



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ**

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ο Κύβος του Ρούμπικ: Ανάλυση και Μέθοδοι Επίλυσης

Κωνσταντίνος - Γ - Καρατσενίδης

Επιβλέπων: Παναγιώτης Σταματόπουλος, Επίκουρος Καθηγητής

ΑΘΗΝΑ

ΜΑΡΤΙΟΣ 2018

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ο Κύβος του Ρούμπικ: Ανάλυση και Μέθοδοι Επίλυσης

Κωνσταντίνος Γ. Καρατσενίδης

A.M.: 1115201300064

ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ: Παναγιώτης Σταματόπουλος, Επίκουρος Καθηγητής

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το αντικείμενο της συγκεκριμένης πτυχιακής εργασίας είναι η ανάλυση του προβλήματος του κύβου του Ρούμπικ. Γίνεται μελέτη πάνω στο πρόβλημα σε θεωρητικό επίπεδο για την επιλυσιμότητα του. Στη συνέχεια περιγράφονται τρόποι επίλυσης. Τέλος, αναπτύχθηκε πρόγραμμα που ελέγχει την κατάσταση ενός συναρμολογημένου κύβου.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Επίλυση προβλήματος

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: κύβος του Rubik, θεωρία ομάδων, προβλήματα αναζήτησης, βάσεις προτύπων, βέλτιστες λύσεις

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to analyze the problem of the Rubik's cube puzzle. The problem is studied at a theoretical level for its solvability. Then we describe solving methods. Finally, a program was developed to check the state of an assembled cube.

SUBJECT AREA: Problem solving

KEYWORDS: Rubik's cube, group theory, search problems, pattern databases, optimal solutions

Αφιερωμένο στην οικογένειά μου.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Για τη διεκπεραίωση της παρούσας Πτυχιακής Εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή, κ. Σταματόπουλο, για τη συνεργασία και την πολύτιμη συμβολή του στην ολοκλήρωση της.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	12
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	13
1.1 Ιστορικά	13
1.2 Περιγραφή	14
1.3 Άλλα είδη κύβων.....	15
2. ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ	16
2.1 Κινήσεις	16
2.2 Αριθμός του Θεού	17
3. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ.....	18
3.1 Πρώτη προσέγγιση	18
3.2 Δεύτερη προσέγγιση.....	19
4. ΕΠΙΛΥΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΚΥΒΟΥ	20
4.1 Ισοτιμία μεταθέσεων.....	20
4.2 Ισοτιμία γωνιών	21
4.3 Ισοτιμία ακμών	22
5. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΑΡΧΑΡΙΟΥ.....	23
5.1 Ο σταυρός της κάτω πλευράς.....	23
5.2 Γωνίες της κάτω πλευράς.....	24
5.3 Το δεύτερο επίπεδο	25
5.4 Μετακίνηση ακμών της πάνω πλευράς	26
5.5 Μετακίνηση γωνιών της πάνω πλευράς.....	26
5.6 Προσανατολισμός ακμών	27

5.7 Προσανατολισμός γωνιών	27
5.8 Συνένωση κινήσεων	28
5.9 Ελάχιστο πλήθος αλγορίθμων	28
6. ΑΛΛΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ	29
6.1 Η μέθοδος ZZ.....	29
6.2 Ωμή βία	29
6.3 Αλγόριθμος IDA* και Βάσεις προτύπων	29
7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	30
ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΡΟΛΟΓΙΑΣ	31
ΣΥΝΤΜΗΣΕΙΣ – ΑΡΚΤΙΚΟΛΕΞΑ – ΑΚΡΩΝΥΜΙΑ	32
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι.....	33
ΑΝΑΦΟΡΕΣ	34

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1: Πρώτη προσέγγιση σε C++	18
Σχήμα 2: Δεύτερη προσέγγιση σε C++	19

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1: Ο κύβος του Ρούμπικ.....	13
Εικόνα 2: Το ταχύτερο ρομπότ που λύνει τον κύβο	14
Εικόνα 3: Ο κύβος σε λυμένη κατάσταση	14
Εικόνα 4: Συλλογή από κύβους και άλλα είδη παζλ.....	15
Εικόνα 5: Αναπαράσταση των κινήσεων	17
Εικόνα 6: Ισοτιμία μεταθέσεων	20
Εικόνα 7: Ισοτιμία γωνιών.....	21
Εικόνα 8: Ισοτιμία ακμών	22
Εικόνα 9: Τοποθέτηση ακμής σταυρού.....	23
Εικόνα 10: Γωνίες της κάτω πλευράς	24
Εικόνα 11: Το δεύτερο επίπεδο	25
Εικόνα 12: Μετακίνηση ακμών της πάνω πλευράς.....	26
Εικόνα 13: Μετακίνηση γωνιών της πάνω πλευράς.....	26
Εικόνα 14: Προσανατολισμός ακμών.....	27
Εικόνα 15: Προσανατολισμός γωνιών	27

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1: Αντιστοιχίσεις των ελληνικών και ξενόγλωσσων όρων	31
Πίνακας 2: Ακρωνύμια και ανάπτυξή τους	32
Πίνακας 5: Το δεύτερο επίπεδο	33
Πίνακας 6: Το δεύτερο επίπεδο (λάθος προσανατολισμός).....	33
Πίνακας 3: Μετακίνηση ακμών της πάνω πλευράς.....	33
Πίνακας 4: Μετακίνηση γωνιών της πάνω πλευράς.....	33

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα πτυχιακή συγγράφθηκε στα πλαίσια λήψης Προπτυχιακού τίτλου σπουδών στο τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Ιστορικά

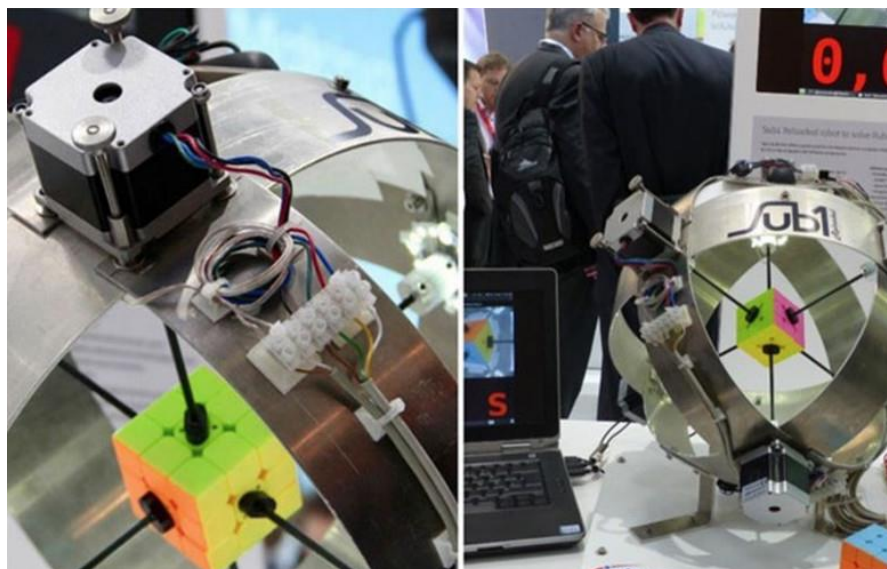
Ο Κύβος του Ρούμπικ είναι ένα τρισδιάστατο μηχανικό παζλ. Επινόηθηκε το 1974 από τον Ούγγρο γλύπτη και καθηγητή αρχιτεκτονικής Ερνő Rubik. Ο στόχος του Rubik ήταν να λύσει ένα δομικό πρόβλημα κινούμενων μερών μεμονωμένα χωρίς να επηρεάσει ή να διαλύσει ολόκληρο τον μηχανισμό. Στη συνέχεια, χρησιμοποίησε τον κύβο ως μέθοδο διδασκαλίας με σκοπό να βοηθήσει τους μαθητές του να κατανοήσουν την τρισδιάστατη γεωμετρία. Το αρχικό σχέδιο δεν ήταν κύβος και πήρε στον Rubik πάνω από ένα μήνα για να το λύσει.



Εικόνα 1: Ο κύβος του Ρούμπικ

Ο περίφημος κύβος κυκλοφόρησε σε καταστήματα της Ουγγαρίας με τίτλο Μαγικός Κύβος το 1977. Το 1980 ο κύβος μετονομάστηκε σε Rubik's Cube και διατέθηκε στη παγκόσμια αγορά. Στα επόμενα χρόνια, η δημοτικότητα του κύβου ήταν τόσο μεγάλη ώστε η εταιρία υπολόγισε πως ένας στους πέντε ανθρώπους είχε προσπαθήσει να τον λύσει. Σύμφωνα με επίσημα στατιστικά στοιχεία, μέχρι τον Ιανουάριο του 2009, περισσότερα από 350 εκατομμύρια κύβοι είχαν πουληθεί παγκοσμίως κάνοντας το συγκεκριμένο παζλ το καλύτερο παιχνίδι παζλ σε πωλήσεις παγκοσμίως, ενώ θεωρείται και το εμπορικότερο παιχνίδι στον κόσμο. Η αρχική $3 \times 3 \times 3$ εκδοχή του κύβου γιόρτασε την τριακοστή επέτειο της το 2010.

Από το 1982 άρχισαν να διεξάγονται οι πρώτοι διαγωνισμοί ταχείας επίλυσης του κύβου. Το παγκόσμιο ρεκόρ χρόνου για έναν κύβο το έχει ο Feliks Zemdegs με χρόνο 4.59 δευτερόλεπτα. Σε άλλα είδη διαγωνισμών οι λύτες καλούνται να επιλύσουν 5 κύβους και βαθμολογούνται με τον μέσο χρόνο επίλυσης, καλούνται να λύσουν τον κύβο με το ένα χέρι ή ακόμα και στα τυφλά. Τέλος, διεξάγονται και διαγωνισμοί όπου τον κύβο καλείται να τον λύσει μια ρομποτική κατασκευή με βραχίονες. Το ρεκόρ σε αυτή την κατηγορία είναι 0.637 δευτερόλεπτα.



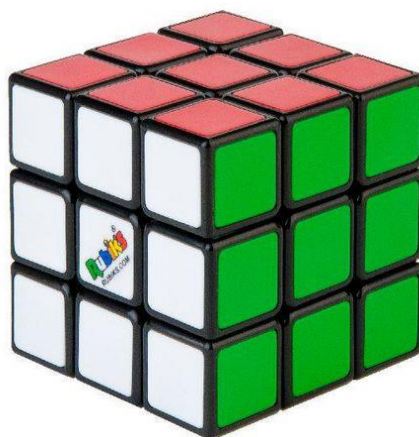
Εικόνα 2: Το ταχύτερο ρομπότ που λύνει τον κύβο

Η δημοτικότητα του κύβου χρησιμοποιείται συχνά σε ταινίες, σχετίζοντας την ικανότητα γρήγορης επίλυσης ενός κύβου ως ένας τρόπος για να καθιερωθεί η υψηλή νοημοσύνη ενός χαρακτήρα.

1.2 Περιγραφή

Σε έναν κύβο του Ρούμπικ κάθε μία από τις έξι έδρες καλύπτεται από εννιά αυτοκόλλητα με έξι χρώματα. Ο κλασσικός κύβος έχει μέγεθος πλευράς 55 mm και τα χρώματα των πλευρών του είναι λευκό, κόκκινο, κίτρινο, πράσινο, μπλε και πορτοκαλί.

Ένας μηχανισμός περιστροφής επιτρέπει σε κάθε πλευρά του κύβου να περιστρέφεται ανεξάρτητα από τις άλλες, με αποτέλεσμα να ανακατεύονται τα χρώματα. Για να λυθεί το παζλ, πρέπει κάθε έδρα του κύβου να αποτελείται αποκλειστικά από αυτοκόλλητα του ίδιου χρώματος. Ο συνολικός αριθμός διαφορετικών διατάξεων των πλευρών του κύβου είναι 43,252,003,274,489,856,000. Αυτό σημαίνει πως, αν θεωρήσουμε πως απαιτείται ένα δευτερόλεπτο για κάθε διαφορετική κίνηση, ο χρόνος που χρειάζεται για να δει κανείς όλες τις πιθανές διατάξεις είναι 1.4 τετράκις εκατομμύρια έτη.



Εικόνα 3: Ο κύβος σε λυμένη κατάσταση

1.3 Άλλα είδη κύβων

Διάφορα άλλα παζλ έχουν παραχθεί βασισμένα στον αρχικό κύβο. Ο πρώτος κύβος που ακολούθησε ήταν ο Rubik's Revenge με μέγεθος $4 \times 4 \times 4$. Στη συνέχεια δημιουργήθηκαν κύβοι μεγέθους $2 \times 2 \times 2$ (Pocket Cube), $5 \times 5 \times 5$ (Professor's Cube) και οι κύβοι V-Cube 6 και V-Cube 7 που δημιουργήθηκαν από Έλληνα επιχειρηματία. Ο μεγαλύτερος κύβος που έχει κατασκευαστεί έχει μέγεθος 33, ενώ ο μεγαλύτερος εμπορικός κύβος έχει μέγεθος 17.



Εικόνα 4: Συλλογή από κύβους και άλλα είδη παζλ

Επίσης υπάρχουν παραλλαγές του κύβου με σηματοδοτημένα τα κεντρικά κομμάτια ώστε να έχει σημασία ο προσανατολισμός τους. Τέτοιοι κύβοι μπορεί να έχουν βελάκια στα αυτοκόλλητά τους που να προσδιορίζουν τη φορά με την οποία πρέπει να είναι προσανατολισμένα τα κομμάτια τους, να έχουν πάνω τους αριθμούς ή ακόμα να έχουν και εικόνες.

Τέλος υπάρχουν παζλ που είναι εμπνευσμένα από τον κύβο του Ρούμπικ αλλά δεν έχουν μορφή κύβου. Μερικά παραδείγματα είναι το Rubik's Snake, το Rubik's Void που είναι σαν τον κλασικό κύβο χωρίς τα κεντρικά κομμάτια, καθώς και το Pyraminx που έχει τη μορφή πυραμίδας.

2. ΘΕΩΡΙΑ ΟΜΑΔΩΝ

Η θεωρία ομάδων (group theory) είναι το πεδίο των μαθηματικών που μελετά τις αλγεβρικές δομές γνωστές ως ομάδες (groups).

Μια ομάδα είναι μια αλγεβρική δομή $(G, \bullet)$ που αποτελείται από ένα σύνολο στοιχείων G μαζί με μια συνάρτηση $\bullet$, που συνδυάζει οποιαδήποτε δύο στοιχεία ώστε να σχηματιστεί ένα τρίτο στοιχείο. Μια ομάδα πρέπει να ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

- Κλειστότητα, για κάθε a, b στο G το στοιχείο ab που προκύπτει από την πράξη $a \bullet b$ πρέπει να ανήκει στο G .
- Προσεταιριστική ιδιότητα, για κάθε a, b, c στο G ισχύει $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.
- Ουδέτερο στοιχείο, υπάρχει μοναδικό στοιχείο e ώστε $e \bullet a = a \bullet e = a$.
- Αντίστροφο στοιχείο, για κάθε στοιχείο a υπάρχει αντίστοιχο στοιχείο b στο G ώστε $a \bullet b = b \bullet a = e$

Μια από τις κατηγορίες ομάδων είναι αυτή των κυκλικών μεταθέσεων (permutation group) στην οποία ανήκει ο κύβος του Ρούμπικ.

Η ομάδα του κύβου αποτελείται από το ζεύγος $(G, \bullet)$, όπου G είναι το σύνολο όλων των κινήσεων/περιστροφών που επιτρέπονται στον κύβο και η συνάρτηση $\bullet$ είναι η σύνθεση των κινήσεων του κύβου και αντιστοιχεί στην κατάσταση που παράγεται με την σειριακή εκτέλεσή τους.

Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να αναπαραστήσουμε κάθε κατάσταση ενός κύβου ως μια αλληλουχία κινήσεων σε σχέση με την αρχική του κατάσταση, περιγράφοντας τις περιστροφές που πρέπει να εφαρμοστούν ώστε να επιλυθεί ο κύβος.

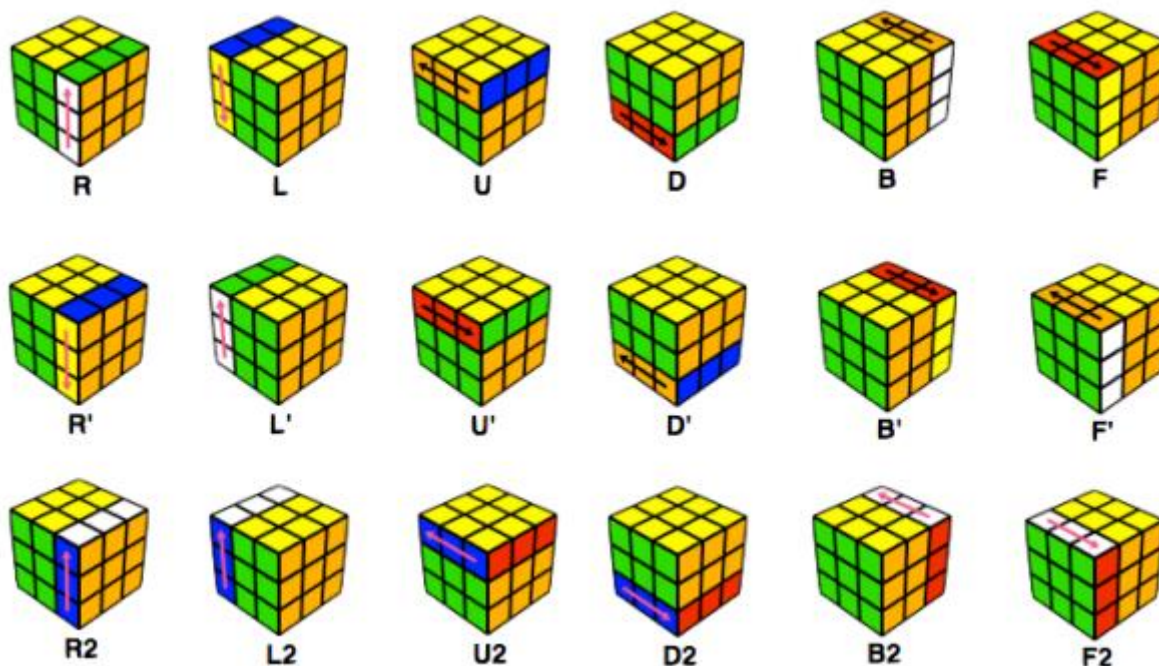
2.1 Κινήσεις

Οι 6 βασικές κινήσεις που μπορούν να εφαρμοστούν σε έναν κύβο είναι οι δεξιόστροφες περιστροφές των πλευρών του. Συμβολίζονται ως R, L, U, D, F, B από το πρώτο γράμμα της αγγλικής ονομασίας της πλευράς (right/δεξιά, left/αριστερά, up/επάνω, down/κάτω, front/μπροστά, back/πίσω).

Αντίστοιχα, οι αριστερόστροφες περιστροφές έχουν το όνομα της δεξιόστροφης περιστροφής και στη συνέχεια έναν απόστροφο, δηλαδή R', L', U', D', F', B' . Μια αριστερόστροφη κίνηση είναι ισοδύναμη με 3 δεξιόστροφες.

Αυτές οι 12 κινήσεις ονομάζονται περιστροφές 90° (quarter turn). Τέσσερις ίδιες περιστροφές μιας πλευράς αφήνουν τον κύβο στην ίδια κατάσταση.

Συμπληρωματικά έχουν προστεθεί και οι περιστροφές 180° (half turn), οι οποίες συμβολίζονται με το όνομα της δεξιόστροφης περιστροφής υψωμένο στο τετράγωνο, δηλαδή $R^2, L^2, U^2, D^2, F^2, B^2$. Μια τέτοια περιστροφή ισοδυναμεί με 2 δεξιόστροφες ή αριστερόστροφες περιστροφές 90° .



Εικόνα 5: Αναπαράσταση των κινήσεων

Ο συμβολισμός των κινήσεων καθιερώθηκε από τον καθηγητή David Singmaster, έναν από τους πρώτους μαθηματικούς που ασχολήθηκαν με την ανάλυση του κύβου.

2.2 Αριθμός του Θεού

Ένα από τα αρχικά ερωτήματα που δημιουργήθηκαν με τον κύβο ήταν πόσες κινήσεις χρειάζονται ώστε ένας ανακατεμένος κύβος να έρθει στην αρχική του κατάσταση. Από το 1980 ο Singmaster είχε κάνει μια εικασία πως το μέγιστο πλήθος κινήσεων είναι 20, και το 1995 αποδείχτηκε ότι υπάρχει κύβος που χρειάζεται τόσες κινήσεις για να λυθεί ενώ νωρίτερα την ίδια χρονιά αποδείχτηκε ότι αυτό το νούμερο δεν ξεπερνά το 29.

Το 2010 μια ομάδα ερευνητών, με τη βοήθεια υπολογιστικών συστημάτων, απέδειξε ότι κάθε διάταξη του κύβου του Ρούμπικ μπορεί να λυθεί με το πολύ 20 κινήσεις half turn. Για την απόδειξη χρειάστηκε να λυθούν 55,882,296 σετ των 19,508,428,800 κύβων από τα 2,217,093,120 σετ συνολικά (~2.52% των περιπτώσεων) καθώς τα υπόλοιπα έχουν συμμετρικές λύσεις. Δε χρειάστηκε να βρεθεί βέλτιστη λύση για κάθε κύβο καθώς σκοπός τους ήταν να βρουν το άνω όριο του αριθμού. Υλοποιήθηκε αλγόριθμος που με παράλληλη εκτέλεση χρειαζόταν περίπου 20 δευτερόλεπτα για την λύση ενός σετ. Αυτός ο χρόνος αντιστοιχούσε σε 35 χρόνια CPU για έναν υπολογιστή αυτής της εποχής.

Το 2014 αποδείχτηκε με παρόμοιο τρόπο πως ο αριθμός του Θεού για το σύνολο κινήσεων quarter turn είναι 26.

3. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Ένα από τα πρώτα εμπόδια που συναντάμε για την επίλυση ενός προβλήματος με ένα πρόγραμμα είναι ο τρόπος που θα αναπαραστήσουμε τα δεδομένα.

3.1 Πρώτη προσέγγιση

Μια πρώτη ιδέα για τον κύβο είναι να τον απεικονίσουμε ως μια συλλογή 6 πλευρών, όπου κάθε πλευρά αποτελείται από έναν πίνακα χαρακτήρων 3×3 . Κάθε χαρακτήρας θα είναι το χρώμα του αντίστοιχου αυτοκόλλητου, ή καλύτερα, για να γενικεύσουμε την αναπαράσταση, το όνομα της πλευράς R, L, U, D, F, B . Αυτή η αναπαράσταση είναι κατανοητή σε έναν άνθρωπο καθώς είναι όμοια οπτικά με τον φυσικό κύβο.

```

1  typedef char Tile;
2  typedef Tile Face[3][3];
3
4  class Cube {
5      // Οι πλευρές του κύβου
6      Face front;
7      Face back;
8      Face left;
9      Face right;
10     Face up;
11     Face down;
12 public:
13     enum Permutation { FRONT, BACK, LEFT, RIGHT, UP, DOWN };
14     enum Direction { NORMAL, DOUBLE, REVERSE }; // Δεξιόστροφη, Διπλή, Αριστερόστροφη περριστροφή
15
16     void operation(Permutation p, Direction d); // Περιστροφή της πλευράς p κατά d
17     void read(); // Διάβασμα κύβου από το πληκτρολόγιο
18     void print(); // Εκτύπωση κύβου στην οθόνη
19 };

```

Σχήμα 1: Πρώτη προσέγγιση σε C++

Τα αρνητικά της αναπαράστασης είναι ότι δεν αναπαριστά τα κομμάτια του κύβου με αυστηρό τρόπο για αυτό καθιστά δύσκολο τον έλεγχο του κύβου και την ανάπτυξη αλγορίθμου για την εφαρμογή περιστροφών. Ένα παράδειγμα πρόσθετων ελέγχων που προκύπτει από την αναπαράσταση αυτή είναι η εμφάνιση άκυρων κομματιών (π.χ. ένα κομμάτι δε μπορεί να περιέχει δυο φορές το ίδιο χρώμα).

3.2 Δεύτερη προσέγγιση

Η δεύτερη προσέγγιση επικεντρώνεται στα κομμάτια του κύβου, ο οποίος αποτελείται από 12 κομμάτια ακμής (edge) και 8 γωνιακά (corner).

Τα κομμάτια ακμής μπορούν να αναπαρασταθούν με το όνομα των πλευρών στις οποίες ανήκουν (π.χ. UL για την ακμή των πάνω και αριστερά πλευρών) και τον προσανατολισμό τους (σωστός/λάθος).

Τα γωνιακά κομμάτια μπορούν να αναπαρασταθούν με το όνομα των πλευρών στις οποίες ανήκουν (π.χ. ULF για τη γωνία των πάνω, αριστερά και μπροστά πλευρών) και τον προσανατολισμό τους (σωστός/δεξιόστροφος/αριστερόστροφος).

```

1 struct Edge {
2     enum Orientation { CORRECT, FLIPPED };
3     enum Location { UR, UL, UF, UB, DR, DL, DF, DB, RF, RB, LF, LB };
4
5     Location location;
6     Orientation orientation;
7 };
8
9 struct Corner {
10    enum Orientation { CORRECT, CLOCKWISE, COUNTERCLOCKWISE };
11    enum Location { ULF, URF, ULB, URB, DLF, DRF, DLB, DRB };
12
13    Location location;
14    Orientation orientation;
15 };
16
17 class Cube {
18     Edge edges[12]; // Τα 12 κομμάτια ακμών
19     Corner corners[8]; // Τα 8 γωνιακά κομμάτια
20 public:
21     enum Permutation { FRONT, BACK, LEFT, RIGHT, UP, DOWN };
22     enum Direction { NORMAL, DOUBLE, REVERSE }; // Δεξιόστροφη, Διπλή, Αριστερόστροφη περριστροφή
23
24     void operation(Permutation p, Direction d); // Περιστροφή της πλευράς p κατά d
25     void read(); // Διάβασμα κύβου από το πληκτρολόγιο
26     void print(); // Εκτύπωση κύβου στην οθόνη
27 };

```

Σχήμα 2: Δεύτερη προσέγγιση σε C++

4. ΕΠΙΛΥΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΚΥΒΟΥ

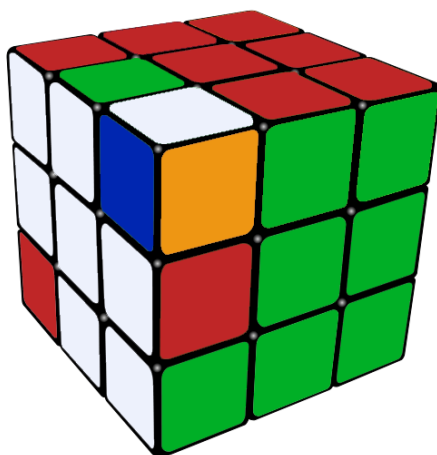
Ένας κύβος με τυχαία διάταξη των κομματιών του δεν είναι δεδομένο ότι μπορεί να φτάσει στην λυμένη κατάσταση με τις περιστροφές των πλευρών του. Το πλήθος των τυχαίων διατάξεων που υπάρχουν υπολογίζεται ως εξής:

- Κάθε γωνιακό κομμάτι πρέπει να πάρει μια θέση, υπάρχουν $8!$ πιθανές διατάξεις.
- Κάθε γωνιακό κομμάτι έχει ένα προσανατολισμό, συνολικά 3^8 επιλογές.
- Κάθε κομμάτι ακμής πρέπει να πάρει μια θέση, υπάρχουν $12!$ πιθανές διατάξεις.
- Κάθε κομμάτι ακμής έχει ένα προσανατολισμό, συνολικά 2^{12} επιλογές.

Υπολογίζεται λοιπόν πως συνολικά υπάρχουν 519,024,039,293,878,272,000 τυχαίες διατάξεις του κύβου. Αποδεικνύεται όμως ότι μόνο το $\frac{1}{12}$ αυτών είναι επιλύσιμες. Ο έλεγχος ισοτιμίας (parity check) ενός ανακατεμένου κύβου μπορεί να διαιρεθεί σε τρεις ελέγχους.

4.1 Ισοτιμία μεταθέσεων

Η ισοτιμία μεταθέσεων (permutation parity) αποκλείει το $\frac{1}{2}$ των πιθανών διατάξεων ενός κύβου που συναρμολογείται με τυχαίο τρόπο. Κάθε κίνηση 90° (quarter turn) έχει ως αποτέλεσμα την περιστροφή 2 αλυσίδων 4 κομματιών (μεταθέτει 4 γωνίες και 4 ακμές) οπότε είναι μια άρτια μετάθεση. Κάθε επιτρεπτή κατάσταση είναι άρτια, αφού είναι αποτέλεσμα κινήσεων 90° . Ως αποτέλεσμα, δεν μπορεί ένας κύβος να έχει περιττό πλήθος κομματιών που έχουν μετατεθεί.



Εικόνα 6: Ισοτιμία μεταθέσεων

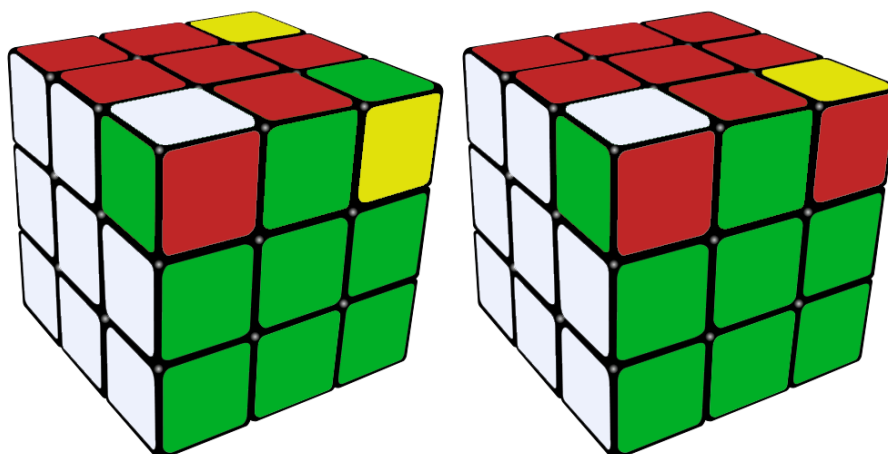
Στην εικόνα φαίνεται πως έχει γίνει μετάθεση 2 ακμών και 2 γωνιών. Το συνολικό πλήθος των μεταθέσεων είναι 2 (άρτιο) οπότε ο κύβος μπορεί να λυθεί.

Για να υπολογίσουμε την ισοτιμία μεταθέσεων σε έναν ανακατεμένο κύβο:

- Δεν μας ενδιαφέρει προσανατολισμός των κομματιών, μόνο η θέση στην οποία βρίσκονται. Σε κάθε κομμάτι του κύβου δίνουμε έναν αύξων αριθμό (1-8 για τις γωνίες και 1-12 για τις ακμές) και καταγράφουμε σε ποια θέση βρίσκονται.
- Για κάθε κομμάτι γωνίας μετράμε πόσα κομμάτια που έπονται θα έπρεπε (στην κατάσταση στόχου) να προηγούνται.
- Για τα κομμάτια ακμής μετράμε με τον ίδιο τρόπο πόσα κομμάτια έχουν μετατεθεί.
- Για να είναι άρτια η μετάθεση, θα πρέπει το άθροισμα αυτών των αριθμών να είναι άρτιο.

4.2 Ισοτιμία γωνιών

Η ισοτιμία γωνιών (corner parity) αποκλείει τα $\frac{2}{3}$ των πιθανών διατάξεων ενός κύβου που συναρμολογείται με τυχαίο τρόπο. Ο λυμένος κύβος έχει όλες του τις γωνίες σωστά προσανατολισμένες, ανακατεύοντας τον όμως, μπορεί ο προσανατολισμός τους να αλλάξει κατά 120° διατηρώντας όμως άθροισμα των προσανατολισμών πολλαπλάσιο των 360° . Δηλαδή αν μια γωνία από σωστό προσανατολισμό καταλήξει να έχει δεξιόστροφο, θα πρέπει μια άλλη γωνία να έχει αριστερόστροφο προσανατολισμό ή δύο άλλες γωνίες να έχουν δεξιόστροφο.



Εικόνα 7: Ισοτιμία γωνιών

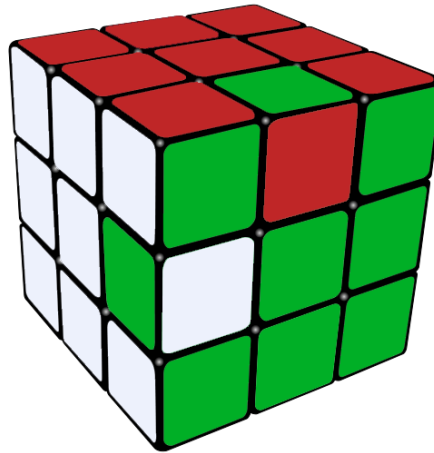
Και οι δύο κύβοι έχουν όλα τους τα κομμάτια στη σωστή θέση. Ο κύβος στα αριστερά έχει τρεις γωνίες με δεξιόστροφο προσανατολισμό, ενώ ο κύβος δεξιά έχει μια με δεξιόστροφο και μια με αριστερόστροφο.

Για να υπολογίσουμε την ισοτιμία γωνιών σε έναν ανακατεμένο κύβο:

- Επιλέγουμε δυο πλευρές που έχουν κοινό άξονα περιστροφής, για παράδειγμα U και D.
- Οι γωνίες των πλευρών που διαλέξαμε, είναι σωστά προσανατολισμένες εάν έχουν στην πλευρά τους ένα από τα δύο χρώματα (π.χ. αν στην πάνω πλευρά υπάρχουν 2 γωνίες με το χρώμα D και 1 με το χρώμα U και 1 με οποιοδήποτε άλλο χρώμα τότε οι 3 γωνίες είναι σωστά προσανατολισμένες). Για τα κομμάτια που δεν έχουν σωστό προσανατολισμό κοιτάμε έχουν στραφεί κατά 120° ή -120° για να δούμε αν έχουν δεξιόστροφο ή αριστερόστροφο προσανατολισμό αντίστοιχα (π.χ. η γωνία πράσινο-κόκκινο-κίτρινο στο αριστερό σχήμα έχει δεξιόστροφο προσανατολισμό ενώ στο δεξί έχει αριστερόστροφο).
- Μετράμε τα κομμάτια ακμής που μπορούν να φτάσουν στη θέση τους με σωστό προσανατολισμό χωρίς να γίνει περιστροφή πλευράς του άξονα που επιλέξαμε.
- Το σύνολο πρέπει να είναι πολλαπλάσιο των 360° .

4.3 Ισοτιμία ακμών

Η ισοτιμία ακμών (edge parity) αποκλείει το $\frac{1}{2}$ των πιθανών διατάξεων ενός κύβου που συναρμολογείται με τυχαίο τρόπο. Ο λυμένος κύβος δεν έχει ακμές με λάθος προσανατολισμό, ανακατεύοντας τον όμως, μπορεί ο προσανατολισμός τους να αλλάξει ανά ζεύγη ακμών. Άρα δεν μπορούν να υπάρξουν περιπτώσεις σε πλήθος ακμές με λάθος προσανατολισμό.



Εικόνα 8: Ισοτιμία ακμών

Στην εικόνα βλέπουμε έναν κύβο με όλες τις ακμές στη σωστή θέση, αλλά τα κομμάτια πράσινο-άσπρο και κόκκινο-πράσινο έχουν λάθος προσανατολισμό. Ένας κύβος που έχει μόνο ένα κομμάτι ακμής με λάθος προσανατολισμό, δε μπορεί να λυθεί.

Για να υπολογίσουμε την ισοτιμία ακμών σε έναν ανακατεμένο κύβο:

- Επιλέγουμε δυο πλευρές που έχουν κοινό άξονα περιστροφής, για παράδειγμα R και L.
- Μετράμε τα κομμάτια ακμής που μπορούν να φτάσουν στη θέση τους με σωστό προσανατολισμό χωρίς να γίνει περιστροφή πλευράς του άξονα που επιλέξαμε.
- Τα κομμάτια που έχουν σωστό προσανατολισμό πρέπει να είναι άρτια σε πλήθος.

5. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΑΡΧΑΡΙΟΥ

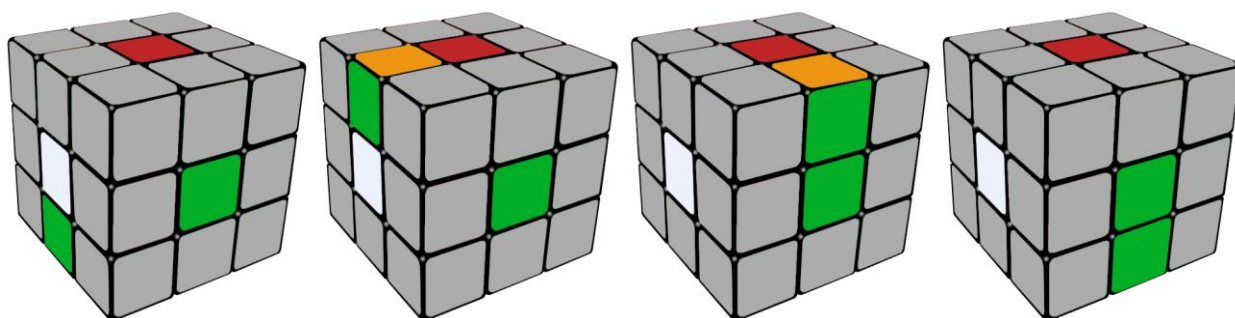
Η μέθοδος του αρχαρίου αποτελείται από μικρούς αλγορίθμους, τους οποίους καλείται ο λύτης να απομνημονεύσει. Η μέθοδος αυτή, πολλές φορές, απαιτεί την περιστροφή ολόκληρου του κύβου ώστε ο χρήστης να έχει καλύτερη ορατότητα των κομματιών ή να είναι πιο εύκολη η απομνημόνευση των κινήσεων. Τα βήματα που θα περιγράψουμε παρακάτω είναι παραλλαγές αυτής της μεθόδου ώστε τα κεντρικά κομμάτια του κύβου να παραμένουν σταθερά. Επειδή υπάρχουν πολλοί συνδυασμοί που είναι συμμετρικοί, θα επικεντρωθούμε στις πλευρές πάνω, κάτω, δεξιά, μπροστά.

5.1 Ο σταυρός της κάτω πλευράς

Το πρώτο βήμα της μεθόδου είναι να σχηματιστεί ένας σταυρός στην κάτω πλευρά του κύβου. Αυτό σημαίνει πως τα κομμάτια ακμής της κάτω πλευράς πρέπει να μπουν στη θέση τους και να έχουν σωστό προσανατολισμό. Δεν είναι άμεσα αντιληπτό σε έναν αρχάριο αλλά μια πλευρά που έχει σωστά τα χρώματά της, δεν είναι απαραίτητα σωστή καθώς μας νοιάζει να είναι ευθυγραμμισμένη και με τις άλλες πλευρές.

Για να φέρουμε ένα κομμάτι ακμής DR στη θέση του (όπου D για κάτω και R για δεξιά) υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

- Η ακμή βρίσκεται στη πάνω πλευρά. Κάνουμε κινήσεις U ώστε να έρθει η ακμή πάνω από τη θέση της.
 - Αν το χρώμα της κάτω πλευράς βρίσκεται στην πάνω πλευρά, το κομμάτι έρχεται στη θέση του με την κίνηση $R2$.
 - Αν το χρώμα της κάτω πλευράς βρίσκεται στην πλευρά R, το κομμάτι έρχεται στη θέση του με τις κινήσεις $U F R' F'$.
- Η ακμή βρίσκεται στο μεσαίο επίπεδο. Εκτελούμε τις κινήσεις $R U R'$ αν το κομμάτι βρίσκεται στη θέση FR αντίστοιχα. Τώρα το κομμάτι βρίσκεται στην πάνω πλευρά και εκτελούμε τα παραπάνω βήματα.
- Η ακμή βρίσκεται ήδη στην κάτω πλευρά. Φέρνουμε ένα τυχαίο κομμάτι (που δεν έχει το χρώμα D) στην θέση αυτή. Έπειτα εκτελούμε τα παραπάνω βήματα.



Εικόνα 9: Τοποθέτηση ακμής σταυρού

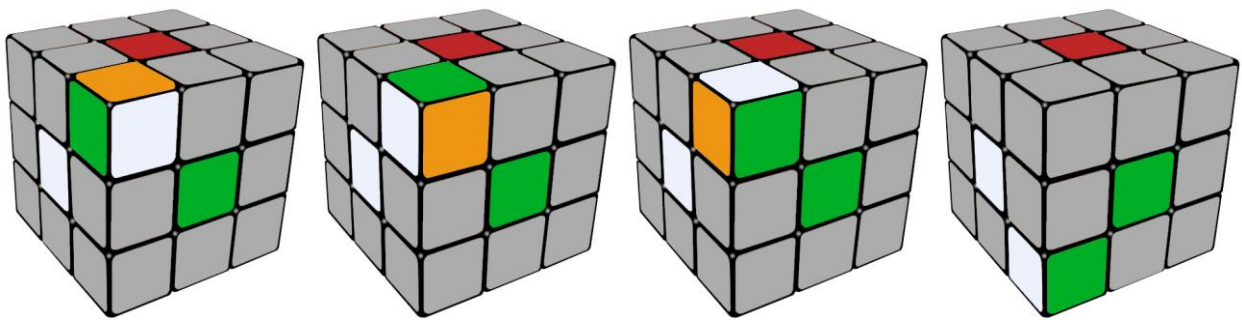
Αν θεωρήσουμε την άσπρη πλευρά ως μπροστινή, τα βήματα που εκτελούνται στην εικόνα είναι $F2 U' R2$. Αυτή είναι η τρίτη περίπτωση όπου έπρεπε να φέρουμε το κομμάτι στην πάνω πλευρά από κάτω, και στη συνέχεια της πράσινης πλευράς ήταν ευθυγραμμισμένα.

5.2 Γωνίες της κάτω πλευράς

Το επόμενο βήμα είναι να ολοκληρωθεί η κάτω πλευρά του κύβου. Αυτό σημαίνει πως τα γωνιακά κομμάτια της κάτω πλευράς πρέπει να μπουν στη θέση τους και να έχουν σωστό προσανατολισμό. Θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί ώστε να μη χαλάσει ο σταυρός.

Για να φέρουμε μια γωνία DRF στη θέση της υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

- Η γωνία βρίσκεται στη πάνω πλευρά. Κάνουμε κινήσεις U ώστε να έρθει η γωνία πάνω από τη θέση της.
 - Αν η γωνία έχει δεξιόστροφο προσανατολισμό κάνουμε τις κινήσεις $U' F' U F$.
 - Αν η γωνία έχει αριστερόστροφο προσανατολισμό κάνουμε τις κινήσεις $U' F' U F$.
 - Αν η γωνία έχει σωστό προσανατολισμό κάνουμε τις κινήσεις $F' U F$. Τώρα η γωνία βρίσκεται στην πάνω πλευρά με λάθος προσανατολισμό και μπορούμε να επαναλάβουμε το βήμα.
- Η γωνία βρίσκεται ήδη στην κάτω πλευρά. Φέρνουμε ένα τυχαίο κομμάτι (που δεν έχει το χρώμα D) στην θέση αυτή. Έπειτα εκτελούμε τα παραπάνω βήματα.



Εικόνα 10: Γωνίες της κάτω πλευράς

Ο πρώτος κύβος της εικόνας με τις κινήσεις $R U' R' U^2$ φτάνει στην κατάσταση του δεύτερου κύβου.

Ο δεύτερος κύβος λύνεται με τις κινήσεις $U' F' U F$.

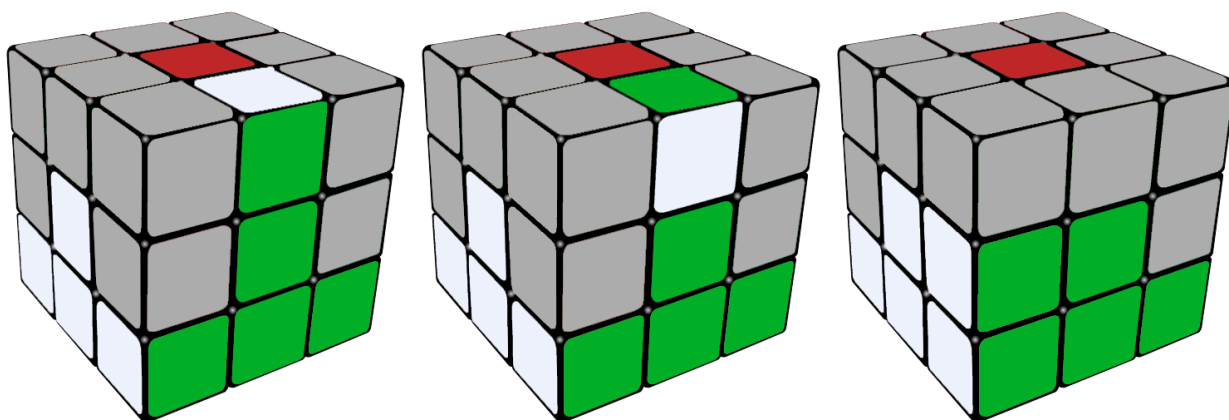
Ο τρίτος κύβος λύνεται με τις κινήσεις $U' F' U F$.

5.3 Το δεύτερο επίπεδο

Αφού έχει ολοκληρωθεί η κάτω πλευρά του κύβου, προχωράμε στην τοποθέτηση των ακμών του μεσαίου επιπέδου. Εδώ χρησιμοποιούμε πάλι ένα σετ κινήσεων που μεταφέρουν ακμές από την πάνω πλευρά στις θέσεις FR/FL/BR/BL χωρίς όμως να χαλάσουμε την κάτω πλευρά.

Για να φέρουμε το κομμάτι FR στη θέση του υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

- Το κομμάτι βρίσκεται στη πάνω πλευρά και έχει το αυτοκόλλητο F πάνω. Με κινήσεις U, το φέρνουμε στην πίσω πλευρά (απέναντι από το F) και εκτελούμε τα βήματα $F' U F U R U' R'$.
- Το κομμάτι βρίσκεται στη πάνω πλευρά και έχει το αυτοκόλλητο R πάνω. Με κινήσεις U, το φέρνουμε στην αριστερή πλευρά (απέναντι από το R) και εκτελούμε τα βήματα $R U' R' U' F' U F$.
- Το κομμάτι βρίσκεται ήδη στο μεσαίο επίπεδο σε λάθος θέση ή με λάθος προσανατολισμό. Τοποθετούμε ένα τυχαίο κομμάτι ακμής που έχει το χρώμα U με τις κινήσεις $F' U F U R U' R'$. Τώρα το FR βρίσκεται στην πάνω πλευρά και εκτελούμε τα παραπάνω βήματα.



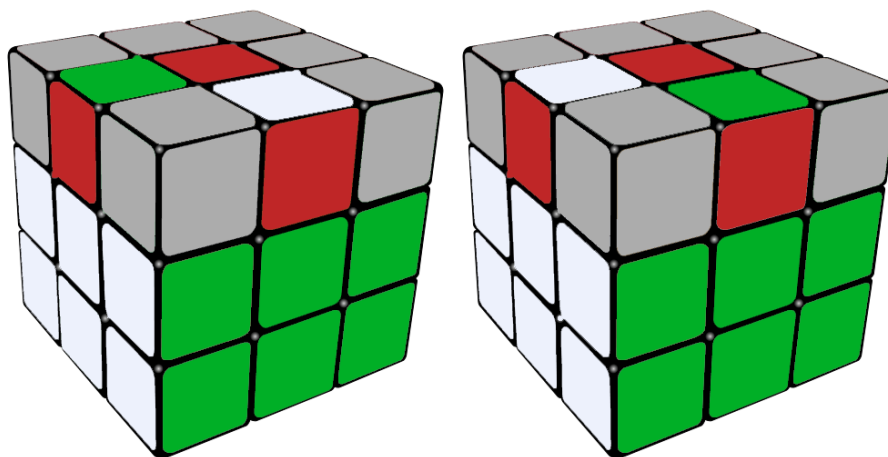
Εικόνα 11: Το δεύτερο επίπεδο

Ο πρώτος κύβος της εικόνας με τις κινήσεις $U' R U' R' U^2$ φτάνει στην κατάσταση του τρίτου κύβου.

Ο δεύτερος κύβος με τις κινήσεις $U^2 R U' R' U' F' U F$ φτάνει στην κατάσταση του τρίτου κύβου.

5.4 Μετακίνηση ακμών της πάνω πλευράς

Σε αυτό το βήμα θέλουμε να μπουν όλες οι ακμές στις θέσεις τους, χωρίς να μας νοιάζει ο προσανατολισμός τους. Οι μόνες ακμές που έχουν μείνει σε λάθος θέση είναι αυτές του πάνω επιπέδου.



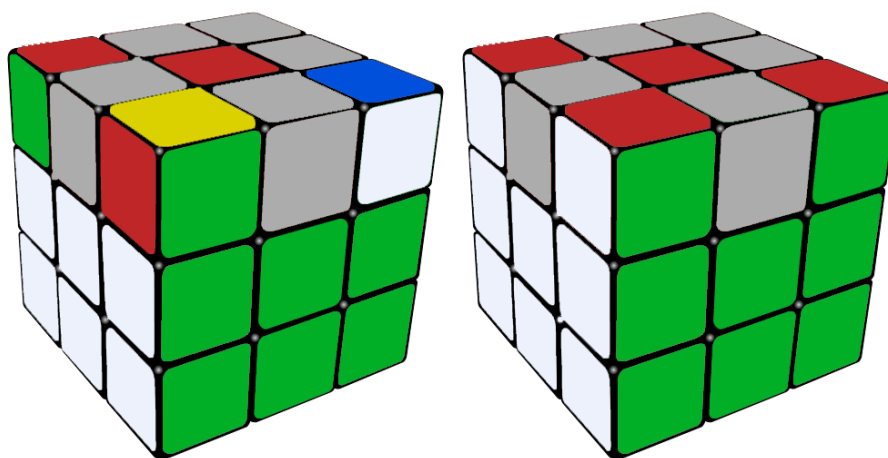
Εικόνα 12: Μετακίνηση ακμών της πάνω πλευράς

Η αντιμετάθεση των ακμών που βρίσκονται στις θέσεις των UR και UF γίνεται με τις κινήσεις $U F R U R' U' F'$.

Ο λύτης μπορεί να μάθει αυτές τις κινήσεις και με U περιστροφές να φέρνει τις ακμές που θέλει να αντιμεταθέσει σε αυτές τις θέσεις ή να μάθει τους συμμετρικούς αλγορίθμους αυτής της κίνησης.

5.5 Μετακίνηση γωνιών της πάνω πλευράς

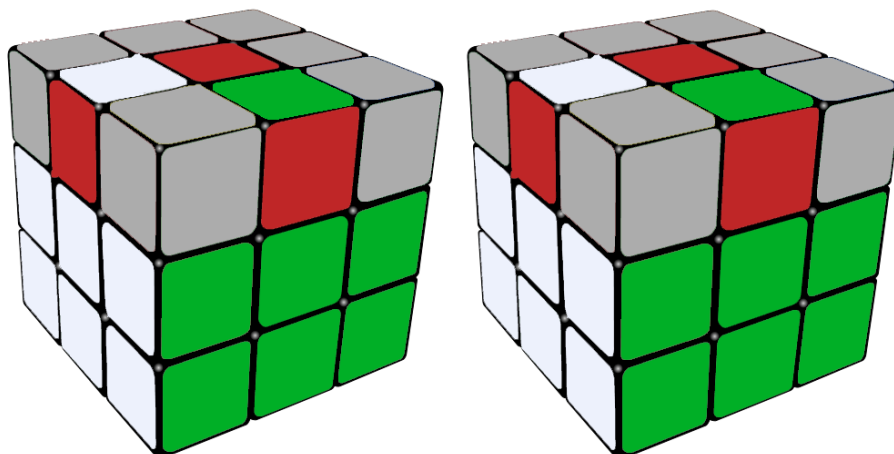
Όμοια με την μετακίνηση ακμών, τώρα θέλουμε να τοποθετήσουμε τις γωνίες στη θέση τους. Οι γωνίες που βρίσκονται στις θέσεις URB URF ULF κάνουν δεξιόστροφη κυκλική αντιμετάθεση με τις κινήσεις $R' F' L' F R F' L F$. Προτιμάμε στη θέση ULB να βρίσκεται η σωστή γωνία καθώς αυτή δε θα μετακινηθεί.



Εικόνα 13: Μετακίνηση γωνιών της πάνω πλευράς

5.6 Προσανατολισμός ακμών

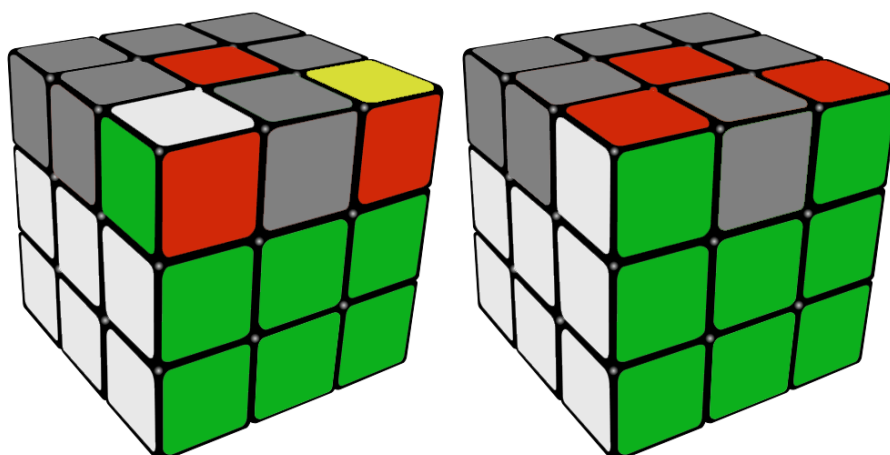
Αφού έχουν μπει όλα τα κομμάτια στη θέση τους, μένει να προσανατολίσουμε τις ακμές και τις γωνίες. Για να προσανατολίσουμε την ακμή στη θέση RU εκτελούμε τις κινήσεις $R D' U F D' U L D' U B D' U$. Τώρα η ακμή RU έχει προσανατολιστεί αλλά έχουν χαλάσει αρκετά άλλα κομμάτια του κύβου. Αυτό συμβαίνει επειδή όπως είπαμε οι ακμές αλλάζουν προσανατολισμό ανά 2 και άρα πρέπει να επαναλάβουμε τα βήματα και για μια δεύτερη ακμή. Με κίνηση U φέρνουμε μια δεύτερη ακμή της πάνω πλευράς που δεν έχει σωστό προσανατολισμό στη θέση RU και επαναλαμβάνουμε τις κινήσεις. Τέλος, αντιστρέφουμε την κίνηση U.



Εικόνα 14: Προσανατολισμός ακμών

5.7 Προσανατολισμός γωνιών

Τέλος, μένει να προσανατολίσουμε και τις γωνίες. Όμοια με τον προσανατολισμό ακμών, οι γωνίες προσανατολίζονται ανά 3 περιστροφές. Για να αλλάξουμε τον προσανατολισμό της γωνίας στη θέση UFR κατά 120° εκτελούμε τις κινήσεις $R F' R' F$ δυο φορές. Έπειτα τοποθετούμε την επόμενη γωνία, που δεν έχει σωστό προσανατολισμό, με κίνηση U στη θέση UFR και επαναλαμβάνουμε το βήμα. Τέλος, με μια κίνηση U ο κύβος έχει πλέον λυθεί.



Εικόνα 15: Προσανατολισμός γωνιών

5.8 Συνένωση κινήσεων

Πολλές φορές τυχαίνει να εκτελούμε συνεχόμενες κινήσεις της ίδιας πλευράς. Αυτό συμβαίνει επειδή ένας αλγόριθμος μπορεί να τελειώνει π.χ. σε κίνηση U' και ο επόμενος να ξεκινάει από κίνηση U . Αφού δούμε το σύνολο των κινήσεων που απαιτούνται από τη μέθοδο του αρχαρίου, μπορούμε στο τέλος να συνενώσουμε μερικές.

5.9 Ελάχιστο πλήθος αλγορίθμων

Αποδεικνύεται ότι ο κύβος μπορεί να λυθεί μόνο με τους τελευταίους 4 αλγορίθμους της μεθόδου του αρχαρίου. Δηλαδή, αν επιτρέψουμε στον κύβο να περιστρέφεται, μπορούμε πρώτα να μετακινήσουμε όλες τις ακμές στις θέσεις τους με τα βήματα που περιγράψαμε, έπειτα να τοποθετήσουμε όλες τις γωνίες, και τέλος να προσανατολίσουμε όλα τα κομμάτια. Αυτή η μέθοδος, αν και απλουστεύει τα βήματα που περιγράψαμε, αυξάνει κατά πολύ τις κινήσεις που χρειαζόμαστε για να λύσουμε έναν κύβο.

6. ΑΛΛΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Η μέθοδος του αρχάριου μπορεί να είναι εύκολη για απομνημόνευση, αλλά σίγουρα δεν είναι βέλτιστη καθώς απαιτεί κατά μέσο όρο 120 κινήσεις για έναν τυχαίο κύβο.

6.1 Η μέθοδος ZZ

Η μέθοδος ZZ δημιουργήθηκε το 2006 από τον Zbigniew Zborowski. Η μέθοδος έχει στόχο να περιορίσει το πλήθος των κινήσεων ώστε ο κύβος να λυθεί ταχύτερα. Κατά τη διάρκεια επίλυσης των πρώτων δύο επιπέδων, ο λύτης πρέπει να κάνει μόνο κινήσεις L, U και R, πράγμα που σημαίνει ότι τα χέρια του δεν αφήνουν ποτέ την αριστερή και δεξιά πλευρά του κύβου, με αποτέλεσμα ταχύτερη επίλυση. Επιπλέον, οι ακμές είναι ήδη προσανατολισμένες όταν φτάσει στην τελευταία πλευρά, που σημαίνει ότι έχει λιγότερα σενάρια για να αντιμετωπίσει. Όπως και στη μέθοδο του αρχάριου, το πρώτο βήμα είναι να μπουν οι ακμές της κάτω πλευράς στη θέση τους, ταυτόχρονα όμως, ο λύτης ψάχνει έξυπνους τρόπους ώστε να τοποθετήσει μαζί και τις γωνίες με το δεύτερο επίπεδο.

6.2 Ωμή βία

Η ωμή βία (brute force) είναι μια κλασική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων, που συνήθως δεν είναι αποδοτική χρονικά. Σε αυτή τη μέθοδο, απλά δοκιμάζουμε κάθε συνδυασμό κινήσεων μέχρι να βρούμε έναν που να λύνει τον κύβο. Αφού γνωρίζουμε τον αριθμό του Θεού, μπορούμε να σταματήσουμε αν ο συνδυασμός μας ξεπεράσει τις 20 κινήσεις. Έτσι, ο αλγόριθμος θα ελέγξει όλους τους συνδυασμούς που έχουν μήκος 1 μέχρι 20.

Συνολικά, θα πρέπει να ελεγχθούν $\sum_{i=1}^{20} 18^i = 13,498,132,464,419,376,890,580,750$ συνδυασμοί στο χειρότερο σενάριο. Επειδή ένας κύβος λύνεται κατά μέσο όρο σε 17 κινήσεις μπορούμε να υπολογίσουμε ότι ο αλγόριθμος θα σταματήσει περίπου σε $\sum_{i=1}^{17} 18^i = 2,314,494,592,664,502,210,318$ συνδυασμούς.

Μια μικρή βελτίωση της ωμής βίας θα ήταν να αποτρέψουμε να γίνουν περιστροφές πλευράς X αν δεν έχει προηγηθεί περιστροφή στον άξονα Y και Z. Με αυτό τον τρόπο αποτρέπουμε συνδυασμούς όπως $R R R'$ που είναι ίδιος με μια κίνηση R και συνδυασμούς όπως $R L R$ που είναι ίδιος με τον συνδυασμό $R^2 L$.

Τώρα το σύνολο των συνδυασμών είναι 124,123,236,070,477,452,864,588 στη χειρίστη περίπτωση και 45,234,415,477,579,246,668 κατά μέσο όρο, το οποίο παραμένει υπερβολικά μεγάλο.

6.3 Αλγόριθμος IDA* και Βάσεις προτύπων

Ο IDA* (Iterative Deepening A*) είναι ένας αλγόριθμος αναζήτησης που μπορεί να βρει το μικρότερο μονοπάτι μεταξύ μιας αρχικής κατάστασης και μιας κατάστασης στόχου. Είναι μια παραλλαγή του αλγορίθμου αναζήτησης κατά βάθος με επαναληπτική εκβάθυνση (IDS) καθώς προσθέτει την ιδέα της ευριστικής (heuristic) συνάρτησης του A*.

Μια ευριστική συνάρτηση για τον κύβο είναι η τρισδιάστατη εκδοχή της απόστασης Manhattan, δηλαδή η απόσταση ενός κομματιού του κύβου από τη θέση στόχου του. Η έρευνα για τον αλγόριθμο έγινε το 1997 από τον καθηγητή Richard Korf, με τις πρώτες μετρήσεις να δείχνουν πως ένας κύβος με λύση 14 κινήσεων λύνεται σε 3 μέρες.

Μια βελτίωση στην ευριστική συνάρτηση είναι οι βάσεις προτύπων (pattern databases) όπου μπορούμε να προυπολογίσουμε τα αποτελέσματα μιας ευριστικής όπως η Manhattan και να τα αποθηκεύσουμε σε έναν πίνακα για μελλοντική χρήση. Οι μετρήσεις αυτής τις μεθόδου έδειξαν πως για έναν κύβο με λύση 17 κινήσεων χρειάζονται 2 μέρες για να λυθεί ενώ για 18 κινήσεις χρειάζονται περίπου 2 εβδομάδες.

7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ο κύβος του Ρούμπικ είναι ένα σύνθετο πρόβλημα που απασχόλησε επιστήμονες για πολλά έτη, ώστε να βρεθεί αποτελεσματικός αλγόριθμος για την επίλυσή του. Παρ' όλες τις προσπάθειες, ο αλγόριθμος του Θεού δεν έχει βρεθεί, και βασιζόμαστε ακόμα στην μέθοδο της ωμής βίας για να βρούμε τη βέλτιστη λύση μιας τυχαίας κατάστασης.

Όσο περνάνε τα χρόνια και αποκτάμε περισσότερη υπολογιστική ισχύ καταφέρνουμε και λύνουμε μεγάλα προβλήματα όπως αυτό του κύβου, όμως η ανάπτυξη νέων μεθόδων και αλγορίθμων επιβάλλεται για να μικρύνει ο χώρος αναζήτησης. Ενδιαφέρον θα είχε η ανάπτυξη ενός bidirectional IDA* με βάσεις προτύπων για την αξιοποίηση των πολυπύρηνων επεξεργαστών και τα μεγέθη μνημών των σύγχρονων μηχανημάτων.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΡΟΛΟΓΙΑΣ

Πίνακας 1: Αντιστοιχίσεις των ελληνικών και ξενόγλωσσων όρων

Ξενόγλωσσος όρος	Ελληνικός Όρος
Group theory	Θεωρία ομάδων
Quarter turn	Στροφή 90°
Half turn	Στροφή 180°
Edge piece	Κομμάτι ακμής
Corner piece	Γωνιακό κομμάτι
Orientation	Προσανατολισμός
Parity check	Έλεγχος ισοτιμίας
Permutation parity	Ισοτιμία μεταθέσεων
Corner parity	Ισοτιμία γωνιών
Edge parity	Ισοτιμία ακμών
Brute force	Ωμή βία
Pattern databases	Βάσεις προτύπων

ΣΥΝΤΜΗΣΕΙΣ – ΑΡΚΤΙΚΟΛΕΞΑ – ΑΚΡΩΝΥΜΙΑ

Πίνακας 2: Ακρωνύμια και ανάπτυξή τους

UL	Up Left edge
UR	Up Right edge
UF	Up Front edge
UB	Up Back edge
DL	Down Left edge
DR	Down Right edge
DF	Down Front edge
DB	Down Back edge
FR	Front Right edge
FL	Front Left edge
BR	Back Right edge
BL	Back Left edge
ULF	Up Left Front corner
URF	Up Right Front corner
ULB	Up Left Back corner
URB	Up Right Back corner
DLF	Down Left Front corner
DRF	Down Right Front corner
DLB	Down Left Back corner
DRB	Down Right Back corner

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

Πίνακας 3: Το δεύτερο επίπεδο

Κομμάτια	Κινήσεις
UR FR	$R U' R' U' F' U F$
UR FL	$L' U L U F U' F'$
UL BR	$R' U R U B U' B'$
UR BL	$L U' L' U' B' U B$

Πίνακας 4: Το δεύτερο επίπεδο (λάθος προσανατολισμός)

Κομμάτια	Κινήσεις
UB FR	$F' U F U R U' R'$
UB FL	$F U' F' U' L' U L$
UF BR	$B U' B' U' R' U R$
UF BL	$B' U B U L U' L'$

Πίνακας 5: Μετακίνηση ακμών της πάνω πλευράς

Κομμάτια	Κινήσεις
UF UL	$U F R U R' U' F'$
UL UB	$U L F U F' U' L'$
UB UR	$U B L U L' U' B'$
UR UF	$U R B U B' U' R'$

Πίνακας 6: Μετακίνηση γωνιών της πάνω πλευράς

Κομμάτια	Κινήσεις
URF ULF URB (clockwise)	$R' F' L' F R F' L F$
URF ULF URB (counter clockwise)	$F' L' F R' F' L F R$

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] "The history of the rubik's cube" <https://eu.rubiks.com/about/the-history-of-the-rubiks-cube> [Προσπελάστηκε 2/3/18]
- [2] "Cube Facts" <https://eu.rubiks.com/about/cube-facts> [Προσπελάστηκε 2/3/18]
- [3] "World Cube Association". <http://www.worldcubeassociation.org/>. [Προσπελάστηκε 2/3/18]
- [4] Davis, Tom (2006). "Group Theory via Rubik's Cube". <http://geometer.org/rubik/group.pdf> [Προσπελάστηκε 2/3/18]
- [5] The Mathematics of the Rubik's Cube
- [6] "Introduction to Group Theory and Permutation Puzzles" (2009) <http://web.mit.edu/sp.268/www/rubik.pdf> [Προσπελάστηκε 2/3/18]
- [7] "Group Theory and the Rubik's Cube" <http://www.math.harvard.edu/~jjchen/> [Προσπελάστηκε 2/3/18]
- [8] "Rubik's Cube Notation". <https://ruwix.com/the-rubiks-cube/notation/>. [Προσπελάστηκε 2/3/18]
- [9] Singmaster, David (1981). Notes on Rubik's Magic Cube. Penguin Books.
- [10] Rokicki, Tomas; et al. "God's Number is 20". <http://www.cube20.org/> [Προσπελάστηκε 2/3/18]
- [11] Rokicki, Tomas; et al. "God's Number is 26 in the Quarter-Turn Metric". <http://www.cube20.org/qtm> [Προσπελάστηκε 2/3/18]
- [12] Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson, And John Dethridge "The diameter of the Rubik's cube group is twenty" <http://tomas.rokicki.com/rubik20.pdf> [Προσπελάστηκε 2/3/18]
- [13] Schönert, Martin. "Analyzing Rubik's Cube with GAP". <https://www.gap-system.org/Doc/Examples/rubik.html> [Προσπελάστηκε 2/3/18]
- [14] "ZZ Method Speedsolving" <http://cube.crider.co.uk/zz.php> [Προσπελάστηκε 2/3/18]
- [15] Michael Reid's Optimal Solver for Rubik's Cube. http://www.cflmath.com/~reid/Rubik/optimal_solver.html [Προσπελάστηκε 2/3/18]