κατεβαίνει' .

➔ Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι 1-1.

➔ Μια συνάρτηση f ονομάζεται σταθερή σ' ένα διάστημα Δ του Π.Ο. της όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει: $f(x_1) = f(x_2)$.

Παράδειγμα 9ο : Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ ii) $f(x) = x^3 + 5x - 2$

Λύση

i) Πεδίο ορισμού της f: $A = [0, +\infty)$

Έστω $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, τότε:

$$\left.\begin{array}{c} {x_1}^2 < {x_2}^2 \\ \text{και} \\ \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} {x_1}^2 + \sqrt{x_1} < {x_2}^2 + \sqrt{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

άρα η f είναι γνήσια αύξουσα στο $A = [0, +\infty)$

ii) Πεδίο ορισμού της f: $A = \mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε:

$$\left.\begin{array}{c} x_1^3 < x_2^3 \\ \text{και} \\ 5x_1 < 5x_2 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} x_1^3 + 5x_1 < x_2^3 + 5x_1 \Leftrightarrow x_1^3 + 5x_1 - 2 < x_2^3 + 5x_1 - 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

άρα η f είναι γνήσια αύξουσα στο A=R.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέμε ότι παρουσιάζει:

- **Τοπικό μέγιστο** στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \le f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1
- **Τοπικό ελάχιστο** στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \ge f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_2

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

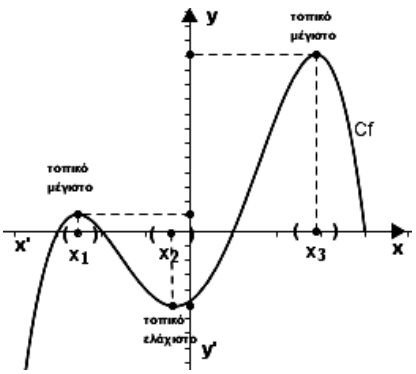
➔ Αν $f(x) \le f(x_1)$ για κάθε $x \in A$ τότε στο x_1 η f έχει ολικό μέγιστο (max) ενώ αν $f(x) \ge f(x_2)$ για κάθε $x \in A$ τότε στο x_2 η f έχει ολικό ελάχιστο (min)

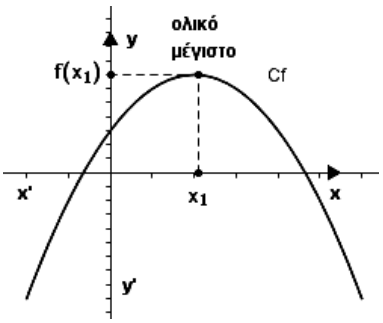
➔ Τα τοπικό μέγιστο-τοπικό ελάχιστο αν υπάρχουν ονομάζονται τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης ενώ τα μέγιστο-ελάχιστο αν υπάρχουν ονομάζονται ολικά ακρότατα

➔ Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

➔ Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι αριστερά του x_o είναι γνησίως φθίνουσα και δεξιά γνησίως αύξουσα τότε η f στο x_o έχει min ελάχιστο (τοπικό ή ολικό).

➔ Αν αντίστοιχα αριστερά του x_o είναι γνησίως αύξουσα και δεξιά γνησίως φθίνουσα τότε η f στο x_o έχει μέγιστο (τοπικό ή ολικό) max





Παράδειγμα 10ο : Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2+(x-1)^4$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)\geq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Λύση

i) Παρατηρούμε ότι: $(x-1)^4\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

επομένως $2+(x-1)^4\geq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

δηλαδή $f(x)\geq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) Αποδείξαμε ότι: $f(x)\geq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

και $f(1)=2+(1-1)^4=2+0=2$

επομένως $f(x)\geq f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$ το $f(1)=2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ 2 ΑΠΟ 4

1) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = 3 - 2\sqrt{1-x}$ ii) $f(x) = \frac{1}{x} - 3$ iii) $f(x) = x^5 + x^3 - 1$

2) Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = x^2 - 3$ ii) $f(x) = 3 - x^2$ iii) $f(x) = 3 - 2\sqrt{1-x}$

3ΟΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η έννοια του ορίου γεννήθηκε στην προσπάθεια μας να απαντήσουμε σε ερωτήματα όπως:

- Τι ονομάζουμε στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού;
- Τι ονομάζουμε εφαπτομένη μιας καμπύλης;

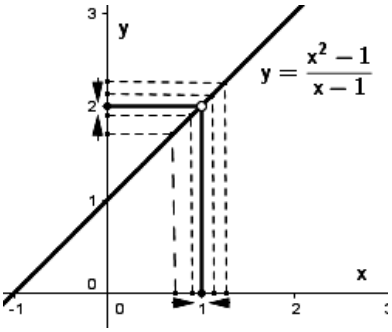
Μια διαισθητική προσέγγιση δίνετε σε παράδειγμα του βιβλίου που θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο της συνάρτησης $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ όταν το x πλησιάζει (τείνει) στο 1.

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ με πεδίο ορισμού $A=R-\{1\}$.

Για $x\neq 1$ η f γράφεται: $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x+1$ είναι ευθεία.

x	0	-1
y	1	0



Παρατηρούμε λοιπόν ότι όταν το x "πλησιάζει" στο 1 (λέμε "x τείνει στο 1") τότε οι τιμές της f "πλησιάζουν στο 2" (λέμε "η f τείνει στο 2")

Δηλαδή όταν $x\to 1$ τότε $f(x)\to 2$ σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η συνάρτηση έχει όριο το 2, όταν το x τείνει στο 1, και γράφουμε

Στο προηγούμενο παράδειγμα παρουσιάσαμε με απλό τρόπο (χωρίς μαθηματική αυστηρότητα) την έννοια του ορίου της συνάρτησης στο σημείο που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

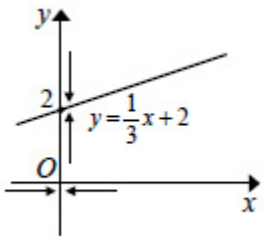
Γενικότερα όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο μιας συνάρτησης όταν το x πλησιάζει (τείνει) στο x_0 που συμβολικά θα γράφουμε f(x) αρκεί στη θέση του x στον τύπο της f να αντικαταστήσουμε το x_0 με την προϋπόθεση ότι έχει νόημα η παράσταση που προκύπτει .

Όταν μάλιστα γράφουμε f(x)=λ, με $\lambda\in R$, εννοούμε ότι οι τιμές της f(x) βρίσκονται όσο θέλουμε κοντά στο λ, για όλα τα $x\neq x_0$ τα οποία βρίσκονται πολύ κοντά στο x_0.

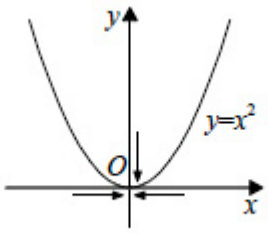
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_o, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε κοντά στο x_o δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής: $(\alpha, x_o) \cup (x_o, \beta)$ ή (α, x_o) ή (x_o, β).

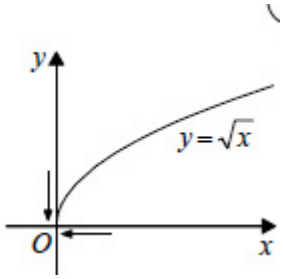
2) Το x_o μπορεί να ανήκει στο Π.Ο. της συνάρτησης ή να μην ανήκει σ' αυτό



$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}x+2\right)=2$$



$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$$



$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$$

3) Η τιμή της f στο x_o, όταν υπάρχει , μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_o ή διαφορετική από αυτό.

ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΙΔΙΟΤΗΤΑ
Πρόσθεση / Αφαίρεση	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\ell_1\pm\ell_2$
Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Συνάρτηση	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(kf(x)\right)=k\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=k\cdot\ell_1$
Πολλαπλασιασμός	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\ell_1\cdot\ell_2$
Πηλίκο	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{\ell_1}{\ell_2}$
Εκθετική	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\nu}=\left(\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right)^{\nu}=\ell_1^{\nu}$
Ρίζα	$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)}=\sqrt[\nu]{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}=\sqrt[\nu]{\ell_1}$
Γραμμικός Συνδυασμός	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(k\cdot f(x)\pm n\cdot g(x)\right)=k\cdot\ell_1\pm n\cdot\ell_2$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οι παραπάνω ιδιότητες ισχύουν με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν τα όρια της κάθε μιας συνάρτησης.

Παράδειγμα 11ο : Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το σύνολο $A=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$ και $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=-1$.

Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)+g(x)\right)$ και ii) $\lim\limits_{x\to 2}\left[(f(x))^3-2f(x)g(x)\right]$

Λύση

i) $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)+\lim\limits_{x\to 2} g(x)=3+(-1)=2$.

ii) $\lim\limits_{x\to 2}\left[(f(x))^3-2f(x)g(x)\right]=\lim\limits_{x\to 2}(f(x))^3-2\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)g(x)\right)=$

$\left(\lim\limits_{x\to 2} f(x)\right)^3-2\lim\limits_{x\to 2} f(x)\lim\limits_{x\to 2} g(x)=3^3-2\cdot 3\cdot(-1)=27+6=33$.

Παράδειγμα 12ο : Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^{2016}$ iii) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x-3}$ iv) $\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)(x+3)\right]$

Λύση

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{2+2}{2-1}=\dfrac{4}{1}=4$.

ii) $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^{2016}=\left[\lim\limits_{x\to 0}(x+1)\right]^{2016}=(0+1)^{2016}=1^{2016}=1$.

iii) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x-3}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 4}(x-3)}=\sqrt{4-3}=\sqrt{1}=1$, $x\geq 3$.

iv) $\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)\cdot(x+3)\right]=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot\lim\limits_{x\to 1}(x+3)=(1-1)\cdot(1+3)=0\cdot 4=0$.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΟΡΙΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ x_0

1Η ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ

Όταν έχουμε να υπολογίσουμε όριο πολυωνυμικής συνάρτησης όταν $x \to x_0$ αντικαθιστούμε όπου x το x_0 και κάνουμε πράξεις.

Δηλαδή εάν $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ τότε:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0) = \alpha_\nu x_0^{\ \nu} + \alpha_{\nu-1}x_0^{\ \nu-1} + \ldots + \alpha_1 x_0 + \alpha_0$$

Παράδειγμα: $\lim\limits_{x \to -1}\left(3x^5 + x - 1\right) = P(x_0) = 3(-1)^5 + (-1) - 1 = -3 - 1 - 1 = -5$.

2Η ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ

Όταν έχουμε να υπολογίσουμε όριο ρητής συνάρτησης $\lim\limits_{x \to x_o}\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ όταν $x \to x_0$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν το x_0 δεν μηδενίζει τον παρονομαστή (δηλ. $Q(x_0) \neq 0$) τότε αντικαθιστούμε όπου x το x_0.

Παράδειγμα: $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{3x^2+1}{x-3} = \dfrac{3\cdot 1^2+1}{1-3} = \dfrac{4}{-2} = -2$

- Αν το x_0 μηδενίζει τον παρονομαστή και τον αριθμητή (δηλ. $P(x_0) = Q(x_0) = 0$) τότε κάνουμε παραγοντοποίηση σε αριθμητή και παρονομαστή με ένα παράγοντα το $x - x_0$ και απλοποιούμε το $x - x_0$ από αριθμητή και παρονομαστή, ακολούθως εφαρμόζουμε τις προηγούμενες περιπτώσεις.

Παραδείγματα: $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim\limits_{x \to 2}(x+2) = 2+2 = 4$

$$\lim_{x \to 0}\frac{3x^2+x}{x^3-4x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0}\frac{\cancel{x}(3x+1)}{\cancel{x}(x^2-4)} = \lim_{x \to 0}\frac{3x+1}{x^2-4} = \frac{0+1}{0-4} = -\frac{1}{4}$$

3Η ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ

Αν το x_o μηδενίζει τον παρονομαστή και τον αριθμητή και υπάρχουν ριζικά σε παρονομαστή ή τον αριθμητή τότε πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με κατάλληλες συζυγείς παραστάσεις.

παράγοντας Συζυγής παράσταση

$\sqrt{A}-B \xrightarrow[\text{διαιρούμε}]{\text{πολ/με}} \text{με } \sqrt{A}+B \quad \triangleright \left(\sqrt{A}-B\right)\left(\sqrt{A}+B\right)=\left(\sqrt{A}\right)^2-B^2=A-B^2$

$A-\sqrt{B} \xrightarrow[\text{διαιρούμε}]{\text{πολ/με}} \text{με } A+\sqrt{B} \quad \triangleright \left(A-\sqrt{B}\right)\left(A+\sqrt{B}\right)=A^2-\left(\sqrt{B}\right)^2=A^2-B$

$\sqrt{A}-\sqrt{B} \xrightarrow[\text{διαιρούμε}]{\text{πολ/με}} \text{με } \sqrt{A}-\sqrt{B} \quad \triangleright \left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)=\left(\sqrt{A}\right)^2-\left(\sqrt{B}\right)^2=A-B$

Παράδειγμα 13ο : Να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$ iii) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{3-\sqrt{3x}}$

Λύση

i) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\cancel{x-4}}{\left(\cancel{x-4}\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{1}{\sqrt{4}+2}=\dfrac{1}{2+2}=\dfrac{1}{4}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\cancel{2}-\cancel{2}}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}=$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

iii) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{3-\sqrt{3x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)\left(3+\sqrt{3x}\right)}{\left(3-\sqrt{3x}\right)\left(3+\sqrt{3x}\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)\left(3+\sqrt{3x}\right)}{3^2-\left(\sqrt{3x}\right)^2}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)\left(3+\sqrt{3x}\right)}{9-3x}==\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(\cancel{x-3}\right)\left(3+\sqrt{3x}\right)}{-3\left(\cancel{x-3}\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3+\sqrt{3x}}{-3}=$

$=\dfrac{3+\sqrt{9}}{-3}=\dfrac{3+3}{-3}=\dfrac{6}{-3}=-2.$

Παράδειγμα 14ο : Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια :

(i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-4}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2x}{x-1}$

Λύση

i) Έχουμε: $\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-4}=\dfrac{x(x^2-5x+6)}{x^2-4}=\dfrac{x(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{x(x-3)}{x+2}$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-3)}{x+2}=\dfrac{4-6}{2+2}=-\dfrac{1}{2}$.

ii) Έχουμε : $\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2x}{x-1}=\dfrac{(\sqrt{x^2+3}-2x)(\sqrt{x^2+3}+2x)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)}=\dfrac{(\sqrt{x^2+3})^2-(2x)^2}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)}=$

$=\dfrac{x^2+3-4x^2}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)}=\dfrac{3-3x^2}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)}=\dfrac{-3(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)}=\dfrac{-3(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2x}$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-3(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2x}=\dfrac{-3.2}{\sqrt{4}+2}=-\dfrac{6}{4}=-\dfrac{3}{2}$.

Παράδειγμα 15ο : Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-1}$ ii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3+x^2+1}{x+1}$

iii) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ iv) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{3}\right)$

Λύση

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+4)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+4}{x+1}=\dfrac{1+4}{1+1}=\dfrac{5}{2}$

- $x^2-1=(x-1)(x+1)$ ταυτότητα
- $x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$ Σχήμα Horner →

1	3	-4	1
↓	1	4	
1	4	0	

ii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3+x^2+1}{x+1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\cancel{(x+1)}(2x^2-x+1)}{\cancel{x+1}}=\lim\limits_{x\to -1}(2x^2-x+1)=$

$=2(-1)^2-(-1)+1=2+1+1=4$

- $2x^3+x^2+1=(x+1)(2x^2-x+1)$ Σχήμα Horner →

2	1	0	1	-1
↓	-2	1	-1	
2	-1	1	0	

$$\text{iii)}\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 4}\frac{\left(3-\sqrt{5+x}\right)\left(1+\sqrt{5-x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}{\left(1-\sqrt{5-x}\right)\left(1+\sqrt{5-x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\left(3^2-\left(\sqrt{5+x}\right)^2\right)\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{\left(1^2-\left(\sqrt{5-x}\right)^2\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(9-(5+x))\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{(1-(5-x))\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(9-5-x)\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{(1-5+x)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{(-4+x)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{-\cancel{(x-4)}\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{\cancel{(x-4)}\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{-\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{3+\sqrt{5+x}}=\frac{-\left(1+\sqrt{5-4}\right)}{3+\sqrt{5+4}}=$$

$$=\frac{-\left(1+\sqrt{1}\right)}{3+\sqrt{9}}=\frac{-(1+1)}{3+3}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}.$$

$$\text{iv)}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\eta\mu x-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3}=\eta\mu\frac{\pi}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{\frac{\pi}{2}}{3}=$$

$$=\eta\mu\frac{\pi}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ 3 ΑΠΟ 4

1) Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left[(2x+1)(x-2)\right]$, ii) $\lim\limits_{x\to -1}(x+2)^{2016}$, iii) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+1}{x-2}$, iv) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{3x+1}$

[Απ: i)-2 ii) 1 iii) $\frac{1}{4}$ iv) 2]

2) Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$,

ii) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\varepsilon\varphi x-1}{3}$,

iii) $\lim\limits_{x\to 0}(2\eta\mu 2x+2)$,

iv) $\lim\limits_{x\to 0}(3\eta\mu x-2\sigma\upsilon\nu x)$

[Απ: i) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ii) 0 iii) 2 iv) -2]

3) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x+1}{x-1}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2+2x-5\right)$ iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$

iv) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-2x-2}{3x^2+2x-5}$ v) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$ vi) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$

vii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x^2-10x+8}{x^2+x-6}$ viii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^3-8}$ ix) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2+x-2}$

[Απ : i) 11 ii) 0 iii) $\frac{3}{2}$ iv) $\frac{3}{4}$ v) 0 vi) $\frac{4}{3}$ vii) $\frac{6}{5}$ viii) 2 ix) $\frac{2}{3}$]

4) Να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ ii) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-\sqrt{x-2}}{x-3}$ iii) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-10}{5-\sqrt{5x}}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$ v) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{5x-4}-4}{\sqrt{x}-2}$

[Απ: i) $\frac{1}{4}$ ii) $-\frac{1}{2}$ iii) -4 iv) 4 v) $\frac{5}{2}$]

5) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2$ ii) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(3\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu x)$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 x+4\eta\mu x}{\eta\mu^2 x-\eta\mu x}$

[Απ: i) 1 ii) 3 iii) -4]

6) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}\right)$

ii) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(2\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)$

iii) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^3+x^2}$

v) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-2x}{x^2-x}$

vi) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-4}$

7) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{-x-1}-2}{x+5}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+7}-3}{x-1}$ iv) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x+1}-2}$

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+2x-8}{\sqrt{x-1}-1}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

ii) Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{f(x)+4}}{f(x)-5x}$

9) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2+\alpha x+1\right)=\alpha\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}+1\right)$$

4ΟΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω f με Π.Ο. το Α και $x_o \in A$ τότε, θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_o \in A$ όταν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_o)$.

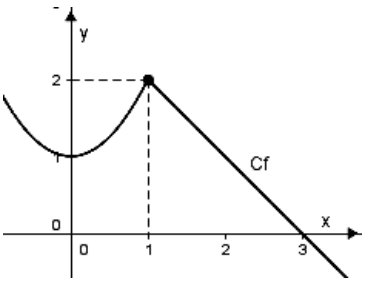
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Για να είναι μία συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 \in A$, πρέπει να ικανοποιούνται τα εξής:

- Όταν υπάρχει και είναι πραγματικός το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
- Όταν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

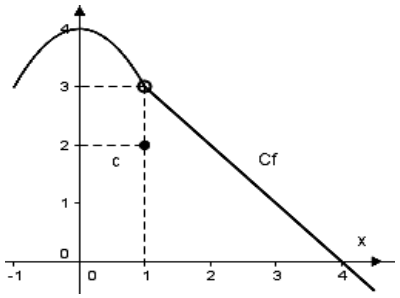
2) Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής στο Π.Ο της εάν και μόνο εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του Π.Ο.

3) Χαρακτηριστικό γνώρισμα μίας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μία συνεχής καμπύλη.



f συνεχής στο $x_0 = 1$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2$



f ασυνεχής στο $x_0 = 1$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3 \neq f(1) = 2$

4) Οι πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές αλλά και όσες συναρτήσεις προκύπτουν από πράξεις μεταξύ τους είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

Παράδειγμα 16ο : Έστω $f(x) = 4x^2 - x + 2$, να εξετάσετε εάν η f συνεχής στο σημείο x=3.

Λύση

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 4\cdot 3^2 - 3 + 2 = 36 - 1 = 35 \\ f(3) = 4\cdot 3^2 - 3 + 2 = 35\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$$, άρα η f συνεχής στο 3.

Παράδειγμα 17ο : Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια η συνάρτηση :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ 4, & x=2\end{cases} \quad \text{στο σημείο } x_0=2$$

Λύση

Ισχύει $f(2)=4$ και

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(\cancel{x-2})(x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$ και η f θα είναι συνεχής στο $x_0=2$.

Παράδειγμα 18ο : Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-x-2}{x-1}, & x\neq 1\\ 2\alpha-1, & x=1\end{cases}$.

Να βρείτε:

i)το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

ii)την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Λύση

$$\text{i)}\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{3x^2-x-2}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{(\cancel{x-1})(3x+2)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1}(3x+2)=3+2=5$$

3	-1	-2	1
↓	3	2	
3	2	0	

$3x^2-x-2=(x-1)(3x+2)$

← Σχήμα Horner

ii) Για να είναι η f συνεχής στο $x_0=1$ πρέπει: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$ (1)

Όμως $f(1)=2\alpha-1$ και $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 5$. Άρα, λόγω της (1)

$$2\alpha-1=5 \Leftrightarrow 2\alpha=5+1 \Leftrightarrow 2\alpha=6 \Leftrightarrow \alpha=\frac{6}{2} \Leftrightarrow \alpha=3.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ 4 ΑΠΟ 4

1) Μελετήστε την συνέχεια της παρακάτω συνάρτησης, στο σημείο $x_o = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 - 9x + 2}{x - 2} & , x \neq 2 \\ 7 & , x = 2 \end{cases}.$$

2) Δίνεται $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 8x + 7}{1 - x} & , x \neq 1 \\ 3\alpha + 5 & , x = 1 \end{cases}$. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) Να αποδείξετε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} & , x \neq 1 \\ 3 & , x = 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$.

4) Να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 + 5x + 2}{x^3 + 1} & , x \neq -1 \\ \alpha & , x = -1 \end{cases}$ να είναι συνεχής στο $x_0 = -1$.

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - x - 3}{x + 1} & , x \neq -1 \\ 3\lambda + 10 & , x = -1 \end{cases}$

i) Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

ii) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in R$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = -1$.

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & , x \neq 0 \\ \alpha - 2 & , x = 0 \end{cases}$.

i) Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

ii) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να'ναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

7) Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και τέτοια ώστε $(x-5)\cdot f(x) = x^2 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής, να βρείτε:

i) την τιμή $f(5)$

ii) το όριο $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 5f(x)}{x-5}$

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3} & ,x \neq 3 \\ \lambda + 1 & ,x = 3 \end{cases}$, να βρείτε:

i) το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

ii) την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 3$

9) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και η γραφική της παράστασή της διέρχεται σημείο $A(5,2)$, να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{f(x)+14}}{1-f(x)}$

10) Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και τέτοια ώστε $x\cdot f(x) = x^2 + 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής, να βρείτε:

i) την τιμή $f(0)$

ii) το όριο $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 f(x)}{x+2}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΥ

Επιλέξτε Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) στα παρακάτω ερωτήματα :

1) Το σημείο $M(x,\psi)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f αν $\psi = f(x)$

2) Οι τετμημένες των προβολών όλων των σημείων της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στον άξονα xx' αποτελούν το Π.Ο. της f .

3) Αν μια συνάρτηση f δεν ορίζεται σε ένα $x_o \in \mathbb{R}$ τότε δεν μπορούμε να βρούμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

4) Αν α και β είναι δύο στοιχεία του Π.Ο. μιας συνάρτησης f με $\alpha = \beta$, τότε $f(\alpha) = f(\beta)$

5) Αν α και β είναι δύο στοιχεία του Π.Ο. μιας συνάρτησης f με $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε θα είναι πάντα $\alpha = \beta$.

6) Όταν η τιμή μιας συνάρτησης f στο α είναι -2, τότε $f(-2) = \alpha$.

7) Αν $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, τότε το Π.Ο. της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R} - \{1\}$.

8) Όλες οι καμπύλες του επιπέδου Oxy παριστάνουν συναρτήσεις .

9) Αν $f(1) = 2$, τότε το σημείο $M(2,1)$ βρίσκεται πάνω στην καμπύλη της f .

10) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(x)=x-1 και $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ είναι ίδιες.

11) Αν $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$, τότε $f(\alpha) = \beta$.

12) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lambda$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x)) = -\lambda$.

13) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lambda$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) - \lambda) = 0$.

14) Αν $(x+2) \to 0$, τότε $(x+3) \to 1$.

15) Αν το σημείο $(x_o, f(x_o))$ βρίσκεται πάνω στην καμπύλη της f , τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_o)$

16) Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες τους 1 και -2. Αν ορίζεται η συνάρτηση $g(x) = f(2x)$, τότε η εξίσωση $f(2x) = 0$ έχει ρίζες τις:

❒Α: 1 και -2 ❒Β: $\frac{1}{2}$ και -1 ❒Γ: $-\frac{1}{2}$ και 1 ❒Δ: 2 και -1

17) Έστω συνάρτηση f , τότε όλα τα σημεία του επιπέδου Oxy , τα οποία είναι τέτοια ώστε $f(\alpha) = \alpha$, βρίσκονται πάνω σε καμπύλη με εξίσωση:

❒Α: $\psi=\alpha$ ❒Β: $x=\alpha$ ❒Γ: $\psi=x^2$ ❒Δ: $\psi=x$

18) Για μια συνάρτηση f ισχύουν οι παρακάτω ισχυρισμοί:

I. Το $f(\alpha)$ υπάρχει.

II. Το $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ υπάρχει.

III. $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$.

19) Το $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{x^3-\alpha^3}{x-\alpha}$ είναι ίσο με:

❒Α: α^6 ❒Β: δεν υπάρχει ❒Γ: 0 ❒Δ: $3\alpha^2$

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.2 (Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Εάν ω είναι η γωνία που σχηματίζει μια ευθεία (ε) με τον άξονα xx', τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (που συνήθως συμβολίζεται με λ) θα είναι:

$$\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi\omega \text{ με } 0 \le \omega \le \pi \text{ και } \omega \ne \frac{\pi}{2}$$

Σχόλια

1) Η εξίσωση τότε της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και διέρχεται από το σημείο $M(x_o, y_o)$ είναι: $y - y_0 = \lambda(x - x_o)$.

2) Επιπλέον αν $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία με $x_1 \ne x_2$, τότε η κλίση της ευθείας ΑΒ θα δίνεται από την σχέση: $\lambda_{AB} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

3) Για δυο ευθείες (ε_1) και (ε_2) θα λέμε ότι:

- $(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.
- $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Ο ορισμός της εφαπτομένης ευθείας μιας καμπύλης γενικά σε ένα σημείο της Α είναι ένας περίπλοκος υπολογισμός για τον οποίο χρειάστηκε η έννοια της παραγώγου μιας συνάρτησης.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Καταρχήν, όταν θέλουμε να ορίζουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης f δεν την ορίζουμε έτσι γενικά, αλλά σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο x_o του πεδίου ορισμού της.

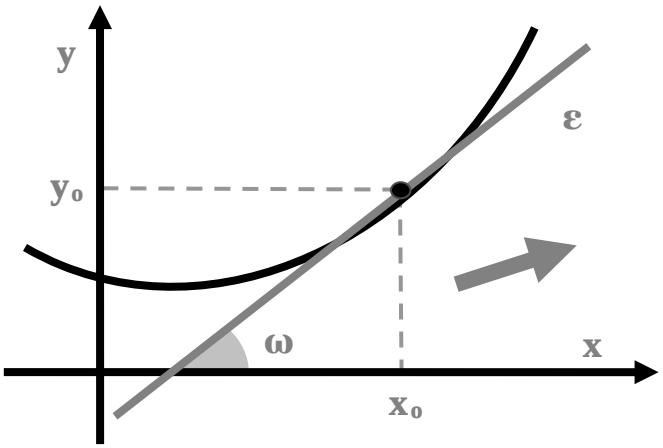
Υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι με τους οποίους προσεγγίζουμε την έννοια της παραγώγου:

ως **κλίση της εφαπτόμενης ευθείας**, σε κάποιο σημείο μιας γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

ή

ως **ρυθμός μεταβολής** ενός μεγέθους το οποιο περιγραφεται από την συναρτηση f

Έτσι, κάθε φορά που θα βρίσκουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης, μπορούμε να θυμόμαστε κάτι σαν το παρακάτω σχήμα κι έτσι να καταλαβαίνουμε ότι αυτό που βρίσκουμε δεν είναι κάτι αόριστο και άσχετο με τα προηγούμενα, αλλά κάτι πολύ απλό και συγκεκριμένο.



Οπότε στο παραπάνω σχήμα η κλίση της ευθείας (ε) είναι η τριγωνομετρική εφαπτομένη της γωνίας ω. Αυτή ακριβώς η εφαπτομένη εκφράζεται από την παράγωγο της f και συμβολίζετε με $f'(\chi_o)$. Ισχύει:

$$\lambda_\varepsilon = \omega\theta 3 \quad ' \quad ^{o}$$

Συμπέρασμα

Σύμφωνα με τα παραπάνω η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) σε ένα σημείο $M(x_o, f(x_o))$ της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f θα δίνεται από τον τύπο:

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΗΣ F ΣΤΟ X_0

Έστω η συνάρτηση f με Π.Ο. το A και $x_o \in A$ τότε, θα ονομάζουμε παράγωγο της f στο x_o και συμβολικά θα γράφουμε $f'(x_o)$ το όριο:

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ όταν θα υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Άρα $f'(x_o) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in R$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Ένας άλλος συμβολισμός για την παράγωγο της f στο σημείο x_o που ανήκει στο Π.Ο. της είναι : $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

2) Προκύπτει από την αντικατάσταση όπου $x=x_o+h$ (άρα $x_o=x-h$ ενώ $h=x-x_o$)

ΣΥΝΔΕΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ & ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, τότε θα είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε κάποιο x_o, τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη στο x_o αυτό.
- Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε κάποιο x_o, αυτό δε σημαίνει υποχρεωτικά ότι είναι και παραγωγίσιμη.
- Αν μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο x_o, αυτό δεν αποκλείει να είναι συνεχής σε αυτό το x_o.

Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε καλά τις παραπάνω προτάσεις, για να καλύψουμε ερωτήσεις τύπου Σωστό-Λάθος, όπου προσπαθούν να μας παγιδέψουν.

Η παραγωγισιμότητα είναι ένα σκαλοπάτι πιο πάνω από τη συνέχεια.

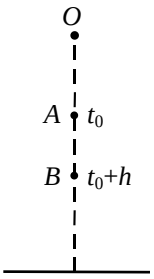
Για να τη φτάσουμε έχουμε πατήσει ήδη στο προηγούμενο σκαλοπάτι, δηλαδή αυτό της συνέχειας. Αν όμως στεκόμαστε στο σκαλοπάτι της συνέχειας, αυτό δε σημαίνει απαραίτητα ότι θα καταφέρουμε ν' ανεβούμε ακόμα ψηλότερα.

Σχόλιο

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που δεν είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_o του Π.Ο. αυτό σημαίνει ότι στο σημείο αυτό παρουσιάζει αιχμή ή κάποια ασυνέχεια όπως συμβαίνει με την $f(x)=|x|$ στο $x_o=0$.

ΜΕΣΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ

Γνωρίζουμε ότι μέση ταχύτητα (υ_μ ή $\bar{\upsilon}$) ενός σώματος που κινείται με μεταβαλλόμενη ταχύτητα δίνεται από τον τύπο: $\bar{\upsilon} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{\text{μεταβολή του διαστήματος}}{\text{αντίστοιχο χρόνο}}$



Άρα η μέση ταχύτητα του σώματος είναι: $\bar{\upsilon} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{\frac{1}{2}gh(2t_0+h)}{h} = \dfrac{1}{2}g(2t_o+h)$.

ΣΤΙΓΜΑΙΑ ΤΑΧΥΤΗΤΑ

Εάν σώμα εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση και η θέση του δίνεται από μία συνάρτηση της μορφής $f(t)$, όπου t ο χρόνος τότε η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t_o εκφράζεται από την παρακάτω σχέση

$$\upsilon(t_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(t_0)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού την χρονική στιγμή t_o, όταν η συνάρτηση του διαστήματος που διανύει είναι $S(t)$, είναι: $\upsilon(t_o) = S'(t_o)$.

2) Η παράγωγος της f στο x_o εκφράζει το **ρυθμό μεταβολής του y ως προς x** για $x = x_o$ επομένως το $S'(t_o)$ εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $S(t)$ ως προς t για $t = t_o$ (για τις ασκήσεις, είτε μας ζητάνε την παράγωγο μιας συνάρτησης, είτε το ρυθμό μεταβολής της είναι το ίδιο πράγμα).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1Η ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ

Για να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης f στο σημείο x_o (ή το ρυθμό μεταβολής της f ως προς x για $x = x_o$)

- Υπολογίζουμε την τιμή του κλάσματος $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
- Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Παράδειγμα 19ο : Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\frac{2}{x}$. Να βρείτε τον παράγωγο αριθμό της f στο σημείο $x_o = 4$, δηλαδή το $f'(4)$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R .

Έχουμε, $f(4+h)=\frac{-2}{4+h}$,

$$f(4)=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}.$$

Επομένως, $f(4+h)-f(4)=\frac{-2}{4+h}-\frac{-1}{2}=\frac{-4+4+h}{2(4+h)}=\frac{h}{2(4+h)}$.

Για $h\neq 0$, έχουμε: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{h}{2(4+h)}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{2(4+h)}=\frac{1}{8}$.

Οπότε, $f'(4)=\frac{1}{8}$.

2Η ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης μιας συνάρτησης f στο σημείο της $M(x_o,f(x_o))$:

- Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_o)$.
- Υπολογίζουμε την τιμή $f(x_o)$.
- Αντικαθιστούμε στον τύπο $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

3η ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της καμπύλης μιας συνάρτησης f όταν αυτή διέρχεται από σημείο $B(x_1, y_1)$ εκτός της καμπύλης θεωρούμε:

1) σημείο $A(x_o, f(x_o))$ της C_f στο οποίο η (ε) εφάπτεται,

2)βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

3) στη συνέχεια αντικαθιστούμε της συντεταγμένες του Β στην εξίσωση της ευθείας (όπου $x = x_1$ και $y = y_1$ διότι οι συντεταγμένες του Β θα επαληθεύουν τον τύπο της αφού η (ε) διέρχεται απ' αυτό)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρείτε τις εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων στο x_o :

i) $f(x)=x\cdot \eta\mu x,\ \ x_0=\dfrac{\pi}{2}$ ii) $f(x)=\sqrt{x^2+3},\ \ x_0=1$.

2) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2+1$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f :

i) Αν είναι παράλληλη με την $(\varepsilon): y=x-2$.

ii) Αν είναι κάθετη με την $(\zeta): y=x+4$.

iii) Αν σχηματίζει γωνία 135° με τον x'x .

iv) Αν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

3) Έστω η συνάρτηση $f(x)=-2x^2+\kappa x+4\sqrt{x}+10,\ \ x\geq 0$. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_o=1$ είναι παράλληλη με τον xx':

i) Να δείξετε ότι κ=2.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_o=1$

4) Να γράψετε την εξίσωση:

i) της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x+1}$ στο σημείο της με τετμημένη $x_o=3$.

ii) της ευθείας που είναι κάθετη στην ευθεία (ε) στο σημείο με τετμημένη $x_o=3$.

[Απ: (i) $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$ (ii) $y=-4x+14$]

5) Έστω $f(x)=2x^2-1$. Αν μια εφαπτομένη της καμπύλης της f διέρχεται από το σημείο $B(1,0)$ να βρείτε:

α) το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη αυτή εφάπτεται στην καμπύλη της f.

β) την εξίσωση της εφαπτομένης.

[Απ: α) $(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, 2+2\sqrt{2})$ ή $(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, 2-2\sqrt{2})$ β) $y=2\left(2\pm\sqrt{2}\right)x-4\mp2\sqrt{2}$]

6) Το σημείο $A(\chi_o, y_o)$ είναι πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-x$. Αν ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α υπερβαίνει την τετμημένη του Α κατά 1, να βρείτε το σημείο Α.

[Απ: $A(2,2)$]

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq0$.

i) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=2\alpha x_o+\beta$.

ii) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(0,3)$, η εφαπτομένη στο σημείο της με τετμημένη 1 , σχηματίζει με τον άξονα xx' γωνία $\omega=45^o$ και η εφαπτομένη στο σημείο της με τετμημένη 2 σχηματίζει με τον άξονα xx' γωνία $\varphi=135^o$, να βρείτε:

α) τον τύπο της f.

β) το σημείο στο οποίο τέμνονται οι παραπάνω εφαπτόμενες της f.

[Απ: (ii) α) $f(x)=-x^2+3x+3$ β) $\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right)$]

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-2x^2+x$.

i) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=3x_o^{\,2}-4x_o+1$.

ii) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $x_o=2$.

iii) Να βρείτε το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη αυτή τέμνει ξανά τη γραφική παράσταση της f.

[Απ: (ii) $y=5x-8$ (iii) $(-2,-18)$]

9) Το σημείο Α(2,2) βρίσκεται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$.

i) Να εκφράσετε το γ ως συνάρτηση του β .

ii) Αν η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο Α είναι η ευθεία με εξίσωση y=x , να βρείτε το β.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της f.

[Απ: (i) $\gamma = -2\beta - 2$ (ii) $\beta = -3$ (iii) $f(x) = x^2 - 3x + 4$]

10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + |x|$.

i) Αν x<0, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

ii) Αν x>0, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

iii) Είναι η f συνεχής στο $x_o = 0$;

iv) Να βρείτε το $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ όταν: α) h<0, β) h>0.

11) Θεωρούμε δύο σημεία Α και Β πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 + 6x + 2$.

i) Αν οι τετμημένες των Α και Β είναι 1 και 4 αντίστοιχα, να υπολογίσετε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ.

ii) Αν το σημείο Γ της γραφικής παράστασης της f βρίσκεται μεταξύ των Α και Β και η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο Γ είναι παράλληλη στην ΑΒ, να βρείτε την τετμημένη του Γ .

iii) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία οι εφαπτόμενες έχουν συντελεστή διεύθυνσης που είναι εννεαπλάσιοι των τετμημένων των σημείων αυτών .

[Απ : (i) 27 (ii) $\sqrt{7}$ (iii) $(1,9)$ ή $(2,22)$]

12) Μια επιχείρηση έχει κέρδη t^2 σε εκατομμύρια ευρώ στα πρώτα t έτη λειτουργίας της .

i) Ποιος ο μέσος ρυθμός μεταβολής του κέρδους από t=2 σε t=2,5 χρόνια;

ii) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους για $t = 2$;

[Απ: (i)4,5 (ii)4]

13) Ενας κύβος έχει ακμή x που μεταβάλλεται.

i) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού επιφάνειας ως προς την ακμή του , όταν x=3.

ii) Να βρείτε το μήκος της ακμής του, όταν ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού επιφάνειας του κύβου είναι 6.

[Απ: (i)36 (ii) $\frac{1}{2}$]

14) Η θέση ενός υλικού σημείου που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση εκφράζεται με τη συνάρτηση $x(t) = 2t^2 + \frac{1}{2}t$, όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

α) Να βρεθεί η μέση ταχύτητα στα παρακάτω χρονικά διαστήματα:

(i) $[0,2.25]$ (ii) $[0,1.25]$ (iii) $[0,0.75]$ (iv) $[0,0.25]$.

β) Να βρεθεί η ταχύτητα όταν $t = 0$.

γ) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $x = x(t)$.

δ) Να σχεδιαστούν οι τέμνουσες από το $O(0,0)$ της γραφικής παράστασης με συντελεστή διεύθυνσης τις μέσες ταχύτητες του ερωτήματος (α). Επίσης , να βρεθεί και να σχεδιαστεί η εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης $x = x(t)$ στο σημείο της με $t = 0$.

[Απ: (α) (i) $5\frac{m}{s}$ (ii) $3\frac{m}{s}$ (iii) $2\frac{m}{s}$ (iv) $1\frac{m}{s}$ β) $0.5\frac{m}{s}$]

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΥ

Επιλέξτε Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) στα παρακάτω ερωτήματα:

1) Αν η συνάρτηση f έχει Π.Ο. το $\mathbb{R}-\{x_o\}$, τότε η $f'(x_0)$ υπάρχει.

2) Η παράσταση $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $h\neq 0$ εκφράζει τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(x_o,f(x_o))$

3) Αν η $f'(2)$ υπάρχει, τότε εκφράζει τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $(2,f(2))$.

4) Αν $f'(-1)=3$, τότε η καμπύλη της f διέρχεται από το σημείο (-1,3).

5) Αν $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_o)$, τότε $f'(x_0)=0$.

6) Αν $f'(x_0)=0$, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(x_o,f(x_o))$ είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα xx'.

7) Ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα και διανύει διάστημα σύμφωνα με τη συνάρτηση $x(t)=3t^2+1$, με t σε sec. Η μέση ταχύτητά του στο διάστημα [1,2] είναι $9\frac{m}{s}$.

8) Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού κύκλου ως προς την ακτίνα του r για r=4 είναι 4π.

9) Το $\lim\limits_{h\to 0}\frac{3(x_0+h)^2-3x_0^{\,2}}{h}$ είναι ίσο με:

❒Α: 0 ❒Β: $6x_oh$ ❒Γ: $6x_o^{\,2}$ ❒Δ: $6x_o$

10) Αν το $\lim\limits_{h\to 0}\frac{-3(x_0+h)^{15}+3x_0^{\,15}}{h}$ παριστάνει την $f'(x_0)$, τότε η συνάρτηση f έχει τύπο:

❒Α: x^{15} ❒Β: $3x^{16}$ ❒Γ: $3x^{15}$ ❒Δ: $-3x^{15}$

11) Ενας κύβος έχει ακμή x που μεταβάλλεται. Οταν το εμβαδόν επιφάνειάς του έχει ρυθμό μεταβολής ως προς την ακμή του ίσο με 12, το μήκος της ακμής είναι ❒Α: 2 ❒Β: 1 ❒Γ: 3 ❒Δ: 4 ❒Ε: $\frac{1}{2}$

12) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=-x^2+1$ στο $A(1,0)$ είναι παράλληλη με την ευθεία:

❒Α: $y=2x+1$ ❒Β: $y=-x+1$ ❒Γ: $y=0$ ❒Δ: $y=-2x$ ❒Ε: $y=x+2$

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.3
(ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω συνάρτηση f με Π.Ο. το Α και $B \subseteq A$ είναι το σύνολο των σημείων του Α στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Ορίζεται τότε μία συνάρτηση με την οποία σε κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται το $f'(x)$.

Η συνάρτηση αυτή λέγεται πρώτη παράγωγος της f και συμβολίζεται με f'.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Η παράγωγος μιας συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_o είναι ίση με την τιμή της $f'(x)$ στο σημείο αυτό (επομένως για να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης f σ' ένα σημείο x_o, θα βρίσκουμε το $f'(x)$ και στη συνέχεια θα αντικαθιστούμε το x με x_o.

2) Η διαφορά μεταξύ της $f'(x)$ και της $f'(x_o)$ είναι ότι η $f'(x)$ είναι συνάρτηση ενώ η $f'(x_o)$ είναι πραγματικός αριθμός .

3) Η παράγωγος της f' λέγεται δεύτερη παράγωγος της f και συμβολίζεται με $f''(x)$. Η παράγωγος της $f''(x)$ λέγεται τρίτη παράγωγος της f και συμβολίζεται με $f'''(x)$ ή $f^{(3)}(x)$. Με τον ίδιο τρόπο επαγωγικά μπορούμε να ορίσουμε τη ν-στη παράγωγο της f που συμβολίζεται $f^{(v)}$.

4) Αν ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα και το διάστημα που διανύει δίνεται από τη συνάρτηση $x(t)$, τότε ως γνωστό η ταχύτητά του είναι $\upsilon(t) = x'(t)$ ενώ η επιτάχυνσή του είναι $\alpha(t) = \upsilon'(t) = x''(t)$.

5) υπολογισμός των παραγώγων των συναρτήσεων γίνετε εύκολα χρησιμοποιώντας τους παρακάτω τύπους που αποδεικνύονται με τη βοήθεια του ορισμού .

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Στην πράξη τώρα, οι συναρτήσεις με τις οποίες θα ασχοληθούμε είναι πολύ συγκεκριμένες και βασικές.

Έτσι καλό είναι να γνωρίζουμε κατευθείαν την παράγωγό τους, παρά να εφαρμόζουμε συνεχώς τη διαδικασία του ορισμού.

Συνάρτηση f(x)	**Παράγωγος f'(x)**	**Παραδείγμα**
c (σταθερά)	c	$(15)' = 0$
x	1	$(x)' = 1$
x^{α} $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$, $x > 0$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(2x^3)' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2$
$\sqrt{x}$, $x > 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
ημx	συνx	$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
συνx	– ημx	$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$
εφx	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

ΚΑΝΌΝΕΣ ΠΑΡΑΓΏΓΙΣΗΣ

Στις ασκήσεις, συνήθως, δεν αντιμετωπίζουμε κάθε απλή και βασική συνάρτηση, ξεχωριστά και μόνη της, αλλά σε διάφορους συνδυασμούς μεταξύ τους. Στην περίπτωση αυτή, οι παρακάτω κανόνες μας βοηθούν να ξεπεράσουμε τις όποιες αμηχανίες.

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
- $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$

Παρατηρούμε ότι ενώ, στην περίπτωση ενός απλού αθροίσματος ή μιας διαφοράς, βρίσκουμε την παράγωγο του κάθε όρου ξεχωριστά, ωστόσο στην περίπτωση γινομένου ή πηλίκου οι κανόνες είναι πιο πολύπλοκοι και χρειάζεται να τους απομνημονεύσουμε σωστά.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Όταν μιλάμε για σύνθεση συναρτήσεων, με απλά λόγια, μιλάμε για μία συνάρτηση «μέσα» σε μία άλλη. Αυτό που συμβαίνει, στην πράξη, είναι ότι εκεί που σε μια από τις βασικές συναρτήσεις που γνωρίσαμε βλέπαμε απλά το **x** , τώρα θα βλέπουμε μια πιο περίπλοκη έκφραση, δηλαδή μια άλλη συνάρτηση **f(x)** . Τη «νέα» αυτή έκφραση, τη συμβολίζουμε ως **g(f(x))** ή **$(g_{o}f)(x)$** .

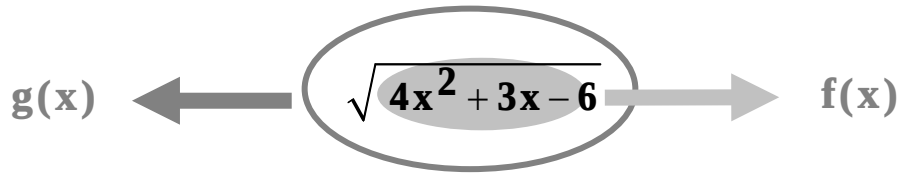
Για παράδειγμα,

αντί για ημx θα βλέπουμε ημ(x+2) ή αντί για x^2 θα βλέπουμε $(συνx)^2$.

Στην περίπτωση αυτή, εφαρμόζουμε τον παρακάτω κανόνα:

$$(g_{o}f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Παράδειγμα 20ο : Έστω η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{4x^2 + 3x - 6}$. Παρατηρούμε ότι η g(x) έχει προκύψει από την ένωση της βασικής συνάρτησης $\sqrt{x}$ και του πολυωνύμου $4x^2 + 3x - 6$. Άρα, πρόκειται για σύνθετη συνάρτηση.



Εφαρμόζουμε τον κανόνα:

$$g'(x) = (\sqrt{4x^2 + 3x - 6})' \cdot (4x^2 + 3x - 6)' = \frac{1}{2\sqrt{4x^2 + 3x - 6}} \cdot (8x + 3)$$

ΣΥΝΘΕΣΕΙΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Συνάρτηση	Παράγωγος
$g(x)=[f(x)]^{\alpha}$	$g'(x)=\alpha\cdot[f(x)]^{\alpha-1}\cdot f'(x)$
$g(x)=\frac{1}{f(x)}$	$g'(x)=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
$g(x)=\sqrt{f(x)}$	$g'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$g(x)=\eta\mu f(x)$	$g(x)=\sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)$
$g(x)=\sigma\upsilon\nu f(x)$	$g(x)=-\eta\mu f(x)\cdot f'(x)$
$g(x)=\varepsilon\phi f(x)$	$g'(x)=\frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}$

Παράδειγμα 21ο : Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων :

α) f(x)=2x-4 β)f(x)=x.ημx γ) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

Λύση

α) $f'(x)=(2x-4)'=(2x)'-4'=2x'-0=2\cdot 1=2$

β) $f'(x)=(x\cdot\eta\mu x)'=x'\cdot\eta\mu x+x\cdot(\eta\mu x)'=1\cdot\eta\mu x+x\cdot\sigma\upsilon\nu x=x+x\sigma\upsilon\nu x$

γ) $f'(x)=\frac{x'\cdot(x^2+1)-x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

Παράδειγμα 22ο : Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu^4(2x+1)$

Λύση

Η συνάρτηση είναι σύνθετη, οπότε ,για να βρούμε την παράγωγο της, εφαρμόζουμε πρώτα τον κανόνα παραγώγισης δύναμης και στη συνέχεια τον κανόνα παραγώγισης τριγωνομετρικής συνάρτησης.

Επομένως,

$$\begin{aligned} f'(x)&=\left(\eta\mu^4(2x+1)\right)'=4\eta\mu^3(2x+1)\cdot\left(\eta\mu(2x+1)\right)'\\ &=4\eta\mu^3(2x+1)\cdot\sigma\upsilon\nu(2x+1)\cdot(2x+1)'\\ &=8\eta\mu^3(2x+1)\sigma\upsilon\nu(2x+1)\end{aligned}$$

Παράδειγμα 23ο : Δίνεται f με τύπο $f(x)=2x^3-3x^2-12x-7,\ x\in R$.

Να βρείτε :

α) την $f'(x)$

β) τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης f στα οποία η παράγωγος είναι μηδέν.

Λύση

α) Η παράγωγος της f είναι

$$\begin{aligned} f'(x)&=\left(2x^3-3x^2-12x-7\right)'=2\left(x^3\right)'-3\left(x^2\right)'-12x'-7'=\\ &=6x^2-6x-12\end{aligned}$$

β) Για να βρούμε τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης f στα οποία η παράγωγος είναι μηδέν ,αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f'(x)=0$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2-6x-12=0\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2\\ \text{ή}\\ x=-1\end{array}\right\}$$

Άρα, τα σημεία της καμπύλης είναι τα $A(2,f(2))$ και $B(-1,f(-1))$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(Α Ομάδα)

1) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

α) $f(x)=5$ β) $f(x)=-11$ γ) $f(x)=0$ δ) $f(x)=x$ ε) $f(x)=x^2$

στ) $f(x)=x^3$ ζ) $f(x)=x^5$ η) $f(x)=x^{100}$

2) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

α) $f(x)=x^{-2}$ β) $f(x)=x^{-4}$ γ) $f(x)=\frac{1}{x^3}$ δ) $f(x)=\frac{1}{x^{10}}$ ε) $f(x)=x^{\frac{1}{4}}$

στ) $f(x)=x^{\frac{3}{5}}$ ζ) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ με $x>0$

3) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

α) $f(x)=\sqrt{x}$ β) $f(x)=\sqrt[5]{x}$ γ) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ δ) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ ε) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$, $\chi>0$

4) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

α) $f(x)=3x^2$ β) $f(x)=\frac{1}{4}x^4$ γ) $f(x)=\frac{2}{3}x^6$ δ) $f(x)=-\frac{3}{4}x^8$ ε) $f(x)=-\frac{1}{5}x^{30}$

5) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

α) $f(x)=x^2-3x+4$ β) $f(x)=3x^2-6x+10$

γ) $f(x)=3x^2-6$ δ) $f(x)=x^3-4x^2+7x-10$

ε) $f(x)=4x^3-6x^2+9x$ στ) $f(x)=5x^6-12x^3+15x^2-30x$

6) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

α) $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-3$ β) $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+x-\eta\mu\frac{\pi}{3}$

γ) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x$ δ) $f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x-3$

7) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

α) $f(x)=(x+4)(x-2)$ β) $f(x)=(x^2+4x)(2x+6)$

γ) $f(x)=(x^2-4x+3)(x^2-3)$ δ) $f(x)=(x^3-5x^2+7x)(x^2-4)$

8) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

α) $f(x)=(x^2+5)(\eta\mu\chi)$ β) $f(x)=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$

γ) $f(x)=\eta\mu x\cdot(\sqrt{x}+x^2)$ δ) $f(x)=x^2\sigma\upsilon\nu x$

9) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

α) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ β) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$ γ) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}$

δ) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+1}$ ε) $f(x)=\dfrac{2\eta\mu x+3}{\sigma\upsilon\nu x+1}$ στ) $f(x)=\dfrac{4\sigma\upsilon\nu x-5}{\eta\mu x+1}$

10) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

α) $f(x)=(x^2+1)^2$ β) $f(x)=(2x+3)^3$ γ) $f(x)=(3x+2)^5$

δ) $f(x)=(3x^2+1)^3$ ε) $f(x)=(4x^3+3x^2)^2$ στ) $f(x)=(x^2-4)^4$

11) Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

α) $f(x)=\eta\mu^2x$ β) $f(x)=\sigma\upsilon\nu^2x$ γ) $f(x)=\eta\mu x^2$

δ) $f(x)=\sqrt{x+1}$ ε) $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ στ) $f(x)=\sqrt{4x^2-3x}$

(Β Ομάδα)

12) Αν $f(1)=2f'(1)=4$ και $g(0)=-g'(0)=1$ να υπολογισθεί η τιμή $h'(0)$ σε κάθε μια των συναρτήσεων:

α) $h(x)=f(g(x))$ β) $h(x)=f^2(g(x))$ γ) $h(x)=f(g^2(x))$ δ) $h(x)=f(x+g(x))$

13) Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος των συναρτήσεων

α) $f(x)=2x^3-6x^2+7x\ \ 6$ β) $f(x)=x\cdot\sigma\upsilon\nu x$ γ) $f(x)=x^2\cdot\eta\mu x$

14) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\cdot ημχ$

α) Να βρεθούν $f'(x),f''(x)$ και $f^{(3)}(x)$

β) Να βρεθούν οι τιμές $f'(0),f''(0)$ και $f^{(3)}(0)$

15) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^4-3x^2+5x-\sqrt{3}$

α) Να βρεθούν $f'(x),f''(x)$ και $f^{(3)}(x)$

β) Να βρεθούν οι τιμές $f'(1),f''(-1)$ και $f^{(3)}(0)$

16) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-3}{x+1},x\neq -1$

α)Να βρεθεί η $f'(x)$

β)Να υπολογιστούν οι τιμές $f'(0),f'(4)$

17) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\alpha x^2+2x-3,\ x\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$.

Αν $f'(2)=-2$ να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α.

18) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=-2x^3+\alpha x^2+12\chi+1$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

Αν $f'(-2)=f'(-1)$ να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α.

19) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta\chi$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Αν το σημείο $M(1,5)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f και η παράγωγος σε αυτό να είναι 8, να βρεθούν τα α και β.

20) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=Aημωx+Aσυνωx$. Να αποδείξετε ότι $f''(x)+\omega^2 f(x)=0$.

21) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο με τετμημένη x=2.

22) Να βρεθεί η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=5\sqrt{x}$ στο σημείο με τετμημένη x=4.

23) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1-\frac{4}{\eta\mu x+4}, x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f, διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης.

γ) Να βρεθεί η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στην αρχή των αξόνων.

24) Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης $f(x)=\frac{x^2}{x+1}, x\neq -1$ στο σημείο $A(2,f(2))$ και της συνάρτησης $g(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu\chi}$ στο σημείο $B\left(\frac{\pi}{2},g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

25) Να βρεθεί σε ποια σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^2-3$ η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$.

26) Να βρεθεί σε ποια σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+6t-1$ η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον $x'x$.

27) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $f(t)=2\eta\mu t\cdot\sigma\upsilon\nu t$ στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{6},f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

28) Το συνολικό κόστος K(x) (σε χιλιάδες ευρώ) παραγωγής x ιστιοπλοϊκών πανιών την ημέρα από μια εταιρεία δίνεται από τη συνάρτηση: $K(\chi)=-x^2+30\chi+15,\ 0\le\chi\le 15$

Ποιος ο ρυθμός μεταβολής του συνολικού κόστους, αν η εταιρεία παράγει δέκα πανιά την ημέρα;

29) Μια βιομηχανία ψυγείων υπολόγισε ότι το συνολικό κόστος παραγωγής x ψυγείων την εβδομάδα δίνεται από τη συνάρτηση:

$K(\chi)=2000+5\chi-\frac{x^2}{50}$, χιλιάδες ευρώ με $0\le\chi\le 400$

α) Πόσο κοστίζει η παραγωγή του 151ου ψυγείου;

β) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κόστους, όταν η βιομηχανία παράγει 150 ψυγεία την εβδομάδα;

γ) Να συγκριθούν τα αποτελέσματα των (α) και (β);

30) Μια αυτοκινητοβιομηχανία υπολόγισε ότι η σχέση μεταξύ της τιμής Τ ενός νέου μοντέλου αυτοκινήτου και της ζητούμενης ποσότητας x αυτοκινήτων του μοντέλου αυτού δίνεται από τη συνάρτηση:

$T(x) = -0,2x + 4000,$ σε χιλιάδες ευρώ με $0 \le x \le 10000$.

Επίσης το κόστος κάθε αυτοκινήτου, ως συνάρτηση των x μονάδων αυτοκινήτου που παράγονται, δίνεται από τη σχέση:

$K(x) = 950x + 250000,$ σε χιλιάδες ευρώ για $0 \le x \le 10000$

α) Να βρεθεί η συνάρτηση P(x) κέρδους της αυτοκινητοβιομηχανίας.

β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κέρδους.

γ) Να υπολογισθεί το P'(4000).

31) Μια ομάδα βιολόγων σε ένα ωκεανογραφικό ινστιτούτο προτείνει να ληφθούν μια σειρά από προληπτικά μέτρα για τη διάσωση ενός συγκεκριμένου είδους φάλαινας από την εξαφάνιση. Μετά την εφαρμογή των μέτρων αυτών ο αριθμός (N) των φαλαινών εκτινάται ότι θα μεταβάλλεται με τον χρόνο (t) σύμφωνα με τη συνάρτηση:

$N(t) = 3t^3 + 2t^2 - 10t + 600,\ 0 \le t \le 10$

Να βρεθεί ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού τον 2ο και 6ο χρόνο, καθώς και πόσες φάλαινες θα υπάρχουν τον 8ο χρόνο.

32) Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 10 m.

α) Να βρεθεί το εμβαδόν του Ε συναρτήσει της μιας πλευράς του x.

β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού όταν $x = 2$.

33) Ένα σώμα βάλεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Το ύψος του σε m δίνεται από τη σχέση:

$h(t) = 50t - 5t^2$, t σε sec

α) Να βρεθεί η αρχική ταχύτητα του σώματος.

β) Ποια στιγμή το σώμα φτάνει στο ανώτερο ύψος και ποιο είναι το ύψος αυτό;

γ) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας.

34) Ένα αυτοκίνητο διανύει απόσταση S στα t πρώτα δευτερόλεπτα της εκκίνησης του ίση με:

$S(t) = t^3 + \alpha t^2 + \beta t$, $0 \le t \le 10$

α) Να βρείτε την επιτάχυνση του αυτοκινήτου οποιαδήποτε χρονική στιγμή t, με $0 \le t \le 10$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α το αυτοκίνητο επιβραδύνει μετά από τα 6 πρώτα sec της κίνησης του.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΥ

1) Αν είναι $f(x_0)=g(x_0)$, τότε $f'(x_0)=g'(x_0)$.

2) Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=3x^2$ ως προς x^2 είναι 3 .

3) Αν $f'(x_0)=g'(x_0)$, τότε οι εφαπτόμενες στις καμπύλες των f και g στο σημείο x_0 είναι παράλληλες .

4) Είναι $(\eta\mu\frac{1}{x})'=\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$.

5) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και οι συναρτήσεις f+g και f.g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 .

6) Αν η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε οι συναρτήσεις f και g θα είναι πάντα παραγωγίσιμες στο x_0 .

7) Δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο R που έχουν την ίδια παράγωγο συνάρτηση είναι ίσες .

8) Η παράγωγος ενός πολυωνύμου ν-στου βαθμού , $\nu\in N^*$ είναι πολυώνυμο ν-1 βαθμού .

9) Υπάρχουν συναρτήσεις f,g παραγωγίσιμες , ώστε $(f.g)'=f'.g'$.

10) Αν $f(0)=f'(0)=-1$ και $g(x)=(f(x))^2$, τότε η $g'(0)$ είναι ίση με :

❒Α: -2 ❒Β: 2 ❒Γ: -1 ❒Δ: 4

11) Αν $f(x)=(3x-2)^3$ και η κ τάξεως παράγωγος της f είναι ίση με μηδέν , δηλαδή $f^{(\kappa)}(x)=0$, τότε

❒Α:$\kappa=4$ ❒Β: $\kappa=3$ ❒Γ: $\kappa=2$ ❒Δ: $\kappa\geq 4$

12) Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\sigma\upsilon\nu x^2$ είναι :

❒Α: $2x\eta\mu x^2$ ❒Β: $-\eta\mu x^2$ ❒Γ: $-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$ ❒Δ: $-2x\eta\mu x^2$ ❒Ε: $\eta\mu 2x$

13) Η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}$ στο Α(1,1) έχει εξίσωση

❒Α: $\psi=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ ❒Β: $\psi=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ❒Γ: $\psi=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ ❒Δ: $\psi=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ ❒Ε: $\psi=\frac{1}{2}x+1$

14) Η εφαπτόμενη της καμπύλης της $f(x)=4-x^2$ στο σημείο Α(1,3) σχηματίζει ορθογώνιο τρίγωνο με τους άξονες . Το εμβαδόν του τριγώνου αυτού είναι ίσο με :

❒Α: $\frac{5}{4}$ ❒Β: $\frac{5}{2}$ ❒Γ: $\frac{25}{2}$ ❒Δ: 1 ❒Ε: $\frac{25}{4}$

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.4
(ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ)

Ένα σημείο x_0 ενός διαστήματος Δ , λέγεται εσωτερικό σημείο του , όταν δεν είναι ένα από τα άκρα του Δ και ανήκει στο διάστημα Δ .

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1Η (ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ)

Αποδεικνύεται ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ τοτε εάν ισχυει :

$f'(x)>0$, για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Δ

$f'(x)<0$, για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο Δ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Στο ίδιο συμπέρασμα για τη μονοτονία μιας συνάρτησης f μπορούμε να καταλήξουμε και με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης π.χ. αν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της f για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ έχουν αρνητικό συντελεστή διεύθυνσης (σχηματίζουν αμβλεία γωνία με τον άξονα x'x) τότε $f'(x)<0$,ενώ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ έχουν θετικό συντελεστή διεύθυνσης (σχηματίζουν οξεία γωνία με τον άξονα x'x) άρα $f'(x)>0$.

2) Για να βρούμε το πρόσημο της f ':

- Λύνουμε την ανίσωση $f'(x)>0$ ή $f'(x)<0$
- Αν υπάρχει δυσκολία στην επίλυση της ανίσωσης , θέτουμε μία τυχαία φορά >0 ή <0 και μετά από πράξεις καταλήγουμε σε παράσταση που ισχύει ή σε άτοπο .

Παράδειγμα 24ο : Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x)=x(x-2)$ στο διάστημα $[0,2]$.

Λύση

$f'(x)=(x^2-2x)'=2x-2$.

Αν $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2(x-1)=0 \Leftrightarrow x=1$.

x	0		1		2
f '(x)		–		+	
f(x)		↘		↗	

Άρα η f στο [0,1] είναι γνησίως φθίνουσα , ενώ στο [1,2] είναι γνησίως αύξουσα

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2Η (ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ)

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν :

-$f'(x_0)=0$ για $x_0\in(\alpha,\beta)$

-$f'(x_0)>0$, για $x\in(\alpha,x_0)$ και $f'(x_0)<0$, για $x\in(x_0,\beta)$

τοτε η f στο x_0 παρουσιάζει **μέγιστο** , η τιμή του οποίου είναι ίση με $f(x_0)$.

Τα συμπεράσματα φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

x	α		x_0		β
πρόσημο f '		+		–	
μονοτονία f		↗		↘	
			μέγιστο		

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν :

-$f'(x_0)=0$ για $x_0\in(\alpha,\beta)$

-$f'(x_0)<0$, για $x\in(\alpha,x_0)$ και $f'(x_0)>0$, για $x\in(x_0,\beta)$

τότε η f στο x_0 παρουσιάζει **ελάχιστο**, η τιμή του οποίου είναι ίση με $f(x_0)$. Τα συμπεράσματα φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

x	α		x_0		β
πρόσημο f '		-		+	
μονοτονία f		↘		↗	
			ελάχιστο		

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο) στο $x=x_0$, τότε $f'(x_0)=0$

2) Το ανάποδο όμως δεν ισχύει δηλαδή :
(αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0)=0$, τότε η f δεν παρουσιάζει απαραίτητα ακρότατο στο $x=x_0$)

Παράδειγμα 25ο : Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $x>0$.

Λύση

$f'(x)=(x+\frac{1}{x})'=1-\frac{1}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$, $x>0$.

Αν $f'(x)=0 \Rightarrow x=1$ ή $x=-1$ (απορρίπτεται) επειδή $x^2>0$ και $x+1>0$ (διότι $x>0$) το πρόσημο της f' καθορίζεται από την παράσταση $x-1$. Άρα έχουμε :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f '		-	0	-	0	+	
f			↘			↗	

Άρα η f έχει για $x=1$ ελάχιστο το $f(1)=2$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Έστω μια συνεχής συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Το ολικό μέγιστο (ελάχιστο) της f παρουσιάζεται είτε στα εσωτερικά σημεία του διαστήματος $[\alpha,\beta]$ είτε στα άκρα του , δηλαδή τα α και β .

2) Τα τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα , αν υπάρχουν , αναζητούνται
-στις ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$,
-στα άκρα του Π.Ο. της f αν αυτή ορίζεται σε κλειστό διάστημα ,
-στα σημεία που δεν υπάρχει η πρώτη παράγωγος .

3) Αν $f'(x_0)=0$ και εκατέρωθεν του x_0 η f' δεν αλλάζει πρόσημο, τότε το x_0 δεν είναι σημείο τοπικού ακρότατου .

Παράδειγμα 26ο : Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=2x^3+9x^2-24x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το R.

1. Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης
$f'(x)=\left(2x^3+9x^2-24x\right)=6x^2+18x-24=6\left(x^2+3x-4\right)=6(x-1)(x+4)$

2. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0 \Leftrightarrow 6(x-1)(x+4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{ή} \\ x=-4 \end{cases}$

3. Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμων για την f'.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
Πρόσημο της f'		-	0	+	0	-	
$f(x)$		φθίνουσα	ελάχιστο	αύξουσα	μέγιστο	φθίνουσα	

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-4]$ και $[1,+\infty)$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-4,1]$.

Επίσης ,παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_0=-4$ του οποίου η τιμή είναι f(-4) και μέγιστο στο σημείο $x_0=1$ του οποίου η τιμή είναι f(1).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

1) Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις.

i. $f(x)=3x+5$

ii. $f(x)=-3x+4$

iii. $f(x)=2x^2-4x+2$

iv. $f(x)=-3x^2-5x+2$

v. $f(x)=3x^2-1$

vi. $f(x)=-x^2+6x+8$

vii. $f(x)=-4(x^2+1)+16x-9$

2) Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις.

(ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ)

i. $f(x)=4x^3-12x+2006$

ii. $f(x)=\frac{1}{2}x(50-x)$

iii. $f(x)=x^2+\kappa x+\lambda$

iv. $f(x)=4x^3-6x^2+\alpha+2008$

v. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+2008$

vi. $f(x)=-x^2+6x+8$

vii. $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x+1}$

viii. $f(x)=x^3-3x+2$

ix. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\kappa x^2+\lambda x-2-\lambda$

x. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+\alpha x+\beta$

xi. $f(x)=-x^2+2x-3$

xii. $f(x)=x^2-3x+2$

xiii. $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$

xiv. $f(x)=3x^2-2x-1$

xv. $f(x)=x^3-x^2-x+1$

xvi. $f(x)=10x^2-50x+500$

xvii. $f(x)=-\frac{-x^3}{3}+2x^2+12x+15$

xviii. $f(x)=x^2+2x-3$

xix. $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$

xx. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x-\frac{4}{3}$

xxi. $f(x)=x^4+4x+2019$

xxii. $f(x)=(x^2+3)(x-3)$

3) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τις θέσεις, το είδος των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f με

α) $f'(x)=(x-1)^3(x-2)^2(x-3)$

β) $f'(x)=(x-1)^5(x-2)^4(x-3)$

4) Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν έχουν ακρότατα.

α) $f(x) = -2x^3 - 4x + 5$

β) $f(x) = 5x^3 + 15x^2 + 15x - 4.$

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 - \lambda x - 3, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι γνησίως φθίνουσα.

ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΕΣ

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 6$

α) Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι αν $0 \le x \le 2$ τότε $2 \le f(x) \le 6$

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + \frac{1}{3}$

α) Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι αν $1 \le x \le 3$ τότε $-1 \le f(x) \le 6$

δ) Βρείτε την τιμή x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχι στος.

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

α) Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι αν $1 \le x \le 3$ τότε $1 \le f(x) \le 5$

δ) Βρείτε την τιμή x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + 1$.

α) Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(-1) < f(-11)$

10) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+2008$, όπου $x\in\Re$.

α) Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f.

β) Να εξεταστεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να δειχθεί ότι $f(x) \geq 2008$ για κάθε πραγματικό αριθμό x, όπου $x\in[1,+\infty)$.

11) Δίνεται η συνάρτηση με παράγωγο $f'(x)=x^2+2x-3$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία η συνάρτηση f' παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της f' στα σημεία στα οποία τέμνει τον xx'

12) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, όπου $x>1$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x)=\frac{-2}{(x-1)^2}$

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$. Κατόπιν να συγκρίνετε τις τιμές f(2010) και f(2011).

13) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\alpha x^2+2x-3$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Αν $f'(2)=-2$, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό α.

β) Για $\alpha=-1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

14) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=2x^3-9x^2+\alpha x+\beta$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f.

β) Αν $f'(1)=0$ και $f(2)=5$, να βρείτε τα α και β.

γ) Για τις τιμές των α και β που βρήκατε στο ερώτημα (β), να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

15) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=4x^3-6x^2+\alpha+2008$, όπου α πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f.
β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
γ) Να δείξετε ότι η έχει ένα τοπικό ελάχιστο, το οποίο να υπολογίσετε συναρτήσει του α.
δ) Να υπολογίσετε το α αν το τοπικό ελάχιστο είναι ίσο με 2009.

16) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-3x^2+\alpha+2011$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
β) Να δείξετε ότι η f έχει ένα τοπικό ελάχιστο, το οποίο και να βρείτε.
γ) Να βρείτε το α, αν το τοπικό ελάχιστο της είναι 2012.

17) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+\alpha+\frac{1}{3}$, με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της f.
β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f'(x)+f''(x)+2}{x+1}$
γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να προσδιορίσετε τις τιμές του x, για τις οποίες η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.
δ) Εάν το τοπικό μέγιστο της f είναι τριπλάσιο από το τοπικό της ελάχιστο, να βρείτε τον αριθμό α.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

18) Η χωρητικότητα σε λίτρα των πνευμόνων ενός ανθρώπου ηλικίας x ετών δίνεται από τη συνάρτηση $f(x)=-\frac{1}{200}x^2+\frac{1}{5}x+4$, $10\le x\le 35$. Σε ποια ηλικία οι πνεύμονες του ανθρώπου έχουν τη μέγιστη χωρητικότητα;

19) Η κατανάλωση ενός κινητήρα σε λίτρα ανά 100 χιλιόμετρα, όταν αυτός λειτουργεί με x χιλιάδες στροφές ανά λεπτό, δίνεται από τη συνάρτηση:
$f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-x+10$, όπου $1\le x\le 5$
α) Πότε η κατανάλωση αυξάνεται και πότε μειώνεται.
β) Η τιμή του x για την οποία έχουμε τη μικρότερη κατανάλωση, καθώς επίσης και πόση είναι η κατανάλωση αυτή.

20) Το πλήθος των επισκεπτών σε μια παραλία του Σαρωνικού την εβδομάδα που μας πέρασε δίνεται από τη συνάρτηση:
$P(x)=-\frac{1}{6}x^3+7x^2+30x+300$
όπου x η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου με $20\le x\le 35$. Να βρείτε:
α) Για ποια θερμοκρασία είχαμε το μέγιστο πλήθος επισκεπτών.
β) Το μέγιστο πλήθος επισκεπτών.

21) Το ύψος (σε m) που βρίσκεται ένα τηλεκατευθυνόμενο μοντέλο αεροπλάνου, μετά από χρόνο πτήσης t (sec) δίνεται από τη συνάρτηση:

$f(t) = -3t^2 + 30t$, όπου $0 \le t \le 10$

α)Σε ποιο ύψος βρίσκεται το αεροπλάνο τη χρονική στιγμή t=0;
β)Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του ύψους του αεροπλάνου μετά από χρόνο t.
γ)Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το αεροπλάνο ανεβαίνει, καθώς και το χρονικό διάστημα κατά το οποίο κατεβαίνει.
δ)Να βρείτε τη χρονική στιγμή t κατά την οποία το αεροπλάνο βρίσκεται στο μέγιστο ύψος, καθώς και το ύψος αυτό.

22) Το ύψος (σε m) που βρίσκεται ένας πύραυλος, μετά από χρόνο πτήσης t (sec) δίνεται από τη συνάρτηση:

$f(t) = -\frac{1}{6}t^3 + 8t^2 + \frac{33}{2}t + 5$, όπου $t \ge 0$

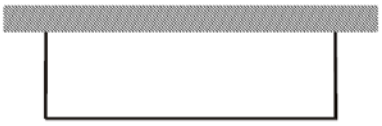
α)Σε ποιο ύψος βρίσκεται ο πύραυλος τη χρονική στιγμή t=0;
β)Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του ύψους του πυραύλου μετά από χρόνο t.
γ)Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο πύραυλος ανεβαίνει, καθώς και το χρονικό διάστημα κατά το οποίο κατεβαίνει.
δ)Να βρείτε τη χρονική στιγμή t κατά την οποία ο πύραυλος βρίσκεται στο μέγιστο ύψος, καθώς και το ύψος αυτό.

23) Από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 14 να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

24) Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδόν $400m^2$, να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

25) Το άθροισμα του μήκους και του πλάτους ενός οικοπέδου, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, είναι 200 μέτρα. Αν το μήκος του είναι x μέτρα:
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = -x^2 + 200x$.
β) Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο;
γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του οικοπέδου.

26) Έχουμε περιφράξει με συρματόπλεγμα μήκους 200 m μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της (Σχήμα 1). Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x.

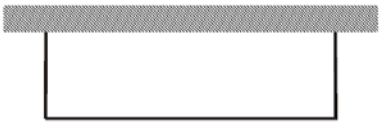


Σχήμα 1

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε δίνεται από τον τύπο $f(x) = 100x - \frac{1}{2}x^2$.

β. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που θα μπορούσαμε να περιφράξουμε με το συρματόπλεγμα των 200 m.

27) Έχουμε περιφράξει με συρματόπλεγμα μήκους 600 m μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της (Σχήμα 1). Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x.



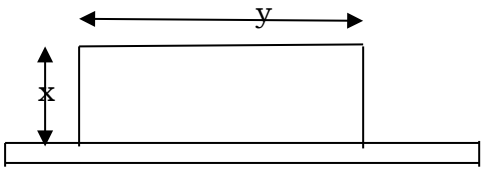
Σχήμα 1

28) α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε δίνεται από τον τύπο $f(x) = -2x^2 + 600x$.

β. Να βρείτε το x ώστε το E(x) να γίνει μέγιστο.

γ. Να υπολογιστεί η μέγιστη τιμή του εμβαδού.

29) Μια εταιρεία διαθέτει 1.200€ για την περίφραξη τριών πλευρών οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι πλευρές μήκους x, θα κατασκευαστούν από υλικό που κοστίζει 2€ το μέτρο, ενώ η πλευρά μήκους y από υλικό που κοστίζει 3€ το μέτρο.



α) Να αποδείξετε ότι $4x + 3y = 1.200$

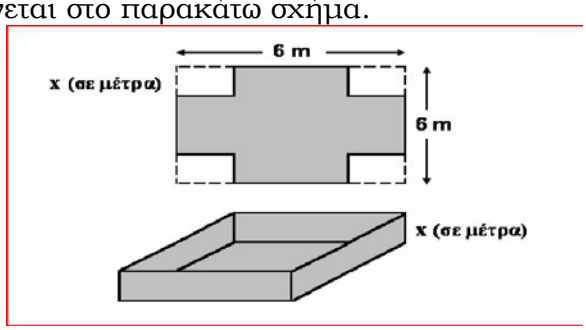
β) Αν ονομάσουμε E(x) το εμβαδόν του οικοπέδου, δείξτε ότι $E(x) = \frac{4}{3}(300x - x^2)$.

γ) Να βρείτε τις διαστάσεις x, y του οικοπέδου, ώστε το εμβαδόν του να γίνει μέγιστο.

30) Χαρτοκιβώτιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο έχει όγκο 8 m^3. Να βρεθεί πότε ο όγκος του γίνεται μέγιστος.

31) Χαρτοκιβώτιο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο έχει ολικό εμβαδόν 24 m^2. Να βρεθεί πότε το ολικό εμβαδόν γίνεται ελάχιστο.

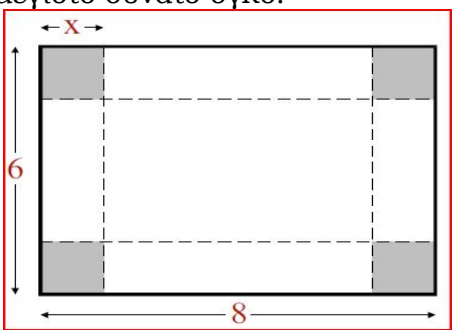
32) Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 6 μέτρων κατασκευάζεται μια δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ανοικτή από πάνω. Από τις γωνίες του φύλλου λαμαρίνας κόβονται τέσσερα ίσα τετράγωνα πλευράς x μέτρων, $0 < x < 3$ και στη συνέχεια οι πλευρές της διπλώνονται προς τα επάνω, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι ο όγκος της δεξαμενής ως συνάρτηση του x είναι
$f(x) = 4x(3-x)^2, 0 < x < 3$
(Δίνεται ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων α, β, γ είναι V= αβγ).
β) Να βρείτε για ποια τιμή του x η δεξαμενή έχει μέγιστο όγκο.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+2)-8}{x}$

33) Από ένα κομμάτι χαρτόνι ορθογωνίου σχήματος, με πλευρές 6 cm και 8 cm, να κατασκευασθεί ένα κουτί ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, ανοικτό στο πάνω μέρος, έτσι ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό όγκο.



34) Μια βιοτεχνία, μεταξύ άλλων, κατασκευάζει κεραμικά πλακίδια σε σχήμα τριγώνου. Σε κάθε πλακίδιο το άθροισμα της βάσης x και του ύψους που αντιστοιχεί στη βάση αυτή είναι σταθερό και ισούται με 50 cm.
α) Να δείξετε ότι το εμβαδό E της επιφάνειας κάθε τριγωνικού πλακιδίου δίνεται συναρτήσει του x από τον τύπο $E(x) = \dfrac{1}{2}x(50-x), 0 < x < 50$.
β) Για ποια τιμή του x το εμβαδό $E(x)$ γίνεται μέγιστο.
γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του $E(x)$.

35) Ένα εργοστάσιο αεροναυπηγίας έχει τη δυνατότητα να κατασκευάζει κατά έτος μέχρι και 20 αεροσκάφη ενός συγκεκριμένου τύπου. Τα έσοδα από την πώληση ενός αεροσκάφους (σε χιλιάδες ευρώ) εκφράζονται με τη συνάρτηση $E(x) = 3x + 20$, ενώ το κέρδος από την πώληση x αεροσκαφών με τη συνάρτηση $K(x) = -x^2 + 20x - 30$.
α) Να βρεθεί ο τύπος $P(x)$ της συνάρτησης κόστους κατασκευής x αεροσκαφών.
β) Πόσα σκάφη πρέπει να κατασκευάζει το αεροναυπηγείο ώστε να έχει το μέγιστο κέρδος;

36) Μια τουριστική επιχείρηση οργανώνει εκδρομές με λεωφορεία. Κάθε τουριστικό λεωφορείο έχει 50 θέσεις. Όταν οι επιβάτες του λεωφορείου είναι ακριβώς 30, τότε η εταιρεία ζητά 3€ κατά άτομο. Για να αυξήσει τους επιβάτες, η εταιρεία κάνει την εξής προσφορά: «Κάθε επιπλέον επιβάτης θα μειώνει κατά 0,30€ τη χρέωση κάθε άλλου επιβάτη». Να βρεθεί το πλήθος των επιπλέον επιβατών που πρέπει να έχει κάθε λεωφορείο, ώστε η επιχείρηση να έχει μεγιστοποιήσει τα έσοδα της.

37) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση κέρδους P, η οποία, όπως είδαμε, δίνεται ως η διαφορά της συνάρτησης εσόδων E και της συνάρτησης κόστους K, δηλαδή:
$P(x) = E(x) - K(x),\ x \geq 0$
όπου x είναι η ποσότητα προϊόντος που παράγεται και πωλείται.
α) Ποια θα είναι η μονοτονία της συνάρτησης κέρδους όταν:
i) Η E είναι γνησίως φθίνουσα και η K γνησίως αύξουσα.
ii) Η E είναι γνησίως αύξουσα και η K γνησίως φθίνουσα.
β) Εξάγονται συμπεράσματα για τη μονοτονία της συνάρτησης κέρδους, αν οι συναρτήσεις E και K έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας;
γ) Εξηγήστε με οικονομικούς όρους τα (α) και (β).

38) Υποθέτουμε ότι οι θερμοκρασίες (σε C^o) σε μια περιοχή κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου προσεγγίζονται από τις τιμές της συνάρτησης $\theta(t) = t - 4\sqrt{t} + \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ και $t \in (0,24]$ ο χρόνος σε ώρες.

α) Να αποδείξετε ότι για $t \in (0,4]$ η θερμοκρασία μειώνεται και για $t \in (4,24]$ η θερμοκρασία αυξάνεται.
β) Να υπολογίσετε την τιμή του α, αν γνωρίζετε ότι η ελάχιστη θερμοκρασία της περιοχής εντός του 24ώρου είναι $-1C^o$.
γ) Για α = 3 να βρείτε τις ώρες που η θερμοκρασία της περιοχής είναι $0C^o$.
δ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{t\to 4}\dfrac{\theta'(t)}{t^2-4}$.

39) Η θερμοκρασία μιας περιοχής σε βαθμούς κελσίου, ως συνάρτηση του χρόνου t σε ώρες δίνεται από την σχέση $\theta(t) = -t^3 + 9t^2 - 10t + c, 0 \leq t \leq 8$.

α) Να προσδιορίσετε την τιμή της σταθεράς c, αν γνωρίζετε ότι την χρονική στιγμή t = 0 η θερμοκρασία ήταν $16C^\circ$
β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας στο τέλος της τέταρτης ώρας
γ) Να βρείτε την ώρα με το μέγιστο ρυθμό μεταβολής.

40) Ένα εμπορικό κατάστημα έχει κόστος, για την απόκτηση και την αποθήκευση x μονάδων προϊόντος, που υπολογίζεται από τη συνάρτηση $K(x) = 2x + \dfrac{300000}{x}, 1 \leq x \leq 300$. Το φορτηγό που διαθέτει μπορεί να μεταφέρει το πολύ 300 μονάδες προϊόντος ανά παραγγελία.
Να βρεθεί το μέγεθος της παραγγελίας για την οποία το κόστος είναι ελάχιστο.
Αν το προηγούμενο φορτηγό αντικατασταθεί από άλλο μεγαλύτερο το οποίο μπορεί να μεταφέρει έως 400 μονάδες προϊόντος, μπορεί το κόστος να μειωθεί ακόμη περισσότερο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΘΕΜΑ 2ο (2000ε)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$, με x πραγματικό αριθμό.

α. Να βρείτε την f '(x).
β. Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης f στα οποία η παράγωγος ναι 0.

Μονάδες (5+10)

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο (2001)

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = συνx + ημx.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f''(x) = 0$.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A (0,1).

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την τιμή $\lambda \in \mathbf{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση: $\lambda f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 2ο (2002)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f **Μονάδες 4**

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ **Μονάδες 4**

γ. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f **Μονάδες 7**

δ. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλλη

λες στην ευθεία y=2x+5 **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο (2002ε)

Δίνεται η συνάρτηση f(x)=αx(2-x), α∈R

Α. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της O(0, f(0)) να σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45°.

Μονάδες 10

Β. Για α = 1/2, να βρείτε:

α. την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της (1, f(1)).

β. τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες (5+10)

ΘΕΜΑ 3ο (2003)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

Α. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο:

α. $\mathbb{R}$ **β.** $(-1,1)$ **γ.** $\mathbb{R} - \{-1,1\}$ **δ.** $(1, +\infty)$

Μονάδες 5

Β. Να αποδείξετε ότι $f'(x)<0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 7

Γ. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to -1}\left[(x+1)\cdot f(x)\right]$

Μονάδες 6

Δ. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0, f(0)) με τον άξονα x΄x .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 2ο (2003ε)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της f, όταν x=3, ισούται με $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Μονάδες 10

γ. Αν $h(x) = \frac{f(x)-\sqrt{3}}{x-2}$ για $x \neq 2$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο (2004)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . **Μονάδες 10**

Β. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$. **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ 2ο (2004ε)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)= \frac{x+2}{e^x}$

α. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης. **Μονάδες 9**

β. Να αποδείξετε ότι $f(x)+f'(x)=\frac{1}{e^x}$ **Μονάδες 8**

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α (0, f(0)).

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο (2005)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)= \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο Α (1, 1).

Μονάδες 7

β. Από τυχαίο σημείο Μ(x,y) της γραφικής παράστασης της f φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες x΄x και y ΄y , οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Ox , Oy ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Μ ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη.

Μονάδες 10

*__γ__. Οι τετμημένες πέντε διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του ερωτήματος α. έχουν μέση τιμή $\overline{x}=5$ και τυπική απόκλιση $s_x= 2$. Να βρεθεί η μέση τιμή $\overline{y}$ και η τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων των σημείων αυτών.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο (2005 ε)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\ln x - \beta x^2$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. **Μονάδες 3**

β. Να βρείτε την παράγωγο της f για κάθε x, το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της. **Μονάδες 5**

γ. Να βρείτε τα α και β, ώστε η εφαπτομένη στο σημείο Α(1,1) της γραφικής παράστασης της f να είναι y=3x-2 . **Μονάδες 10**

δ. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\left(f'(x)\cdot x^3\right)$ **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 2ο (2006 ε)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x(\alpha x^2 + \beta x + 9)$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(2,e^2)$ είναι $y = -e^2x+3e^2$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι α = 1 και β = – 6. **Μονάδες 12**

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f. **Μονάδες 13**

ΘΕΜΑ 2ο (2007)

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)= xe^x +3$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=f(x)+e^x-3$ **Μονάδες 10**

β. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-e^x}{x^2-x}$. **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ 2ο (2007ε)

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\frac{x}{x^2-x+1}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x). **Μονάδες 5**

β. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$. **Μονάδες 8**

γ. Να εξετασθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατά της.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 2ο (2008)

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\frac{x-1}{e^x}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to1}\frac{e^x f(x)}{x^2-1}$ **Μονάδες 7**

β. Να αποδείξετε ότι $e^x f'(x) = 2-x$ **Μονάδες 9**

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο (2008ε)

Έχουμε περιφράξει με συρματόπλεγμα μήκους 200 m μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της. Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x.

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε δίνεται από τον τύπο : $f(x) = 100x - \frac{1}{2}x^2$.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που θα μπορούσαμε να περιφράξουμε με το συρματόπλεγμα των 200 m.

Μονάδες 7

***γ.** Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών f'(100), f'(101), f'(102), f'(103) και f'(104).

Μονάδες 5

***δ.** Έστω CV ο συντελεστής μεταβολής των αριθμών f ′(100), f ′(101), f ′(102), f ′(103) και f ′(104) και CV ′ ο συντελεστής μεταβολής που προκύπτει όταν αυξήσουμε καθέναν από τους αριθμούς αυτούς κατά c, όπου c ≠ 2. Να υπολογίσετε το c, έτσι ώστε να ισχύει CV′ = 2CV.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο (2009)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-6x^2+\alpha x-7$, όπου α πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει

$$2f''(x)+f'(x)+15=3x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι α=9

Μονάδες 7

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x^2-1}$

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία y=-3x

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο (2009 ε)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 - 8$, όπου α ένας πραγματικός αριθμός.

α. Αν $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -7$ να βρεθεί η τιμή του α **Μονάδες 5**

β. Έστω α=1

i. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}$

ii. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$

Μονάδες(10+10)

ΘΕΜΑ Β (2010)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-1$, $x\in\mathbb{R}$

Β1. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$

Μονάδες 10

Β2. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$

Μονάδες 10

Β3. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τον άξονα x'x

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β (2011ε)

Υποθέτουμε ότι οι θερμοκρασίες (σε ^{o}C) σε μια περιοχή κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου προσεγγίζονται από τις τιμές της συνάρτησης $\theta(t) = t-4\sqrt{t}+\alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ και $t \in (0,24]$ ο χρόνος σε ώρες.

Β1. Να αποδείξετε ότι για $t \in (0,4]$ η θερμοκρασία μειώνεται και για $t \in (4,24]$ η θερμοκρασία αυξάνεται.

Μονάδες 7

Β2. Να υπολογίσετε την τιμή του α, αν γνωρίζετε ότι η ελάχιστη θερμοκρασία ης περιοχής εντός του 24ώρου είναι $-1\ ^{o}C$.

Μονάδες 6

Β3. Για $\alpha = 3$ να βρείτε τις ώρες που η θερμοκρασία της περιοχής είναι $0\ ^{o}C$.

Μονάδες 5

Β4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{t\to 4}\dfrac{\theta'(t)}{t^2-16}$

Μονάδες 7

*** Τα ερωτήματα με αστερίσκο απαιτούν ύλη επομένων κεφαλαίων**

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΠΑΛ

ΜΕΡΟΣ 2 ΑΠΟ 3

Συνάρτηση	Έτος	Θέμα-Σχόλια
$f(x)=\begin{cases} x^2-\lambda x-3 & x\le 1 \\ 2x-\lambda & \chi>1 \end{cases}$	2006	2
$f(x)=4x^3-12x+2006$	2006 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙ-ΚΕΣ	2
$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & ,x>2 \\ 4 & ,x=2 \\ \alpha x+\beta & ,x<2 \end{cases}$	2006 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙ-ΚΕΣ	3
$f(x)=\dfrac{1}{2}x(50-x)$	2006 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ	4
$f(x)=\dfrac{2x^2-6x}{x-3}$	2007	
$f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$	2007	
$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-x} & ,x<0 \\ -3+c & ,x\ge 0 \end{cases}$	2007 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙ-ΚΕΣ	
$f(x)=x^2+\kappa x+\lambda$	2007	$\kappa=-1,\lambda=1$
$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x}{\sqrt{x}-1} & 0<x<1 \\ \alpha^2+5\alpha & x=1 \end{cases}$	2008	
$f(x)=4x^3-6x^2+\alpha+2008$	2008 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙ-ΚΕΣ	
$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\lambda\cdot(x-1)} & 0\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{3x-1} & x\ge 1 \end{cases}$	2008 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙ-ΚΕΣ	2
$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x+2008$	2008 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙ-ΚΕΣ	4
$f(x)=-x^2+6x+8$	2009 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙ-ΚΕΣ	3
$f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$		4
$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x-1} & ,x>1 \\ 2\lambda x-3 & x\le 1 \end{cases}$	2009 ΕΣΠΕΡΙΝΑ	2
$f(x)=x^3-3x+2$	2009 ΕΣΠΕΡΙΝΑ	3

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-8x+12}{x-6} & ,x>6\\ 3\lambda-5 & ,x\le 6\end{cases}$	2009	2
$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\kappa x^2+\lambda x-2-\lambda$		4 $\kappa=2\,,\lambda=3$
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-6}, & x<1, x\neq 1\\ \sqrt{x+3}+\alpha, & x\ge 1\end{cases}$	2010	
$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+\alpha x+\beta$	2010	
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & ,x>3\\ \alpha x-4 & ,x\le 3\end{cases}$	2010 ΕΣΠΕΡΙΝΑ	2
$f(x)=-x^2+2x-3$	2010	4
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x^2}{1-\sqrt{x}} & ,x>1\\ \mu^2+1 & ,x\le 1\end{cases}$	2010	2
$f(x)=x^2-3x+2$		
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-7x+12}{x-4} & ,x<4\\ \alpha & ,x=4\\ \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}-3 & ,x>4\end{cases}$	2011	2
$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$	2011	4
$f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$	2011	
$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$	2011	
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} & .x>1\\ \alpha x^2+\beta x & x\le 1\end{cases}$	2012	3
$f(x)=3x^2-2x-1$	2012	4
$f(x)=x^3-x^2-x+1$	2012	4
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\kappa} & ,x<1\\ x^2+\kappa & x\ge 1\end{cases}$	2012	$3,\ \kappa=1$
$f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$	2012	4
$f(x)=(x-2)^2(x+2)$	2012	4
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3} & ,x>3\\ 2x^2-\alpha x+\beta & ,x\le 6\end{cases}$	2013	$2,\ f(0)=5$

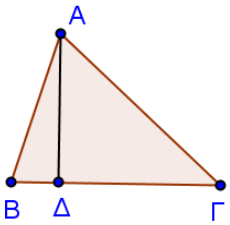
$f(x)=x^3-3x+\kappa$	2013	4, $f(-1)=5$
$f(x)=\dfrac{3x^2-3}{1-x}$	2013	4
$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$	2014	
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{1-x} & ,x>1\\ 2\alpha+3 & ,x=1\\ x^2-\beta & ,x<1\end{cases}$	2014	3,α=-2,β=2
$f(x)=\begin{cases}3\alpha-2x & ,x<3\\ 2\beta-4 & ,x=3\\ \dfrac{x^2-9}{x-3} & ,x>3\end{cases}$	2015	2
$f(x)=10x^2-50x+500$	2015	4
$f(x)=-\dfrac{-x^3}{3}+2x^2+12x+15$	2015	4 $x\in[0,10]$
$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{1}{2}$	2016	3
$f(x)=\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}$	2016	4
$f(x)=x^2+2x-3$	2016	4
$f(x)=x^3-3x^2-9x+2$	2016	3
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{\sqrt{x}-1}, & x\in[0,1)\\ \alpha x^2+\beta x, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$	2016	4
$f(x)=-3x^3+30x$	2016	3
$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x-\dfrac{4}{3}$	2016	3
$f(x)=x^4+4x+2019$	2016	4
$f(x)=(x^2+3)(x-3)$	2016	4
$f(x)=\begin{cases}x^2-\beta & ,x<-5\\ \alpha & ,x=-5\\ \dfrac{25-x^2}{5+x} & ,x>5\end{cases}$	2016	4
$f(x)=8000-50x^2$	2016	4

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ 3 ΑΠΟ 3

Θέμα Β

1) Ένα τρίγωνο ΑΒΓ μεταβάλλεται έτσι ώστε το άθροισμα της βάσης του ΒΓ και του ύψους του ΑΔ να είναι 20cm.



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει της βάσης του ΒΓ = x είναι $E(x)=10x-\frac{1}{2}x^2$.

β) Να βρείτε το μήκος της βάσης του ΒΓ ώστε το εμβαδόν του τριγώνου να είναι μέγιστο.
Στην περίπτωση αυτή να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-6x^2+\alpha,\ \alpha\in R$.

α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f.
β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.
γ) Να βρείτε το α αν η συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο ίσο με 5.

3) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\alpha x^2-5x+2$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1,f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x-2$, τότε να υπολογίσετε το α.

β) Αν α=3

i. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}$.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

4) Με ένα σύρμα μήκους 100cm κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μήκους x και πλάτους y.

α) Να εκφράσετε τη διαγώνιο του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x.
β) Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε το μήκος της διαγωνίου να γίνει ελάχιστο.

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+k^2}$, $k>0$. Αν το σημείο $M(1,\sqrt{2})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τότε:

α) Να δείξετε ότι k=1 .

β) Να δείξετε ότι $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

6) Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\sqrt{x}-1$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y.

γ) Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-1}$.

δ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα x΄x .

7) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{2011}$.

α) Να βρείτε το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^{2011}-1}{h}$.

β) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$.

γ) Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-2011x^{2009}}{x-1}$.

8) Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο της $M\left(1,\sqrt{3}\right)$ σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 30°.

α) Να βρείτε την τιμή f(1).
β) Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ε)
γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-\sqrt{3}}{h}$.

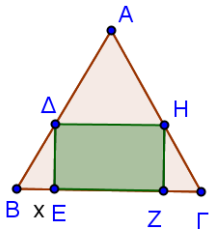
Θέμα Γ

9) Ένας ποδοσφαιριστής αφού τοποθετήσει τη μπάλα στο έδαφος την κλωτσά με δύναμη προς τα πάνω. Η τροχιά που διαγράφει η μπάλα υποθέτουμε ότι δίνεται από τη συνάρτηση $f(t)=18t-5t^2$ (όπου t ο χρόνος σε sec).

α) Να εκφράσετε την ταχύτητα της μπάλας συναρτήσει του χρόνου.
β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα της μπάλας για t = 1sec και t = 2sec. Πως ερμηνεύετε τα πρόσημα;
γ) Σε ποια χρονική στιγμή η μπάλα ξαναβρίσκεται στο έδαφος;
δ) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος στο οποίο έφτασε η μπάλα;

10) Ο πληθυσμός μιας χώρας δίνεται για μια περίοδο 50 ετών από τη συνάρτηση $\Pi(t)=-\dfrac{1}{200}t^2+\dfrac{1}{5}t+20$ (σε εκατομμύρια), όπου $t\in[0,50]$ είναι ο χρόνος σε έτη και η χρονική στιγμή t = 0 αντιστοιχεί στην αρχή του έτους 1960.
α) Πόσος ήταν ο πληθυσμός στην αρχή της περιόδου και πόσος στο τέλος;
β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του πληθυσμού στην περίοδο αυτή των 50 ετών. Σε ποιο έτος προέκυψε αυτή;
γ) Ποιος ήταν ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού στα μέσα της χρονικής αυτής περιόδου δηλαδή όταν t = 25;

11) Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά α = 20 cm εγγράφουμε ορθογώνιο ΔΕΖΗ όπως φαίνεται στο σχήμα.
Αν ΒΕ = x.



α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΔΕΖΗ συναρτήσει του x.
β) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου όταν x = 2.
γ) Να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου αυτού γίνεται μέγιστο.
δ) Ποιές είναι τότε οι διαστάσεις του ορθογωνίου και πόσο είναι το εμβαδόν του.

12) Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με τύπους $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ και $g(x)=\sqrt{x}-1$.

α)Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις είναι ίσες.
β)Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.
γ)Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.
δ)Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A\left(\dfrac{1}{4},f\left(\dfrac{1}{4}\right)\right)$.

13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-5x^2+\alpha x+4,\ x\in\mathbb{R}$, όπου α μια πραγματική σταθερά.
α)Να βρείτε το α ώστε ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x να μηδενίζεται για $x=\dfrac{1}{3}$.
β)Για $\alpha=3$, να βρείτε για ποια τιμή του x ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

14) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+5x^2+12x+12,\ x\in R$.

α) Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)}{x^3+8}$.
β) Να βρεθεί το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

15) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3+\alpha x^2-\beta x+2,\ x\in\mathbb{R},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, στο σημείο της $M\left(-1,\dfrac{11}{2}\right)$, είναι παράλληλη στον άξονα x'x τότε:

α) Να δείξετε ότι $\alpha=-\dfrac{3}{2}$ και $\beta=6$.
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)}{f'(x)+6x}$.

16) Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο $A(1,-2)$ και η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο της $B(2,0)$ να είναι ίση με 4.

β) Για $\alpha=2,\ \beta=-3$ και $\gamma=0$, υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+f'(x)-4}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$.

17) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^3+3x^2-6x+2011$.

α) Βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης $\lambda(x)$ της εφαπτομένης της καμπύλης της f σε κάθε σημείο της $M(x,f(x))$.

β) Για ποια τιμή του x, ο συντελεστής διεύθυνσης $\lambda(x)$ γίνεται ελάχιστος;

γ) Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$.

δ) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=-1$.

18) Μία βιομηχανία παράγει ηλιακούς θερμοσίφωνες. Το κόστος $K(x)$ σε ευρώ για την παραγωγή x προϊόντων σε μία ημέρα δίνεται κατά προσέγγιση από τον τύπο $K(x)=50x+100-\dfrac{x^3}{3}$, $x\in[0,50]$. Αν οι εισπράξεις από την πώληση των x προϊόντων δίνονται από τη σχέση $E(x)=100x-\dfrac{x^3}{2}$, να βρείτε:

α) Πόσο είναι το ημερήσιο κόστος αν η βιομηχανία δεν παράγει κανένα προϊόν.
β) Ποιο είναι το μέγιστο κόστος παραγωγής.
γ) Το συνολικό αριθμό των προϊόντων που πρέπει να πουληθούν ώστε η βιομηχανία να έχει το μέγιστο κέρδος.

19) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί την παρακάτω σχέση :

$f(3+h)-f(3)=h^2+8h$

για κάθε $h\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=3$ με $f'(3)=8$.

β) Αν $f(4)=24$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι f(3)=5.
ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=3$.

Θέμα Δ

20) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3\sqrt{x}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο Α(9, f(9)) της C_f .

β) Αν η εφαπτομένη τέμνει τους άξονες στα σημεία Β και Γ να υπολογίζετε το μήκος της ΒΓ.

γ) Από το σημείο Α φέρνουμε κάθετη στον άξονα $x'x$ η οποία τον τέμνει στο σημείο Δ. Να βρείτε το σημείο της καμπύλης $y=3\sqrt{x}$ το οποίο είναι το πλησιέστερο στο σημείο Δ.

21) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\lambda x^2+(\mu-1)x-2,\ x\in\mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη ευθεία στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο Α(2,4) είναι παράλληλη στην ευθεία y=5x-6 .

α) Να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών αριθμών λ, μ.

β) Για $\lambda = 1$ και $\mu = 2$ να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης.

22) Ο διευθυντής μιας θεατρικής παράστασης έχει διαπιστώσει ότι όταν η τιμή του εισιτηρίου είναι 8 ευρώ, τότε την παράσταση τη βλέπουν 500 θεατές την εβδομάδα. Κάθε φορά που το εισιτήριο μειώνεται κατά 0,50 ευρώ την εβδομάδα οι θεατές αυξάνονται εβδομαδιαίως κατα 50.

α) Να δείξετε ότι ο αριθμός των θεατών ως συνάρτηση της τιμής x του εισιτηρίου είναι $f(x)=1300-100x$.

β) Πόσο πρέπει να είναι το εισιτήριο ώστε το θέατρο να έχει τη μέγιστη δυνατή είσπραξη την εβδομάδα;

γ) Πόσοι θεατές παρακολουθούν τότε την παράσταση και πόσα ευρώ είναι μεγαλύτερη η είσπραξη τότε από την είσπραξη όταν το εισιτήριο είναι 8 ευρώ;

23) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\lambda x^2+5x+4$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και λ μια πραγματική σταθερά.

i. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(2,f(-2))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=x+3$, τότε

α) να υπολογίσετε το λ.

β) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης.

ii. Αν $\lambda = 1$, τότε

α) να βρείτε τα σημεία που η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες

β) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

γ) να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x+5}-1}$.

24) Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο x=1 με $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right)}{x-1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

α) Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

β) Επιπλέον αν η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=(x-2)(x-3)(x-4)$,

i) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,f(1))$,

ii) να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει δύο τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο.

iii) Να δείξετε ότι η γραφική παράστασή της f έχει τρία σημεία όπου η εφαπτομένη είναι οριζόντια.

25) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+k,\ x\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη ε_1 της γραφικής παράστασης στο σημείο με τεταγμένη -4, είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, τότε:

α) Να δείξετε ότι k=-4 και να βρείτε την εξίσωση αυτής της εφαπτομένης.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης ε_2 της γραφικής παράστασης της f σε οποιοδήποτε σημείο της $A(\alpha,f(\alpha))$, με $\alpha>0$ είναι η $y=2\alpha x-\alpha^2-4$.

γ) Αν η εφαπτομένη ε_2 τέμνει την ε_1 στο σημείο Β και τον άξονα $x'x$ στο Γ, να δείξετε ότι το εμβαδόν του σχηματιζόμενου τραπεζίου ΟΓΒΔ (όπου $\Delta(0,-4)$), δίνεται από τον τύπο $E(\alpha)=\dfrac{2\alpha^2+4}{\alpha}$, $\alpha>0$.

δ) Να βρεθεί το σημείο A της γραφικής παράστασης της f για το οποίο το εμβαδό $E(\alpha)$ γίνεται ελάχιστο.

26) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-2)^2(1-2x),\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f, στο οποίο η εφαπτομένη της έχει το μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=\dfrac{3}{2}$.

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+2x-1}{2x^2-3x+1}$.

(Μέρος 2ο)

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ



ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.1 (ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ)

ΓΕΝΙΚΑ

Στατιστική είναι ο κλάδος των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών που βασίζεται σ' ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών με σκοπό:

- τον σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων ,
- την συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίαση των δεδομένων ,
- την ανάλυση και εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων .

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Πληθυσμός, ονομάζεται ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία τα εξετάζουμε ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους . Τα στοιχεία του πληθυσμού συχνά αναφέρονται και ως μονάδες ή άτομα του πληθυσμού .

Μεταβλητές, είναι τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό και συνήθως τις συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα όπως Χ,Ψ,Ζ .

Τιμές της μεταβλητής, ονομάζονται οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μία μεταβλητή .

Στατιστικά δεδομένα ή παρατηρήσεις, ονομάζονται τα δεδομένα που προκύπτουν από την διαδοχική εξέταση των ατόμων του πληθυσμού ως προς ένα χαρακτηριστικό τους . Να σημειώσουμε ότι τα στατιστικά δεδομένα δεν είναι κατ' ανάγκη διαφορετικά .

ΕΙΔΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

1. **Ποιοτικές ή κατηγορικές** μεταβλητές λέγονται αυτές των οποίων οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί π.χ. το φύλο ενός ανθρώπου (άνδρας-γυναίκα) ,η υγεία ενός ανθρώπου (άριστη, αρκετά καλή, καλή, μέτρια κ.λπ.)

2. **Ποσοτικές** μεταβλητές λέγονται αυτές των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί π.χ. ο αριθμός των υπαλλήλων μιας επιχείρησης , το βάρος των μαθητών ενός σχολείου κ.λπ.

   Επιπλέον οι ποσοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε δυο υποκατηγορίες :

   - **Διακριτές** που παίρνουν 'μεμονωμένες' τιμές π.χ. ο αριθμός των μαθητών μιας τάξης .
   - **Συνεχείς** που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β) π.χ. ο χρόνος που χρειάζονται οι μαθητές για να λύσουν μια άσκηση Φυσικής

ΣΥΛΛΟΓΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Ένας τρόπος για να πάρουμε τις απαραίτητες πληροφορίες που χρειαζόμαστε για κάποιο πληθυσμό είναι να εξετάσουμε όλα τα άτομα (στοιχεία) του πληθυσμού ως προς το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει . Η μέθοδος αυτή συλλογής των δεδομένων ονομάζεται **απογραφή** . Όταν η απογραφή είναι δύσκολη ή οικονομικά-χρονικά ασύμφορη , παίρνουμε πληροφορίες από κάποια μικρή ομάδα ή υποσύνολο του πληθυσμού που ονομάζεται **δείγμα** το οποίο μάλιστα θα πρέπει να είναι **αντιπροσωπευτικό** του πληθυσμού . Στην πράξη ένα δείγμα θεωρείται αντιπροσωπευτικό όταν επιλέγεται κατά τέτοιο τρόπο , ώστε κάθε στοιχείο του πληθυσμού να έχει την ίδια δυνατότητα να εκλεγεί .

Οι αρχές και οι μέθοδοι για τη συλλογή και ανάλυση των δεδομένων από πεπερασμένους πληθυσμούς είναι το αντικείμενο της **Δειγματοληψίας** που αποτελεί τη βάση της Στατιστικής .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ποιες από τις παρακάτω μεταβλητές είναι ποιοτικές και ποιες ποσοτικές ; Από τις ποσοτικές ποιες είναι διακριτές και ποιες συνεχείς ;

α) Ύψος

β) Ομάδα αίματος

γ) Καταγωγή

δ) Φύλο ενός παιδιού

ε) Μάρκα στερεοφωνικού

στ) Ηλικία

ζ) Χρώμα ματιών

η) Φύλλα τράπουλας

2) Για τις παρακάτω περιπτώσεις να πείτε αν τα δείγματα είναι αντιπροσωπευτικά . Δικαιολογήστε την απάντησή σας .

α) Για να βρούμε τη μέση βαθμολογία των μαθητών της Γ' Λυκείου ενός σχολείου , παίρνουμε τους βαθμούς ενός τμήματος .

β) Για να βρούμε τι ομάδα είναι οι μαθητές ηλικίας 15-17 χρόνων ρωτήσαμε σε μία συνοικία της πόλης

γ) Για να βρούμε τις προτιμήσεις στη μουσική των μαθητών ενός σχολείου ρωτήσαμε μαθητές όλων των φύλων τάξεων και τόπων καταγωγής .

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.2 (ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ)

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

1) Πίνακες κατανομής συχνοτήτων (βασικοί ορισμοί).
2) Ποιοτική Μεταβλητή (Ραβδόγραμμα, Κυκλικό διάγραμμα).
3) Ποσοτική Διακριτή Μεταβλητή (Διαγράμματα, Πολύγωνο και κυκλικό διάγραμμα).
4) Ποσοτική Συνεχής Μεταβλητή με κλάσεις ίσου πλάτους.

1ΟΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Μετά τη συλλογή των στατιστικών δεδομένων είναι αναγκαία η κατασκευή συνοπτικών πινάκων ή γραφικών παραστάσεων ώστε να είναι εύκολη η κατανόησή τους και η εξαγωγή σωστών συμπερασμάτων . Η παρουσίαση των δεδομένων σε συνοπτικούς πίνακες με την κατάλληλη τοποθέτηση των πληροφοριών σε γραμμές και στήλες , γίνεται με τρόπο που να διευκολύνεται η σύγκριση των στοιχείων και η καλύτερη ενημέρωση του αναγνώστη σχετικά με τον πληθυσμό που ερευνάμε .

Εαν υποθέσουμε τώρα ένα δείγμα μεγέθους ν ενός πληθυσμού έστω x_1 , x_2 , ...$x_κ$ οι τιμές μιας μεταβλητής Χ αυτού τότε για κατασκευή των στατιστικών πινάκων θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω ορισμούς:

ΟΝΟΜΑΣΙΑ	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ	ΙΔΙΟΤΗΤΑ
ν_i Απόλυτη Συχνότητα ή απλά Συχνότητα	Ονομάζεται ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής .	$\nu_1+\nu_2+.....+\nu_κ = \nu$ με $κ \le \nu$
f_i Σχετική συχνότητα	Είναι ο αριθμός που προκύπτει αν διαιρέσουμε τη συχνότητα ν_i με το μέγεθος ν του δείγματος , δηλαδή ισχύει $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$	i) $0 \le f_i \le 1$ και ii) $f_1+f_2+.....+f_κ=1$

$f_i\%$ Σχετική συχνότητα επί τοις εκατό	Είναι ο αριθμός που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε το fi με το 100, δηλαδή ισχύει $f_i\%= 100.f_i$	$f_1\%+f_2\%+..+f_\kappa\%=100\%$
N_i Αθροιστική συχνότητα	Στην περίπτωση των <u>ποσοτικών μεταβλητών</u> είναι ο αριθμός που εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i	$N_i=\nu_1+\nu_2+.....+\nu_i$ με i=1,2,...,κ
F_i Αθροιστική σχετική συχνότητα	Στην περίπτωση των <u>ποσοτικών μεταβλητών</u> είναι ο αριθμός που εκφράζει το πλήθος των σχετικών συχνοτήτων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i	$F_i= f_1+f_2+.....+f_i$ με i=1,2,...,κ
$F_i\%$ Αθροιστική σχετική συχνότητα επί τοις εκατό	Έκφραση της αθροιστικής σχετικής συχνότητας σε ποσοστό επιώ της εκατό.	$F_i\%= 100.F_i$
α_i Τόξο	Είναι σε μοίρες το αντίστοιχο τόξο της παρατήρησης x_i όπως φαίνεται στο κυκλικό διάγραμμα ,ισχύει $\alpha_i=360^0.f_i$	$\alpha_1+\alpha_2+.....\alpha_\kappa=360^0.$ με i=1,2,...,κ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Οι ποσότητες xi , vi , Ni , fi , Fi , fi% , Fi% για ένα δείγμα συγκεντρώνονται σε έναν συνοπτικό πίνακα που ονομάζεται **πίνακας κατανομής συχνοτήτων** ή **απλά πίνακας συχνοτήτων.**

2) Για μια μεταβλητή το σύνολο των ζευγών (xi,vi) λέμε ότι αποτελεί την κατανομή συχνοτήτων ενώ το σύνολο (xi, fi) την κατανομή σχετικών συχνοτήτων .

3) Οι χρηστικότερες στήλες του πίνακα συχνοτήτων είναι αυτές που έχουν τις τιμές των xi , vi , Ni , fi% , Fi% . Τις περισσότερες φορές όταν μας λένε να κατασκευάσουμε τον πίνακα σχετικών συχνοτήτων ενδιαφέρονται για την στήλη fi% και όχι για την fi

4) Επειδή $N_1=\nu_1$ και $F_1=f_1$ ισχύει επίσης : $\nu_2=N_2-N_1,\nu_3=N_3-N_2,.....\nu_\kappa=N_\kappa-N_\kappa-1$ αντιστοίχως έχουμε $f_\kappa=F_\kappa-F_{\kappa-1}$.

Παράδειγμα 1ο : Να γίνει η κατασκευή του πίνακα κατανομής συχνοτήτων εάν υποθέσουμε ότι τα παρακάτω δεδομένα δίνουν τις μέσες θερμοκρασίες μιας πόλης, κατά τη διάρκεια 20 ημερών:

15	**15**	**18**	**17**	**19**	**10**	**17**	**16**	**14**	**17**
18	**19**	**16**	**15**	**17**	**18**	**15**	**14**	**16**	**17**

Λύση

Στόχος μας είναι να παρουσιάσουμε τα δεδομένα σε έναν πίνακα συχνοτήτων, στον οποίο να περιλαμβάνονται επιπλέον οι σχετικές συχνότητες, οι αθροιστικές συχνότητες και οι σχετικές αθροιστικές συχνότητες.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

Τιμές x_i	**Συχνότητα** ν_i
10	1
14	2
15	4
16	3
17	5
18	3
19	2
Σύνολο	**20**

- Μετράμε πόσες φορές εμφανίζεται ο αριθμός 10
- Μετράμε πόσες φορές εμφανίζεται ο αριθμός 14
- Μετράμε πόσες φορές εμφανίζεται ο αριθμός 15
- Μετράμε πόσες φορές εμφανίζεται ο αριθμός 16
- Μετράμε πόσες φορές εμφανίζεται ο αριθμός 17
- Μετράμε πόσες φορές εμφανίζεται ο αριθμός 18
- Μετράμε πόσες φορές εμφανίζεται ο αριθμός 19

Προφανώς, το άθροισμα όλων των συχνοτήτων μας δίνει το μέγεθος (ν) του δείγματος.

ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

Για να συμπληρώσουμε τη στήλη των σχετικών συχνοτήτων, γενικά, εφαρμόζουμε τον τύπο που είναι γνωστός από τη θεωρία, έτσι:

$$f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{1}{20} = 0,05 \quad f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{2}{20} = 0,10 \quad f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} = \frac{4}{20} = 0,20 \quad \text{κλπ...}$$

Τιμές x_i	**Συχνότητα** ν_i	**Σχετική συχνότητα** f_i
10	1	0,05
14	2	0,10
15	4	0,20
16	3	0,15
17	5	0,25
18	3	0,15
19	2	0,10
Σύνολο	**20**	**1**

- $f_1 = \nu_1 / \nu = 1 / 20 = 0,05$
- $f_2 = \nu_2 / \nu = 2 / 20 = 0,05$
- $f_3 = \nu_3 / \nu = 4 / 20 = 0,05$
- $f_4 = \nu_4 / \nu = 3 / 20 = 0,05$
- $f_5 = \nu_5 / \nu = 5 / 20 = 0,05$
- $f_6 = \nu_6 / \nu = 3 / 20 = 0,05$
- $f_7 = \nu_7 / \nu = 2 / 20 = 0,05$

Συνήθως, διευκολύνει ιδιαίτερα την ανάλυσή μας αν στον πίνακα προσθέσουμε και μια στήλη επιπλέον, με τη σχετική συχνότητα **επί τοις εκατό (%)**. Ο πίνακας τότε γίνεται:

Τιμές x_i	**Συχνότητα** ν_i	**Σχετική συχνότητα** f_i	f_i **(%)**	
10	1	0,05	5	$= f_1 \cdot 100$
14	2	0,10	10	$= f_2 \cdot 100$
15	4	0,20	20	$= f_3 \cdot 100$
16	3	0,15	15	$= f_4 \cdot 100$
17	5	0,25	25	$= f_5 \cdot 100$
18	3	0,15	15	$= f_6 \cdot 100$
19	2	0,10	10	$= f_7 \cdot 100$
Σύνολο	**20**	**1**	**100**	

Πρακτική μέθοδος

Πολύ συχνά – αλλά μόνο αν είναι βολικό – το σύνολο **ν** χωράει ακριβώς, έστω **κ φορές**, στον αριθμό **100**, πχ. το 20 χωράει στο 100 ακριβώς 5 φορές. Τότε μπορούμε να συμπληρώσουμε, εξαιρετικά εύκολα τη στήλη **fi (%)** πολλαπλασιάζοντας κατευθείαν κάθε συχνότητα ν_i με τον αριθμό **κ**. Στη συνέχεια, η συμπλήρωση της στήλης f_i γίνεται παιχνίδι, διαιρώντας απλώς με το 100, κάθε τιμή της **fi (%)**.

x_i	ν_i		f_i (%)		f_i
10	1	**· 5**	5	**: 100**	0,05
14	2	**· 5**	10	**: 100**	0,10
15	4	**· 5**	20	**: 100**	0,20
16	3	**· 5**	15	**: 100**	0,15
17	5	**· 5**	25	**: 100**	0,25
18	3	**· 5**	15	**: 100**	0,15
19	2	**· 5**	10	**: 100**	0,10
Σύνολο	**20**	**· 5**	**100**		**1**

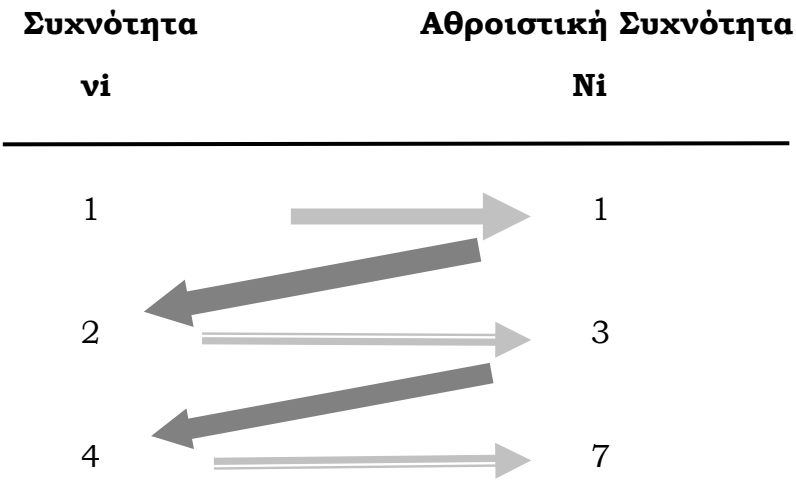
ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

Αν φτιάξουμε μια νέα στήλη, όπου κάθε σειρά της θα αποτελείται από τα αθροίσματα όλων των προηγούμενων συχνοτήτων, μέχρι και τη σειρά αυτή, τότε θα έχουμε φτιάξει τη στήλη των αθροιστικών συχνοτήτων.

Τιμές x_i	**Συχνότητα** ν_i	N_i
10	1	1
14	2	3
15	4	7
16	3	10
17	5	15
18	3	18
19	2	20
Σύνολο	**20**	

- $N_1 = 1$
- $N_2 = 1+2 = 3$
- $N_3 = 1+2+4 = 7$
- $N_4 = 1+2+4+3 = 10$
- $N_5 = 1+2+4+3+5 = 15$
- $N_6 = 1+2+4+3+5+3 = 18$
- $N_7 = 1+2+4+3+5+3+2 = 20$

Εναλλακτικά, μπορούμε να σκεφτούμε προσθέτοντας διαγώνια ως εξής:



ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

Όπως ακριβώς υπολογίζουμε τα διάφορα $\mathbf{N_i}$ με βάση τα $\mathbf{\nu_i}$, με εντελώς ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε τη στήλη $\mathbf{F_i}$ με βάση τα $\mathbf{f_i}$. Συνήθως, συμπληρώνουμε με μια επιπλέον στήλη $\mathbf{F_i}$ **(%)**, δηλαδή με το ποσοστό **επί τοις εκατό** της $\mathbf{F_i}$.

Έτσι τελικά, ο ολοκληρωμένος πίνακας συχνοτήτων έχει ως εξής:

Τιμές x_i	**Συχνότητα ν_i**	**Σχετική συχνότητα f_i**	**f_i %**	**Αθροιστική συχνότητα N_i**	**Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i**	**F_i %**
10	1	0,05	5,00	1	0,05	5,00
14	2	0,10	10,00	3	0,15	15,00
15	4	0,20	20,00	7	0,35	35,00
16	3	0,15	15,00	10	0,50	50,00
17	5	0,25	25,00	15	0,75	75,00
18	3	0,15	15,00	18	0,90	90,00
19	2	0,10	10,00	**20**	**1**	**100**
Σύνολο	**20**	**1**	**100**			

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η κατασκευή του πίνακα συχνοτήτων μας βοηθάει να απαντούμε εύκολα σε μια σειρά από τυπικά ερωτήματα των παρακάτω τύπων:

Συχνότητα	Αντίστοιχη μαθηματική σχέση
• ίση με κ	**= κ**
• μικρότερη / λιγότερη / κάτω από κ	**< κ**
• το πολύ / έως και κ	**≤ κ**
• τουλάχιστον κ	**≥ κ**
• μεγαλύτερη / περισσότερη / πάνω από κ	**> κ**
• από κ έως και λ	**κ ≤ ... ≤ λ**

Παράδειγμα 2ο : Με βάση το προηγούμενο παράδειγμα, λοιπόν, μπορούμε να απαντήσουμε σε ερωτήσεις, όπως «Να βρεθεί πόσες μέρες η μέση θερμοκρασία ήταν...»

α. Ίση με 15 βαθμούς.

β. Μικρότερη από 15 βαθμούς.

γ. Το πολύ 16 βαθμούς.

δ. Τουλάχιστον 17 βαθμούς.

ε. Μεγαλύτερη από 17 βαθμούς.

στ. Μεταξύ 15 και 17 βαθμών (περιλαμβανομένων).

ζ. Ζυγός αριθμός.

η. Υψηλότερη.

Λύση με την στήλη των απλών συχνοτήτων (να προτιμάται)

α. Πηγαίνουμε απευθείας στη στήλη των 15 βαθμών. Η συχνότητά της είναι **ν = 4**.

β. Σημαίνει 10 ή 14 βαθμούς, άρα αθροίζουμε τις αντίστοιχες συχνότητες. Θα είναι ν =1+2 ⇒ **ν = 3**.

γ. Σημαίνει έως και 16 βαθμούς. Αθροίζοντας τις αντίστοιχες συχνότητες βρίσκουμε ν =1+2+4+3 ⇒ **ν = 10**.

δ. Σημαίνει από 17 βαθμούς και πάνω, άρα ν =5+3+2 ⇒ **ν = 10**.

ε. Ότι και το δ αλλά οι 17 βαθμοί δεν περιλαμβάνονται, δηλαδή ν=3+2 ⇒ **ν = 5**.

στ. Αθροίζουμε τις κατάλληλες συχνότητες. Θα είναι ν =4+3+5 ⇒ **ν = 12**.

ζ. Μιλάμε για τις θερμοκρασίες των 10, 14, 16 και 18 βαθμών. Από τις αντίστοιχες συχνότητες βρίσκουμε ν = 1 + 2 + 3 + 3 ⇒ **ν = 9**.

η. Η υψηλότερη θερμοκρασία είναι εκείνη των 19 βαθμών, άρα **ν = 2**.

Λύση με τη βοήθεια της στήλης των αθροιστικών συχνοτήτων

Η αθροιστική συχνότητα, επειδή συγκεντρώνει την πληροφορία από όλες τις προηγούμενες τιμές, απαντάει άμεσα σε ερωτήσεις του τύπου *«το πολύ μέχρι»*. Για κάθε άλλη περίπτωση χρειάζονται κατάλληλοι υπολογισμοί.

α. Από την αθροιστική συχνότητα των 15 βαθμών αφαιρούμε τις συχνότητες που αφορούν σε μικρότερες θερμοκρασίες, δηλαδή την προηγούμενη αθροιστική. Άρα ν = Ν(15) – Ν(14) = 7 – 3 ⇒ **ν = 4**.

β. Μικρότερη από 15 βαθμούς σημαίνει έως και 14, άρα ν = Ν(14) ⇒ **ν = 3**.

γ. Απευθείας ν = Ν(16) ⇒ **ν =10**.

δ. Εδώ σκεφτόμαστε λίγο διαφορετικά. Από το σύνολο αφαιρούμε όλες εκείνες τις θερμοκρασίες που δεν πληρούν τις προϋποθέσεις, δηλαδή κάτω από 17 βαθμούς. Τελικά ν = 20 – Ν(16) = 20 – 10 ⇒ **ν = 10**.

ε. Αναλόγως, από το σύνολο αφαιρούμε τις θερμοκρασίες από 17 και κάτω. Άρα ν = 20 – Ν(17) = 20 – 15 ⇒ **ν = 5**.

στ. Από την αθροιστική συχνότητα των 17 βαθμών αφαιρούμε τις θερμοκρασίες που είναι κάτω κι από 15, άρα ν = Ν(17) – Ν(14) = 15 – 3 ⇒ **ν = 12**.

Οι 2 τελευταίες ερωτήσεις δεν είναι δυνατόν να απαντηθούν με τη βοήθεια της αθροιστικής συχνότητας.

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΣΕ ΑΠΛΕΣ

Αν δίνεται μόνο η στήλη των $\mathbf{N_i}$ και η λογική της φαντάζει δυσνόητη, τότε χωρίς πολύ κόπο μπορούμε από αυτήν να υπολογίσουμε την στήλη των απλών $\mathbf{\nu_i}$ κι έτσι να δουλέψουμε σύμφωνα με τον πρώτο τρόπο, που είναι ιδιαίτερα απλός. Το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι σε κάθε σειρά να αφαιρούμε το αντίστοιχο $\mathbf{N_i}$ από εκείνο της προηγούμενης σειράς. Προφανώς, ξεκινάμε από τη 2η σειρά, εφόσον ο πρώτος αριθμός παραμένει ο ίδιος.

Τιμές $\mathbf{x_i}$	$\mathbf{N_i}$		**Συχνότητα** $\mathbf{\nu_i}$
10	1		1
14	3	**3 – 1 =**	2
15	7	**7 – 3 =**	4

16	10	10 – 7 =	3
17	15	15 – 10 =	5
18	18	18 – 15 =	3
19	**20**	20 – 18 =	2
Σύνολο			**20**

ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΚΕΝΩΝ ΣΕ ΠΙΝΑΚΑ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

Σε άλλες ασκήσεις ζητείται να συμπληρωθεί ένας πίνακας συχνοτήτων, ο οποίος μπορεί να περιέχει ελάχιστα μόνο στοιχεία. Αυτό που πρέπει να κατανοήσουμε είναι πως τα δεδομένα όσο λίγα κι αν είναι, σίγουρα είναι όσα χρειαζόμαστε. Το μόνο που χρειάζεται είναι να ανακαλύψουμε τον τρόπο που συνδέονται μεταξύ τους. Ορίστε μερικές χρήσιμες συμβουλές:

Τιμές x_i	**Συχνότητα ν_i**	**Σχετική συχνότητα f_i**	**f_i %**	**Αθροιστική συχνότητα N_i**	**Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i**	**F_i %**
x_1				Ίδιο με ν_1	Ίδιο με f_1	
x_2						
x_3						
x_4				**ν**	**1**	**100**
Σύνολο	**ν**	**1**	**100**			

Εδώ πάντοτε συμπληρώνουμε τον αριθμό 1.

Εδώ τα τελικά αθροίσματα συμπίπτουν πάντα με τα αντίστοιχα σύνολα των πρώτων 2 στηλών.

Οι αριθμοί αυτοί συνδέονται πάντα με τη σχέση $f_i = \nu_i / \nu$. Αυτό σημαίνει πως αν γνωρίζουμε 2 από αυτούς μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε και τον τρίτο.

Εδώ πάντοτε συμπληρώνουμε τον αριθμό 100.

Τα υπόλοιπα στοιχεία υπολογίζονται εύκολα εφαρμόζοντας τη λογική κάθε στήλης ευθέως ή αντίστροφα σκεπτόμενοι.

Παράδειγμα 3ο : Συμπληρώστε τα στοιχεία που λείπουν από τον παρακάτω πίνακα:

x_i	ν_i	f_i (%)	N_i	F_i (%)
x_1				
x_2	100		150	
x_3				67,5
x_4		10		
x_5			400	
Σύνολο				

Λύση

x_i	ν_i	f_i (%)	N_i	F_i (%)
x_1				
x_2	100		150	
x_3				67,5
x_4		10		
x_5			400	**100**
Σύνολο	**400**	**100**		

Λύση

- Γνωρίζουμε το ν = 400 και το ν_2 = 100, άρα απ' τον τύπο υπολογίζουμε $f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} \Rightarrow f_2 = \frac{100}{400} = 0,25$ ή 25%.
- Επίσης από ν = 400 και f_4 = 10 υπολογίζουμε $f_4 = \frac{\nu_4}{\nu} \Rightarrow 0,10 = \frac{\nu_4}{400}$ $\nu_4 = 400 \cdot 0,10 \Rightarrow \nu_4 = 40$. Προσέξτε ότι στον τύπο δεν αντικαταστήσαμε όπου f_4 το 10 αλλά το 0,10.
- Αφού το N_2 = 150 και ν_2 = 100 τότε $N_1 = N_2 - \nu_2 = 150 - 100 = 50$. Συνεπώς και το ν_1=50
- Τέλος, εύκολα υπολογίζουμε και το $F_4 = F_3 + f_4 = 67,5 + 10 = 77,5$.

x_i	ν_i	f_i (%)	N_i	F_i (%)
x_1	**50**		**50**	
x_2	100	**25**	150	
x_3				67,5
x_4	**40**	10		**77,5**
x_5			400	100
Σύνολο	400	100		

- Στη στήλη Fi είναι προφανές ότι από το 77,5 για να φτάσουμε στο 100 χρειάζεται 100 – 77,5 = 22,5. Άρα $f_5 = 22,5$.
- Αν όμως $f_5 = 22,5$ τότε $f_5 = \frac{\nu_5}{\nu} \Rightarrow 0,225 = \frac{\nu_5}{400} \Rightarrow \nu_5 = 400 \cdot 0,225 \Rightarrow \nu_5 = 90$
- Τελικά, στη στήλη ν_i απομένει μονάχα ένα κενό στοιχείο. Εύκολα, σκεφτόμαστε: $50+ 100 + \nu_3 + 40 + 90 = 400 \Rightarrow \nu_3 = 400 – 280 = 120$.

x_i	ν_i	f_i (%)	N_i	F_i (%)
x_1	50		50	
x_2	100	25	150	
x_3	**120**			67,5
x_4	40	10		77,5
x_5	**90**	**22,5**	400	100
Σύνολο	400	100		

Εφόσον, έχει πλέον ολοκληρωθεί η στήλη των συχνοτήτων ν_i η συνέχεια είναι απλούστατη. Τελικά, ο πίνακας καταλήγει:

x_i	ν_i	f_i (%)	N_i	F_i (%)
x_1	50	**12,5**	50	**12,5**
x_2	100	25	150	**37.5**
x_3	120	**30**	**270**	67,5
x_4	40	10	**310**	77,5
x_5	90	22,5	400	100
Σύνολο	400	100		

Παράδειγμα 4ο : Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 οι τιμές μιας μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν. Έστω $N_3=20F_3$ και $\nu_i=\frac{6}{i-1}$ με i=2, 3, 4.

α) Να βρείτε το μέγεθος του δείγματος και τις συχνότητες.

β) Να κατασκευάσετε πίνακα ν_i, N_i, F_i%.

Λύση

α) Για ν=2 έχουμε: $\nu_2=\frac{6}{2-1}=$**6**. Ομοίως $\nu_3=$**3** και $\nu_4=$**2**.

Η σχέση $N_3=20F_3$ γράφεται: $\cancel{\nu_1+\nu_2+\nu_3}=20\frac{\cancel{\nu_1+\nu_2+\nu_3}}{\nu}$, άρα **ν=20** και

$\nu_1=20-6-3-2=$**9.**

β) Με βάση τα παραπάνω στοιχεία ο πίνακας είναι:

x_i	ν_i	f_i	N_i	F_i
x_1	9	0,45	9	0,45
x_2	6	0,3	15	0,75
x_3	3	0,15	18	0,9
x_4	2	0,1	**20**	**1**
Σύνολα	**20**	**1**		

Παράδειγμα 5ο : Αν η μεταβλητή Χ παίρνει μόνο τις τιμές x_1, x_2, x_3 με αντίστοιχες σχετικές συχνότητες f_1, f_2, f_3 έτσι ώστε: $f_1^2+f_2^2+\frac{34}{100}=f_1+\frac{6}{10}f_2$ (**1**), να βρείτε τις ν_1, ν_2, ν_3 αν ν=20.

Λύση

Ζητάμε από μία ισότητα να βρούμε δύο αγνώστους. Θυμηθείτε από την Α Λυκείου την ισοδυναμία: Αν **$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0$**, τότε **α=0** και **β=0**. (**Αγαπημένο θέμα εξετάσεων!**)

Από (**1**) έχουμε: $f_1^2-f_1+f_2^2-\frac{6}{10}f_2+\frac{34}{100}=0$ ή $f_1^2-f_1+\frac{1}{4}+f_2^2-2\cdot\frac{3}{10}f_2+\frac{9}{100}=0$,

όπου $\left(\frac{1}{4}+\frac{9}{100}=\frac{25}{100}+\frac{9}{100}=\frac{34}{100}\right)$

Οπότε : $\left(f_1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(f_2-\frac{3}{10}\right)^2=0$, άρα $f_1=\frac{1}{2}$ και $f_2=\frac{3}{10}$.

Έχουμε: $f_1=\frac{v_1}{v}=\frac{1}{2}$ ή $\frac{v_1}{20}=\frac{1}{2}$ άρα ν_1=**10**.

Ομοίως $\frac{v_2}{v}=\frac{3}{10}$ ή $\frac{v_2}{20}=\frac{3}{10}$, άρα ν_2=**6** και τέλος $\nu_3=\nu-\nu_1-\nu_2=20-10-6=$**4**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ 1 ΑΠΟ 4

1) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας :

Κατάσταση Υγείας	Συχνότητα (ν_i)	Σχετ. Συχν. ($f_i\%$)
Άριστη	2	
Πολύ καλή	8	
Καλή	13	
Σχεδόν καλή		25
Κακή		
ΣΥΝΟΛΟ	32	

2) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας .

x_i	ν_i	f_i	N_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1	12					
2		0,20				
3					10	
4	20					
5					5	
6		0,075				
7						
ΣΥΝΟΛΟ	80					

3) Οι βαθμοί των φοιτητών του μαθηματικού στο μάθημα της Στατιστικής στην εξεταστική του Ιουνίου ήταν:

5, 4, 6, 2, 4, 3, 2, 1, 7, 8, 6, 5, 3, 9, 7, 6, 10, 3, 5, 7, 6, 2, 9, 8, 6

α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

β) Πόσοι φοιτητές έγραψαν

i) τουλάχιστον 7
ii) κάτω από 6
iii) ακριβώς 8
iv) από 4 έως 7

γ) Ποιο ποσοστό των φοιτητών έγραψε

i) το πολύ 4
ii) πάνω από 7
iii) 5 ή 7
iv) τουλάχιστον 5 αλλά το πολύ 8

δ) Αν το 20% των καλύτερων φοιτητών πάρει βραβείο, πόσο πρέπει να έχει γράψει ένας φοιτητής για να δικαιούται το βραβείο;

4) Σε μια έρευνα, ρωτήσαμε 20 μαθητές πόσες φορές πήγαν κινηματογράφο κατά την διάρκεια του χειμώνα. Οι απαντήσεις τους ήταν:

0, 1, 5, 3, 2, 2, 3, 4, 0, 3, 5, 2, 3, 4, 0, 1, 0, 3, 5, 4

α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

β) Πόσοι μαθητές

i) πήγαν το πολύ 2 φορές κινηματογράφο
ii) πήγαν πάνω από 4 φορές κινηματογράφο
iii) δεν πήγαν κινηματογράφο
iv) πήγαν 2 ή 5 φορές κινηματογράφο
v) τουλάχιστον 2 αλλά το πολύ 4

γ) Ποιο ποσοστό μαθητών πήγε

i) τουλάχιστον 3 φορές κινηματογράφο
ii) κάτω από 3 φορές κινηματογράφο
iii) 1 φορά κινηματογράφο
iv) από 1 έως 3

δ) Αν το 30% των μαθητών (που πήγε τις περισσότερες φορές) κερδίζει ένα δωρεάν εισιτήριο, πόσες φορές πρέπει να έχει πάει κινηματογράφο ένας μαθητής για να δικαιούται το εισιτήριο;

5) Οι μέγιστες θερμοκρασίες κατά τον μήνα Σεπτέμβριο σε βαθμούς Κελσίου είναι:
25, 27, 29, 32, 28, 30, 29, 31, 29, 29, 27, 26, 29, 30, 31, 31, 30, 32, 30, 29, 28, 27, 30, 29, 30, 28, 27, 28, 27, 26

α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

β) Πόσοι μέρες είχαν θερμοκρασία

i) μικρότερη από 28 ii) τουλάχιστον 30 iii) το πολύ 27

γ) Ποιο ποσοτό μερών είχε θερμοκρασία

i) μεγαλύτερη από 30 ii) τουλάχιστον 26 αλλά το πολύ 29 iii)ακριβώς 31

6) Οι ημέρες απουσίας 50 υπαλλήλων μιας εταιρείας από την εργασία τους, τον περασμένο μήνα, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Ημέρες Απουσίας	Υπάλληλοι
0	8
1	10
2	15
3	10
4	5
5	2

Πόσοι υπάλληλοι και ποιο ποσοστό απουσίασε:
α) τουλάχιστον 2 ημέρες
β) το πολύ 3 ημέρες
γ) τουλάχιστον 3 αλλά το πολύ 5 ημέρες
δ) πάνω από 4 ημέρες
ε) κάτω από 3 ημέρες
στ) ακριβώς 4 ημέρες
ζ) από 2 εώς 4 ημέρες

7) Ρωτήσαμε τους μαθητές μιας τάξης ποιο είναι το αγαπημένο τους χρώμα και μας απάντησαν:
μπλε, πράσινο, μπλε, ροζ, κίτρινο, μπλε, πράσινο, κόκκινο, κόκκινο, κίτρινο, ροζ, κόκκινο, μπλε, κόκκινο, πράσινο, κίτρινο, πράσινο, μπλε, κόκκινο, μπλε.
Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

8) Τα δημοφηλέστερα ξένα μουσικά συγκροτήματα 20 αγοριών είναι:
Metallica, Ron Maiden, Άλλο, Scorpions, Oasis, Άλλο, Άλλο, Rolling Stones, Metallica, Metallica, Rolling Stones, Metallica, Ron Maiden, Ron Maiden, Scorpions, Scorpions, Scorpions, Metallica, Oasis. Άλλο.
Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

9) Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται το πλήθος των τηλεφωνικών κλήσεων που πραγματοποίησαν 25 συνδρομητές μιας εταιρείας κινητής τηλεφωνίας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας.

Πλήθος κλήσεων x_i	Πλήθος συνδρομητών ν_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα	Αθροιστική σχετική συχνότητα
2	4			
3	6			
4	5			
5				
6	2			
7	1			
Αθροίσματα				

Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

10) Οι ημέρες απουσίας 50 υπαλλήλων μιας εταιρείας από την εργασία τους, τον περασμένο μήνα, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Ημέρες απουσίας x_i	Υπάλληλοι ν_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα	Αθροιστική σχετική συχνότητα %
0	8			
1	10			
2				
3	10			
4	5			
5	2			
Αθροίσματα				

Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

11) Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακα.

α)

x_i	ν_i	$f_i\%$
15	5	
16	4	
17		40
18	12	
19		
Άθροισμα	40	

β)

Χρώμα ματιών x_i	**Μαθητές ν_i**	**$f_i\%$**
Σκούρα Καστανά	18	
Μπλέ		10
Πράσινα		
Γκρι	20	40
Άθροισμα		

γ)

x_i	ν_i	f_i%	Αθροιστική συχνότητα	Αθροιστική σχετική συχνότητα %
12	4			
16		15		
19				90
22			20	
Άθροισμα				

δ)

x_i	ν_i	Αθροιστική συχνότητα	f_i	f_i%	Αθροιστική σχετική συχνότητα	Αθροιστική σχετική συχνότητα %
7			0,20			
8		18				
9				16		
10						
Σύνολο	25					

ε)

x_i	ν_i	Αθροιστική συχνότητα	f_i	Αθροιστική σχετική συχνότητα	f_i%	Αθροιστική σχετική συχνότητα %
10						5
11	6		0,30			
12		12				
13						75
14	4					
15						
Άθροισμα						

στ)

x_i	ν_i	f_i	f_i%	Αθροιστική συχνότητα	Αθροιστική σχετική συχνότητα	Αθροιστική σχετική συχνότητα %
5				80		
7						
8	40		20			85
9				190		
10						
Άθροισμα						

ζ)

x_i	ν_i	f_i%	Αθροιστική συχνότητα	Αθροιστική σχετική συχνότητα
0			12	
1			30	
2			39	
3			45	
4			50	
Σύνολο				

η)

x_i	ν_i	f_i%	Αθροιστική συχνότητα	Αθροιστική σχετική συχνότητα
0			11	
1			25	
2			42	
3			47	
4			50	
Σύνολο				

θ)

x_i	ν_i	f_i%	Αθροιστική συχνότητα	Αθροιστική σχετική συχνότητα %
0		20		
2	18			
5			43	86
6				
Άθροισμα				

12) Εξετάσαμε ένα δείγμα πενήντα (50) μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου ως προς τον αριθμό των ορθογραφικών λαθών που έκαναν σε ένα κείμενο Αρχαίων Ελληνικών. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Λάθη x_i	Μαθητές ν_i	Σχετική Συχνότητα f_i%
2		2ω
5		4ω
6		3ω
8		ω
Αθροίσματα		

α. Να αποδείξετε ότι ω=10.

β. Για ω=10, να συμπληρώσετε τον πίνακα.

13) Να βρείτε το ω στους πρακάτω πίνακες και κατόπιν να τους συμπληρώσετε.

α)

x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i
0	ω + 4		
1	5ω + 8		
2	4ω		
3	ω – 1		
4	2ω		
Άθροισμα	50		

β)

x_i	ν_i	f_i	F_i
1	ω + 1		
2	2		
3	3ω	0,12ω	
4		0,2ω	
5	2ω		
Άθροισμα			

γ)

x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική συχνότητα
1	5		
2	15		
3	2ω		
4	20		
Αθροίσματα	50		

δ)

x_i	ν_i	f_i	F_i
0	κ + 2		
1	2κ	0,08κ	
2	2		
3		0,04κ	
4	3κ		
Άθροισμα			

14) Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ημερήσιες ώρες διαβάσματος 25 μαθητών μιας τάξης ενός ΕΠΑ.Λ.

Ημερήσιες ώρες διαβάσματος x_i	Μαθητές ν_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
1	6		
2	5		
3	4		
4	κ		
5	2κ+1		
Σύνολα	ν=25		

α) Να υπολογίσετε τον αριθμό κ

β) Για κ=3 να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα.

15) Να βρείτε τους αριθμούς α, β και να συμπληρώσετε τους πίνακες.

α)

x_i	ν_i	Αθροιστική συχνότητα	f_i%	Αθροιστική σχετική συχνότητα %
10	$\frac{a}{2}+5$			α
11	3β	45	25	
12			β	80
13				
Άθροισμα				

β)

x_i	ν_i	Αθροιστική συχνότητα	f_i%	Αθροιστική σχετική συχνότητα %
3	$\frac{\alpha}{4}+1$		α	
5	$\frac{\beta}{4}+2$		β	60
7	β – α – 17	21		
9				
Άθροισμα				

γ)

x_i	ν_i	Αθροιστική συχνότητα	f_i	f_i%	F_i	Αθροιστική σχετική συχνότητα%
10	α					
11	β	9	0,2			
12	12				0,7	
13						90
14						
Άθροισμα						

δ)

x_i	ν_i	Αθροιστική συχνότητα	f_i%	F_i%
3	α + 2			
7	15	20		
10	λ^3 + 2			
11	10λ			
Άθροισμα	50			

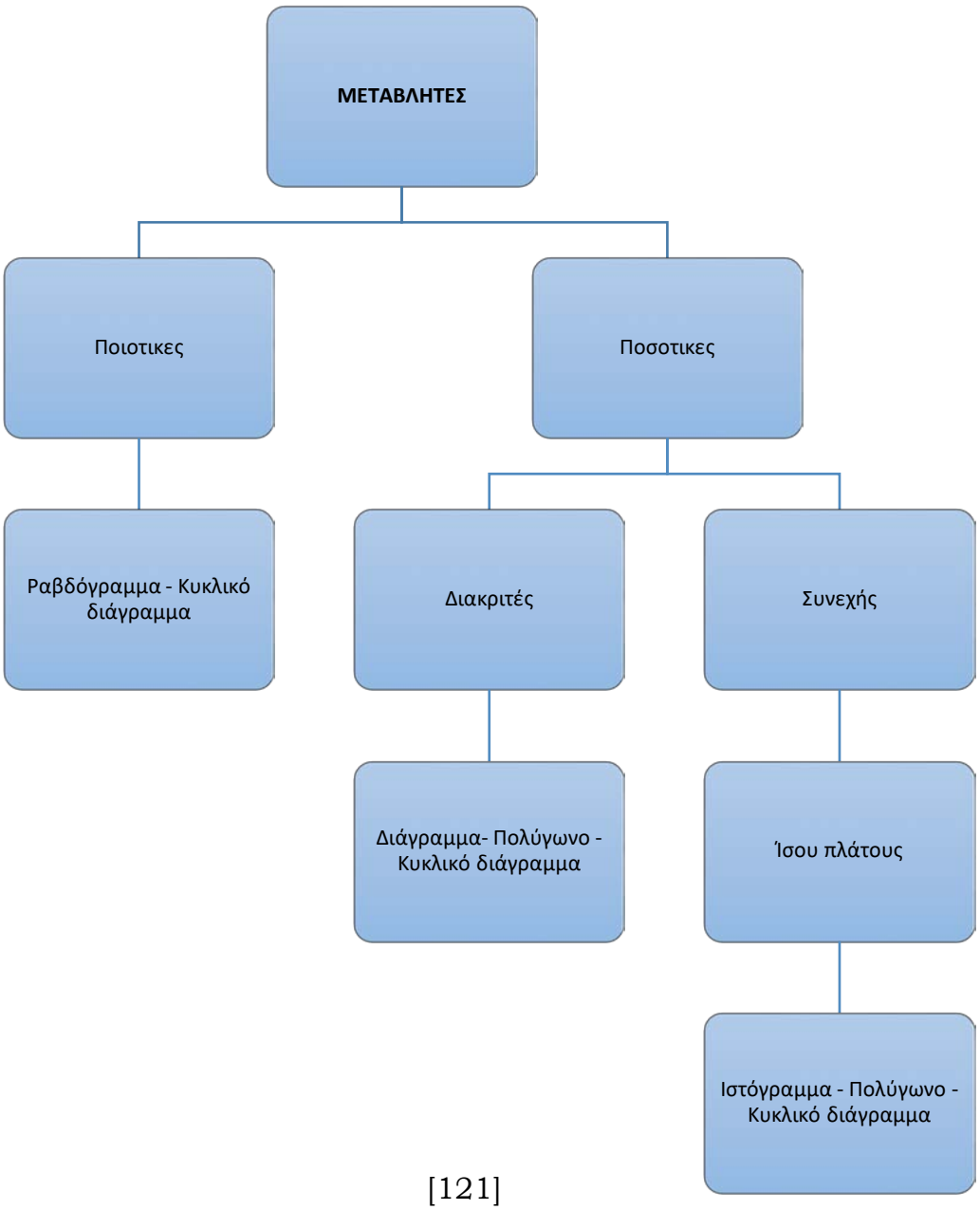
16) Ρωτήσαμε 200 μαθητές ενός Λυκείου, «πόσα αδέλφια έχετε;», και οι απαντήσεις τους ήταν από 0 εως 5. Γνωρίζουμε ότι 72 μαθητές δεν έχουν αδέλφια, το 84% των μαθητών έχει το πολύ ένα αδέλφο, 193 μαθητές έχουν λιγότερα από τρία αδέλφια, 0,5% των μαθητών έχει τουλάχιστον 5 αδέλφια και 3 μαθητές έχουν τουλάχιστον τέσσερα αδέλφια. Να κατασκευάσετε για τα παραπάνω δεδομένα έναν πίνακα συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

17) Η βαθμολογία μιας ομάδας 20 φοιτητών είναι 3, 2, 5, 4.

i) Δεκαέξι φοιτητές έχουν βαθμό το πολύ 4.
ii) Οι φοιτητές με βαθμό 3 είναι διπλάσιοι των φοιτητών με βαθμό 2.
iii) Οι φοιτητές με βαθμό 4 είναι κατά 6 περισσότεροι των φοιτητών με βαθμό 3.
iv) Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων (ν_i, N_i, f_i, $f_i\%$, F_i, $F_i\%$).

ΒΑΣΙΚΗ ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Συνοπτικά και ανάλογα τώρα με το είδος της μεταβλητής τα διαγράμματα που θα χρησιμοποιούμε είναι :



2ΟΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ (ΡΑΒΔΟΓΡΑΜΜΑ, ΚΥΚΛΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ)

Ως γνωστόν έτσι ονομάζεται η μεταβλητή , όταν οι τιμές που μπορεί να πάρει δεν είναι αριθμοί . Θα δούμε την παρουσίαση της μεταβλητής αυτής μέσα από το επόμενο παράδειγμα .

Παράδειγμα 6ο : Στην ερώτηση ποιο μέσο προτιμάτε για να ταξιδέψετε από την Αθήνα στην Θεσσαλονίκη που έγινε σε 20 άτομα, δόθηκαν οι ακόλουθες απαντήσεις :

Αερ Τ Λ Αυτ Αερ Λ Τ Αερ Λ Αυτ Λ
Λ Λ Αερ Τ Αερ Λ Τ Λ Αερ

(όπου : Αερ=Αεροπλάνο , Τ= Τρένο , Λ=Λεωφορείο , Αυτ=Αυτοκίνητο)

Ο στατιστικός πίνακας που περιείχε όλα τα παραπάνω στοιχεία της μεταβλητής Χ : Μεταφορικό μέσο και με τιμές x_i (Αεροπλάνο, Λεωφορείο, Τρένο, Αυτοκίνητο)

Μεταφορικό μέσο	**Διαλογή**	ν_i	f_i	f_i %	α_i
Αεροπλάνο	|||||	6	0,3	30	108^0
Λεωφορείο	|||||||	8	0,4	40	144^0
Τρένο	||||	4	0,2	20	72^0
Αυτοκίνητο	||	2	0,1	10	36^0
ΣΥΝΟΛΟ		20	1	100	360^0

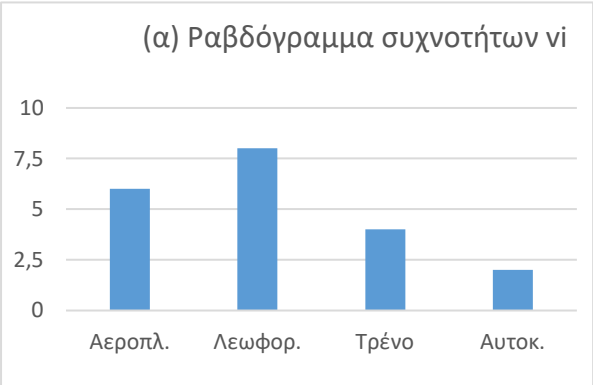
Σημείωση

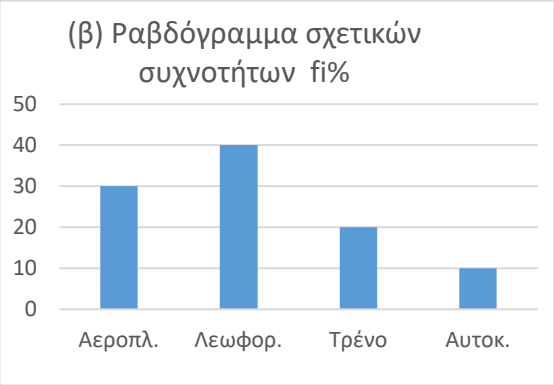
Για να κάνουμε τη διαλογή «σαρώνουμε» τα δοθέντα στοιχεία κατά στήλη ή γραμμές (για συντομία χρόνου) και για κάθε παρατήρηση βάζουμε το σημάδι (|) στην κατάλληλη γραμμή . Χάριν ευκολίας η πέμπτη παρατήρηση μπαίνει πλάγια (-) .

Για τη γραφική παράσταση λοιπόν των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής χρησιμοποιούμε :

ΡΑΒΔΟΓΡΑΜΜΑ

Το Ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής . Οι τιμές αυτές παριστάνονται στον οριζόντιο άξονα σαν ισομήκη διαστήματα με κενά μεταξύ τους , ενώ οι αντίστοιχες συχνότητες ή σχετικές συχνότητες παρουσιάζονται στον κατακόρυφο άξονα .

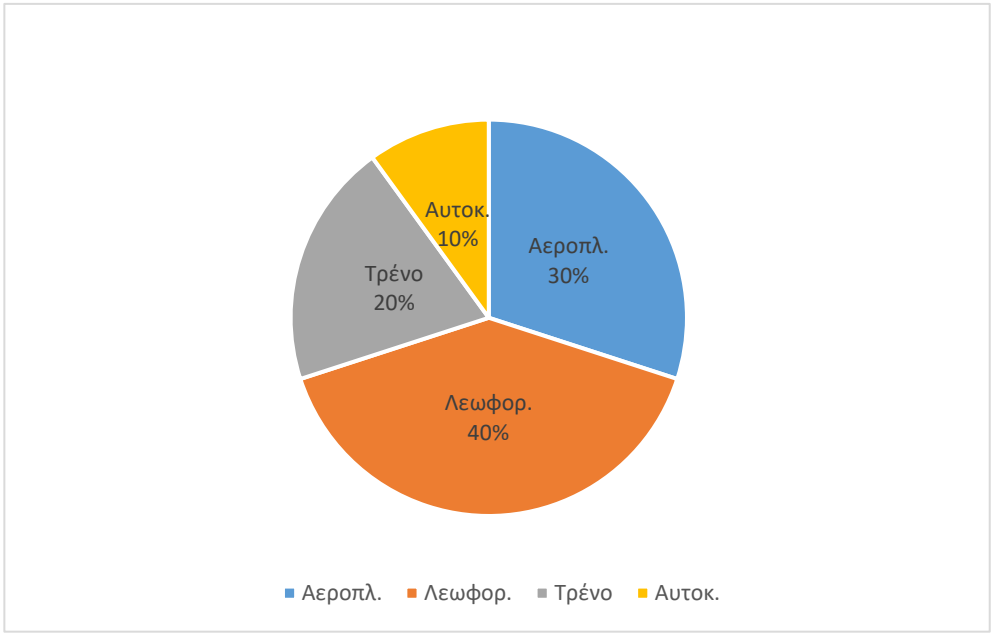




Το αποτέλεσμα είναι ορθογώνιες στήλες με ίσες βάσεις . Όταν στον κατακόρυφο άξονα βάζουμε συχνότητες , τότε έχουμε **Ραβδόγραμμα συχνοτήτων** , ενώ όταν βάζουμε σχετικές συχνότητες (%) έχουμε **Ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων** (%) . Η απόσταση μεταξύ των διαστημάτων όσο και το μήκος αυτών καθορίζονται αυθαίρετα . Μερικές φορές ο ρόλος των δύο αξόνων είναι δυνατόν να αντιστραφεί .

ΚΥΚΛΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς τα εμβαδά (ή ισοδύναμα τα τόξα) των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες (ν_i) ή σχετικές συχνότητες επί τοις εκατό ($f_i\%$) των τιμών x_i της μεταβλητής Υπενθυμίζεται ότι αν συμβολίσουμε με α_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος τότε $\alpha_i = 360^0 . f_i$ ή $\alpha_i = 360^0 . \frac{\nu_i}{\nu}$.



Συγκρατήστε ότι το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται τόσο στις **ποιοτικές** όσο και στις **ποσοτικές** μεταβλητές (που ακολουθούν) .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ 2 ΑΠΟ 4

1) Από το αεροδρόμιο του Ελληνικού μια μέρα αναχωρούν 40 αεροπλάνα για το εξωτερικό από τα οποία ο προορισμός τους είναι :

12 για Λονδίνο , 8 για Παρίσι , 10 για Βερολίνο , 6 για Βιέννη και 4 για Ρώμη . Να κατασκευάσετε το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων (%) και το κυκλικό διάγραμμα .

2) Μια μπλούζα διατίθεται σε πέντε χρώματα : άσπρο(Α), μαύρο(Μ), ροζ(Ρ), κόκκινο(Κ), και πράσινο(Π) . Τη συγκεκριμένη μπλούζα αγόρασαν 40 πελάτες με την ακόλουθη προτίμηση σε χρώματα :

Α	Μ	Ρ	Ρ	Κ	Μ	Κ	Κ
Κ	Ρ	Α	Μ	Ρ	Μ	Ρ	Μ
Μ	Π	Ρ	Κ	Α	Μ	Π	Α
Κ	Μ	Ρ	Κ	Π	Κ	Κ	Ρ
Μ	Π	Α	Μ	Μ	Μ	Α	Κ

Να κατασκευάσετε το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων (%) και το κυκλικό διάγραμμα .

3) Από το 1968 μέχρι το 1997 σ' έναν μετεωρολογικό σταθμό γίνονταν μετρήσεις της βροχόπτωσης . Οι μεγαλύτερες βροχοπτώσεις σημειώθηκαν το Νοέμβριο 8 φορές , το Δεκέμβριο 12 φορές , τον Ιανουάριο 6 φορές και τον Φεβρουάριο 4 φορές . Να κατασκευάσετε το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων(%) και το κυκλικό διάγραμμα .

4) Οι ομάδες αίματος που προέκυψαν από την εξέταση 25 ατόμων δίνονται παρακάτω :

AB	A	O	B	A
A	O	O	O	AB
B	B	O	A	O
O	O	B	AB	B
A	B	B	AB	O

i) Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων .
ii) Να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα .
iii) Ποιο είναι το ποσοστό των ατόμων που έχει : ομάδα αίματος Α , ομάδα αίματος ΑΒ .
iv) Ποια ομάδα αίματος είναι : πιο συχνή , πιο σπάνια ;

5) Στον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων παρουσιάζεται το μορφωτικό επίπεδο των εργαζομένων μιας εταιρείας.

Επίπεδο μόρφωσης x_i	Αριθμός εργαζομένων ν_i
Απόφοιτος Γυμνασίου	15
Απόφοιτος Λυκείου	24
Απόφοιτος Τ.Ε.Ι.	9
Απόφοιτος Α.Ε.Ι.	12
Αθροίσματα	60

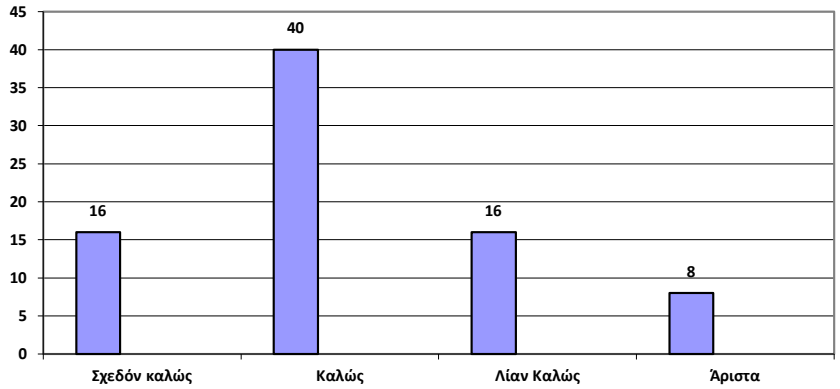
α) Να κάνετε το ραβδόγραμμα
i) συχνοτήτων
ii) σχετικών συχνοτήτων %
β) Να κάνετε το κυκλικό διάγραμμα.

6) Στον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων παρουσιάζεται το μορφωτικό επίπεδο των εργαζομένων μιας εταιρείας.

Χρώμα Αυτοκινήτου x_i	Αριθμός Αυτοκινήτων ν_i
Κίτρινο	4
Κόκκινο	10
Μαύρο	14
Γκρι	8
Πράσινο	4
Αθροίσματα	40

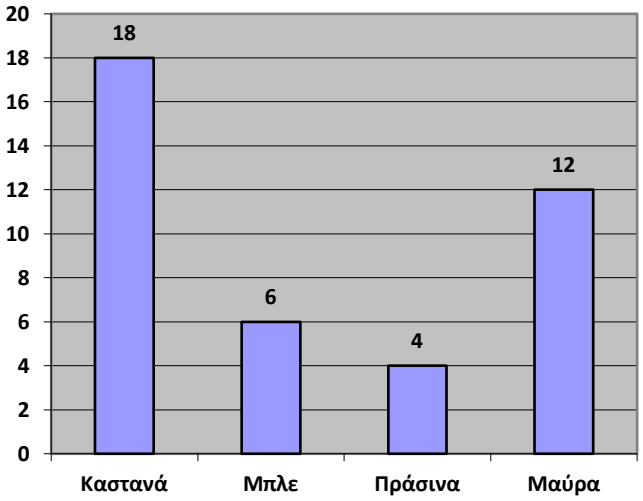
α) Να κάνετε το ραβδόγραμμα
i) συχνοτήτων
ii) σχετικών συχνοτήτων %
β) Να κάνετε το κυκλικό διάγραμμα.

7) Το παρακάτω ραβδόγραμμα παριστάνει την βαθμολογία των μαθητών ενός γυμνασίου.



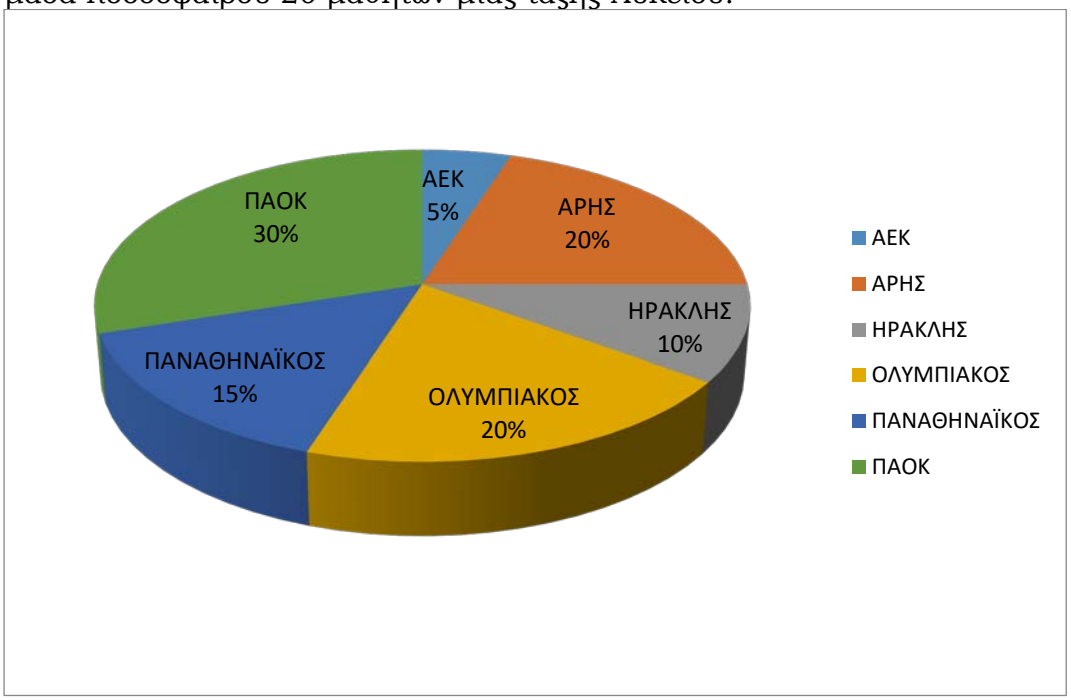
α) Να κάνετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
β) Να κάνετε το κυκλικό διάγραμμα.

8) Το παρακάτω ραβδόγραμμα παριστάνει το χρώμα των ματιών των μαθητών ενός γυμνασίου.



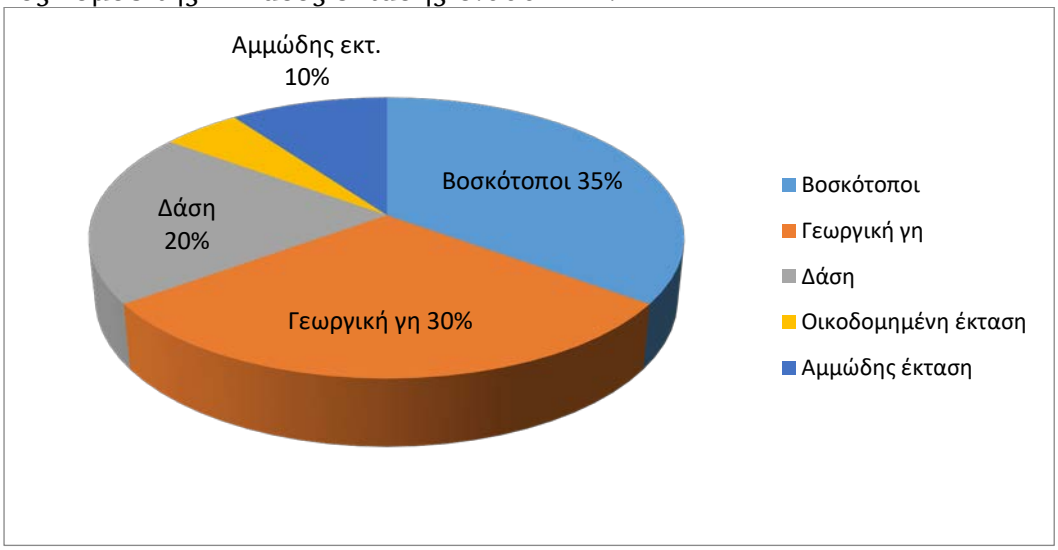
α) Να κάνετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
β) Να κάνετε το κυκλικό διάγραμμα.

9) Το παρακάτω κυκλικό διάγραμμα παριστάνει την αγαπημένη ελληνική ομάδα ποδοσφαίρου 20 μαθητών μιας τάξης Λυκείου.



α) Να κάνετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων
β) Να κάνετε το ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

10) Το παρακάτω κυκλικό διάγραμμα παριστάνει την κατανομή της έκτασης ενός νομού της Ελλάδος έκτασης 5.000 Km^2.



α) Να κάνετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων
β) Να κάνετε το ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

11) Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή συχνοτήτων των ωρών μελέτης των μαθητών της Α΄ τάξης ενός Επαγγελματικού Λυκείου στη διάρκεια μιας εβδομάδας.

Ώρες x_i	Συχνότητα ν_i
2	8
3	12
4	18
5	5
6	7
Αθροί-σματα	50

α) Να κάνετε το ραβδόγραμμα
i) συχνοτήτων
ii) σχετικών συχνοτήτων %
β) Να κάνετε το κυκλικό διάγραμμα.

12) Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή συχνοτήτων των απουσιών των μαθητών της Α΄ τάξης ενός Επαγγελματικού Λυκείου στη διάρκεια ενός μήνα.

Απουσίες x_i	Συχνότητα ν_i
0	8
1	10
2	16
3	4
4	2
Αθροίσματα	40

α) Να κάνετε το ραβδόγραμμα
i) συχνοτήτων
ii) σχετικών συχνοτήτων %
β) Να κάνετε το κυκλικό διάγραμμα.

13) Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει την κατεύθυνση που έχουν επιλέξει 30 αγόρια και 40 κορίτσια της Γ΄ τάξης ενός Γενικού Λυκείου.

	Θεωρητική Κατεύθυνση	Τεχνολογική Κατεύθυνση	Θετική Κατεύθυνση
Αγόρια	6	15	9
Κορίτσια	20	8	12

α) Να κάνετε στο ίδιο σύστημα αξόνων το ραβδόγραμμα συχνοτήτων.
β) Να κάνετε στο ίδιο σύστημα αξόνων το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων %.

14) Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει το αγαπημένο άθλημα 50 αγοριών και 50 κορίτσιων της Γ΄ τάξης ενός Γενικού Λυκείου.

	Ποδόσφαιρο	Μπάσκετ	Βόλεϋ
Αγόρια	25	18	7
Κορίτσια	10	15	25

α) Να κάνετε στο ίδιο σύστημα αξόνων το ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

β) Να κάνετε στο ίδιο σύστημα αξόνων το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων %.

15) α) Να συμπληρωθεί ο πίνακας, ο οποίος παρουσιάζει τους μεταξεταστέους μαθητές της Α' Λυκείου:

Μαθήματα	ν_i	$f_i\%$
Αρχαία Ελλην.	6	
Νέα Ελληνικά		5
Αγγλικά	8	
Μαθηματικά	8	
Φυσική	10	25
Χημεία		

β)πόσοι μαθητές έμειναν μεταξεταστέοι στα Μαθηματικά, τη Φυσική και τη Χημεία;

γ) να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων

δ) να γίνει το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα.

16) Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται το πλήθος των παιδιών 400 οικογενειών ενός δήμου. Το 50% των οικογενειών έχουν 2 παιδιά. Η γωνία του κυκλικού τομέα για τις οικογένειες που έχουν 1 παιδί είναι 72°. Οι οικογένειες με κανένα παιδί είναι τριπλάσιες των οικογενειών με 3 παιδιά.

α) Να κάνετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες των κυκλικών τομέων που αντιστοιχούν σε όλες τις κατηγορίες.

γ) Να σχεδιάσετε στο τετράδιό σας το ραβδόγραμμα των σχετικών συχνοτήτων ($f_i\%$).

3ΟΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

ΠΟΣΟΤΙΚΗ ΔΙΑΚΡΙΤΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ (ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ, ΠΟΛΥΓΩΝΟ ΚΑΙ ΚΥΚΛΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ)

Γνωρίζουμε ότι έτσι ονομάζεται η μεταβλητή όταν οι τιμές που παίρνει είναι 'μεμονωμένες' .Θα μελετήσουμε την μεταβλητή αυτή μέσα από το επόμενο παράδειγμα .

Παράδειγμα 7ο : Σε ένα δείγμα 20 οικογενειών μιας πολυκατοικίας έχουμε τα παρακάτω δεδομένα για τη μεταβλητή Χ : «αριθμός δωματίων διαμερίσματος» .

1 2 3 4 2 1 3 2 3 3 4 5 4 3 3 2 3 4 3 2

Ο στατιστικός πίνακας για το παράδειγμά μας είναι :

Αριθ.Δωμ.	Διαλ.	ν_i	N_i	f_i	F_i	f_i %	F_i %	α_i
1	||	2	2	0,10	0,10	10	10	36^0
2	|||||	5	7	0,25	0,35	25	35	90^0
3	||||| |||	8	15	0,40	0,75	40	75	144^0
4	||||	4	19	0,20	0,95	20	95	72^0
5	|	1	20	0,05	1	5	100	18^0
ΣΥΝΟΛΟ		20		1		100		360^0

Για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής χρησιμοποιούμε :

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

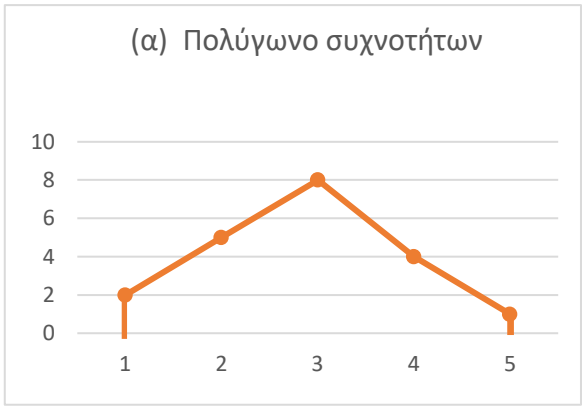
Χρησιμοποιείται στην περίπτωση που έχουμε **ποσοτική** μεταβλητή κατά τον ίδιο τρόπο ,όπως και το ραβδόγραμμα, μόνο που τώρα δεν σχηματίζουμε ορθογώνια παραλληλόγραμμα αλλά υψώνουμε γραμμές .

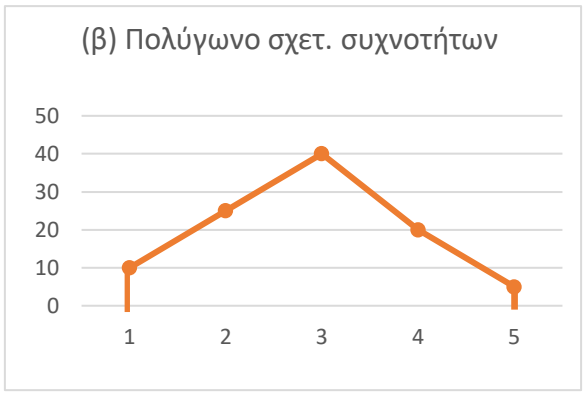




ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Ενώνοντας τα σημεία (x_i,ν_i) ή (x_i,f_i) έχουμε το **πολύγωνο συχνοτήτων** ή **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό** αντίστοιχα που μας παρουσιάζει μια γενική ιδέα για το πώς μεταβάλλεται η συχνότητα ή η σχετική συχνότητα επι τοις εκατό αντίστοιχα , καθώς αυξάνεται η τιμή της μεταβλητής που παρατηρούμε . Τα αντίστοιχα πολύγωνα για τα παραπάνω διαγράμματα είναι :





Για να σχηματιστεί το πολύγωνο προσέξτε ότι ενώσαμε τα άνω άκρα των γραμμών καθώς και ότι για να 'κλείσει' το πολύγωνο φέρνουμε την πρώτη και την τελευταία γραμμή του διαγράμματος .

ΚΥΚΛΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

Σχηματίζεται όπως και στις ποιοτικές μεταβλητές .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ 3 ΑΠΟ 4

1) Στον διπλανό πίνακα δίνεται η κατανομή του αριθμού των παιδιών 50 οικογενειών .

Να βρείτε :

(i) Τις συχνότητες των τιμών της μεταβλητής Χ: 'αριθμός παιδιών στην οικογένεια' .

(ii) Πόσες οικογένειες έχουν : ένα τουλάχιστον παιδί , ακριβώς 6 παιδιά , πάνω από τρία παιδιά από τρία έως και πέντε παιδιά .

(iii) Να κατασκευάσετε διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό και το αντίστοιχο πολύγωνο

Αριθ. Παιδιών (x_i)	Αθρ.συχν. (N_i)
0	5
1	15
2	30
3	38
4	43
5	47
6	50

2) Στον διπλανό πίνακα παρουσιάζεται ο αριθμός των σωστών απαντήσεων σε ένα ερωτηματολόγιο 10 ερωτήσεων , στο οποίο έλαβαν μέρος 50 εξεταζόμενοι .

(i) Να γίνει διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων (%) .

(ii) Να βρεθεί ο αριθμός και το ποσοστό των εξεταζόμενων που έχουν δώσει :

- Τουλάχιστον 5 σωστές απαντήσεις.
- Πάνω από 6 σωστές απαντήσεις .
- Από 4 έως και 7 σωστές απαντήσεις .
- Το πολύ 8 σωστές απαντήσεις .
- Ακριβώς 8 σωστές απαντήσεις .

Αριθ. σωστών απαντήσεων	Συχνότητα
1	5
2	4
3	2
4	3
5	9
6	7
7	6
8	10
9	1
10	3

3) Οι μεγαλύτερες θερμοκρασίες (σε βαθμούς Κελσίου) που παρατηρήθηκαν στη διάρκεια μιας μέρας για 30 συνεχείς ημέρες σε μία πόλη είναι οι παρακάτω :

22	23	27	24	23	21	21	23	23	22
25	26	26	26	24	21	21	22	24	26
25	27	22	22	24	23	23	26	25	26

(i) Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων και να τον συμπληρώσετε με τις στήλες των αθρ, συχν. και των αθρ. σχετ. συχν. (επί τοις εκατό) .

(ii) Πόσες ημέρες η θερμοκρασία στην πόλη ήταν μικρότερη από 23^0C και πόσες ημέρες ήταν μεγαλύτερη από 24^0C ;

4) (i)Να εξετάσετε αν είναι σωστή ή λανθασμένη η πρόταση:

'Στον διπλανό πίνακα δίνονται οι σχετικές συχνότητες των τιμών μιας μεταβλητής ' .

Δικαιολογήστε την απάντησή σας .

x_i	f_I
1	0,1
2	0,3
3	0,1
4	0
5	0,2
6	0,1

(ii)Να συμπληρώσετε την τιμή που λείπει στον διπλανό πίνακαώστε σ' αυτόν να δίνονται οι σχετικές συχνότητες των τιμών μιας μεταβλητής X για ένα δείγμα μεγέθους ν=10 . Στη συνέχεια να κατασκευάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων και το διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων .

x_i	f_I
1	0,1
2	0,3
3	0,1
4	....
5	0,2
6	0,1

4ος ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

ΠΟΣΟΤΙΚΗ ΣΥΝΕΧΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΣΕ ΚΛΑΣΕΙΣ ΙΣΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ

Όταν το πλήθος των τιμών μιας μεταβλητής είναι αρκετά μεγάλο είναι απαραίτητο τα δεδομένα να ομαδοποιηθούν σε μικρό πλήθος ομάδων που ονομάζονται **κλάσεις** έτσι ώστε κάθε τιμή να ανήκει σε μία μόνο κλάση .

Τα άκρα των κλάσεων ονομάζονται **όρια των κλάσεων** . Έχει καθιερωθεί κάθε κλάση να περιέχει το κάτω άκρο της (κλειστή αριστερά) αλλά όχι το άνω άκρο της (ανοικτή από δεξιά) , δηλαδή είναι της μορφής [,) .

Οι παρατηρήσεις κάθε κλάσεις αντιπροσωπεύονται από τις κεντρικές τιμές , δηλαδή τα κέντρα κάθε κλάσης . Έτσι αν έχουμε μία κλάση της μορφής $[\alpha_1 , \alpha_2)$ η **κεντρική τιμή** της είναι το ημιάθροισμα των δύο άκρων ονομάζεται κέντρο κλάσης και συμβολίζεται με : $x_1=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$.

Η διαφορά του κατώτερου από το ανώτερο όριο της κλάσης ονομάζεται **πλάτος** της κλάσης και συμβολίζεται με c_i , άρα $c_1=\alpha_2-\alpha_1$.

Οι κλάσεις συνήθως έχουν το ίδιο πλάτος , χωρίς όμως αυτό να είναι απαραίτητο όπως θα δούμε σε επόμενη ενότητα .

Συχνότητα της κλάσης ονομάζεται το πλήθος των παρατηρήσεων ν_i που προκύπτουν από τη διαλογή για την κλάση i .

ΒΗΜΑΤΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΤΩΝ ΚΛΑΣΕΩΝ

ΒΗΜΑ 1ο

Βρίσκουμε τον αριθμό (κ) των κλάσεων η εκλογή του οποίου μπορεί να γίνει αυθαίρετα από εμάς (ή να δίνεται στην εκφώνηση των ασκήσεων , που είναι και το πιο συνηθισμένο) ή συμβουλευόμενοι τον πίνακα του βιβλίου στην σελ. 72 . Είναι προφανές ότι ο αριθμός των κλάσεων έχει σχέση με το πλήθος των παρατηρήσεων (μέγεθος του δείγματος) .

ΒΗΜΑ 2ο

Για την κατασκευή των κλάσεων **ίσου πλάτους** προσδιορίζουμε το εύρος (R) του δείγματος που είναι η διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη παρατήρηση .

ΒΗΜΑ 3ο

Βρίσκουμε το πλάτος c των κλάσεων από τον τύπο $c=\frac{R}{\kappa}$. Αν χρειαστεί γίνεται στρογγυλοποίηση πάντα προς τα 'επάνω' .

ΒΗΜΑ 4ο

Κατασκευάζουμε τις κλάσεις ξεκινώντας από την μικρότερη παρατήρηση (ή λίγο πιο κάτω απ' αυτήν) και προσθέτουμε κάθε φορά το πλάτος c με την μορφή [,). Γνωρίζουμε ότι θα δημιουργήσουμε συνολικά κ κλάσεις , στην τελευταία των οποίων θα συμπεριλαμβάνεται και η μεγαλύτερη παρατήρηση που έχουμε .

ΒΗΜΑ 5ο

Ακολουθεί η διαλογή 'σαρώνοντας' τις παρατηρήσεις για ευκολία κατά γραμμές ή στήλες .Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι αν έχουμε παρατήρηση που συμπίπτει με το δεξιό άκρο μιας κλάσης , πρέπει να προσμετράτε στην επόμενή της κλάση .

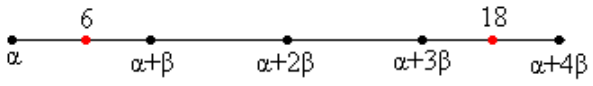
Παράδειγμα 8ο : Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές
…–…	6
…–…	…
…–…	…
…–…	18

Λύση

Ένας απλός τρόπος για να συμπληρώσετε την στήλη των κλάσεων είναι με άξονα.

1) Χωρίζουμε έναν άξονα σε ίσα διαστήματα με αρχή το α και πλάτος κάθε διαστήματος το β.



2) Τοποθετούμε τις δεδομένες κεντρικές τιμές στις ανάλογες θέσεις.

3) Με απλές γεωμετρικές σκέψεις και λύση συστήματος βρίσκουμε τα α και β.

Το μέσον ενός τμήματος με άκρα α και β είναι **μ=** $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Στην περίπτωσή μας έχουμε $\frac{\alpha+2\beta}{2}=6$ και $\frac{\alpha+3\beta+\alpha+4\beta}{2}=18$

α+2β=12 και 2α+7β=36

Η **<u>λύση</u>** του συστήματος είναι: **α=4** και **β=4**. Άρα ο πίνακας θα γίνει:

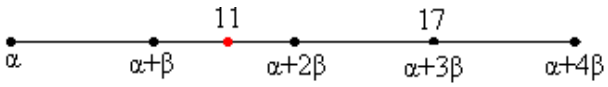
Κλάσεις	Κεντρικές τιμές
[4, 8)	6
[8,12)	10
[12,16)	14
[16,20)	18

Παράδειγμα 9ο : Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές
…–…	…
…–…	11
…–…	…
17–…	…

<u>Λύση</u>

Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο.



Στην περίπτωσή μας έχουμε $\frac{\alpha+\beta+\alpha+2\beta}{2}=6$ και $\alpha+3\beta=17$

ή 2α+3β=12 και α+3β=17 και τελικά **α=5** και **β=4**. Άρα ο πίνακας θα γίνει:

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές
[5 , 9)	7
[9, 13)	11
[13,17)	15
[17,21)	19

Παράδειγμα 10ο : Για μια ορισμένη διαδρομή 40 αυτοκίνητα χρειάστηκαν τα ακόλουθα χρονικά διαστήματα σε ώρες .

5,6	6,1	6,6	6,7	7,2	6,4	7,0	6,5	6,9	6,5	5,8	7,6	6,0
8,3	6,1	7,2	7,4	6,9	6,5	6,3	7,5	5,6	6,4	7,9	6,1	7,3
7,5	6,6	6,7	8,4	6,7	7,6	8,1	7,5	6,1	8,3	7,6	5,8	7,9
7,7												

Έχουμε λοιπόν ν=40, οπότε (πίνακας σελ. 72 ΟΕΔΒ) αριθμός κλάσεων κ=6 , επιπλέον έχω :

εύρος R=8,4 - 5,6=2,8 και πλάτος $c = \frac{R}{\kappa} = \frac{2,8}{6} = 0,47 \approx 0,5$

Οπότε ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων του εν λόγου παραδείγματος είναι :

Κλάσεις	Κέντρο Κλάσης(x_i)	Διαλογή	ν_i	N_i	f_i%	F_i%
5,6-6,1	5,85	|||||	5	5	12,5	12,5
6,1-6,6	6,35	||||| |||||	10	15	25	37,5
6,6-7,1	6,85	|||||||	8	23	20	57,5
7,1-7,6	7,35	||||||	7	30	17,5	75
7,6-8,1	7,85	|||||	6	36	15	90
8,1-8,6	8,35	||||	4	40	10	100
ΣΥΝΟΛΟ			40		100	

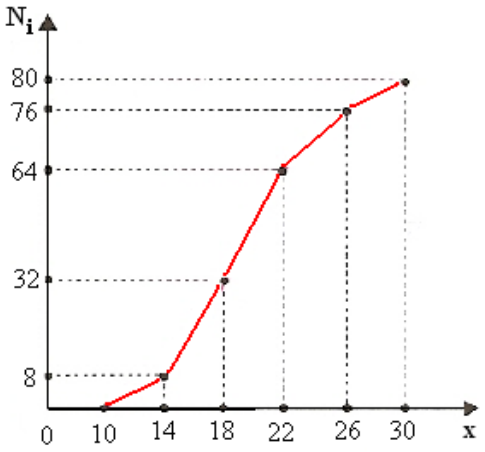
Παράδειγμα 11ο : Στο παρακάτω σχήμα δίνεται το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων που δείχνει το μηνιαίο χαρτζιλίκι σε € των μαθητών ενός Λυκείου. Να βρείτε:

α) Πόσοι είναι οι μαθητές.

β) Πόσοι παίρνουν κάτω από 16 €.

γ) Πόσοι παίρνουν τουλάχιστον 19 €.

δ) Μέχρι ποιο χαρτζιλίκι φθάνουν οι 40 πρώτοι "φτωχοί" μαθητές;



Λύση

Για να μελετήσουμε καλύτερα το πρόβλημα κατασκευάζουμε πίνακα συχνοτήτων.

Χαρτζιλίκι	ν_i	Ni
[10,14)	8	8
[14,18)	24	32
[18,22)	32	64
[22,26)	12	76
[26,30)	4	80

α) Το πλήθος των μαθητών είναι **80** (όσο το N_5).

β) Οι μαθητές που παίρνουν κάτω από 16 € είναι:

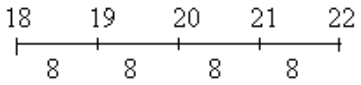
$$\nu_1+\frac{\nu_2}{2}=8+12=\mathbf{20}.$$

γ) Οι μαθητές που παίρνουν τουλάχιστον 19 € είναι

$$\nu_5+\nu_4+\frac{3}{4}\nu_3=4+12+24=\mathbf{40}.$$

δ) Οι πρώτοι μαθητές $\nu_1+\nu_2+\frac{1}{4}\nu_3=40$ φθάνουν μέχρι **19 €**.

Υποθέτουμε ότι στην κλάση [18,22) η κατανομή των 32 μαθητών είναι ομοιόμορφη, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Παράδειγμα 12ο : Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις απουσίες (ομαδοποιημένες) που έκαναν οι μαθητές ενός σχολείου. Να βρείτε

α) τις απουσίες που έκανε το 33% των

β) το ποσοστό που έκανε τουλάχιστον 38 απουσίες.

Απουσίες	$f_i\%$
0–10	5
10–20	20
20–30	40
30–40	25
40–50	10

Λύση

α) 33%=5%+20%+8%.

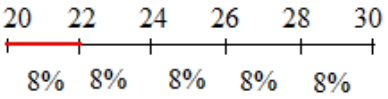
Το 5% έκανε μέχρι [0,10) απουσίες.

Το 20% έκανε μέχρι [10,20) απουσίες.

Θα υπολογίσουμε το 8% της κλάσης [20,30).

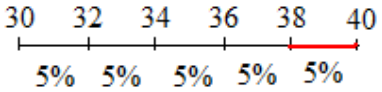
Το 8% του 40% είναι $\frac{1}{5}$40% που αντιστοιχεί σε 2 απουσίες. (δείτε το σχήμα).

Άρα το 33% έκανε μέχρι **22 απουσίες**.



β) Τουλάχιστον 38 απουσίες σημαίνει 38 έως 50, δηλαδή το ποσοστό της κλάσης [40,50) που αντιστοιχεί το 10% των μαθητών και 2 απουσίες από την κλάση [30, 40). Οι 2 απουσίες είναι το $\frac{1}{5}$του 25% δηλαδή 5%. (δείτε το σχήμα)

Επομένως 10%+5%=**15%**.



Παράδειγμα 13ο : Σε μία ομαδοποιημένη κατανομή, στην κλάση [2,7) υπάρχουν 20 παρατηρήσεις. Αν το δείγμα έχει μέγεθος ν=50, να βρείτε:

α) Το πλήθος των παρατηρήσεων της κλάσης αυτής που είναι μικρότερες του 5.

β) Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που έχουν τιμή τουλάχιστον 3 και μικρότερη του 7.

γ) Το x≤7 ώστε στην κλάση [2,x) να ανήκουν 8 παρατηρήσεις.

δ) Το x≤7 ώστε στην κλάση [2,x) να ανήκει το 32% του δείγματος.

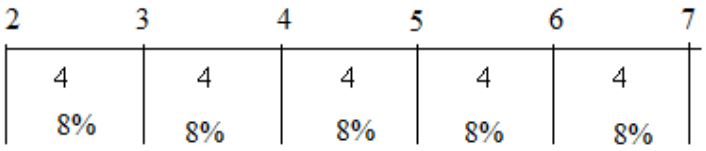
Λύση

Παριστάνουμε γραφικά τα δεδομένα της άσκησης. Έτσι γίνεται ευκολότερη!!

Χωρίζουμε την κλάση σε 5 διαστήματα (όσα και οι αριθμοί).

Σε κάθε διάστημα υπάρχουν 4 παρατηρήσεις (αφού όλες είναι 20).

Κλάσεις	ν_i	f_i
…	…	…
[2 , 7)	20	40
…	…	…
Σύνολο	ν=50	1



Η σχετική συχνότητα της κλάσης είναι $f_3=\frac{20}{50}=40\%$.

α) Το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 5 είναι4+4+4=**12**.

β) Το ποσοστό των παρατηρήσεων που έχουν τιμή 3 και μικρότερη του 7 είναι 8%+8%+8%=**32%**.

γ) 8 παρατηρήσεις βρίσκονται στο διάστημα [2,4). Άρα **x=4**.

δ) το 32% του δείγματος είναι στο διάστημα [2,6). Άρα **x=6**.

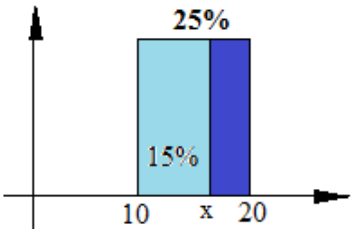
Παράδειγμα 14ο : Σε μία ομαδοποιημένη κατανομή η κλάση [10,20) έχει σχετική συχνότητα f %=25% Να βρείτε πόσα άτομα της κλάσης αυτής μετά το 10 αποτελούν το 15%;

Λύση

Έστω ότι ξεκινώντας από το 10 θα σταματήσουμε στο x. Ο λόγος των βάσεων είναι ανάλογος των συχνοτήτων.

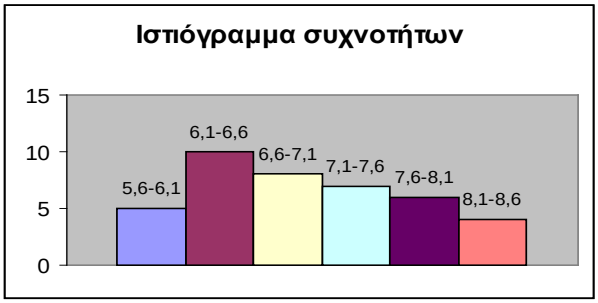
Πρέπει $\frac{x-10}{20-10}=\frac{15\%}{25\%}$

$\frac{x-10}{10}=\frac{15}{25}$ και τελικά **x=16**.

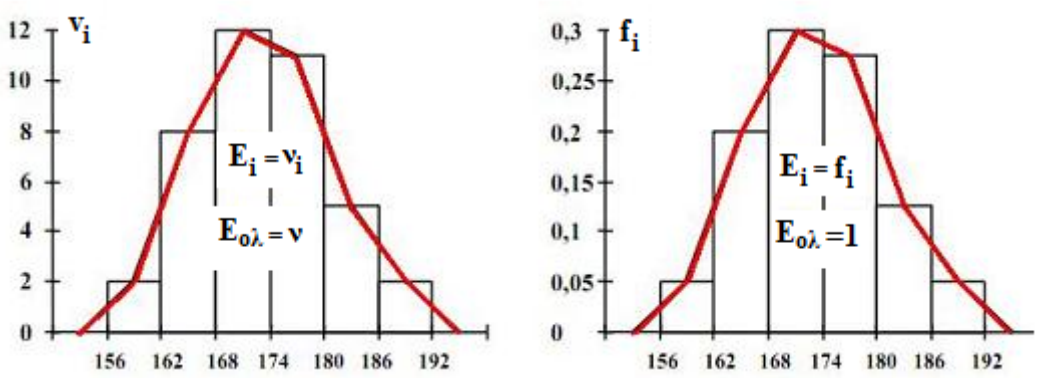


ΙΣΤΟΓΡΑΜΜΑΤΑ

Στο ιστόγραμμα υψώνουμε ορθογώνια παραλληλόγραμμα (ιστούς) μέχρι του ύψους της αντίστοιχης συχνότητας ή αθροιστικής συχνότητας και βάση 1 .Παρατηρείστε ότι σε αντίθεση με το ραβδόγραμμα (ποιοτική μεταβλητή) τα παραλληλόγραμμα αυτά είναι συνεχόμενα (δεν έχουν κενό μεταξύ τους) .



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ



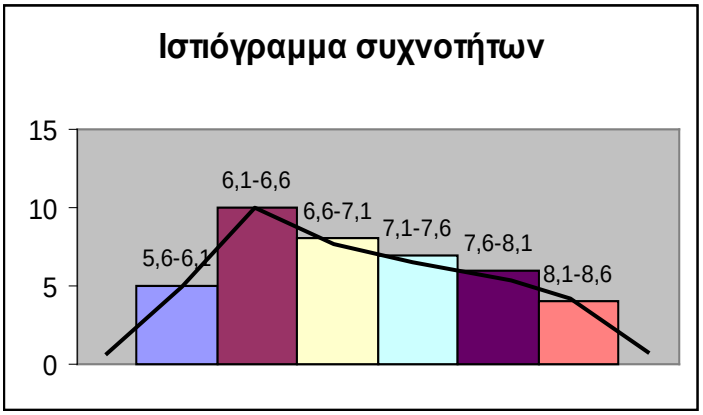
1) Επειδή τα πλάτη των κλάσεων διαφέρουν από κατανομή σε κατανομή υποθέτουμε ότι όλες οι κλάσεις έχουν πλάτος 1.

2) Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων το εμβαδόν κάθε ορθογωνίου ισούται με την συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης και το συνολικό εμβαδόν του πολυγώνου ισούται με το μέγεθος του δείγματος

3) Στο ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων το εμβαδόν κάθε ορθογωνίου ισούται με την σχετική συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης και το συνολικό εμβαδόν του πολυγώνου ισούται με το1.

ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Για να κατασκευάσουμε τα αντίστοιχα πολύγωνα συχνοτήτων ή σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό **ενώνουμε τα μέσα των άνω βάσεων** των παραλληλογράμμων . Για να κλείσουν αυτά θεωρούμε δύο υποθετικές κλάσεις (μία στην αρχή και μία στο τέλος) με συχνότητα 0.



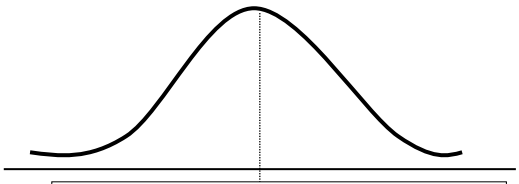
Για να κατασκευάσουμε τα αντίστοιχα πολύγωνα αθροιστικών συχνοτήτων ή αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό **ενώνουμε τα άνω δεξιά άκρα των**

βάσεων των παραλληλογράμμων . Για να κλείσουν αυτά θεωρούμε μία υποθετική κλάση (στην αρχή) με συχνότητα 0 . Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων (ή σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό) και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων -μέγεθος του δείγματος (ή με το 100%)

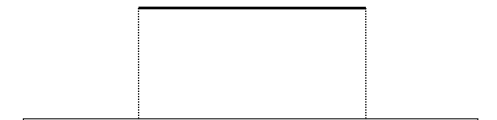
ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

Όταν για μια συνεχή μεταβλητή ο αριθμός των κλάσεων είναι πολύ μεγάλος (τείνει στο άπειρο) και το πλάτος των κλάσεων είναι πολύ μικρό (τείνει στο μηδέν) , τότε το πολύγωνο συχνοτήτων αντί να είναι μία τεθλασμένη γραμμή γίνεται μία ομαλή καμπύλη που ονομάζεται **καμπύλη συχνοτήτων** .

Μερικές χαρακτηριστικές καμπύλες συχνοτήτων είναι η **κανονική κατανομή** όπου οι παρατηρήσεις κατανέμονται συμμετρικά γύρω από μία κατακόρυφη ευθεία και η **ομοιόμορφη καμπύλη** όπου οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα σ' ένα διάστημα [α, β] .

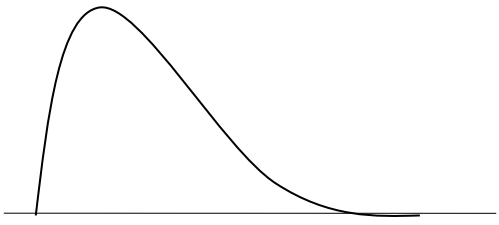


Κανονική κατανομή

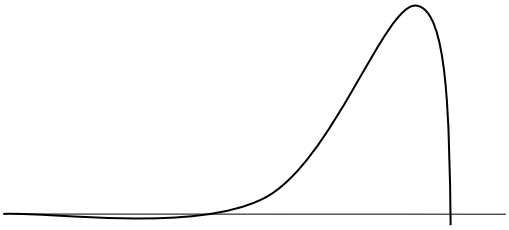


Ομοιόμορφη κατανομή

Όταν οι παρατηρήσεις δεν κατανέμονται συμμετρικά , η κατανομή ονομάζεται ασύμμετρη με θετική ή αρνητική ασυμμετρία , όπως φαίνεται και στα επόμενα σχήματα .



Θετική Ασυμμετρία



Αρνητική Ασυμμετρία

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ 4 ΑΠΟ 4

1) Σ' ένα ορνιθοτροφείο ζύγισαν 48 αυγά και βρήκαν ότι τα βάρη τους σε γραμμάρια είναι :

50	60	67	57	62	51	64	51
60	57	65	50	64	61	66	59
55	60	64	60	66	54	59	64
60	70	66	71	59	66	61	51
55	56	55	55	56	61	67	65
64	62	69	62	74	64	56	64

(α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε κατάλληλο αριθμό κλάσεων .

(β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα με τις συχνότητες ν_i , $f_i\%$, N_i , $F_i\%$.

(γ) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων .

2) Δίνεται ο διπλανός πίνακας των ομαδοποιημένων παρατηρήσεων που αναφέρονται στη μέγιστη θερμοκρασία μιας πόλης στη διάρκεια μιας μέρας .

Θερμοκρασία (σε ^{0}C)	Συχνότητα (ν_i)
20-22	3
22-24	9
24-26	30
26-28	15
28-30	3

(α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτή των .

(β) Να κατασκευάσετε ιστόγραμμα συχνοτήτων και το πολύγωνο συχνοτήτων .

(γ) Να κατασκευάσετε ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων και πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων

3) Στον διπλανό πίνακα δίνεται η κατανομή της βαθμολογίας των μαθητών της Γ΄ Λυκείου ενός σχολείου στην Ιστορία .

Βαθμολογία	ν_i
10-20	8
20-30	15
30-40	22
40-50	45
50-60	48
60-70	30
70-80	12
80-90	10

(α)Να βρείτε πόσοι μαθητές πήραν μέρος στις εξετάσεις .

(β)Να συμπληρώσετε τον πίνακα με την στήλη των κεντρικών τιμών κάθε κλάσης , των σχετικών συχνοτήτων (%) και των αθροιστικών συχνοτήτων

(γ)Να κατασκευάσετε τα ιστογράμματα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων (%) .

4) Οι παρακάτω αριθμοί δίνουν (σε cm) τα αναστήματα ενός δείγματος 25 μαθητών ενός σχολείου.

159 168 160 165 151 176 164
172 157 153 177 188 173 180
175 185 162 161 163 192 166
171 158 179 184

Α. Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε 6 κλάσεις (πλάτους 7).

Β. Να κατασκευάσετε τον πίνακα με τις ν_i, f_i, $f_i\%$, N_i, F_i, $F_i\%$.

Γ. Πόσοι μαθητές έχουν ύψος

i) τουλάχιστον 165 ii) κάτω από 179 iii) από 165 εώς 186

Δ. Ποιο ποσοστό των μαθητών έχει ύψος

i) τουλάχιστον 179 ii) τουλάχιστον 172 αλλά κάτω από 186

Ε. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων και το αντίστοχο πολύγωνο συχνοτήτων

ΣΤ. Να κατασκευάσετε το πολύγωνο των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

5) Οι παρακάτω αριθμοί δίνουν (σε m) τις επιδόσεις στην ρίψη ακοντίου ενός δείγματος 36 υποψηφίων για τα ΤΕΦΑΑ.

28	26	31	37	33	41	28	37	48
52	42	47	35	31	25	29	38	40
49	35	34	37	42	44	27	48	32
34	45	43	38	37	42	42	40	36

Α. Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε 6 κλάσεις (πλάτους 5).

Β. Να κατασκευάσετε τον πίνακα με τις v_i, f_i, $f_i\%$, N_i, F_i, $F_i\%$.

Γ. Πόσοι υποψήφιοι έχουν επίδοση

i) τουλάχιστον 40 ii) κάτω από 45 iii) από 35 εώς 50

Δ. Ποιο ποσοστό των μαθητών έχουν επίδοση

i) τουλάχιστον 35 ii) τουλάχιστον 30 αλλά κάτω από 45

Ε. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο συχνοτήτων

ΣΤ. Να κατασκευάσετε το πολύγωνο των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

6) Οι τιμές της απώλειας βάρους, σε κιλά, 200 ατόμων, τα οποία ακολούθησαν ένα πρόγραμμα αδυνατίσματος, έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Απώλεια βάρους σε κιλά	Συχνότητα vi	Σχετική συχνότητα fi%	Αθροιστική Συχνότητα Ni	Αθρ. Σχετ. Συχνότητα Fi%
[0 – 4)	20			
[4 – 8)	40			
[8 – 12)	65			
[12 – 16)	30			
[16 – 20)	45			
Αθροίσματα				

Α. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Β. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.
Γ. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων.
Δ. Πόσα άτομα έχασαν

i) τουλάχιστον 4 ii) κάτω από 6 iii) από 4 εώς 14 κιλά

Ε. Ποιο ποσοστό των ατόμων έχασε

i) τουλάχιστον 14 ii) τουλάχιστον 9 αλλά κάτω από 17 κιλά

7) Από την εξέταση ενός δείγματος 150 πτήσεων μιας αεροπορικής εταιρείας ως προς τον αριθμό των επιβατών προέκυψαν τα στοιχεία όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός Επιβατών	Συχνότητα vi	Σχετική συχνότητα fi%	Αθροιστική Συχνότητα Ni	Αθρ. Σχετ. Συχνότητα Fi%
[5 – 10)	6			
[10 – 15)	12			
[15 – 20)	18			
[20 – 25)	24			
[25 – 30)	12			
[30 – 35)	24			
[35 – 40)	36			
[40 – 45)	18			
Αθροίσματα				

Α. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Β. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.
Γ. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων.
Γ. Πόσες πτήσεις έχουν επιβάτες

i) τουλάχιστον 30 ii) κάτω από 32,5 iii) από 22,5 εώς 40

Δ. Ποιο ποσοστό των πτήσεων έχει επιβάτες

i) τουλάχιστον 32,5 ii) τουλάχιστον 32 αλλά κάτω από 40

8) Το βάρος, σε κιλά, των μαθητών ενός δημοτικού σχολείου, έχει ομαδοποιηθεί σε 6 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Απώλεια βάρους σε κιλά	Συχνότητα νi	Σχετική συχνότητα fi%	Αθροιστική Συχνότητα Ni	Αθρ. Σχετ. Συχνότητα Fi%
[40 – 45)		5		
[45 – 50)		16		
[50 – 55)		26		
[55 – 60)		28		
[60 – 65)		17		
[65 – 70)		8		
Αθροίσματα	400			

9) Οι απουσίες των μαθητών της Γ' τάξης ενός Ενιαίου Λυκείου κατά τους μήνες Ιανουάριο – Φεβρουάριο – Μάρτιο – Απρίλιο του έτους 2006 έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους και εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων:

Απουσίες μαθητών	Κέντρο κλάσης K_i	Σχετική συχνότητα f_i
[3 – 5)	…	0,1
[5 – 7)	…	…
[7 – 9)	…	0,3
[9 – 11)	…	…
Σύνολο		1

Αν επιπλέον δίνεται ότι η σχετική συχνότητα της $4^{ης}$ κλάσης f_4 είναι δι πλάσια της σχετικής συχνότητας της $2^{ης}$ κλάσης f_2, τότε να συμπληρώ σετε τα κενά.

10) Οι βαθμοί των 50 μαθητών της Γ τάξης ενός ΕΠΑΛ παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα. Να συμπληρωθεί ο πίνακας.

Κλάσεις	Κi	νi	fi%	Fi%
[0, 4)				10
[4, 8)		7		
[8, 12)			26	
[12, 16)				86
[16, 20)				
Σύνολο		50		

11) Να συμπληρώσετε τους πίνακες.

α)

Κλάσεις	x_i
[… , …)	
[… , …)	6
[… , …)	
[… , …)	14
[… , …)	

β)

Κλάσεις	x_i
[3 , …)	
[… , …)	
[… , 18)	
[… , …)	
[… , …)	

γ)

Κλάσεις	x_i
[… , …)	
[… , …)	10
[… , …)	
[19 , …)	
[… , …)	

δ)

Κλάσεις	x_i
[-2 , …)	
[… , …)	
[… , 4)	
[… , …)	
[… , …)	

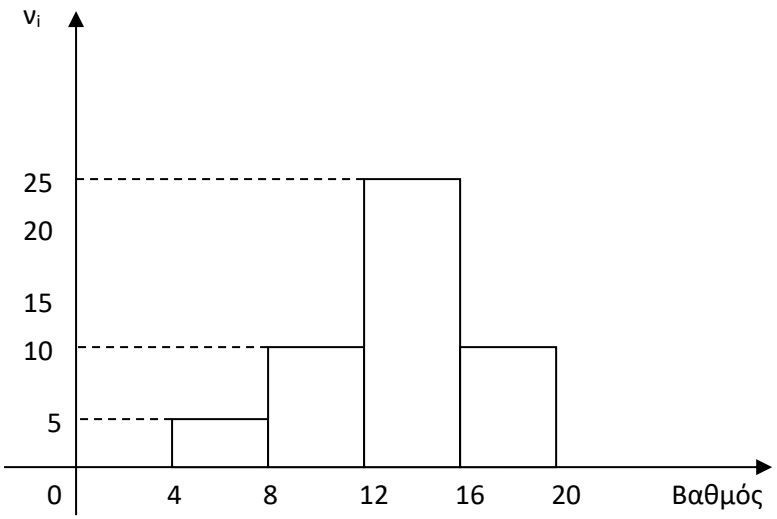
ε)

Κλάσεις	x_i
[… , …)	
[… , …)	11
[… , …)	
[… , …)	
[21 , …)	

στ)

Κλάσεις	x_i
[… , …)	12,5
[… , …)	
[… , …)	
[… , …)	
[… , …)	32,5

12) Σε ένα διαγώνισμα Βιολογίας η βαθμολογία των μαθητών δίνεται από το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων ν_i:

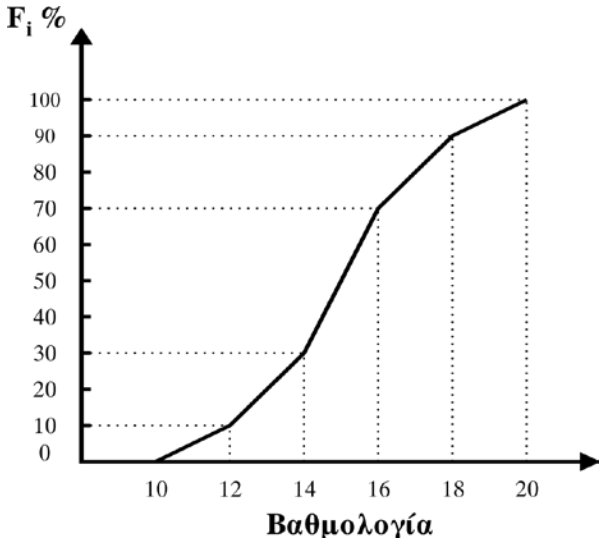


Κλάσεις [ )	K_i	ν_i	f_i	N_i	F_i
[4, 8)					
[8,12)					
[12,16)					
[16,20)					
Σύνολο					

α. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.

β. Να βρείτε πόσοι μαθητές έχουν βαθμό μέχρι 10.

13) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, που παρουσιάζει τη βαθμολογία μίας ομάδας μαθητών στο μάθημα της Ιστορίας. Η βαθμολογία κυμαίνεται από 10 μέχρι 20. Δίνεται ότι 10 μαθητές έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 12 και μικρότερο του 14.



α. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των μαθητών είναι 50.

β. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

14) Οι βαθμοί 60 μαθητών σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών κυμαίνονται από 10 έως 20 και έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους. Αν:

- Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην κλάση [14, 16) του κυκλικού διαγράμματος είναι 144^o
- Οι σχετικές συχνότητες των δύο πρώτων κλάσεων είναι ίσες.
- 48 μαθητές πήραν βαθμό έως 16 και
- 6 μαθητές πήραν βαθμό τουλάχιστον 18, τότε:

Κλάσεις	**K_i**	**ν_i**	**f_i**	**f_i%**
Σύνολο				

Α. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.

Β. Να βρείτε πόσοι μαθητές πήραν βαθμολογία από 10 έως 14.

Γ. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που πήραν βαθμολογία τουλάχιστον 16

Δ. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που πήραν βαθμολογία τουλάχιστον 17

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.3 (ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ & ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ)

Στην προηγούμενη ενότητα ασχοληθήκαμε με κάποιους τρόπους με τους οποίους συγκεντρώνουμε τα αποτελέσματα κάποιων παρατηρήσεων και τα εφαρμόζουμε σε πίνακες ή σε διάφορα διαγράμματα .

Στην παρούσα ενότητα θα δούμε την επεξεργασία μετρήσεων αυτών.

Έτσι θα υπολογίσουμε κάποιες ποσότητες (αριθμούς) που χωρίζονται σε δύο κατηγορίες :

- **Μέτρα θέσης** : Μας περιγράφουν τη θέση ενός συνόλου δεδομένων πάνω στον οριζόντιο άξονα Ox εκφράζοντας τη μέση απόσταση από την αρχή των αξόνων . Αυτά είναι : η μέση τιμή , ο σταθμικός μέσος , η διάμεσος , τα εκατοστημόρια και η επικρατούσα τιμή .

- **Μέτρα διασποράς** : Μας περιγράφουν τις αποκλίσεις των τιμών μιας μεταβλητής γύρω από τη μέση τιμή (το κέντρο της κατανομής) . Τα σπουδαιότερα είναι : το εύρος , το ενδοτεταρτημοριακό εύρος , η διακύμανση και η τυπική απόκλιση .

Εκτός από τα μέτρα θέσης-διασποράς πολλές φορές χρησιμοποιούνται και κάποια άλλα μέτρα , που ονομάζονται μέτρα ασυμμετρίας και καθορίζουν τη μορφή της κατανομής , κατά πόσο δηλαδή η αντίστοιχη καμπύλη συχνοτήτων είναι συμμετρική ως προς μία κατακόρυφη ευθεία .

1ΟΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ (ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ)

Βασικές έννοιες

Εισάγουμε τον συμβολισμό αθροισμάτων στην μορφή $\sum_{i=1}^{\nu} x_i$.

Ο παραπάνω συμβολισμός σημαίνει το άθροισμα των τιμών x_i από i=1 έως i=ν επομένως : $\sum_{i=1}^{\nu} x_i = x_1+x_2+.....x_\nu$.

Το Σ γενικά στα μαθηματικά συμβολίζει άθροισμα και το i στο σύμβολο x_i ονομάζεται δείκτης , τη μικρότερη τιμή του οποίου βάζουμε στο κάτω μέρος του Σ , ενώ τη μεγαλύτερη στο πάνω μέρος του Σ . Κάποιες φορές χάριν συντομίας το $\sum_{i=1}^{\nu} x_i$ θα το γράφουμε και $\sum x_i$ εφόσον βέβαια δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης για τον δείκτη

Παραδείγματα αθροισμάτων :

$\sum_{i=1}^{3} x_i = x_1+x_2+x_3$. $\sum_{i=1}^{2} (x_i - 1)^3 = (x_1-1)^3+(x_2-1)^3$.

Επιπλέον κάποιες πράξεις στα αθροίσματα είναι :

α) $\sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_i \pm \beta_i) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \pm \sum_{i=1}^{\nu} \beta_i$

β) $\sum_{i=1}^{\nu} (\lambda \alpha_i) = \lambda \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i$

γ) $\sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_i \pm \lambda) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \pm \nu.\lambda$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

Η μέση τιμή η οποία αναφέρεται στις ποσοτικές μεταβλητές θα συμβολίζεται με $\bar{x}$ και για τον υπολογισμό της διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

Α) ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ (1Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ)

Αν έχουμε δείγμα μεγέθους ν και τιμές t_1 , t_2 , ...,t_ν μιας μεταβλητής X τότε η μέση τιμή θα δίνεται από το τύπο :

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + ... + t_\nu}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} \ .$$

Παράδειγμα 15ο : Για παράδειγμα ένας μαθητής έχει πάρει σε 10 μαθήματα στο πρώτο τετράμηνο τους βαθμούς : 10 , 12 , 12 , 14 , 16 , 16 , 16 , 18 , 18 , 20. Βρείτε την μέση τιμή.

Λύση

Ο μέσος όρος (μέση τιμή) της βαθμολογίας του είναι : $\bar{x} = \frac{10+12+.....+20}{10} = \frac{152}{10}$

=15,2 .

Β) ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ (2Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ)

Αν έχουμε δείγμα μεγέθους ν και με τιμές x_1 , x_2 , ...,$x_κ$ (με κ<ν) μιας μεταβλητής X . Αν οι συχνότητες είναι αντίστοιχα $x_1 \to ν_1$, $x_2 \to ν_2$, ...$x_κ \to ν_κ$ τότε η μέση τιμή θα δίνεται και από τον τύπο :

$$\bar{x} = \frac{x_1ν_1 + x_2ν_2 + ... + x_κν_κ}{ν_1 + ν_2 + ... + ν_κ} = \frac{\sum_{i=1}^{κ} x_i ν_i}{ν} \quad \text{ή} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{κ} x_i ν_i}{ν} = \sum_{i=1}^{κ} \frac{x_i ν_i}{ν} = \sum_{i=1}^{κ} \frac{x_i}{ν} ν_i = \sum_{i=1}^{κ} f_i ν_i$$

Παράδειγμα 16ο : Ένας μαθητής πήρε τους παρακάτω βαθμούς:

13 ,13, 14, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 17. Να υπολογίσετε την μέση τιμή των βαθμών του. (Μέσο όρο το λέμε συνήθως)

Λύση

Για διευκόλυνση κατασκευάζουμε τον πίνακα:

x_i	$ν_i$	$x_i \cdot ν_i$
13	2	26
14	1	14
15	3	45
16	3	48
17	1	17
Σύνολα	ν=10	$\sum_{i=1}^{5} x_i ν_i = 150$

Άρα $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i ν_i}{ν} = \frac{150}{10}$ =**15**.

Παράδειγμα 17ο : Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, αν γνωρίζετε ότι $\bar{x} = 2,4$.

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$
1		
2		30
3		
4		20
Σύνολο	ν=50	

Λύση

Προφανώς ν_2=15 και ν_4=5. Θέτουμε ν_1=x και ν_3=y οπότε ο πίνακας γίνεται:

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$
1	x	x
2	15	30
3	y	3y
4	5	20
Σύνολο	ν=50	

Πρέπει: x+15+y+5=50 (1) και $\frac{x+30+3y+20}{50} = 2,4$ (2)

και λύνουμε το σύστημα των (1) και (2)...

Γ) ΣΥΝΕΧΗΣ ΠΟΣΟΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΙΣΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ

Για να βρούμε τη μέση τιμή θα χρησιμοποιούμε τον τύπο :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i}{\nu}$$

(όπου x_i η κεντρική τιμή της κάθε κλάσης και ν_i η συχνότητά της)

Παράδειγμα 18ο : Σε ένα test με άριστα το 10 , οι 40 μαθητές μιας τάξης πήραν τις παρακάτω βαθμολογίες :

0	3	4	4	7	1	2	5	3	0
6	5	6	2	7	7	5	8	2	4
1	2	4	7	6	1	3	9	6	1
3	4	6	7	9	5	6	9	7	5

Βρείτε την μέση τιμή της βαθμολογίας των μαθητών.

Λύση

Έχουμε τον παρακάτω πίνακα :

Βαθμός	ν_i	Κεντρική τιμή (x_i)	$x_i\nu_i$
0-2	6	1	6
2-4	8	3	24
4-6	10	5	50
6-8	12	7	84
8-10	4	9	36
Σύνολο	40		200

Επομένως $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \nu_i}{\nu} = \frac{200}{40} = 5$.

Αν προσπαθούσαμε να βρούμε την μέση τιμή με τον γενικό τύπο από την 2η περίπτωση θα είχαμε :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i \nu_i}{\nu} = \frac{0\cdot 2 + 1\cdot 4 + 2\cdot 4 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5 + 5\cdot 5 + 6\cdot 6 + 7\cdot 6 + 8\cdot 1 + 9\cdot 3}{40} = \frac{182}{40} = 4{,}55 \ .$$

Παρατηρούμε ότι βρίσκουμε δύο διαφορετικές τιμές . Πού όμως μπορεί να οφείλετε αυτό ; Η απάντηση βρίσκεται στο ότι στην ομαδοποίηση υποθέσαμε ότι οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα στις κλάσεις και ότι οι τιμές της μεταβλητής σε κάθε κλάση αντιπροσωπεύονται από την αντίστοιχη κεντρική τιμή . Με την ομαδο-

ποίηση λοιπόν χάνουμε πληροφορίες για τις αρχικές τιμές μιας μεταβλητής , χάνοντας ταυτόχρονα σε ακρίβεια , έχουμε όμως ευκολότερους υπολογισμούς και κερδίζουμε σε χρόνο .

ΣΤΑΘΜΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ

Όταν δίνεται διαφορετική βαρύτητα στις τιμές ενός συνόλου δεδομένων , τότε αντί του αριθμητικού μέσου (μέση τιμή) χρησιμοποιούμε τον **σταθμικό μέσο** . Αν λοιπόν οι τιμές x_1 , x_2.....x_ν έχουν αντίστοιχα βαρύτητες w_1 , w_2 , ...w_ν τότε ο σταθμικός μέσος θα υπολογίζεται από τον τύπο :

$$\bar{x} = \frac{x_1w_1 + x_2w_2 + \ldots + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + \ldots + w_\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{\nu} w_i}$$

Αν για παράδειγμα το απολυτήριο έχει συντελεστή 7.5 , ο βαθμός του test 1 , το α' βασικό μάθημα 1 , και το δεύτερο βασικό μάθημα 0.5 και οι βαθμοί που έχει επιτύχει κάποιος μαθητής Λυκείου είναι αντίστοιχα 14 , 15 , 18, 20 ο σταθμικός μέσος θα είναι : $\bar{x} = \frac{14.7{,}5 + 15.1 + 18.1 + 20.0{,}5}{7{,}5 + 1 + 1 + 0{,}5} = \frac{148}{10} = 14{,}8$.

Παράδειγμα 19ο : Οι βαθμοί ενός μαθητή σε πέντε μαθήματα είναι x_1=12, x_2=10, x_3=16, x_4=18, x_5=14 με συντελεστές στάθμισης w_1=2, w_2=3, w_3=1, w_4=1, w_5=3 αντίστοιχα. Να βρείτε την μέση επίδοση.

Έχουμε: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{4} w_i} = \frac{12\cdot 2 + 10\cdot 3 + 16\cdot 1 + 18\cdot 1 + 14\cdot 3}{2 + 3 + 1 + 1 + 3} = \mathbf{13}$.

Παράδειγμα 20ο : Δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

α)Να υπολογίσετε την μέση τιμή όλων των παρατηρήσεων.

β)Να υπολογίσετε την μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 80.

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	f_i
[50,60)	55	0,1
[60,70)	65	0,3
[70,80)	75	0,2
[80,90)	85	0,4
Σύνολα		1

Λύση

α) Έχουμε $\bar{x}=\sum_{1}^{4} x_i f_i$ =55·0,1+65·0,3+75·0,2+85·0,4=**74**

(Υπόψη: Οι σχετικές συχνότητες όχι σε ποσοστά, αλλά $f_1+f_2+f_3+f_4=1$)

β) Επειδή παίρνουμε μέρος του πληθυσμού η μέση τιμή θα υπολογιστεί με τον τύπο του σταθμικού μέσου, αφού οι κλάσεις δεν έχουν το ίδιο πλήθος.

$$\text{Άρα } \bar{x}=\frac{\sum_{1}^{3} x_i f_i}{\sum_{1}^{3} w_i}=\frac{55\cdot 0,1+65\cdot 0,3+75\cdot 0,2}{0,1+0,2+0,3}=\frac{200}{3}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Αν όλες οι τιμές μιας μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν είναι ίσες με μια σταθερά ποσότητα c τότε $\bar{x}=c$, διότι $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu}=\frac{c+c+....+c}{\nu}=\frac{\nu c}{\nu}=c$

2) Αν προσθέσουμε στις τιμές μιας μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν μια σταθερή ποσότητα c , τότε η μέση τιμή $\bar{x}$ των τιμών της μεταβλητής αυξάνεται κατά τη σταθερή ποσότητα c , διότι αν $\psi_i=x_i+c$, με i=1...ν

$$\bar{\psi}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}\psi_i}{\nu}=\frac{(x_1+c)+(x_2+c)+...+(x_\nu+c)}{\nu}=\frac{(x_1+....+x_\nu)+\nu c}{\nu}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu}+c=\bar{x}+c\ .$$

Συμβολικά θα μπορούσαμε ακόμη να γράφουμε $\overline{x+c}=\bar{x}+c$. Αντίστοιχα συμπεράσματα έχουμε και όταν αντί για πρόσθεση του c κάνουμε αφαίρεση . Επομένως $\overline{x-c}=\bar{x}-c$

Για παράδειγμα εάν η μέση τιμή των μισθών 20 υπαλλήλων μιας εταιρείας είναι 630 ευρώ και δώσω αύξηση 15 ευρώ τότε η νέα μέση τιμή θα είναι 645 ευρώ.

3) Αν απ' όλες τις τιμές x_i μιας μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους να αφαιρέσουμε τη μέση τιμή τους $\bar{x}$, τότε το άθροισμα των διαφορών είναι ίσο με το μηδέν , επομένως $\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})=0$.

Αυτό διότι : $\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})=(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+....+(x_\nu-\bar{x})=(x_1+....x_\nu)-\nu\bar{x}=(\nu\bar{x})-\nu\bar{x}=0$.

(Χρησιμοποιήθηκε η σχέση : $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i}{\nu} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\nu}x_i=\nu\bar{x}$) .

4) Αν πολλαπλασιάσουμε όλες τις τιμές x_i μιας μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν με έναν μη μηδενικό πραγματικό αριθμό c , τότε η μέση τιμή $\bar{x}$ των τιμών της μεταβλητής Χ πολλαπλασιάζεται με το c .
Επομένως αν $\psi_i=x_i.c$ με i=1,....,ν τότε :

$$\bar{\psi}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}\psi_i}{\nu}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_ic}{\nu}=\frac{x_1c+x_2c+\ldots+x_\nu c}{\nu}=\frac{c(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)}{\nu}=\frac{c\sum_{i=1}^{\nu}x_i}{\nu}=c\bar{x} .$$

ΔΙΑΜΕΣΟΣ

Όταν έχουμε ένα δείγμα ν παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ως **διάμεσο** (δ) ορίζουμε την μεσαία παρατήρηση , όταν το ν είναι περιττός αριθμός και ως το ημιάθροισμα (ο μέσος όρος) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων , όταν το ν είναι άρτιος αριθμός .

Για τον υπολογισμό της διαμέσου η οποία αναφέρεται σε ποσοτικές μεταβλητές διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις :

Α) ΠΕΡΙΤΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Έστω ότι έχουμε τις παρατηρήσεις : 9,10,10,11,12,13,14 . Τότε η διάμεσος είναι δ=11 (από τις 7 παρατηρήσεις η μεσαία είναι η 4η) .

Β)ΑΡΤΙΟ ΠΛΗΘΟΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ ΔΙΑΚΡΙΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Έστω ότι έχουμε τις παρατηρήσεις : 10,11,12,12,12,13,14,14 . Τότε η διάμεσος είναι $\delta=\frac{12+12}{2}=12$ (το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων δηλαδή της 4ης και της 5ης) .

Σημείωση

Από τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι η διάμεσος δ ενός δείγματος ν παρατηρήσεων ορίζεται ως η τιμή εκείνη για την οποία το πολύ το 50% των παρατηρήσεων (άρα οι μισές) είναι μικρότερες απ' αυτήν και το πολύ το 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες απ' αυτήν .

Γ)ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ -ΚΛΑΣΕΙΣ ΙΣΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ

Όταν έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα , **βρίσκουμε τη διάμεσο γραφικά** από το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων (%) . Αρχικά εντοπίζουμε στον κατακόρυφο άξονα το σημείο που αντιστοιχεί στο 50% (των παρατηρήσεων του δείγματος) και στη συνέχεια φέρνουμε από αυτό παράλληλη στον οριζόντιο άξονα , μέχρι να τμήσει το πολύγωνο . Από εκεί φέρνουμε παράλληλη στον κατακόρυφο άξονα μέχρι του που θα τμήσει τον οριζόντιο άξονα . Το σημείο αυτό αντιστοιχεί στην τιμή της διαμέσου .

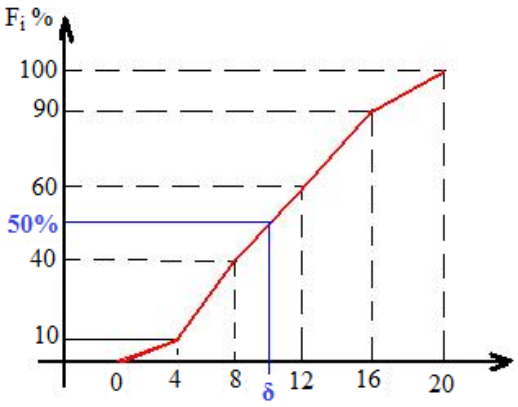
Παράδειγμα 21ο : Οι θερμοκρασίες μιας πόλης τον Απρίλιο φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Να βρείτε την διάμεσο.

Θερμοκρασίες	ν_i
13	7
14	8
15	5
17	7
20	3

Λύση

Θα πρέπει να τοποθετήσουμε όλες τις θερμοκρασίες σε αύξουσα σειρά. Δηλαδή: 13, 13, 13,...,20, 20
Μάλλον...μπελάς είναι. Σκεφτόμαστε ως εξής:
Οι μέρες του πίνακα είναι 30. Επομένως υπάρχουν δύο "μεσαίες" παρατηρήσεις, οι $x_{15}=14$ και $x_{16}=15$. Άρα η διάμεσος είναι $\delta=\frac{14+15}{2}=$**14,5**.

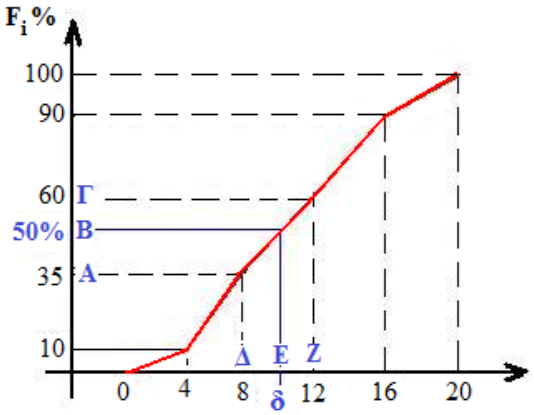
Παράδειγμα 22ο : Να βρείτε την διάμεσο από το παρακάτω ιστόγραμμα των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.



Στον κατακόρυφο άξονα αναζητούμε το 50%. Βρίσκεται στο μέσον του διαστήματος 40–60. Η διάμεσος θα είναι το μέσον του διαστήματος
8–10, δηλαδή **δ=10**.

(Δείτε το θεώρημα του Θαλή στη σελίδα **Γεωμετρία Β' Λυκείου**).

Παράδειγμα 23ο : Να βρείτε την διάμεσο από το παρακάτω ιστόγραμμα των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, όπου το 50% δεν βρίσκεται στο μέσον διαστήματος.

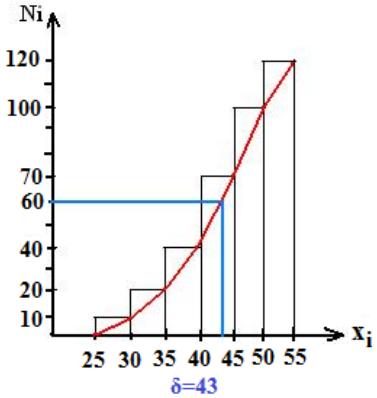


Θα εφαρμόζουμε το θεώρημα του Θαλή.

Έχουμε: $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{\Delta E}{\Delta Z}$. Αντικαθιστούμε τα δεδομένα και βρίσκουμε: $\frac{15}{25}=\frac{\Delta E}{4}$, άρα ΔΕ=2,4 και επομένως δ=8+2,4=**10,4**.

Παράδειγμα 24ο : Να βρείτε την διάμεσο της κατανομής που βλέπετε στον πίνακα

Κλάσεις	v_i	N_i
[25,30)	10	10
[30,35)	10	20
[35,40)	20	40
[40,45)	30	70
[45,50)	30	100
[50,55)	20	120
Άθροισμα	120	



Κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα της κατανομής Νi.
Βρίσκουμε στον κατακόρυφο άξονα το μισό του ν. (Εδώ είναι το 60).
Φέρουμε οριζόντια ευθεία και εκεί που συναντάει το πολύγωνο των Νi φέρουμε κατακόρυφη που τέμνει τον άξονα x_i στο δ...

Παράδειγμα 25ο : Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας επιχείρησης σε € είναι : 580, 580, 580, 600, 622, 630, 600, 1100, 700, 1000, 620. Να βρείτε:

α. Την μέση τιμή.

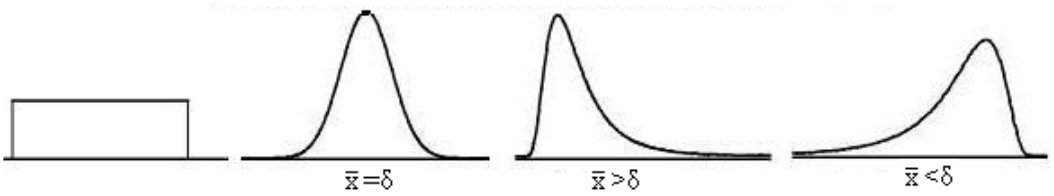
β. Την διάμεσο. Ποιο μέτρο θέσης είναι δικαιότερο;

Λύση

α. Η μέση τιμή είναι 692€.
β. Η διάμεσος είναι 620€. (αφού διατάξουμε σε αύξουσα σειρά τους μισθούς).
Η μέση τιμή αυξάνεται υπερβολικά από τις αποδοχές των δύο... golden boys που είναι διπλάσιες σχεδόν.

Σημείωση

Στην κανονική κατανομή (δείτε παρακάτω) **η διάμεσος συμπίπτει με τη μέση τιμή**. (ερώτηση 2, σελ. 131, σχολικού βιβλίου).



Ομοιόμορφη | Κανονική | Ασύμμετρη με θετική ασυμμετρία (*) | Ασύμμετρη με αρνητική ασυμμετρία

Να θυμάστε ότι η μέση τιμή "**παρασύρεται**" από τις ακραίες τιμές. Δείτε το παράδειγμα που ακολουθεί:

π.χ. Οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 5 έχουν $\bar{x}=3$ και δ=3. Άρα $\bar{x}=\delta$.
π.χ. Οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 10 έχουν $\bar{x}=4$ και πάλι δ=3. Αλλά $\bar{x}>\delta$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ 1 ΑΠΟ 2

1) Να βρείτε την μέση τιμή και τη διάμεσο στα παρακάτω δείγματα:

Α. 3, 2, 7, 10, 6, 7, 3, 1, 9

Β. 3, 2, 7, 10, 6, 7, 3, 1, 9, 8

Γ. 5, 3, 6, 3, 4, 3, 6, 2

Δ. 12, 12, 9, 15, 12, 16, 17, 7, 19, 18, 17

Ε.

x_i	ν_i
0	7
1	23
2	12
3	2
4	6

ΣΤ.

x_i	ν_i
10	5
11	15
12	6
13	14

Ζ.

x_i	ν_i
3	6
4	7
5	7
6	2
7	3

Η.

x_i	ν_i
2	7
5	8
7	2
9	3
10	5

Θ.

x_i	ν_i
0	3
1	5
2	8
3	3
4	1

Ι.

x_i	ν_i
11	12
12	13
13	8
14	4
15	13

2) Να συμπληρώσετε τον πίνακα και να βρείτε τη μέση τιμή.

x_i	ν_i	$f_i\%$	$\nu_i x_i$
1		15	
2		20	
3			90
4	60		
5			
Σύνολο	200		

3) Ένα δείγμα εργαζομένων μιας εταιρείας εξετάστηκε ως προς το χρόνο (σε ώρες) υπερωριακής απασχόλησης κατά τη διάρκεια ενός μηνός και προέκυψε ο παρακάτω πίνακας.

Ώρες υπερωριακής απασχόλησης Κλάσεις [-)	**Συχνότητα ν_i**
0 – 2	5
2 – 4	10
4 – 6	5
6 – 8	15
8 – 10	5

Α. Να βρείτε την μέση τιμή.
Β. Να βρείτε τη διάμεσο.

4) Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει τις ώρες χρήσης των κινητών τηλεφώνων 50 υπαλλήλων μιας εταιρείας για ένα μήνα:

Ώρες	Συχνότητα ν_i
[0 – 2)	5
[2 – 4)	10
[4 – 6)	20
[6 – 8)	10
[8 -10)	5
Αθροίσματα	

Α. Να βρείτε την μέση τιμή.
Β. Να βρείτε τη διάμεσο.

5) Να βρείτε την μέση τιμή και τη διάμεσο στα παρακάτω δείγματα.

Α.

Κλάσεις [-)	Συχνότητα ν_i
0 – 10	10
10 – 20	15
20 – 30	20
30 – 40	5

Β.

Ώρες	Συχνότητα ν_i
[2 – 4)	3
[4 – 6)	6
[6 – 8)	8
[8 – 10)	5
[10 -12)	3

6) Για τον έλεγχο της κατανάλωσης καυσίμου (ίδιου τύπου) δυο αυτοκινήτων Α και Β μετρήθηκε η κατανάλωσή τους σε έξι διαδρομές για το Α και σε πέντε διαδρομές για το Β. Η κατανάλωση στις έξι διαδρομές (σε λίτρα ανά 100 χιλιόμετρα) για το αυτοκίνητο Α ήταν

9, 6, 7, 9, 9, 8

ενώ η κατανάλωση στις πέντε διαδρομές για το αυτοκίνητο Β ήταν

8, 10, 7, 8, 12.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μετρήσεων που αφορούν το αυτοκίνητο Α.

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μετρήσεων που αφορούν το αυτοκίνητο Β.

γ) Αν ένας πωλητής ήθελε να χρησιμοποιήσει τα πιο πάνω δεδομένα για να πείσει έναν υποψήφιο αγοραστή να αγοράσει το αυτοκίνητο Α και όχι το Β, ποιο μέτρο θέσης (μέση τιμή ή διάμεσο) θα χρησιμοποιούσε; Αν αντίστροφα ήθελε να πείσει τον υποψήφιο αγοραστή να αγοράσει το αυτοκίνητο Β και όχι το Α, ποιο μέτρο θέσης (μέση τιμή ή διάμεσο) θα χρησιμοποιούσε;

7) Οι μεσημβρινές θερμοκρασίες τον Ιούνιο σε έναν τόπο ήταν:

16	15	15	16	14	18	19	16	18	18
16	17	20	18	18	21	17	14	16	18
18	12	15	13	11	14	17	12	12	15

α. Να κάνετε τον πίνακα συχνοτήτων.

β. Να βρείτε:

i. την διάμεσο. ii. τη μέση τιμή.

8) Οι ημέρες που έλειψαν οι εργαζόμενοι μιας εταιρείας τον χειμώνα είναι:

1	3	4	2	2	4	3	1	3	3
4	1	2	3	2	3	4	4	1	4
2	3	4	2	3					

α. Να κάνετε τον πίνακα συχνοτήτων.

β. Να βρείτε:

i. την διάμεσο. ii. τη μέση τιμή.

9) Κατά την αρχή της σχολικής χρονιάς οι 50 μαθητές της τρίτης τάξης ενός Λυκείου ρωτήθηκαν σχετικά με τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν την περίοδο των θερινών διακοπών. Σύμφωνα με τις απαντήσεις που δόθηκαν, συντάχθηκε ο παρακάτω πίνακας:

Αριθμός Βιβλίων x_i	Αριθμός Μαθητών ν_i
0	α+4
1	5α+8
2	4α
3	α-1
4	2α
Σύνολο	50

α. Να αποδείξετε ότι α = 3.

β. Να βρείτε τη μέση τιμή του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.

γ. Να βρείτε τη διάμεσο του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.

10) Σε ένα δείγμα 5 παρατηρήσεων με μέση τιμή $\bar{x}$ = 11, οι τέσσερις παρατηρήσεις είναι οι 8, 12, 14 και 11.Να αποδείξετε ότι η παρατήρηση που λείπει είναι ο αριθμός 10.

11) Δίνονται οι παρατηρήσεις 2, 6, 7, 3, 7, x με μέση τιμή 6

α. Να αποδείξετε ότι x = 11.

β. Να βρείτε την διάμεσο του δείγματος.

12) Μια μεταβλητή παίρνει τις τιμές :

5, 3, 3ω, 3, 2ω, 3, 3ω, ω με ω>0

Αν η μέση τιμή τους είναι $\bar{x}$ = 4, να αποδείξετε ότι ω=2.

13) Μια μεταβλητή παίρνει τις τιμές :

5κ + 1, 3, 2κ, 4, 2κ – 4, 3, 2κ, κ, 2

Αν η μέση τιμή τους είναι $\bar{x}$ = 5, να αποδείξετε ότι κ = 3.

14) Οι βαθμοί 10 μαθητών σε ένα διαγώνισμα μαθηματικών είναι:

10 15 7 20 8 13 9 16 x y

Αν η μέση βαθμολογία στο διαγώνισμα είναι 12 και επιπλέον ισχύει η σχέση $x = y - 6$, να υπολογίσετε:

α) τους βαθμούς x και y

β) τη διάμεσο.

15) Η μέση τιμή 6 διαδοχικών άρτιων αριθμών είναι 9. Να βρείτε:

α) τους αριθμούς αυτούς

β) τη διάμεσο των αριθμών αυτών

16) Η μέση τιμή 6 διαδοχικών άρτιων αριθμών είναι 15. Να βρείτε:

α) τους αριθμούς αυτούς

β) τη διάμεσο των αριθμών αυτών

17) Η μέση τιμή έξι αριθμών είναι ίση με 7. Οι τέσσερις από αυτούς είναι 7, 10, 3, 12 και από τους δύο αριθμούς που λείπουν, ο ένας είναι τετραπλάσιος του άλλου. Να βρείτε τους δύο αριθμούς που λείπουν.

18) Η μέση τιμή επτά αριθμών είναι ίση με 8. Οι τέσσερις από αυτούς είναι 4, 12, 7, 10, 5 και από τους δύο αριθμούς που λείπουν, ο ένας είναι πενταπλάσιος του άλλου. Να βρείτε τους δύο αριθμούς που λείπουν.

19) Οι αριθμοί α, $\alpha^2 + 4$, α^2, $2\alpha + 1$, $\alpha - 1$ έχουν μέση τιμή ίση με 4, να βρείτε το α.

20) Οι αριθμοί α, $\kappa^2 + 4$, 3κ, $2\kappa + 12$, $\kappa + 1$ έχουν μέση τιμή ίση με 3, να βρείτε το α.

21) Η μέση τιμή και η διάμεσος πέντε αριθμών είναι 6. Οι τρεις από αυτούς είναι οι 5, 8, 9. Να βρείτε τους άλλους δύο.

22) Η μέση τιμή και η διάμεσος επτά αριθμών είναι 7. Οι τρεις από αυτούς είναι οι 8, 6, 10, 3, 2. Να βρείτε τους άλλους δύο.

23) Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής Χ με τις αντίστοιχες συχνότητες τους.

x_i	ν_i
2	1
3	3
4	1
5	2
6	;
7	1

Η πέμπτη συχνότητα χάθηκε! Μπορείτε να την βρείτε αν ξέρετε ότι:

α) η μέση τιμή είναι 4,4

β) η διάμεσος είναι 4,5

24) Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής Χ με τις αντίστοιχες συχνότητες τους.

x_i	ν_i
4	9
5	;
6	3
7	2
8	4

Η δεύτερη συχνότητα χάθηκε! Μπορείτε να την βρείτε αν ξέρετε ότι:

α) η μέση τιμή είναι 5,5

β) η διάμεσος είναι 5,5

25) Το παρακάτω δείγμα μαθητών έχει μέσο όρο απουσιών $\bar{x} = 4$ απουσίες σε διάστημα μιας εβδομάδας.

Απουσίες x_i	Μαθητές ν_i	$x_i\nu_i$
2	2α+2	
4	6-α	
5	α+2	
6	3α-2	
Σύνολο		

α. Να δείξετε ότι α = 2.

β. Τη διάμεσο του δείγματος.

26) Ο επόμενος πίνακας παρουσιάζει τα χρόνια υπηρεσίας ενός δείγματος εργαζομένων σε μια εταιρεία.

Χρόνια υπηρεσίας x_i	[0 –10)	[10 –20)	[20 –30)	[30 –40)
Εργαζόμενοι ν_i	10	α	20	5

Αν ο μέσος χρόνος υπηρεσίας των εργαζομένων του δείγματος είναι $\bar{x} = 19$,να αποδείξετε ότι α = 15.

27) Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής Χ με τις αντίστοιχες συχνότητες τους.

x_i	ν_i
10	α
12	5
15	β
Σύνολο	25

Αν η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 12,8$ να βρείτε τα α, β.

28) Α. Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή είναι το άθροισματων γινομένων των τιμών μιας μεταβλητής επί τις αντίστοιχες σχετικές συχνοτητες.

Δηλαδή $\bar{x} = x_1f_1 + x_2f_2 + \ \ldots \ + x_κf_κ$

Β. Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο στο παρακάτω παράδειγμα.

x_i	f_i%
0	20
2	30
3	35
5	15

29) Το μέσο ύψος των 30 μαθητών και μαθητριών μιας τάξης είναι 170 cm. Ποιο θα είναι το μέσο ύψος της τάξης

α) αν φύγει ένας μαθητής με ύψος 180 cm

β) αν έρθει μια νέα μαθήτρια με ύψος 180 cm

γ) αν φύγει ένας μαθητής με ύψος 180 cm και έρθει μια μαθήτρια με ύ

ψος 170 cm

δ) έρθουν δύο μαθητές με ύψος 178 cm και φύγουν τρεις με ύψος 172

cm

30) Το μέσο βάρος των 30 μαθητών και μαθητριών μιας τάξης είναι 62 kg. Ποιο θα είναι το μέσο βάρος της τάξης

α) αν φύγει ένας μαθητής με βάρος 66 kg

β) αν έρθει μια νέα μαθήτρια με βάρος 64 kg

γ) αν φύγει ένας μαθητής με βάρος 60 kg και έρθει μια μαθήτρια με βάρος 70 kg

δ) έρθουν τρεις μαθητές με βάρος 78 kg και φύγουν δύο με βάρος 72 kg

31) Η μέση τιμή 40 παρατηρήσεων είναι 20. Αν από αυτές οι 7 μειώνονται κατά 2 και οι 9 αυξάνονται κατά 6, να βρεθεί η νέα μέση τιμή.

32) Το μέσο βάρος 20 μαθητών είναι 68 kg. Αν προστεθεί ακόμα ένας μαθητής, το μέσο βάρος όλων των μαθητών γίνεται 67 kg. Να βρείτε το βάρος του μαθητή.

33) Το μέσο ύψος 9 καλαθοσφαιριστών μιας ομάδας είναι 205 cm.

α) Για να ψηλώσει την ομάδα ο προπονητής πήρε έναν ακόμη παίκτη με ύψος 216 cm. Ποιο είναι το μέσο ύψος της ομάδα τώρα;

β) Έαν ήθελε να ψηλώσει την ομάδα στα 208 cm, πόσο ύψος έπρεπε να έχει ο καλαθοσφαιριστής που πήρε;

34) Η μέση τιμή του ύψους 5 μαθητών της Γ΄ γυμνασίου ενός σχολείου είναι 168,3 cm, ενώ 10 άλλοι μαθητές της ίδιας τάξης έχουν μέση τιμή του ύψους 171,3 cm. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του ύψους όλων των μαθητών.

35) Το μέσο ύψος των 80 κατοίκων ενός νησιού είναι 172 cm. Στις καλοκαιρινές διακοπές φθάνουν στο νησί 60 τουρίστες με μέσο ύψος 187 cm. Πιο είναι το μέσο ύψος των ατόμων που βρίσκονται στο νησί στις καλοκαιρινές διακοπές;

2ΟΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ (ΜΕΤΡΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ)

Τα **μέτρα διασποράς** ή **μεταβλητότητας** εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μιας μεταβλητής γύρω από τα μέτρα κεντρικής τιμής . Τα σπουδαιότερα απ' αυτά είναι : το εύρος , το ενδοτεταρτημοριακό εύρος , η διακύμανση και η τυπική απόκλιση .

ΕΥΡΟΣ

Το **εύρος** (R) ενός συνόλου ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης από τη μέγιστη παρατήρηση . Επομένως :

R=μέγιστη παρατήρηση - ελάχιστη παρατήρηση

Όταν τα δεδομένα είναι ομαδοποιημένα , τότε το εύρος δίνεται από τη σχέση : R=ανώτερο όριο τελευταίας κλάσης-κατώτερο όριο πρώτης κλάσης .

ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ

Ένα από τα σημαντικότερα μέτρα διασποράς είναι η **διακύμανση** (s^2) που υπολογίζεται ως εξής :

α)Αν έχουμε διακριτή μεταβλητή, οι παρατηρήσεις έχουν τις τιμές t_1 , t_2 , ...,t_ν και η μέση τιμή τους είναι $\bar{x}$, τότε:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2}{\nu} \quad \text{ή} \quad s^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{\nu} t_i)^2}{\nu}\right]$$ (ο 2ος τύπος θα δίνεται)

Σημείωση

Την πρώτη μορφή του τύπου χρησιμοποιούμε όταν έχουμε λίγες παρατηρήσεις Την δεύτερη (που προκύπτει εκτελώντας τις πράξεις) όταν έχουμε πολλές παρατηρήσεις ή όταν δεν θέλουμε στους υπολογισμούς να χρησιμοποιήσουμε το $\bar{x}$, διότι για παράδειγμα είναι δεκαδικός αριθμός και θα έχουμε δύσκολες πράξεις .

β) Αν οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X έχουν τιμές x_1 , x_2 , ...,x_κ και εμφανίζονται με συχνότητες ν_1 , ν_2 , ...,ν_κ αντίστοιχα , τότε για τον υπολογισμό της διακύμανσης χρησιμοποιούμε τον τύπο :

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i - \bar{x})^2.\nu_i}{\nu} \quad \text{ή} \quad s^2 = \frac{1}{\nu}[\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2.\nu_i - \frac{(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i.\nu_i)^2}{\nu}] \text{ (ο } 2^{\text{ος}} \text{ τύπος θα δίνεται)}$$

γ)Όταν έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα (κλάσεις) τότε για να υπολογίσουμε τη διακύμανση χρησιμοποιούμε τον ίδιο τύπο με την περίπτωση (β) μονο **που για x_i βαζουμε την κεντρική τιμή της αντίστοιχης κλάσης**

Παράδειγμα 26ο : Δύο μαθητές Α και Β πήραν τους εξής βαθμούς:

Α: 13 ,13, 14, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 17

Β: 11, 13, 13, 13, 14, 16, 17, 17, 17, 19. Να σχολιάσετε την επίδοση των παραπάνω μαθητών.

Λύση

Αν πινακοποιήσουμε τα δεδομένα, οι πράξεις γίνονται πιο εύκολα.

Μαθητής Α

x_i	ν_i	$x_i \cdot \nu_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$\nu_i(x_i - \bar{x})^2$
13	2	26	–2	4	8
14	1	14	–1	1	1
15	3	45	0	0	0
16	3	48	1	1	3
17	1	17	2	4	4
Σύνολα		150			16

Μέση τιμή: $\bar{x} = \frac{150}{10} = 15$. Διακύμανση $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} \nu_i (x_i - \bar{x})^2}{\nu} = \frac{16}{10} = 1{,}6$

Μαθητής Β

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$v_i(x_i - \bar{x})^2$
11	1	11	–4	16	16
13	3	39	–2	4	12
14	1	14	–1	1	1
16	1	16	1	1	1
17	3	51	2	4	12
19	1	19	4	16	16
Σύνολα		150			58

Μέση τιμή: $\bar{x} = \frac{150}{10} = \mathbf{15}$. Διακύμανση $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{6} v_i (x_i - \bar{x})^2}{v} = \frac{58}{10} = \mathbf{5,8}$

Παρατηρούμε ότι και οι δύο μαθητές είναι ισάξιοι αφού έχουν μέσο όρο **15**. Επειδή η διακύμανση του μαθητή Α είναι μικρότερη του Β συμπεραίνουμε ότι ο Α είναι πιο συγκροτημένος από τον Β. (Το 19 ο Β ίσως το πήρε στην...Γυμναστική!)

ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ

Επειδή στην διακύμανση ο τύπος περιέχει τετράγωνα το αποτέλεσμα θα υπολογίζεται σε τετραγωνικές μονάδες που δεν έχει νόημα . Αν για παράδειγμα οι παρατηρήσεις αναφέρονται στο βάρος (Kg) η διακύμανση θα υπολογίζεται σε Kg^2 . Έτσι για να έχουμε αντιστοιχία μονάδων παρατηρήσεων-διακύμανσης ορίζουμε ως **τυπική απόκλιση** την θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης δηλαδή

$$s = \sqrt{s^2}$$

Παράδειγμα 27ο : Να βρείτε την μέση τιμή την διάμεσο και την τυπική απόκλιση των πολλαπλασίων του 6 που περιέχονται μεταξύ 10 και 45.

Λύση

α. Τα πολλαπλάσια του 6 έχουν την μορφή 6λ με λ∈Ν. Πρέπει 6λ≥10 και 6λ'≤45, από όπου θα βρούμε λ=2 και λ'=7. Άρα οι αριθμοί που ζητάμε είναι: **12, 18, 24, 30, 36, 42.**

β. $\bar{x} = \frac{12+18+\ldots+42}{6} = \mathbf{27}$.

γ) Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο $\delta=\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{24+30}{2}=$**27**.

δ) $s^2=\frac{(12-27)^2+(18-27)^2+\ldots+(42-27)^2}{6}=\frac{15^2+9^2+3^2+15^2+9^2+3^2}{6}=105$.

άρα $s=\sqrt{105}=$**10,24** περίπου.

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

1) Όταν η καμπύλη συχνοτήτων έχει "κωδωνοειδή" μορφή τότε μιλάμε για κανονική κατανομή.

2) Στην περίπτωση της κανονικής κατανομής επιπλέον ισχύει $\bar{x}=\delta$

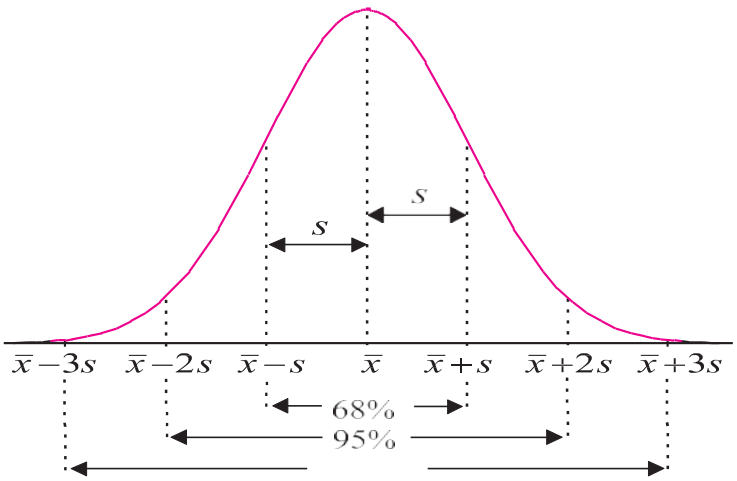
3) Στην κανονική κατανομή το εύρος είναι **R≈6s**.

4) Όταν σε άσκηση υπάρχει η έκφραση "**κανονική κατανομή**" αμέσως φτιάχνουμε τον άξονα της κανονικής κατανομής με την παρακάτω μορφή, γιατί έτσι κερδίζουμε χρόνο και πράξεις.

$\bar{x}-3s$		$\bar{x}-2s$		$\bar{x}-s$		$\bar{x}$		$\bar{x}+s$		$\bar{x}+2s$		$\bar{x}+3s$
0,15%	2,35%		13,5%		34%		34%		13,5%		2,35%	0,15%

Έχουμε δηλαδή :

- Το 68% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-s,\bar{x}+s)$.
- Το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-2s,\bar{x}+2s)$.
- Το 99,7% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-3s,\bar{x}+3s)$.



5) Όταν μας ζητούν "**το πολύ x_0**" αθροίζουμε τα ποσοστά στο διάστημα $(0, x_0]$.

6) Όταν μας ζητούν "**τουλάχιστον x_0**" αθροίζουμε τα ποσοστά στο διάστημα (x_0,∞).

7) Όταν μας ζητούν "**μεταξύ x_1 και x_2**" αθροίζουμε τα ποσοστά στο διάστημα (x_1,x_2).

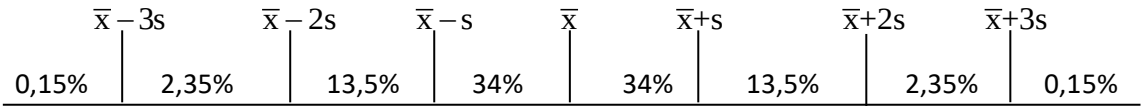
Παράδειγμα 28ο : Οι χρόνοι σε sec που χρειάστηκαν να τρέξουν 200 μαθητές σε μια απόσταση ακολουθούν την κανονική κατανομή. Αν 5 μαθητές έκαναν χρόνο **το πολύ** 26 sec και 32 μαθητές **τουλάχιστον** 32 sec, να βρείτε:

α) την μέση τιμή και τυπική απόκλιση.

β. πόσοι μαθητές έκαναν χρόνο από 28 sec μέχρι 34 sec.

Λύση

α)Εφόσον οι χρόνοι ακολουθούν την κανονική κατανομή...τσακιζόμαστε να φτιάξουμε τον άξονα του χρονου :

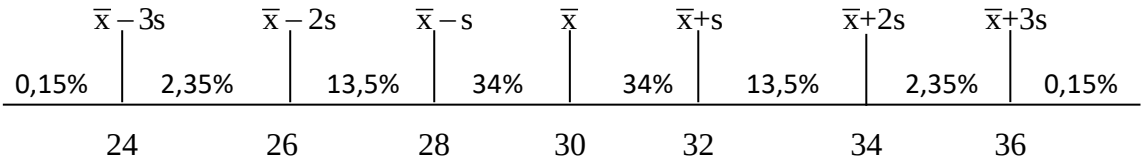


Οι 5 μαθητές τώρα στους 200 αποτελούν τα $\frac{5}{200}=0,025=2,5\%$ και επειδή έκαναν χρόνο το πολύ 26 sec, (δηλαδή από 26 και κάτω) θα έχουμε $\bar{x}-2s=26$ (1)

Αντιστοίχως οι 32 μαθητές αποτελούν τα $\frac{32}{200}=0,16=16\%$ και επειδή έκαναν χρόνο τουλάχιστον 32 sec, (δηλαδή από 32 και πάνω) έχουμε $\bar{x}+s=32$ (2)

Λύνοντας τώρα το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε $\bar{x}=$**30** και s=**2**.

β)Ο άξονάς μας τώρα έγινε ως εξής:



Στο διάστημα 28 έως 34 βρίσκεται το 34%+34%+13,5%=81,5% του 200.

Δηλαδή 81,5%·200=**163 μαθητές**.

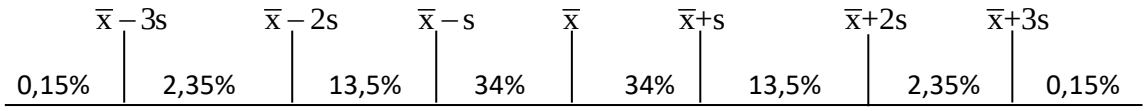
Παράδειγμα 29ο : Αν οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ ακολουθούν την κανονική κατανομή, ώστε για το 2,5% των τιμων είναι μικροτερες του 20 ενώ το 16% είναι μεγαλυτερες του 50

α. Να βρείτε τα $\bar{x}$, s, R.

β. Ποιο ποσοστό των παρατηρήσεων παίρνει τιμές στο (20,40);

Λύση

α)Εφόσον οι χρόνοι ακολουθούν την κανονική κατανομή φτιαχνουμε τον αξονα :



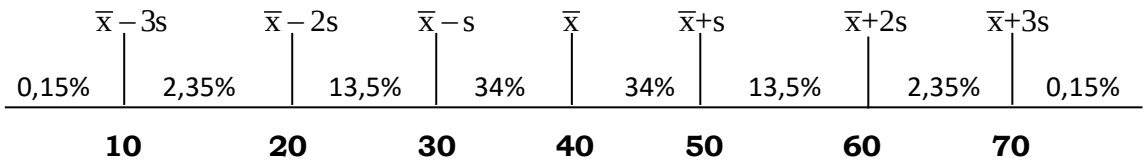
Τοποθετούμε τωρα αριστερα στον αξονα το 20 και εφοσον αυτό αποτελει το 2,5% θα ισχυει : $\bar{x}-2s=20$ (1).

Αντιστοιχως τοποθετουμε το 50 δεξιά στον αξονα και εφοσον από εκει και πανω είναι 16% θα ισχυει $\bar{x}+s=50$ (2)

Λύνοντας τώρα το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε $\bar{x}$ =**40** και s=**10**.

Τελος γνωρίζουμε ότι R≈6s, άρα R≈**60**.

β)Συμφωνα με τα παραπανω ο άξονας γίνεται:



Στο διάστημα (20,40) βρίσκεται το 13,5%+34%=**47,5%.**

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Ο συντελεστής μεταβολής (CV) ορίζεται από τη σχέση

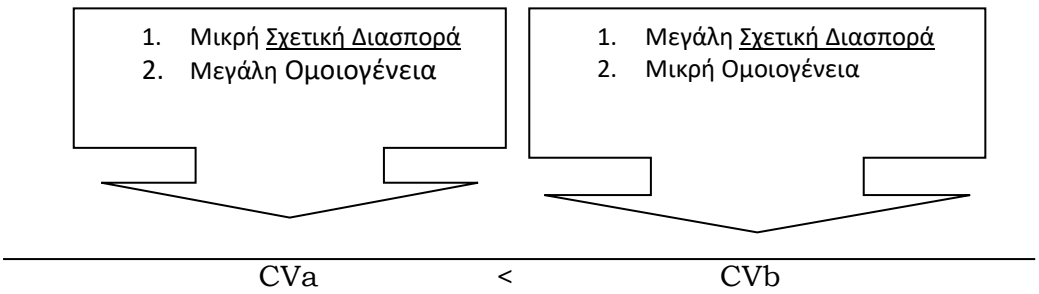
$$CV = \frac{s}{\bar{x}}$$

Είναι ένα μέτρο που μας βοηθάει στη σύγκριση ομάδων τιμών που εκφράζονται είτε με την ίδια είτε με διαφορετικές μονάδες μέτρησης και οι οποίες έχουν μέσες τιμές σημαντικά διαφορετικές . Ο συντελεστής μεταβολής αν κάνουμε τις πράξεις βγαίνει δεκαδικός αριθμός , αλλά θα τον μετατρέπουμε επί τοις εκατό , είναι **ανεξάρτητος** από μονάδες μέτρησης και είναι ένα μέτρο **σχετικής διασποράς** και όχι απόλυτης όπως τα προηγούμενα .

Επομένως ο συντελεστής μεταβολής εκφράζει τη μεταβλητότητα των δεδομένων α-παλλαγμένη από την επίδραση της μέσης τιμής .

ΣΧΟΛΙΑ

1. Αν ο συντελεστής μεταβολής δεν ξεπερνά το 10% το δείγμα μας θα λέγεται **ο-μοιογενές** , ενώ σε κάθε αντίθετη περίπτωση θα λέγεται **ανομοιογενής**

2. 

3. Συντελεστής μεταβολής εκφράζεται με ποσοστό.
4. Οι ποιοτικές κατανομές δεν έχουν συντελεστή μεταβολής.
5. Ο τύπος CV ισχύει και όταν η μέση τιμή είναι αρνητική.
6. Ο CV δεν έχει μονάδα μέτρησης (καθαρός αριθμός).
7. Δεν υπάρχει CV αν η μέση τιμή ισούται με το 0.

Παράδειγμα 30ο : Μετράμε το βάρος των μαθητών ενός Λυκείου και βρίσκουμε μέση τιμή π.χ. 60 Kg και τυπική απόκλιση 2 Kg.

Κάνουμε το ίδιο και σε έναν Παιδικό Σταθμό.

Βρίσκουμε μέση τιμή π.χ. 20 Kg και τυπική απόκλιση πάλι 2 Kg. Τα 2 Kg για τα...λεβεντόπαιδα του Λυκείου είναι αμελητέα ποσότητα, για τα νήπια όμως;;

Παράδειγμα 31ο : Λέγεται ότι στις Ηνωμένες Πολιτείες οι μισθοί έχουν μεγαλύτερη ομοιογένεια (μικρό CV) από ότι στην Ελλάδα. Πράγματι στις ΗΠΑ οι εργάτες και οι υπάλληλοι έχουν ίδιες απολαβές (πάνω– κάτω), ενώ στην Ελλάδα έχουμε την γενιά των 600 ευρώ αλλά και τα golden boys με τους παχ(ο)υλούς μισθούς. Επιπλέον υπάρχει και η διαφορά του νομίσματος που κάνει δύσκολη τη σύγκριση.

Παράδειγμα 32ο : Το δείγμα Α έχει $\bar{x}=-75$ και s=6, ενώ το Β έχει $\bar{x}=50$ και s=6. Να βρείτε ποιο έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια.

Λύση

Έχουμε: $CV_A=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{6}{|-75|}=\frac{6}{75}=0,08=\mathbf{8\%}$.

$CV_B=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{6}{50}=0,12=\mathbf{12\%}$.

Το δείγμα Α παρουσιάζει **μεγαλύτερη ομοιογένεια** από το δείγμα Β, επειδή έχει μικρότερο CV.

Παράδειγμα 33ο : Οι σημερινές ηλικίες ν φίλων έχουν $CV_1=5\%$, ενώ πριν από 16 χρόνια είχαν $CV_2=25\%$.

α. Ποια είναι η μέση ηλικία τους σήμερα;

β. Πριν πόσα χρόνια το δείγμα των ηλικιών τους ήταν ομοιογενές;

γ. Αν το άθροισμα των τετραγώνων των ηλικιών τους σήμερα είναι 1604, να βρείτε το πλήθος ν των φίλων.

Λύση

α. Έστω $x_1, x_2,\ldots,x_v$ οι σημερινές ηλικίες και $\bar{x}$, s_x η μέση τιμή και τυπική απόκλιση αντίστοιχα. Πριν 16 χρόνια οι ηλικίες ήταν $y_1, y_2,\ldots y_v$ και $\bar{y}$, sy η μέση τιμή και τυπική απόκλιση αντίστοιχα. Τότε θα ισχύουν: $\bar{y}=\bar{x}-16$ και $s_y=s_x$.

Σήμερα: $CV_1=\frac{s_x}{\bar{x}}=0,05$ (**1**)

Πριν 16 χρόνια: $CV_2=\frac{s_y}{\bar{y}}=0,25$ (**2**) ή $\frac{s_x}{\bar{x}-16}=0,25$ ή $\frac{0,05\bar{x}}{\bar{x}-16}=0,25$ λόγω (**1**), οπότε $\bar{x}=$**20**, και $s_x=$**1**.

β. Ο συντελεστής μεταβολής από 25% έγινε 5%. Άρα κάποια χρονιά το δείγμα έγινε ομοιογενές. Έστω ότι αυτό συνέβη πριν c χρόνια από σήμερα. Παρόμοια με το **α** ερώτημα θα ισχύουν: $\bar{y}=\bar{x}-c$ και $s_y=s_x$ με $\bar{x}=$**20**, και $s_x=$**1**.

Πρέπει $\frac{s_y}{\bar{y}}<0,1$ ή $\frac{s_x}{\bar{x}-c}<0,1$ ή $\frac{1}{20-c}<0,1$ και τελικά c=**10**.

γ. Επειδή δίνεται το άθροισμα των τετραγώνων των ηλικιών, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο: $s^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v}t_i^2-\bar{x}^2$ ή $1=\frac{1604}{v}-20^2$ ή **v=4** (φίλοι).

Παράδειγμα 34ο : Η ευθεία ε: y=4x+ν+6 είναι εφαπτομένη της $f(x)=3x^2-2x+19$ στο σημείο $M(s,\bar{x})$. Αν ν είναι το πλήθος του δείγματος, να βρείτε τα s, $\bar{x}$ και ν. Είναι το δείγμα ομοιογενές;

Λύση

Επειδή η ε είναι εφαπτομένη της f πρέπει: $f'(s)=4$ (**1**) και $f(s)=\bar{x}$ (**2**).

$f'(x)=6x-2$, άρα η (**1**) γίνεται: $6s-2=4$, οπότε **s=1**.

Από (**2**) έχουμε: $3s^2-2s+19=\bar{x}$ ή $3\cdot1^2-2\cdot1+19=\bar{x}$ άρα $\bar{x}=$**20**.

Επειδή το σημείο Μ ανήκει και στην εφαπτομένη πρέπει $\bar{x}=4s+ν+6$ ή $20=4\cdot1+ν+6$, άρα **ν=10**.

$CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{1}{20}=$**5%**, άρα είναι ομοιογενές.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Εάν υποθέσουμε ότι έχουμε μια μεταβλητή Χ ενός δείγματος με ν παρατηρήσεις x_1 , x_2 , ...,x_v και με μέση τιμή $\bar{x}$,διασπορά s_x και συντελεστή διασποράς τότε:

α)Εάν υποθέσουμε την μεταβλητή Υ που προκύπτει με παρατηρήσεις ως $y_i = x_i + c, c \in R$ τότε αποδεικνύεται συνολικά ότι οι σχέσεις της Χ μεταβλητής με την Υ θα είναι οι εξής :

$$\bar{y} = \bar{x} + c \quad , \quad s_y = s_x \quad , \quad CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{s_x}{\bar{x} + c} \neq CV_x = \frac{s_x}{\bar{x}}$$

β) Εάν υποθέσουμε την μεταβλητή Υ που προκύπτει με παρατηρήσεις ως $y_i = \lambda x_i, \lambda \in R^*$ τότε αποδεικνύεται συνολικά ότι οι σχέσεις της Χ μεταβλητής με την Υ θα είναι οι εξής :

$$\bar{y} = \lambda \bar{x} \quad , \quad s_y = |\lambda| s_x \quad , \quad CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{|\lambda| s_x}{\lambda \bar{x}} = \pm CV_x$$

Ειδική περίπτωση

της (β) είναι η υπόθεση οι παρατηρήσεις y_i μιας μεταβλητής Υ θα προκύπτουν από τις παρατηρήσεις x_i της Χ μεταβλητής με αύξηση ή μείωση κατά $\alpha\%$, $\alpha \in R$.

Τότε θα έχουμε ότι έχουμε προαναφέρει αλλά με τις εξής προϋποθέσεις :

- $y_i = x_i + x_i.\alpha\% = x_i + x_i.\frac{\alpha}{100} = x_i(1 + \frac{\alpha}{100}) = x_i.\lambda$, $\lambda \in R$ για την περίπτωση της αύξησης ,
- $y_i = x_i - x_i.\alpha\% = x_i - x_i.\frac{\alpha}{100} = x_i(1 - \frac{\alpha}{100}) = x_i.\lambda$, $\lambda \in R$ για την περίπτωση της μείωσης .

Παράδειγμα 35ο : 1)Οι παρατηρήσεις x_i ενός δείγματος μεγέθους ν έχουν $\bar{x}=8$ και $s_x=3$. Αν σε όλες τις παρατηρήσεις προσθέσουμε τον αριθμό 7 να βρείτε την νέα μέση τιμή και τυπική απόκλιση.

2)Ομοίως αν τις πολλαπλασιάσουμε επί c=5.

3)Ομοίως αν τις αυξήσουμε κατά 20%.

4)Ομοίως αν τις πολλαπλασιάσουμε επί c= –5.

5)Ομοίως αν $y_i=3x_i-7$.

6)Ομοίως αν $y_i=-3x_i-2$.

Λύση

1)Οι νέες παρατηρήσεις y_i θα συνδέονται με τις αρχικές με την σχέση $y_i=x_i+7$ και θα έχουν μέση τιμή $\bar{y}=\bar{x}+7=8+7=15$ και τυπική απόκλιση $s_y=s_x=3$.

2)Οι νέες παρατηρήσεις y_i θα συνδέονται με τις αρχικές με την σχέση $y_i=5x_i$ και θα έχουν μέση τιμή $\bar{y}=5\bar{x}=5\cdot 8=40$ και τυπική απόκλιση $s_y=5\cdot s_x=15$.

3)Οι νέες παρατηρήσεις y_i θα συνδέονται με τις αρχικές με την σχέση $y_i=x_i+20\%\cdot x_i=1,2x_i$ και θα έχουν μέση τιμή $\bar{y}=1,2\bar{x}=9,6$ και τυπική απόκλιση $s_y=1,2s_x=3,6$.

4)Οι νέες παρατηρήσεις y_i θα συνδέονται με τις αρχικές με την σχέση $y_i=-5x_i$ και θα έχουν μέση τιμή $\bar{y}=-5\bar{x}=-40$ και τυπική απόκλιση $s_y=|-5|s_x=15$.

5)Οι νέες παρατηρήσεις y_i θα συνδέονται με τις αρχικές με την σχέση $y_i=3x_i-7$ και θα έχουν μέση τιμή $\bar{y}=3\bar{x}-7=17$ και τυπική απόκλιση $s_y=3s_x=9$.

6)Οι νέες παρατηρήσεις y_i θα συνδέονται με τις αρχικές με την σχέση $y_i=-3x_i-2$ και θα έχουν μέση τιμή $\bar{y}=-3\bar{x}-2=-26$ και τυπική απόκλιση $s_y=|-3|s_x=9$.

Παράδειγμα 36ο : Αν για τη μέση τιμή και τη διακύμανση μιας μεταβλητής X ισχύει η σχέση $100s^2=4\bar{x}^2$ (**1**) να βρείτε:

α.Τον συντελεστή μεταβολής CV.

β.Αν κάθε τιμή της μεταβλητής αυξηθεί κατά 10% ποια θα είναι η νέα τιμή του συντελεστή μεταβολής;

γ.Αν κάθε τιμή της μεταβλητής αυξηθεί κατά μια σταθερά c (c>0), να βρείτε τη σχέση που συνδέει τη μέση τιμή $\bar{x}$ με τη σταθερά c ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.

Λύση

α.Η σχέση (**1**) γράφεται: $\frac{s^2}{\bar{x}}=\frac{4}{100}$ ή $\frac{s}{\bar{x}}=\frac{2}{10}=\frac{20}{100}=20\%$, δηλαδή CV=**20%**.

β. Έστω x_i οι τιμές της μεταβλητής X και y_i οι νέες τιμές. Επειδή οι τιμές αυξάνονται κατά 10%, θα έχουμε: $y_i=x_i+10\%x_i = x_i+0,1x_i=\mathbf{1,1x_i}$ (δηλαδή έχουμε τελικά πολλαπλασιασμό).

Άρα $\bar{y}=1,1\bar{x}$ και $s_y=1,1s_x$.

Ο νέος συντελεστής μεταβολής είναι CV=$\frac{s_y}{\bar{y}}=\frac{\cancel{1,1}s_x}{\cancel{1,1}\bar{x}}=\frac{s_x}{\bar{x}}$=20%. (Προσέξατε ότι δεν άλλαξε ο CV;).

γ. Έστω ότι οι τιμές x_i αυξάνονται κατά c. Τότε θα ισχύουν: $y_i=x_i+c$ και $s_y=s_x$, άρα $\bar{y}=\bar{x}+c$ και $s_y=s_x$.

Επειδή το δείγμα πρέπει να είναι ομοιογενές θα έχουμε: CV<0,1 ή $\frac{s_y}{\bar{y}}<0,1$ ή

$\frac{s_x}{\bar{x}+c}<0,1$ ή $s_x<0,1(\bar{x}+c)$ ή $\frac{2\bar{x}}{10}<0,1(\bar{x}+c)$ και τελικά $\mathbf{\bar{x}<c.}$

ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΤΙΚΑ ΟΙ ΤΥΠΟΙ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{\nu}$	$\bar{x}=\frac{\sum x_i\cdot \nu_i}{\nu}$	$\bar{x}=\sum x_i\cdot f_i$

ΣΤΑΘΜΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i\cdot w_i}{\sum w_i}$$

ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ

$s^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\nu}$	$s^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2.\nu_i}{\nu}$
$S^2=\frac{1}{\nu}\left(\sum x_i^2-\frac{(\sum x_i)^2}{\nu}\right)$	$S^2=\frac{1}{\nu}\left(\sum x_i^2\cdot \nu_i-\frac{(\sum x_i\cdot \nu_\iota)^2}{\nu}\right)$

ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ

$$S=\sqrt{S^2}$$

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

$CV=\frac{S}{\bar{x}}$ Εάν $CV\le 10\%$ τότε το δείγμα είναι ομοιογενές.

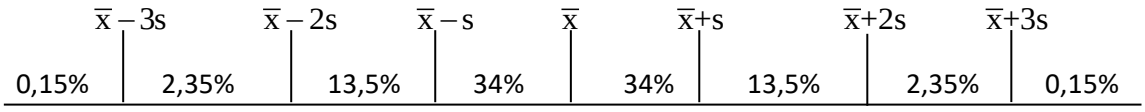
ΣΧΕΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΤΗΝ ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ

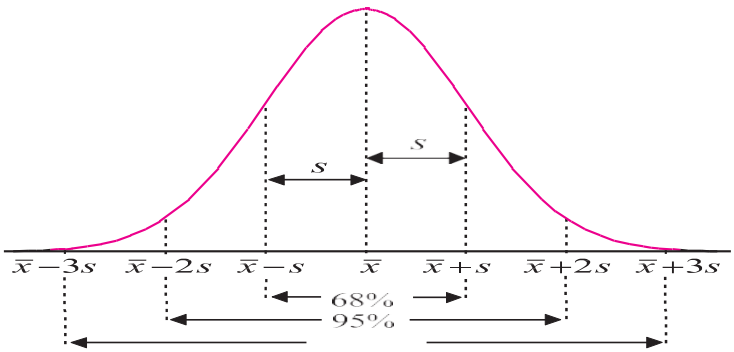
α) Εάν $y_i=x_i+c$ τότε $\bar{y}=\bar{x}+c$, $S_\psi=S_x$ και $\delta_y=\delta_x+c$, όπου c σταθερά.

β) Εάν $y_i=cx_i$ τότε $\bar{y}=c\bar{x}$, $S_y=|c|S_x$ και $\delta_y=\delta_x c$, όπου c σταθερά.

γ) Εάν $y_i=\alpha+\beta x_i$ όπου $\alpha,\beta\in|R$ τότε $\bar{y}=\alpha+\beta\bar{x}$, $S_y=|\beta|S_x$ και $\delta_y=\alpha+\beta\delta_x$.

ΚΑΝΟΝΙΚΗ Η' ΠΕΡΙΠΟΥ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ





ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ 2 ΑΠΟ 2

1) Δίνονται οι τιμές 2, 1, 7, 4. Να βρείτε:
α)τη μέση τιμή, β)το εύρος, γ)τη διακύμανση

2) Οι βαθμοί ενός μαθητή σε πέντε μαθήματα ήταν: 8, 14, 20, 12, 16
α. Να υπολογισθεί η μέση βαθμολογία του μαθητή.
β. Να προσδιορισθεί η διάμεσος.
γ. Να υπολογισθεί η τυπική απόκλιση.
δ. Να υπολογισθεί το εύρος.
ε. Να υπολογισθεί ο συντελεστής μεταβλητότητας και στη συνέχεια να εξεταστεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

3) Η εξέταση 10 μαθητών στο μάθημα της Στατιστικής έδωσε τους εξής βαθμούς:
11 3 7 5 16 14 11 10 11 12
Να βρείτε:
α)τη διάμεσο, β)τη μέση τιμή,
γ)το εύρος δ)τη διακύμανση
ε)το συντελεστή μεταβολής
της παραπάνω βαθμολογίας.

4) Η βαθμολογία 10 μαθητών σε ένα διαγώνισμα ήταν:
7 11 10 13 15 3 12 11 4 14
Να βρείτε:
α)τη διάμεσο, β)τη μέση τιμή,
γ)το εύρος δ)τη διακύμανση
ε)το συντελεστή μεταβολής
της παραπάνω βαθμολογίας.

5) Δίνονται οι 8 τιμές: 2, 3 + ω, 2ω, 4, 2 + ω, 6, 2, ω
α) Αν η μέση τιμή τους είναι $\bar{x} = 3$, να βρείτε το ω
β) Για ω = 1 να βρείτε την επικρατούσα τιμή και τη διάμεσο των τιμών
γ) Να βρείτε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση τους.

6) Μια μεταβλητή παίρνει τις τιμές x, x + 2ω, x + 3ω, x + 4ω, x + 5ω με ω > 0. Να βρείτε την τυπική απόκλιση.

7) Να βρείτε:

α)τη μέση τιμή, β)το εύρος, γ)τη τυπική απόκλιση,δ)τον συντελεστή μεταβολής, ε)αν το δείγμα είναι ομοιογενές

x_i	ν_i
2	4
4	5
6	8
8	3

8) Να βρείτε:

α)τη μέση τιμή, β)το εύρος, γ)τη τυπική απόκλιση, δ)τον συντελεστή μεταβολής, ε)αν το δείγμα είναι ομοιογενές

x_i	ν_i
10	2
11	3
12	1
13	2
14	1
15	1

9) Α. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον πίνακα των τιμών της μεταβλητής Χ σωστά συμπληρωμένο.

Τιμές μεταβλητής x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα f_i%	Αθροιστική Συχνότητα N_i	x_i ν_i
1	10				10
2				35	
3					
Σύνολο	ν = 50	1	100		

Β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

Γ. Να δείξετε ότι η διακύμανση είναι $s^2=0,49$.

Δ. Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής.

10) Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων της μεταβλητής Χ:

Κλάσεις	Συχνότητα ν_i
[0 – 2)	5
[2 – 4)	10
[4 – 6)	20
[6 – 8)	10
[8 – 10)	5

Α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή.

Β. Να υπολογίσετε τη διακύμανση.

Γ. Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής.

11) Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων μιας μεταβλητής.

Κλάσεις	Συχνότητα ν_i
[0 – 10)	10
[10 – 20)	15
[20 – 30)	20
[30 – 40)	5

Α. Να υπολογίσετε τη τυπική απόκλιση.

Β. Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής.

Γ. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

12) α) Να αποδείξετε ότι $s^2 = (\bar{x} - x_1)^2 f_1 + (\bar{x} - x_2)^2 f_2 + \cdots + (\bar{x} - x_k)^2 f_k$.

β) Να βρείτε την τυπική απόκλιση των δεδομένων του παρακέτω πίνακα.

x_i	$f_i\%$
20	40
30	25
40	20
50	15

13) Οι απουσίες των μαθητών της Γ' τάξης ενός Ενιαίου Λυκείου κατά τους μήνες Ιανουάριο – Φεβρουάριο – Μάρτιο – Απρίλιο του έτους 2006 έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους και εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων:

Απουσίες μαθητών	Κέντρο κλάσης K_i	Σχετική συχνότητα f_i
[3 – 5)	4	0,1
[5 – 7)	6	0,2
[7 – 9)	8	0,3
[9 – 11)	10	0,4
Σύνολο		1

Να βρείτε την τυπική απόκλιση s.

14) Έστω δύο δείγματα τιμών Α και Β μιας μεταβλητής Χ. Το Α έχει μέση τιμή 75 και τυπική απόκλιση 6. Το Β έχει μέση τιμή 50 και διακύμανση 36.

Α. Να βρείτε τους συντελεστές μεταβολής των δύο δειγμάτων.

Β. Να εξετάσετε αν κάποιο από τα δείγματα είναι ομοιογενές.

Γ. Να βρείτε ποιο από τα δύο δείγματα έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια.

15) Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η χρηματική παροχή από τους γονείς, σε Ευρώ, δείγματος έξι μαθητών της πρώτης τάξης (ομάδα Α) και έξι μαθητών της δεύτερης τάξης (ομάδα Β) ενός Γυμνασίου.

Ομάδα Α	Ομάδα Β
1	7
8	14
9	6
5	4
3	12
4	5

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε ομάδας.

β. Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δύο ομάδες.

16) Αν οι απουσίες δύο λυκείων Α, Β δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

Απουσίες	Λύκειο Α	Λύκειο Β
[0 – 10)	20	25
[10 – 20)	16	11
[20 – 30)	25	17
[30 – 40)	26	22
[40 – 50)	7	8
[50 – 60)	8	20

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη τυπική απόκλιση των δύο κατανομών.

β. Από τα λύκεια Α, Β ποιο είναι πιο ομοιογενές ως προς τις απουσίες;

17) Ο παρακάτω πίνακας δίνει την διάρκεια ζωής δύο τύπων λυχνίων Α και Β, σε χιλιάδες ώρες

A	12	14	23	30	36
B	12	13	16	22	32

Μια λυχνία τύπου Α κοστίζει 67,5€

α. Ποιό τύπο λυχνίας θα προτιμήσετε να αγοράσετε, αν μία λυχνία τύπου Β κοστίζει: i) 52,8€, ii) 55,72€, iii) 58,7€. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας σε κάθε περίπτωση.

β. Ποιού τύπου λυχνίες παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς την διάρκεια λειτουργίας του.

18) Για δύο τύπους μπαταριών Α και Β επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα (σε χιλιάδες ώρες) δίνονται στον επόμενο πίνακα:

Α	Β
20	26
26	32
24	19
22	20
18	23

α. Να βρείτε τη μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου Α και μιας μπαταρίας τύπου Β.
β. Αν μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει 38 ευρώ και μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει 40 ευρώ, ποιον τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσετε; (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).
γ. Να βρείτε τις τυπικές αποκλίσεις s_A και s_B της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών.
δ. Να βρείτε ποιος από τους δύο τύπους μπαταριών Α και Β παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του.
Δίνεται ότι $\sqrt{11} \cong 3,3$.

19) Οι μαθητές του Γ2 ξόδεψαν ετησίως κατά μέσο όρο 625€ αγοράζοντας διάφορα τρόφιμα από το κυλικείο του σχολείου. Εάν ο συντελεστής μεταβολής είναι 27,2%, να βρείτε την τυπική απόκλιση.

20) Οι μαθητές του Γ2 έχουν μέση ηλικία 15. Εάν ο συντελεστής μεταβολής είναι 18%, να βρείτε την τυπική απόκλιση.

21) Δίνονται 5 παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ:
16, 14, 22, 18, 20 + α, όπου α∈R.
Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας (CV) των παρατηρήσεων αυτών είναι 20% και η τυπική απόκλισή τους (s) είναι 4, τότε:
α) Να δείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 20$.
β) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α.
γ) Για την τιμή του α που υπολογίσατε στο ερώτημα β, να βρείτε τη διάμεσο του δείγματος.
δ) Είναι το δείγμα ομοιογενές ή όχι και γιατί.

22) Δίνονται 6 παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ:
26, 34, 22, 32, 24, 30 + α, όπου α∈R.
Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας (CV) των παρατηρήσεων αυτών είναι 15% και η τυπική απόκλισή τους (s) είναι 4,5 , τότε:
α) Να δείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 30$.
β) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α.
γ) Για την τιμή του α που υπολογίσατε στο ερώτημα β, να βρείτε τη διάμεσο του δείγματος.
δ) Είναι το δείγμα ομοιογενές ή όχι και γιατί.

23) Τα χρόνια εργασίας έξι υπαλλήλων μιας εταιρείας σε αύξουσα σειρά είναι: α, 3, β, 7, 10, γ. Αν έχουν διάμεσο 6, εύρος 11 και μέση τιμή 7, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ.

24) Ένας φοιτητής εξετάστηκε σε πέντε μαθήματα το εξάμηνο που πέρασε και πήρε τους βαθμούς α, β, γ, 8, 9 οι οποίοι είναι διατεταγμένοι σε αύξουσα σειρά. Αν οι βαθμοί έχουν διάμεσο 6, εύρος 5 και μέση τιμή 6,4 , να βρείτε τις τιμές των α, β, γ.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Σ' ένα δείγμα κανονικής κατανομής συχνοτήτων το 49,85% των τιμών βρίσκονται στο διάστημα (30, 39). Άκρα του διαστήματος είναι κάποιες από τις χαρακτηριστικές τιμές $\bar{x}-3s, \bar{x}-2s, \ldots, \bar{x}+3s$. Να εξετάσετε σε κάθε περίπτωση αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

2) Ο διπλανός πίνακας δείχνει την κατανομή της ημερησίας αμοιβής σε δεκάδες ευρώ των 80 εργατών μιας επιχείρησης:

κλάσεις	ν_i
[0, 2)	5
[2, 4)	10
[4, 6)	5
[6, 8)	20
[8, 10)	25
[10, 12)	15

α) Να γίνει ο πίνακας συχνοτήτων απολύτων, σχετικών και αθροιστικών.
β) Ποιο το ποσοστό των εργατών των οποίων η αμοιβή είναι τουλάχιστον 8 δεκάδες ευρώ;

γ) Να υπολογιστεί η μέση τιμή της ημερήσιας αμοιβής των εργατών.

δ) Να υπολογιστεί η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή του δείγματος.

ε) Η εταιρεία θέλει να προσλάβει κάποιους ειδικευμένους εργάτες με ημερήσια αμοιβή μεγαλύτερη ή ίση των 12 δεκάδων ευρώ και μικρότερη των 14 δεκάδων ευρώ. Πόσους τέτοιους εργάτες πρέπει να προσλάβει ώστε το μέσο ημερομίσθιο να διαμορφωθεί στις 8 δεκάδες ευρώ;

3) Τα μήκη 500 σιδερένιων ελασμάτων που κατασκευάστηκαν από μια εταιρεία είναι μέχρι 10 cm. Γνωρίζουμε ότι τα ελάσματα με μήκος μικρότερο των 2 cm είναι 100, 320 ελάσματα έχουν μήκος μικρότερο των 6 cm, 80 ελάσματα έχουν μήκος μεγαλύτερο ή ίσο των 8 cm. Τέλος το 32% των ελασμάτων έχουν μήκος μικρότερο των 4 cm.
α) Να ομαδοποιηθούν και να παρασταθούν τα δεδομένα σ' ένα πίνακα απολύτων συχνοτήτων.
β) Να αποδείξετε ότι το μέσο μήκος των ελασμάτων είναι 5 cm.
γ) Αν τα ελάσματα που έχουν μήκος μεγαλύτερο ή ίσο με το μέσο μήκος πωλούνται προς 1,5 ευρώ και τα υπόλοιπα προς 1 ευρώ το ένα, να υπολογίσετε τις εισπράξεις της εταιρείας από την πώληση των παραπάνω ελασμάτων.

4) α) Η μέση τιμή 100 αριθμών είναι 24 και η μέση τιμή των 60 πρώτων από αυτούς είναι 16. Να βρεθεί η μέση τιμή των υπολοίπων.
β) Η μέση ηλικία 12 ατόμων είναι 30 χρόνια. Έφυγαν τρεις με ηλικίες 34, 35 και 36 και ήλθαν δύο με ηλικίες 21 και 25. Ποια είναι τώρα η μέση τιμή ηλικία.
γ) Από τις 60 παρατηρήσεις ενός δείγματος το 1/5 γράφτηκε κατά δυο μονάδες λιγότερο, το 1/6 κατά τρεις μονάδες παραπάνω και το 1/3 κατά πέντε μονάδες παραπάνω. Έτσι η μέση τιμή υπολογίστηκε 8. Να βρεθεί η πραγματική μέση τιμή.

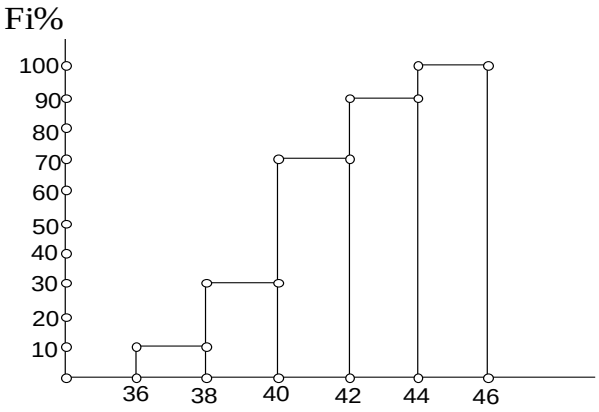
5) Εξετάσαμε τη διάρκεια ζωής σ' ένα δείγμα μεγέθους 5 για τα μηχανήματα που παράγει μια εταιρεία Α και για τα μηχανήματα που παράγει μια βιομηχανία Β. Τα δεδομένα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Εταιρεία Α	Εταιρεία Β
24	24
28	26
46	32
60	44
72	64

α) Να βρείτε τη μέση διάρκεια ζωής για τα μηχανήματα της εταιρείας Α και της εταιρείας Β.

β) Αν τα μηχανήματα της εταιρείας Α κοστίζουν 920 Ευρώ και της εταιρείας Β 850 Ευρώ, ποιας εταιρείας μηχάνημα θα προτιμούσατε να αγοράσετε; Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

6) Το παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων αναφέρεται στο νούμερο παπουτσιών δείγματος 150 ανθρώπων.
α) Να σχεδιάσετε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.
β) Ποιο ποσοστό του δείγματος φοράει παπούτσια με νούμερο από 36 έως 39.
γ) Αν ξεχωρίσουμε από τους 150 ανθρώπους τους 75 με τα μεγαλύτερα νούμερα παπουτσιών τότε από ποιο νούμερο και πάνω θα φοράνε αυτοί;



7) Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα ο οποίος αναφέρεται σε κάποια μεταβλητή Χ.

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
x_1						
x_2	100			150		
x_3						67,5
x_4		0,1				
x_5				400		
Σύνολα						