Γιώργος Π. Ασημάκης

ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ II

ΤΟ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ

ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

ΙΣΧΥΣ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΤΟ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ

ΤΡΙΦΑΣΙΚΟ ΡΕΥΜΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ-ΑΝΟΡΘΩΣΗ

Εκπαιδευτικό βοήθημα Γ' ΕΠΑ.Λ.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο} : ΙΣΧΥΣ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΤΟ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{Ο} : ΤΡΙΦΑΣΙΚΟ ΡΕΥΜΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{Ο} : ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ - ΑΝΟΡΘΩΣΗ

Κεφάλαιο 1ο
ΤΟ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ

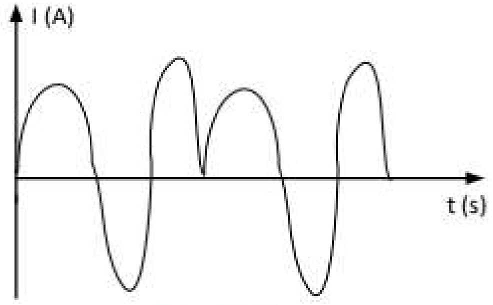
1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Στην ηλεκτρολογία, εκτός από το συνεχές ρεύμα ιδιαίτερα σημαντικό είναι το εναλλασσόμενο ρεύμα. Συναντάμε μορφές μεταβαλλόμενων ρευμάτων τα οποία ως προς τον χρόνο έχουν και διαφορετικό χαρακτήρα καθώς αλλάζει η ένταση και η φορά τους. **Μεταβαλλόμενο ρεύμα,** είναι το ρεύμα του οποίου η ένταση ή η φορά ή και τα δύο μαζί μεταβάλλονται ως προς τον χρόνο. Η αξιοποίηση του μεταβαλλόμενου εναλλασσόμενου ρεύματος είναι ζωτικής σημασίας στην επιστήμη των εφαρμογών. Ορίζουμε ως στιγμιαία τιμή της έντασης του ρεύματος (i) την τιμή της έντασης ενός μεταβαλλόμενου ρεύματος σε κάποια χρονική στιγμή : $i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ (μονάδα μέτρησης το Ampere). Δq είναι το ηλεκτρικό φορτίο Coulomb, και Δt ο χρόνος (sec), ώστε οι μονάδες μέτρησης να είναι ισοδύναμα, $1A = \frac{1C}{1s}$.

1. Συνεχές Ρεύμα (Σ.Ρ. ή D.C.): Είναι η τιμή του ρεύματος που παραμένει σταθερή χωρίς να μεταβάλλεται στην διάρκεια του χρόνου. Η μορφή του Σ.Ρ. είναι η εξής:

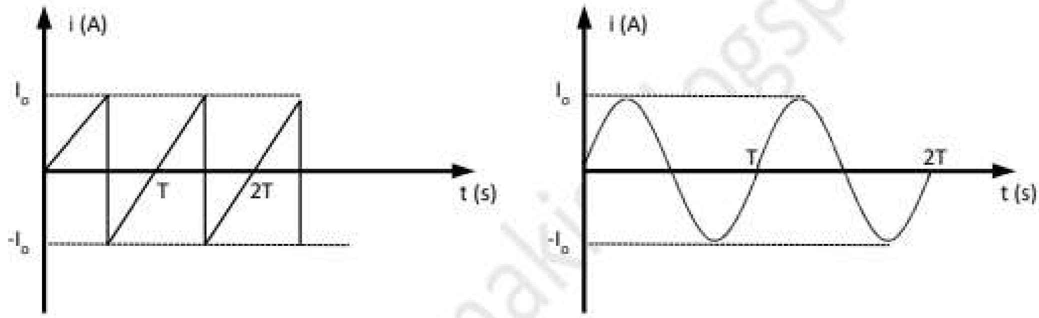
Σχήμα 1. 1

2. Μη Περιοδικό ρεύμα: Καλείται το ρεύμα που οι στιγμιαίες τιμές του δεν επαναλαμβάνονται σε ίσα χρονικά διαστήματα. Έχει την εξής μορφή:



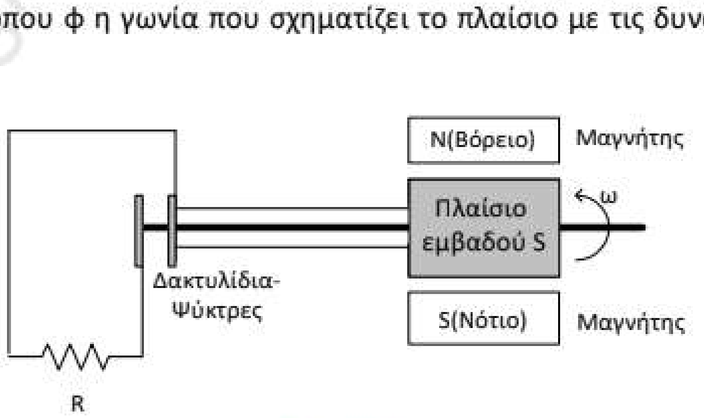
Σχήμα 1. 2

3.Περιοδικό ρεύμα: Καλείται το ρεύμα που οι στιγμιαίες τιμές του επαναλαμβάνονται σε ίσα χρονικά διαστήματα. Έχει τις εξής μορφές:



Σχήμα 1. 3

Η παραγωγή εναλλασσόμενου ρεύματος γίνεται μέσα σε ένα ομοιόμορφο ομογενές μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής Β, εντός του οποίου είναι τοποθετημένο κάθετα ένα πλαίσιο Ν σπειρών και εμβαδού S, γύρω από σταθερό άξονα που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Η μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή Φ που δημιουργείται είναι εξαρτώμενη από την μαγνητική επαγωγή Β (ισχύει $\Phi = B \cdot S \cdot συνφ$, όπου φ η γωνία που σχηματίζει το πλαίσιο με τις δυναμικές γραμμές του πεδίου).



Σχήμα 1. 4

Στα άκρα του πλαισίου κατά την περιστροφή του εντός του μαγνητικού πεδίου Β, δημιουργείται επαγόμενη εναλλασσόμενη τάση (σύμφωνα με τον νόμο του Faraday

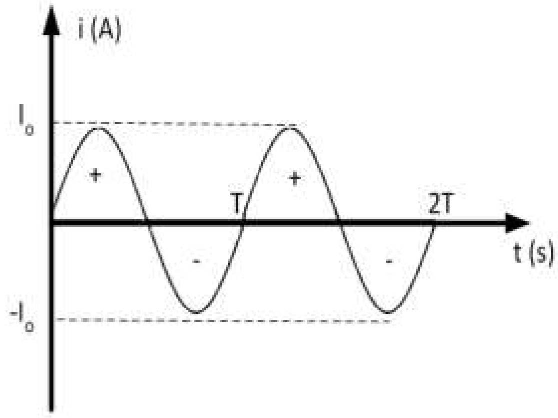
$E_{επ} = N\left|\frac{ΔΦ}{Δt}\right|$) που αποδίδεται από την σχέση $E_{επ} = V_o \cdot ημωt$. Οπότε η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο είναι ημιτονοειδούς μορφής:

$$i = \frac{E}{R} = \frac{V_o \cdot ημωt}{R} = I_o ημωt\ .$$

1.2 ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ (Ε.Ρ.) ΚΑΙ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΗ ΤΑΣΗ (Ε.Τ.)

Εναλλασσόμενο Ρεύμα (Ε.Ρ. ή A.C.): Είναι το ρεύμα του οποίου η φορά και η τιμή της έντασής του, μεταβάλλονται περιοδικά με τον χρόνο ακολουθώντας ημιτονοειδή μορφή. Εναλλασσόμενο ρεύμα, καλείται το περιοδικό ρεύμα στο οποίο το φορτίο που μετακινείται προς την μία κατεύθυνση (θετική φορά) είναι ίσο με το φορτίο που μετακινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση (αρνητική φορά) κατά την περιοδική διάρκεια του χρόνου. Είναι προφανές ότι η μορφή του εναλλασσόμενου ρεύματος, εναλλάσσεται περιοδικά με τον χρόνο και δεν μένει σταθερή όπως συμβαίνει στο συνεχές ρεύμα.

Η κυματομορφή του Ε.Ρ. είναι η εξής:



Σχήμα 1. 5

Χαρακτηριστικά μεγέθη του εναλλασσόμενου ρεύματος: είναι η συχνότητα και η περίοδος.

Περίοδος (Τ): του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι ο χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη εναλλαγή του φυσικού φαινομένου. Διαχωρίζεται σε δύο ημιπεριόδους την θετική και την αρνητική. Μονάδα μέτρησης τα δευτερόλεπτα (sec).

Συχνότητα (f): του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι ο αριθμός που μας δείχνει πόσες φορές μεταβάλλεται το φυσικό φαινόμενο στην μονάδα του χρόνου (δηλαδή Ν επαναλήψεις) και δίνεται από την σχέση: $f = \frac{N}{t}$. Μονάδα μέτρησης: Herz (Hz).

Η συχνότητα και η περίοδος συνδέονται με την μαθηματική σχέση: $f = \frac{1}{T} \Leftrightarrow T = \frac{1}{f}$.

Κυκλική συχνότητα ω καλείται η φάση της ημιτονοειδής μεταβολής του εναλλασσόμενου ρεύματος, που αντιστοιχεί σε ένα κύκλο το δευτερόλεπτο. Δίνεται από την σχέση $\omega = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow \omega = 2\pi f$.

Μονάδα μέτρησης τα ακτίνια ανά δευτερόλεπτο ($\frac{rad}{sec}$).

Για κάποιο χρονικό διάστημα t, μπορούμε να ορίσουμε ως φάση φ το γινόμενο της κυκλικής συχνότητας επί αυτόν τον χρόνο t, στον οποίο έγινε η ημιτονοειδής μεταβολή.

Η φάση φ, με μονάδες μέτρησης τα ακτίνια (rad), ορίζεται από την σχέση

$$\phi = \omega \cdot t = \frac{2\pi}{T} t \cdot$$

Η μαθηματική έκφραση του εναλλασσόμενου ρεύματος δίνεται από την σχέση:

$$i = I_o \cdot \eta\mu\phi \cdot$$

Με κατάλληλη επεξεργασία προκύπτει ότι:

$$I_o \eta\mu\phi \Leftrightarrow i = I_o \cdot \eta\mu(\omega t) \Leftrightarrow i = I_o \cdot \eta\mu(\frac{2\pi}{T} t) \Leftrightarrow i = I_o \cdot \eta\mu(2\pi f t) \cdot$$

Τα αντίστοιχα μεγέθη είναι τα εξής:

Φυσικό μέγεθος	Σύμβολο μεγέθους	Μονάδα μέτρησης
Στιγμιαία ένταση ρεύματος	i	A
Πλάτος της έντασης του ρεύματος (μέγιστη τιμή)	I_0	A
Συχνότητα	f	Hz
Περίοδος (για ένα πλήρη κύκλο ίσο με 2π ή 360^{o})	T	sec
Κυκλική συχνότητα	ω	rad/sec
Φάση	φ	rad

Επίσης, π είναι η περιφέρεια του κύκλου (με αριθμητική αντικατάσταση π=3,14).

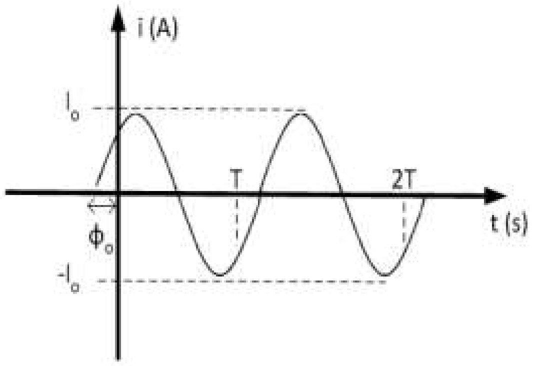
Στην περίπτωση κατά την οποία, το εναλλασσόμενο ρεύμα δεν ξεκινά την χρονική στιγμή t_0=0 από το μηδέν, αλλά από μια άλλη διαφορετική τιμή, τότε έχουμε αρχική φάση ϕ_o, η οποία θα είναι ίση με

$$\phi = \omega t + \phi_o \cdot$$

Το εναλλασσόμενο ρεύμα σε αυτή την περίπτωση θα είναι ισοδύναμα:

$$i = I_o \cdot \eta\mu(\phi_o + \omega t) \ \cdot$$

Η αντίστοιχη κυματομορφή, με αρχική φάση του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι η εξής:



Σχήμα 1. 6

Η εναλλασσόμενη τάση, όπως και το εναλλασσόμενο ρεύμα είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου και δίνεται επίσης από την σχέση:

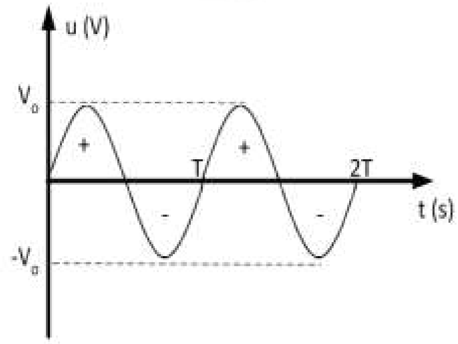
$$u = V_o ημφ \Rightarrow u = V_o ημ(ωt) \quad \text{ή διαφορετικά} \quad u = V_o ημ(\frac{2π}{T} \cdot t) = V_o ημ(2πft)$$

Vo είναι η μέγιστη τιμή της τάσης ή αλλιώς το πλάτος της.

Εάν έχουμε αρχική φάση τότε η εναλλασσόμενη τάση θα δίνεται από την σχέση:

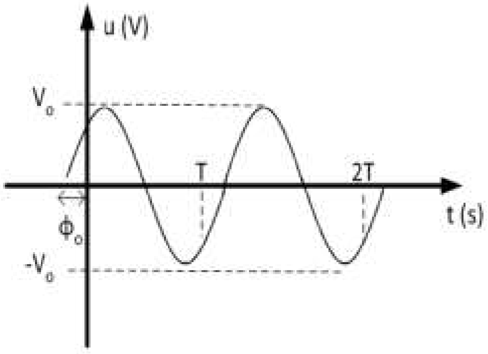
$$u = V_o \cdot ημ(φ_o + ωt)$$

Η κυματομορφή της εναλλασσόμενης τάσης είναι η εξής:



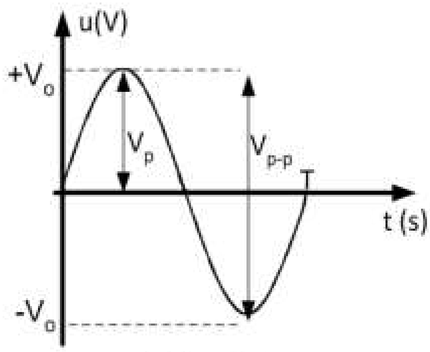
Σχήμα 1. 7

Η κυματομορφή της εναλλασσόμενης τάσης με αρχική φάση είναι η εξής:



Σχήμα 1. 8

Συχνά, το πλάτος μιας εναλλασσόμενης τάσης χαρακτηρίζεται ως V_p (τιμή κορυφής) και ως $V_{p\text{-}p}$ (η τιμή από κορυφή σε κορυφή) όπως φαίνεται και στο σχήμα.
Ισχύει $V_{p\text{-}p}=2V_o=2V_p$



Σχήμα 1. 9

1.3 ΕΝΕΡΓΟΣ ΕΝΤΑΣΗ ΚΑΙ ΤΑΣΗ

Ενεργός ένταση $I_{εν}$ (ή I_{rms}): ενός εναλλασσόμενου ρεύματος καλείται η σταθερή ένταση που πρέπει να έχει το συνεχές ρεύμα που όταν διαρρέει τον ίδιο αντιστάτη με το εναλλασσόμενο ρεύμα, αποδίδει στον ίδιο χρόνο το ίδιο ποσό θερμότητας με το εναλλασσόμενο.
Αποδεικνύεται (με μαθηματική επεξεργασία), ότι η ενεργός ένταση δίνεται από την σχέση:

$$I_{εν}=\frac{I_o}{\sqrt{2}} \xRightarrow{\frac{1}{\sqrt{2}}=0,707} I_{εν}=0,707\cdot I_o$$

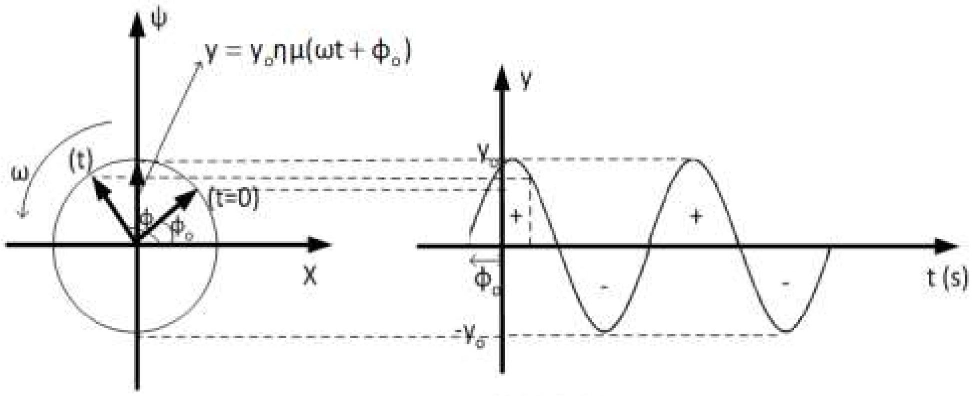
Ενεργός Τάση $V_{εν}$ (ή V_{rms}): ενός εναλλασσόμενου ρεύματος καλείται η τιμή της συνεχούς τάσης η οποία όταν εφαρμόζεται στα άκρα του ίδιου αντιστάτη δίνει ρεύμα με ένταση ίση με την ενεργό τιμή της έντασης του εναλλασσόμενου ρεύματος. Δίνεται από την:

$$V_{εν}=\frac{V_o}{\sqrt{2}}=0,707\cdot V_o$$

Οι ενεργές τιμές τάσης και ρεύματος, επιλέχθηκαν ως αντιπροσωπευτικά μεγέθη για το εναλλασσόμενο ρεύμα, γιατί αποδίδεται ίδιο ποσό θερμότητας στο περιβάλλον από ένα ωμικό στοιχείο είτε αυτό διαρρέεται από συνεχές είτε από εναλλασσόμενο ρεύμα.

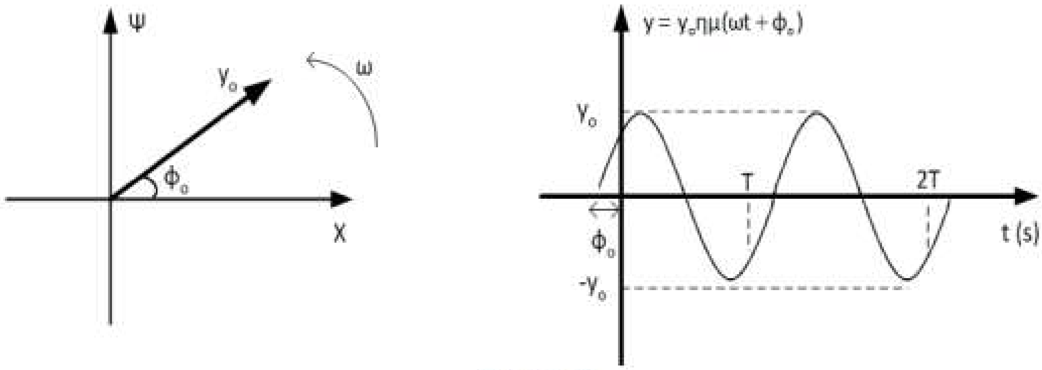
1.4 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

Τυχαίο εναλλασσόμενο μέγεθος (ρεύμα, τάση) έχει ημιτονοειδή μορφή εξίσωσης την: $y = y_o ημ(ωt + φ_o)$. Αυτό το φυσικό μέγεθος μπορεί να παρασταθεί διανυσματικά (σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων), όπως φαίνεται στην επόμενη **διανυσματική παράσταση του εναλλασσόμενου μεγέθους** (ρεύμα, τάση). Αυτό το διάνυσμα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, και με αριστερόστροφη φορά (αντίθετη από την κίνηση των δεικτών του ρολογιού).



Σχήμα 1. 10

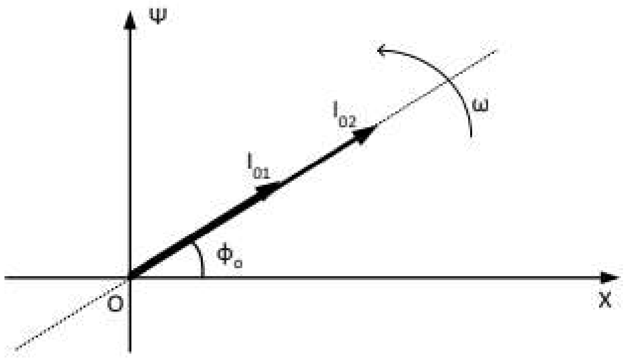
Το διάνυσμα έχει μήκος που ισοδυναμεί με το πλάτος y_o του τυχαίου εναλλασσόμενου μεγέθους (ρεύμα, τάση) και το οποίο σχηματίζει αρχική φάση γωνίας $φ_o$, όπως φαίνεται ακολούθως:



Σχήμα 1. 11

1.5 ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΑ ΡΕΥΜΑΤΑ ΣΕ ΦΑΣΗ ΚΑΙ ΣΕ ΦΑΣΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ

Δύο εναλλασσόμενα ρεύματα (ίδιας συχνότητας), βρίσκονται **σε φάση** (είναι όπως τα καλούμε, **συμφασικά)** όταν έχουν την ίδια αρχική φάση $φ_0$. Η διανυσματική τους παράσταση φαίνεται ακολούθως:



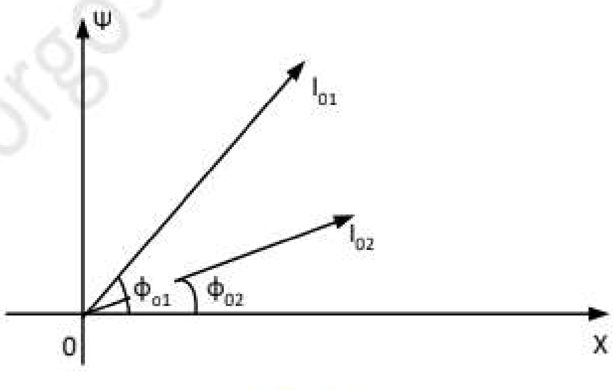
Σχήμα 1. 12

Δύο εναλλασσόμενα ρεύματα (ίδιας συχνότητας), βρίσκονται σε **διαφορά φάσης** (έχουν **απόκλιση φάσης ή διαφορά φάσης**) όταν έχουν διαφορετικές αρχικές φάσεις ϕ_{o1} και ϕ_{o2}. Η διαφορά φάσης δίνεται από την σχέση $\Delta\phi = \phi_{o1} - \phi_{o2}$.

Συγκεκριμένα όταν $\phi_{o2}>\phi_{o1}$ το ρεύμα i_2 παίρνει μέγιστη τιμή πριν από το ρεύμα i_1 (και αντιστρόφως όταν, $\phi_{o2}<\phi_{o1}$ το ρεύμα i_1 παίρνει μέγιστη τιμή πριν από το ρεύμα i_2).

- Όταν είναι **Δφ>0** (διαφορά φάσης θετική), τότε το ρεύμα i_1 **προηγείται** χρονικά από το ρεύμα i_2 .
- Όταν είναι **Δφ<0** (διαφορά φάσης αρνητική), τότε το ρεύμα i_2 **προηγείται** από το ρεύμα i_1 .

Η διανυσματική παράσταση δύο εναλλασσομένων ρευμάτων $i_1 = I_{o1} \cdot ημ(ωt + \phi_{o1})$ και $i_2 = I_{o2} \cdot ημ(ωt + \phi_{o2})$ με διαφορά φάσης θετική **Δφ>0**, (δηλαδή το i_1 προπορεύεται του i_2), φαίνεται ακολούθως:



Σχήμα 1. 13

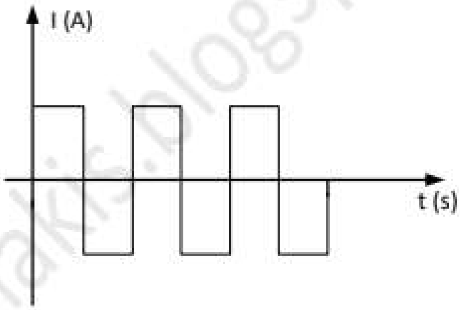
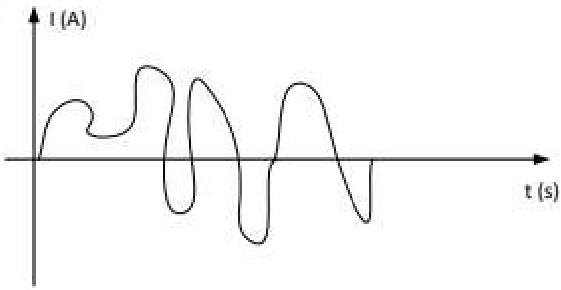
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Συχνότητα-Περίοδος	$f=\frac{1}{T} \Leftrightarrow T=\frac{1}{f}$.
Εναλλασσόμενου ρεύμα	$i=I_o \cdot ημ(ω \cdot t)$
Εναλλασσόμενο ρεύμα με αρχική φάση	$i=I_o \cdot ημ(φ_o+ωt)$
Εναλλασσόμενη τάση	$u=V_o \cdot ημφ_o$
Εναλλασσόμενη τάση με αρχική φάση	$u=V_o \cdot ημ(φ_o+ωt)$
Διαφορά φάσης	$Δφ=φ_{o1}-φ_{o2}$
Δφ>0 (διαφορά φάσης θετική)	Το ρεύμα i_1 προηγείται του ρεύματος i_2.
Δφ<0 (διαφορά φάσης αρνητική)	Το ρεύμα i_2 προηγείται του ρεύματος i_1
Ενεργός ένταση	$I_{εν}=\frac{I_o}{\sqrt{2}} \overset{\frac{1}{\sqrt{2}}=0,707}{\Rightarrow} I_{εν}=0,707 \cdot I_o$
Ενεργός Τάση	$V_{εν}=\frac{V_o}{\sqrt{2}}=0,707 \cdot V_o$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΕΡΩΤΗΣΗ 1.1

Για τα επόμενα μεταβαλλόμενα ρεύματα, να αντιστοιχίσετε σωστά την μορφή τους με τις γραφικές τους απεικονίσεις.

I/ **Μορφή ρεύματος που αλλάζει η έντασή του και η φορά του ως προς τον χρόνο**	 Σχήμα 1. 14
II/ **Μορφή ρεύματος που αλλάζει η έντασή του και παραμένει σταθερή η φορά του ως προς τον χρόνο**	 Σχήμα 1. 15
III/ **Μορφή ρεύματος που αλλάζει η φορά του και παραμένει σταθερή η έντασή του**	 Σχήμα 1. 16

Απάντηση

Η αντιστοιχία στον πίνακα είναι η εξής:

- I/ με σχήμα 1.16
- II/ με σχήμα 1.14
- III/ με σχήμα 1.15

ΕΡΩΤΗΣΗ 1.2

Να αναφέρετε την διαφορά μεταξύ ενός εναλλασσόμενου ρεύματος και ενός περιοδικού μεταβαλλόμενου ρεύματος.

Απάντηση

Στο εναλλασσόμενο ρεύμα η φορά και η τιμή μεταβάλλονται περιοδικά με τον χρόνο. Το φορτίο που μετακινείται προς μια κατεύθυνση είναι ίσο με το φορτίο που μετακινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση στο διάστημα μιας περιόδου. Στο περιοδικό μεταβαλλόμενο ρεύμα δύναται να αλλάζει η ένταση, ή η φορά, ή και τα δύο μαζί ως προς τον χρόνο.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1.3

Πως ονομάζεται ο αριθμός των κύκλων που εκτελεί μια εναλλασσόμενη τάση σε 1sec;

Απάντηση

Ο αριθμός των κύκλων που εκτελεί μια εναλλασσόμενη τάση ονομάζεται συχνότητα του περιοδικού ρεύματος και αποδίδεται από την σχέση $f = \frac{1}{T}$ (Hz) ή $f = \frac{N}{\Delta t}$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1.4

Να βρεθεί η περίοδος εναλλασσόμενου ρεύματος συχνότητας 50Hz.

Απάντηση

Είναι 0,02 sec καθώς ισχύει $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0{,}02\text{sec}$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 1.5

Γιατί αξιοποιούμε στις μετρήσεις μεγεθών την ενεργό τιμή του ρεύματος;

Απάντηση

Η ενεργός τιμή επιλέχθηκε με το ότι θα πρέπει να αποδίδεται η ίδια θερμότητα στο περιβάλλον από μια αντίσταση είτε αυτή διαρρέεται από συνεχές είτε από εναλλασσόμενο ρεύμα, στον ίδιο χρόνο χρήσης. Γι’ αυτό τον λόγο στα εναλλασσόμενα ρεύματα κάνουμε χρήση ενεργών τιμών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1.1

Ποια είναι η στιγμιαία ένταση του μεταβαλλόμενου ρεύματος που διαρρέει αγωγό τροφοδοσίας, όταν περνάει από αυτόν φορτίο Coulomb Δq= 5C την χρονική στιγμή Δt=2 sec;

Απάντηση

Η στιγμιαία τιμή της έντασης του ρεύματος είναι

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ A}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.2

Η ενεργός τιμή εναλλασσόμενης τάσης είναι 230 V. Ποια είναι η μέγιστη τιμή της;

Απάντηση:

Η μέγιστη τιμή είναι $V_{εν} = \frac{V_o}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_o = 230\sqrt{2} = 325{,}2 \text{ Volt}$.

ΑΣΚΗΣΗ 1.3

Υπολογίστε την ενεργό τιμή εναλλασσομένου ρεύματος όταν η μέγιστη τιμή του είναι 30 A.

Απάντηση

Είναι $$I_{εν} = \frac{I_o}{\sqrt{2}} = \frac{30}{\sqrt{2}} = 15\sqrt{2} = 21{,}2 \text{ A}$$.

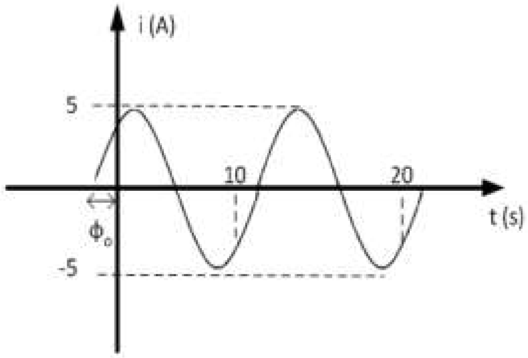
ΑΣΚΗΣΗ 1.4

Δίνεται η κυματομορφή ενός εναλλασσόμενου ρεύματος. Με βάση τις τιμές που αναγράφονται στο σχήμα, να υπολογίσετε:

1. Το πλάτος της έντασης του ρεύματος

2. Την ενεργό τιμή της έντασης του ρεύματος

3. Την περίοδο και την συχνότητα



Σχήμα 1. 17

Απάντηση

1. Το πλάτος της έντασης του ρεύματος είναι I_o=5 A.

2. Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος είναι $I_{εν} = \frac{I_o}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{2} = 2,5\sqrt{2}$ A.

3. Η περίοδος είναι T=10sec και η συχνότητα είναι $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{10} = 0,1$ Hz .

ΑΣΚΗΣΗ 1.5

Να βρείτε την στιγμιαία τιμή της εναλλασσόμενης τάσης $u=230ημ(ωt+45^0)$ όταν t=0,01s και f=50Hz.

Απάντηση

Είναι V_o=230 Volt, ω=2πf=100π rad και $u=230ημ(ωt+45^0)$ ή $u = 230ημ(100πt+\frac{π}{4})$. Για t=0 sec, είναι: $u = 230ημ(\frac{π}{4}) = 230 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 162,6$ Volt.

Για την χρονική στιγμή t=0,01 sec, προκύπτει

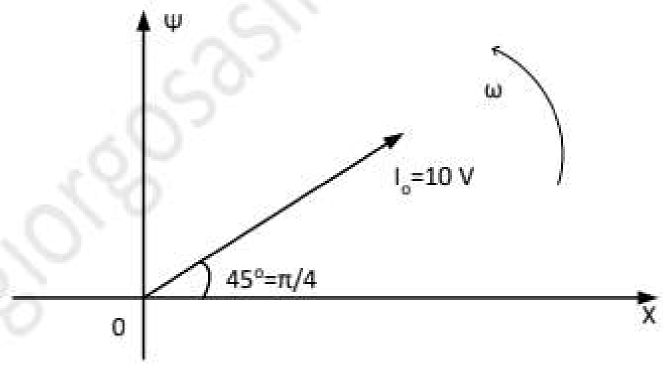
$$u = 230ημ(100π \cdot 0,01 + \frac{π}{4}) = 230ημ(\frac{5π}{4}) = 300 \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -212,1 \text{Volt}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.6

Να παρασταθεί διανυσματικά το εναλλασσόμενο ρεύμα $i = 10ημ(ωt + 45^\circ)$.

Απάντηση

Η διανυσματική αναπαράσταση του εναλλασσόμενου ρεύματος είναι η ακόλουθη:



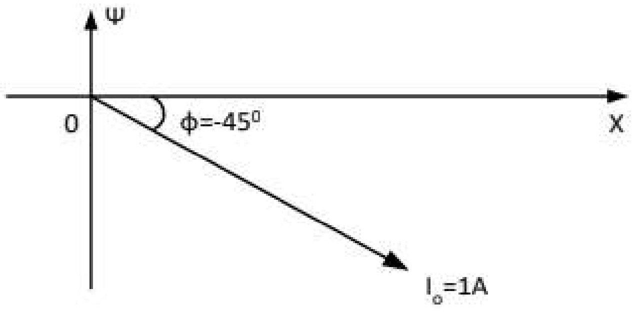
Σχήμα 1. 18

ΑΣΚΗΣΗ 1.7

Να παρασταθεί διανυσματικά το εναλλασσόμενο ρεύμα $i = ημ(ωt - 45^\circ)$.

Απάντηση

Η διανυσματική παράσταση γνωρίζοντας από την εκφώνηση ότι I_o=1 A και φ=-45°, είναι η επόμενη:



Σχήμα 1. 19

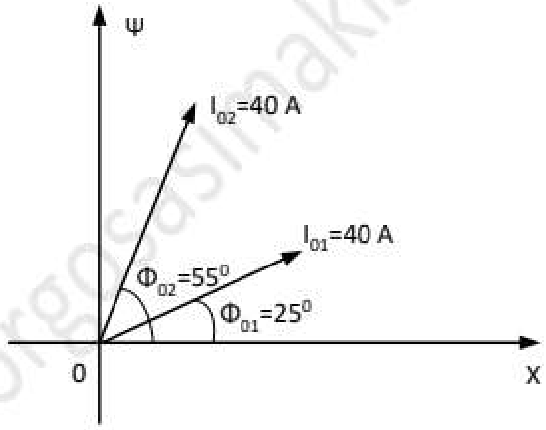
ΑΣΚΗΣΗ 1.8

Δίνονται δύο εναλλασσόμενα ρεύματα $i_1 = 20 \cdot ημ(ωt + 25^{\circ})$ και $i_2 = 40 \cdot ημ(ωt + 55^{\circ})$. Να βρεθεί η διαφορά φάσης Δφ των ρευμάτων και να γίνει το διανυσματικό τους διάγραμμα.

Απάντηση

Η διαφορά φάσης των ρευμάτων είναι: $Δφ = φ_{01} - φ_{02} = 25^{\circ} - 55^{\circ} = -30^{\circ} = -\frac{π}{6} < 0$.

Η διαφορά φάσης είναι Δφ<0, επομένως το ρεύμα i_2 προηγείται χρονικά του ρεύματος i_1. Το διανυσματικό διάγραμμα των δύο ρευμάτων είναι το ακόλουθο :



Σχήμα 1. 20

ΑΣΚΗΣΗ 1.9

Ενεργός τάση 100 V τροφοδοτεί κύκλωμα με αρχική φάση 65^{0}. Η ενεργός ένταση είναι I=10A με καθυστέρηση φάσης 50^{0}.

1. Να βρείτε την διαφορά φάσεως, τάσεως και εντάσεως.

1. Να σχεδιάσετε το διανυσματικό διάγραμμα τάσεων και εντάσεων ρευμάτων.

Απάντηση

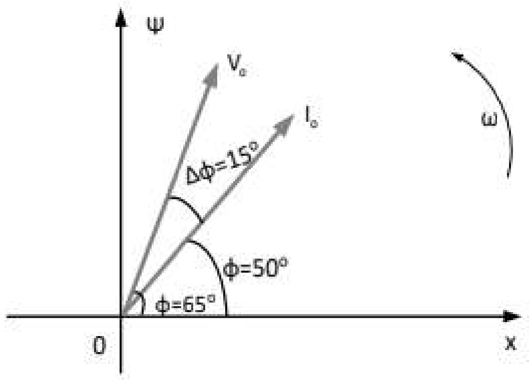
1.

Η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και έντασης είναι $Δφ = φ_u - φ_i = 65^{\circ} - 50^{\circ} = 15^{\circ}$.

2.

Το διανυσματικό διάγραμμα είναι το επόμενο (με τιμές $I_{εν} = \frac{I_o}{\sqrt{2}} \Rightarrow I_o = \frac{10}{\sqrt{2}}\sqrt{2} = 10$ A

και $V_{εν} = \frac{V_o}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_o = 100\sqrt{2}$ V).



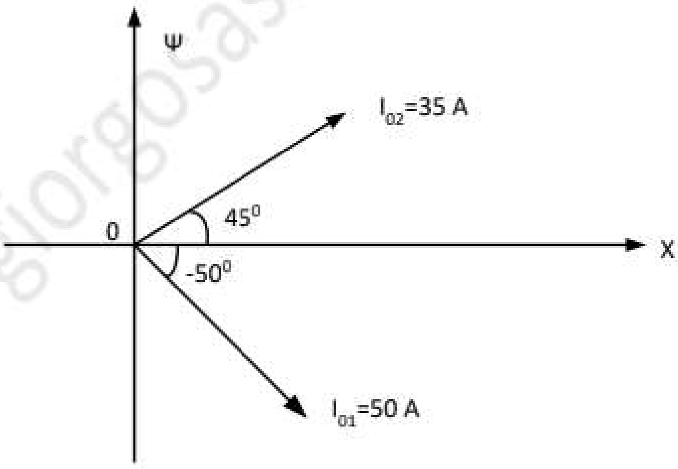
Σχήμα 1. 21

ΑΣΚΗΣΗ 1.10

Να βρεθεί η διαφορά φάσης Δφ μεταξύ των εναλλασσόμενων ρευμάτων $i_1 = 50ημ(628t - 50^\circ)$ **και** $i_2 = 35ημ(628t + 45^\circ)$**. Ποίο ρεύμα προπορεύεται και γιατί;**

Απάντηση

Η διανυσματική παράσταση με γνωστά από την εκφώνηση ότι $φ_1$=- 50^o και $φ_2$=45^o είναι η επόμενη:



Σχήμα 1. 22

Η διαφορά φάσης προκύπτει ότι είναι $Δφ = φ_{01} - φ_{02} = -50^\circ - 45^\circ = -95^\circ$, δηλαδή $Δφ = -95^\circ < 0$ και επειδή Δφ<0, προηγείται το ρεύμα i_2.

ΑΣΚΗΣΗ 1.11

Πηγή εναλλασσόμενης τάση της μορφής $u = 230\sqrt{2}\eta\mu(628t)$ **εφαρμόζεται σε ωμική αντίσταση R=230 Ω. Ζητούνται:**

1. Η συχνότητα f και η περίοδος T.

2. Η ενεργός τιμή της τάσης και του ρεύματος.

3. Η στιγμιαία τιμή της έντασης του ρεύματος.

Απάντηση

1.

Η κυκλική συχνότητα είναι $\omega = 628\dfrac{rad}{sec}$.

Η συχνότητα είναι $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{628}{2\cdot 3{,}14} = \dfrac{628}{6{,}28} = 100Hz$.

Η περίοδος είναι $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01sec$.

2.

Η ενεργός τιμή της τάσης και του ρεύματος είναι αντίστοιχα

$$V_{\varepsilon\nu} = \frac{V_o}{\sqrt{2}} = \frac{230\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 230\,V \quad \text{και} \quad I_{\varepsilon\nu} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{R} = \frac{\frac{V_o}{\sqrt{2}}}{R} = 230\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}\cdot 230} = \frac{230}{230} = 1\,A.$$

3.

Η στιγμιαία τιμή της έντασης του ρεύματος είναι

$$i = I_o\eta\mu(\omega t) = I_{\varepsilon\nu}\sqrt{2}\,\eta\mu\,314\,t = \sqrt{2}\,\eta\mu\,628\,t \;\; A.$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.12

Διαθέτουμε δύο τυχαία εναλλασσόμενα ρεύματα $i_1 = 25\eta\mu(314t - 10^{\circ})$ **και** $i_2 = 10\eta\mu(314t + 35^{\circ})$**. Να βρεθεί το άθροισμα των ρευμάτων** i_1 **και** i_2**.**

Απάντηση

Η άσκηση θα λυθεί με βάση το νόμο του συνημίτονου σύμφωνα με τον οποίο ισχύει

$$I_{o\lambda} = \sqrt{{I_{02}}^2 + {I_{01}}^2 + 2I_{01}I_{02}\sigma\upsilon\nu(\phi_2 - \phi_1)^{o}} \quad \text{και} \quad \varepsilon\phi\phi = \frac{I_{02}\eta\mu(\phi_2 - \phi_1)^{o}}{I_{01} + I_{02}\sigma\upsilon\nu(\phi_2 - \phi_1)^{o}}.$$

Επομένως εφαρμόζοντας τις τιμές της εκφώνησης προκύπτει ότι

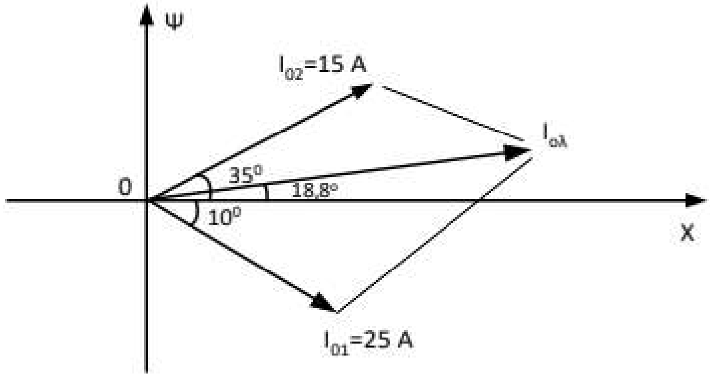
$$I_{o\lambda} = \sqrt{10^2 + 25^2 + 2\cdot 10\cdot 25\cdot \sigma\upsilon\nu 45^{o}} = \sqrt{100 + 625 + 500\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{725 + 500\cdot 0{,}707} = 32{,}9\text{ A}.$$

και επίσης

$$\varepsilon\phi\phi = \frac{10\eta\mu\,45^{o}}{25 + 10\sigma\upsilon\nu 45^{0}} = \frac{25\cdot 0{,}707}{25 + 10\cdot 0{,}707} = \frac{17{,}675}{32{,}07} = 0{,}55 \quad \text{ή} \quad \phi = \varepsilon\phi^{-1}\,0{,}55 \Rightarrow \phi = 28{,}8^{o}$$

Οπότε η γωνία μεταξύ των i_1 και i_2 είναι θ=28,8°-10°=18,8°.

Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης θα προκύψει η διανυσματική παράσταση με $\phi_1=-10°$ και $\phi_2=35°$:



Σχήμα 1. 23

Τελικά έχουμε ότι $i_1+i_2=I_{ολ}ημ(ωt+θ)=32{,}9ημ(314t+18{,}8°)$ A.

ΑΣΚΗΣΗ 1.13

Προσθέτουμε διανυσματικά δύο εναλλασσόμενα ρεύματα με ενεργές τιμές I_1=6A και I_2=4A. Να βρείτε την ολική ένταση του ρεύματος και να κάνετε τα διανυσματικά τους διαγράμματα, όταν:

1) Τα ρεύματα είναι συμφασικά (χωρίς διαφορά φάσης).

2) Το I_1 προπορεύεται του I_2 κατά 45^0.

3) Το I_2 προπορεύεται του I_1 κατά 90^o.

Απάντηση

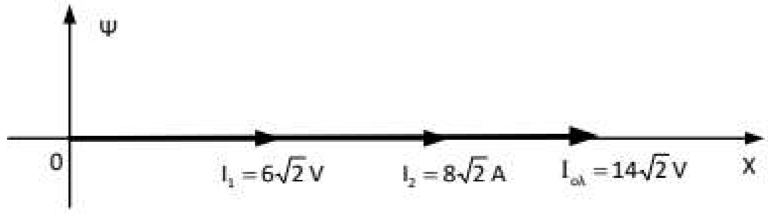
1.

Είναι $I_{εν}=\frac{I_o}{\sqrt{2}} \Rightarrow I_{o1}=6\sqrt{2}$ A και ομοίως $I_{o2}=8\sqrt{2}$ A, οπότε η ολική ένταση (χωρίς διαφορά φάσης) είναι: $I_{ολ}=6\sqrt{2}+8\sqrt{2}=14\sqrt{2}$ Volt.

Από τον νόμο συνημίτονων για τα ρεύματα $εφφ=\frac{I_{02}ημ(\phi_2-\phi_1)^o}{I_{01}+I_{02}συν(\phi_2-\phi_1)^o}$, προκύπτει:

$$εφφ=\frac{8\sqrt{2}ημ0^o}{6\sqrt{2}+8\sqrt{2}συν0^o}=0 \quad ή \quad \phi=εφ^{-1}0 \Rightarrow \phi=0^o$$

Το διανυσματικό διάγραμμα (τιμές πλάτους ρεύματος) είναι το εξής:



Σχήμα 1. 24

2.

Από νόμο συνημίτονων (για γωνία 45°), έχουμε:

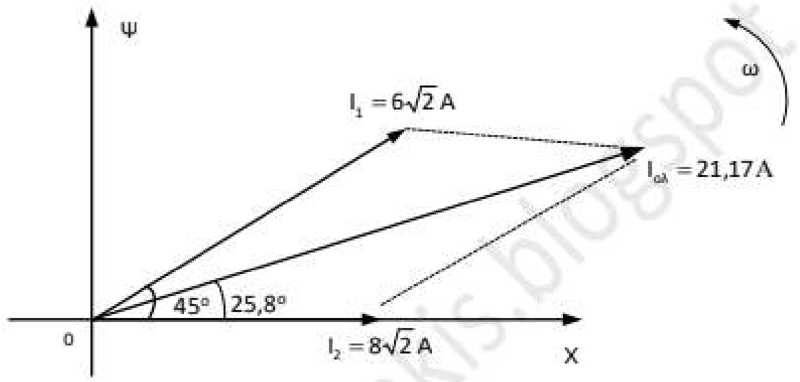
$$I_{ολ} = \sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2 + \left(8\sqrt{2}\right)^2 + 2\cdot 8\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}\,συν45^\circ} = \sqrt{72+128+271{,}5} = 21{,}17\,A$$

Από τον νόμο συνημίτονων επίσης, προκύπτει:

$$εφφ = \frac{8\sqrt{2}\,ημ45^\circ}{6\sqrt{2}+8\sqrt{2}\,συν45^\circ} = \frac{8\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}{6\sqrt{2}+8\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}} = 0{,}48$$

$$\text{ή}\quad φ = εφ^{-1}\,0{,}48 \Rightarrow φ = 25{,}8^\circ$$

Το διανυσματικό διάγραμμα (τιμές πλάτους) είναι το εξής:



Σχήμα 1. 25

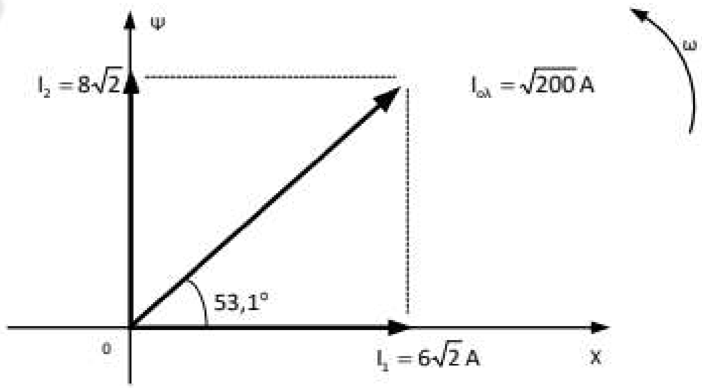
3.

Από πυθαγόρειο θεώρημα (για διαφορά φάσης 90°), έχουμε:

$$I_{ολ} = \sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2 + \left(8\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{72+128} = \sqrt{200}\,A.$$

Η φάση της ολικής τάσης για την περίπτωση το I_1 προηγείται του I_2 κατά 90°, είναι

$$εφφ = \frac{I_ψ}{I_x} = \frac{8\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{4}{3}\ \text{ή}\ \ φ = εφ^{-1}\,1{,}333 \Rightarrow φ = 53{,}1^\circ$$



Σχήμα 1. 26

ΑΣΚΗΣΗ 1.14

Εναλλασσόμενη τάση $u = 230\eta\mu(2\pi ft)$ μετά από χρόνο 1ms, η στιγμιαία τιμή της είναι 100V. Υπολογίστε την συχνότητα της εναλλασσόμενης τάσης.

Απάντηση:

Είναι $u = V_o \eta\mu(2\pi ft + 0^0) \Rightarrow$

$$100 = 230\eta\mu(100\pi t) \Rightarrow \eta\mu 100\pi t = 0{,}435 \overset{\eta\mu 25{,}7^o = 0{,}435}{\Rightarrow} \eta\mu 100\pi t = \eta\mu 25{,}7^o$$

Επειδή γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\omega t = \eta\mu\theta^o \rightarrow \begin{cases} \omega t = \theta + 2\kappa\pi \\ \omega t = 2\kappa\pi + \pi - \theta \end{cases} \quad \kappa = 0,1,2,\ldots$,

τότε προκύπτει $\begin{cases} 2\pi ft = 25{,}7^o + 2\kappa\pi \\ 2\pi ft = 2\kappa\pi + \pi - 25{,}7^o \end{cases} \quad \kappa = 0,1,2,\ldots$,

Οπότε με κ=0, γνωρίζοντας ότι $25{,}7^o = 0{,}14\pi$ (καθώς $\begin{cases} 180^o \rightarrow \pi \\ 25{,}7^o \rightarrow \chi \end{cases} \Rightarrow \chi = \frac{25{,}7 \cdot \pi}{180} = 0{,}14\pi$)

και τον χρόνο t=1 msec=0,001sec, θα έχουμε $\begin{cases} 2\pi ft = 25{,}7^o + 2\kappa\pi \\ 2\pi ft = 2\kappa\pi + \pi - 25{,}7^o \end{cases} \overset{\kappa=0}{\Rightarrow}$

$$\begin{cases} 2\pi ft = 25{,}7^o \overset{25{,}7^o = 0{,}14\pi}{\Rightarrow} 2\pi ft = 0{,}14\pi \overset{t=0{,}001}{\Rightarrow} f = \dfrac{0{,}14\pi}{2\pi \cdot 0{,}001} \Rightarrow f = 70\text{Hz} \\ 2\pi ft = 25{,}7^o + \pi \overset{25{,}7^o = 0{,}15\pi}{\Rightarrow} 2\pi ft = -0{,}14\pi + \pi \overset{t=0{,}001}{\Rightarrow} f = \dfrac{0{,}86\pi}{2\pi \cdot 0{,}001} \Rightarrow f = 430\text{Hz} \end{cases}$$

Επομένως η ζητούμενη συχνότητα είναι η f=50 Hz (η πρώτη δεκτή τιμή του περιοδικού φαινομένου).

ΑΣΚΗΣΗ 1.15 *(εξετάσεις 2009)*

Δίνεται η εναλλασσόμενη τάση $u = 100\sqrt{2}\eta\mu(2 \cdot 10^4 \pi t - 30^o)$. Να βρεθούν τα εξής:

1. Η μέγιστη τιμή της τάσης

2. Η ενεργός τιμή της τάσης.

3. Η συχνότητα f.

4. Η αρχική φάση φ.

Απάντηση

1.

Η μέγιστη τιμή τάσης είναι $V_o = 100\sqrt{2}\,V$

2.

Η ενεργός τιμή τάσης είναι $V_{\varepsilon\nu} = \frac{V_o}{\sqrt{2}} = 100V$

3.

Η συχνότητα είναι $f = \frac{\omega}{2\pi} \overset{\omega = 20.000\pi \frac{rad}{sec}}{=} \frac{20.000\pi}{2\pi} = 10.000 = 10KHz$

4.
Η αρχική φάση είναι ϕ_o=-30° rad.

ΑΣΚΗΣΗ 1.16 *(εξετάσεις 2013)*

Εναλλασσόμενο ρεύμα συχνότητας f=50Hz έχει αρχική φάση φ_1=45°. Να υπολογίσετε τη φάση μετά από χρόνο t=0,01 sec.

Απάντηση

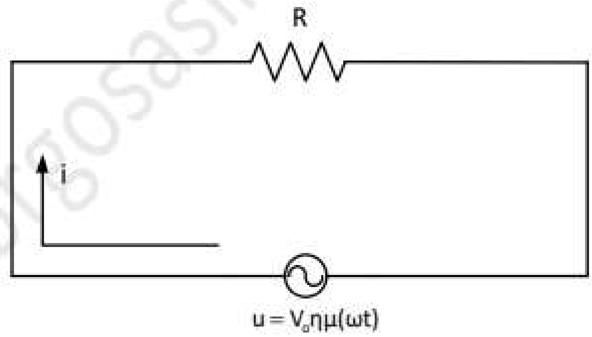
Μετά από t=0,01 sec η φάση θα είναι

$$\Phi = 45^\circ + \omega t = 45^\circ + 2\pi f = 45^\circ + 2\cdot 180^\circ \cdot 50 \cdot 0{,}01 = 45^\circ + 180^\circ = 225^\circ \text{ ή } 5\pi/4 \text{ rad.}$$

Κεφάλαιο 2$^{\text{ο}}$
ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

2.1 Συμπεριφορά ωμικής αντίστασης στο εναλλασσόμενο ρεύμα

Το κύκλωμα του επόμενου σχήματος αποτελείται από έναν ωμικό καταναλωτή και μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης.



Σχήμα 2. 1

Εφαρμόζουμε τάση στα άκρα της πηγής, τότε το ρεύμα της αντίστασης είναι ίδιο με αυτό της πηγής. Το εναλλασσόμενο ρεύμα έχει πλάτος

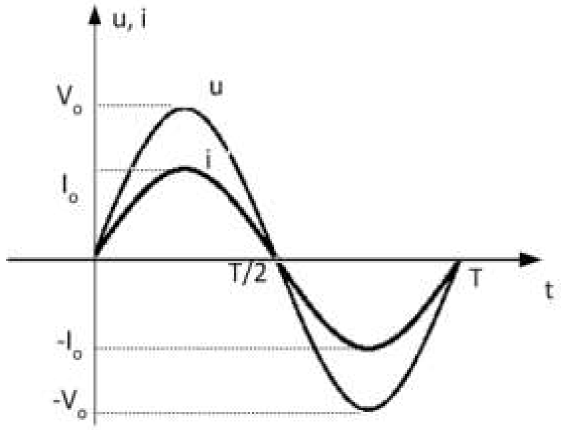
$$I_o = \frac{V_o}{R} \text{ ή } R = \frac{V_o}{I_o} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{I_{\varepsilon\nu}}.$$

Η **τάση και η ένταση είναι συμφασικά μεγέθη**.

Ισχύουν οι εξής χρονικές εξισώσεις:

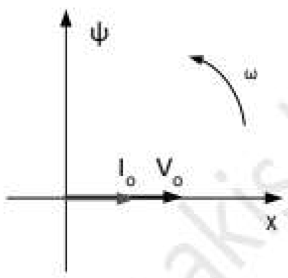
$$i = I_o \cdot \eta\mu(\omega t) \quad \text{και } u = V_o \cdot \eta\mu(\omega t)$$

Οι κυματομορφές των μεγεθών φαίνονται στο επόμενο σχήμα:



Σχήμα 2. 2

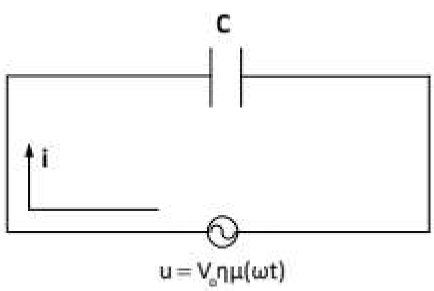
Η διανυσματική παράσταση είναι η επόμενη:



Σχήμα 2. 3

2.2 Συμπεριφορά χωρητικής αντίστασης

Το κύκλωμα του επόμενου σχήματος αποτελείται από έναν χωρητικό καταναλωτή (πυκνωτή) και μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης.



Σχήμα 2. 4

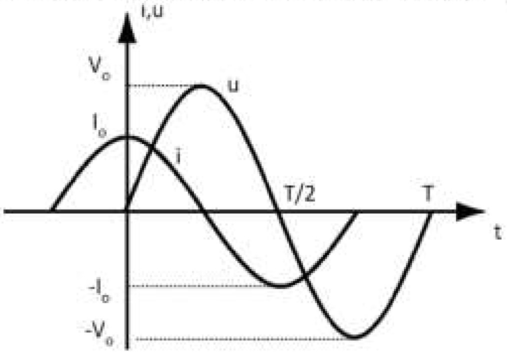
Εφαρμόζουμε τάση στα άκρα της πηγής, τότε το ρεύμα της αντίστασης είναι ίδιο με αυτό της πηγής. Το εναλλασσόμενο ρεύμα έχει πλάτος $I_o = \frac{V_o}{X_C}$, $X_C = \frac{V_o}{I_o}$, $X_c = \frac{V_{εν}}{I_{εν}}$. Ο πυκνωτής παρουσιάζει αντίσταση η οποία ονομάζεται χωρητική αντίσταση (ή αντίδραση) X_C. Δίνεται από την σχέση $X_c = \dfrac{1}{C \cdot \omega}$.

Η τάση καθυστερεί της έντασης του ρεύματος κατά 90° (ή $\dfrac{\pi}{2}$ rad). Οι χρονικές εξισώσεις δίνονται από τις σχέσεις: $i = I_o \cdot ημ(\omega t + 90^\circ)$ και $u = V_o \cdot ημ(\omega t)$.

— Παρατηρήσεις:

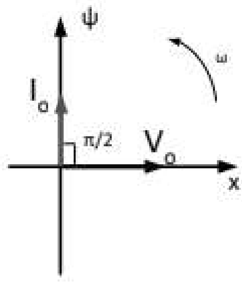
Ο **πυκνωτής** όταν η κυκλική συχνότητα είναι μηδέν (ω=0), συμπεριφέρεται ως **ανοικτός διακόπτης (στο συνεχές ρεύμα)**. Όταν η κυκλική συχνότητα είναι πολύ μεγάλη (ω>>), τότε ο πυκνωτής έχει πολύ καλή αγωγιμότητα στο ηλεκτρικό ρεύμα (αποθήκη ηλεκτρικού φορτίου).

Η κυματομορφή των μεγεθών φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 2. 5

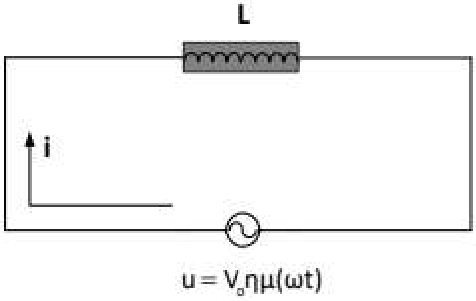
Η διανυσματική παράσταση είναι η εξής:



Σχήμα 2. 6

2.3 Συμπεριφορά επαγωγικής αντίστασης

Το κύκλωμα του επόμενου σχήματος αποτελείται από έναν επαγωγικό καταναλωτή (πηνίο) και μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης.



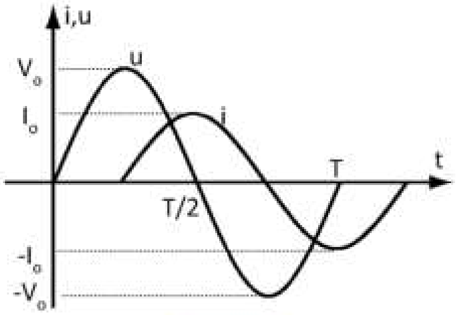
Σχήμα 2. 7

Εφαρμόζουμε τάση στα άκρα της πηγής, τότε το ρεύμα της επαγωγικής αντίστασης είναι ίδιο με αυτό της πηγής.

Το εναλλασσόμενο ρεύμα έχει πλάτος $I_o = \frac{V_o}{X_L}$, $X_L = \frac{V_o}{I_o}$, $X_L = \frac{V_{εν}}{I_{εν}}$. Το πηνίο παρουσιάζει αντίσταση η οποία ονομάζεται επαγωγική αντίσταση (ή αντίδραση) X_L. Δίνεται από την σχέση $X_L = L \cdot \omega$.

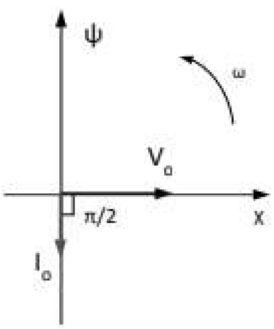
Η τάση προπορεύεται της έντασης του ρεύματος κατά 90° (ή $\frac{\pi}{2}$ rad). Οι χρονικές εξισώσεις δίνονται από τις σχέσεις: $i = I_o \cdot ημ(\omega t - 90^{\circ})$ και $u = V_o \cdot ημ(\omega t)$.

Η κυματομορφή των μεγεθών φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 2. 8

Η διανυσματική παράσταση είναι η εξής:



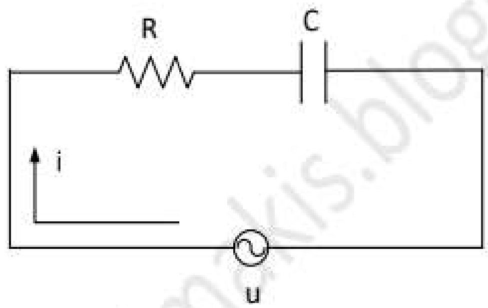
Σχήμα 2. 9

— Παρατηρήσεις:

Η αυτεπαγωγή του πηνίου δεν έχει καμία επίδραση στο συνεχές ρεύμα (και ενεργεί σαν αντίσταση στο εναλλασσόμενο). Όταν δεν έχουμε πηγή εναλλασσόμενης τάσης αλλά ροή κυκλοφορίας συνεχούς ρεύματος, τότε η κυκλική συχνότητα είναι μηδέν (ω=0). Ο επαγωγικός καταναλωτής (πηνίο) σε αυτή την περίπτωση, συμπεριφέρεται ως **βραχυκύκλωμα** . Αντιθέτως όταν η κυκλική συχνότητα είναι πολύ μεγάλη (ω>>), τότε το πηνίο συμπεριφέρεται ως **ανοικτό κύκλωμα** και καλείται **αποπνικτικό ή στραγγαλιστικό**.

2.4 Κύκλωμα R-C σε σειρά

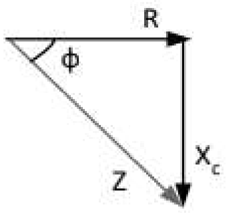
Το επόμενο κύκλωμα περιλαμβάνει έναν ωμικό, έναν χωρητικό καταναλωτή και μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης (κύκλωμα R-C σειράς):



Σχήμα 2. 10

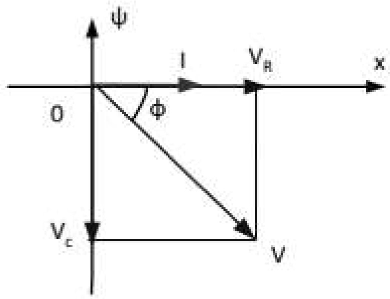
Ο πυκνωτής παρουσιάζει αντίσταση η οποία ονομάζεται επαγωγική αντίσταση (ή αντίδραση) $X_c = \frac{1}{C \cdot \omega}$. Η πτώση τάσης στην ωμική αντίσταση είναι $V_R = I \cdot R$. Η πτώση τάσης στην χωρητική αντίσταση είναι $V_C = I \cdot X_C \Rightarrow V_C = \frac{I}{C \cdot \omega}$.

Το τρίγωνο των αντιστάσεων είναι το εξής:



Σχήμα 2. 11

Η διανυσματική παράσταση των μεγεθών (ενεργές τιμές τάσης και έντασης), φαίνεται στο επόμενο σχήμα :



Σχήμα 2. 12

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο διανυσματικό διάγραμμα προκύπτει η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος:

$$V^2 = V_R{}^2 + V_C{}^2 \Rightarrow V^2 = (IR)^2 + (\frac{I}{C\omega})^2 \Rightarrow V^2 = I^2R^2 + I^2(\frac{1}{C\omega})^2 \Rightarrow \sqrt{V^2} = \sqrt{I^2(R^2 + (\frac{1}{C\omega})^2)} \Rightarrow$$

$$\frac{V}{I} = \frac{I\sqrt{R^2 + (\frac{1}{C\omega})^2}}{I} \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + (\frac{1}{C\omega})^2}.$$

Επίσης, ορίζοντας την εφφ για το τρίγωνο του σχήματος γωνίας φ (η εφαπτομένη φ είναι ίση με την απέναντι πλευρά προς την προσκείμενη του τριγώνου), προκύπτει η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος, που ισοδυναμεί με

$$\varepsilon\varphi\phi = \frac{V_C}{V_R} \Rightarrow \varepsilon\varphi\phi = \frac{I \cdot X_C}{I \cdot R} = \frac{X_C}{R} = \frac{\frac{1}{C\omega}}{R} = \frac{1}{RC\omega}.$$

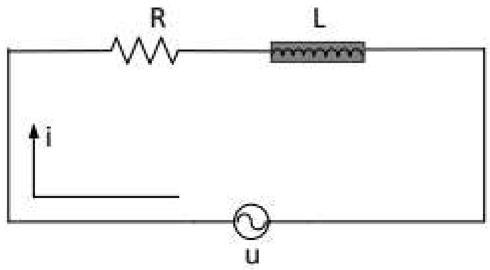
Ισχύει: $-90^\circ \leq \phi \leq 0^\circ$, δηλαδή το κύκλωμα έχει **χωρητική συμπεριφορά**.

Εφαρμόζοντας λοιπόν εναλλασσόμενη τάση V στα άκρα σύνθετου καταναλωτή R-C σε σειρά, η ενεργός τιμή του ρεύματος ισούται με το λόγο της ενεργού τιμής της τάσης και της σύνθετης αντίστασης και δίνεται από την σχέση:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{C\omega})^2}}.$$

2.5 Κύκλωμα R-L σε σειρά

Το επόμενο κύκλωμα περιλαμβάνει έναν ωμικό καταναλωτή, έναν επαγωγικό καταναλωτή και μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης (κύκλωμα R-L σειράς).

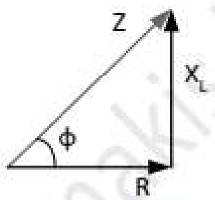


Σχήμα 2. 13

Το πηνίο παρουσιάζει αντίσταση η οποία ονομάζεται επαγωγική αντίσταση X_L, που ισοδυναμεί με $X_L = L \cdot \omega$. Η πτώση τάσης στην ωμική αντίσταση είναι $V_R = I \cdot R$ και στην επαγωγική αντίσταση είναι αντίστοιχα $V_L = I \cdot X_L \Rightarrow V_L = I \cdot L \cdot \omega$.

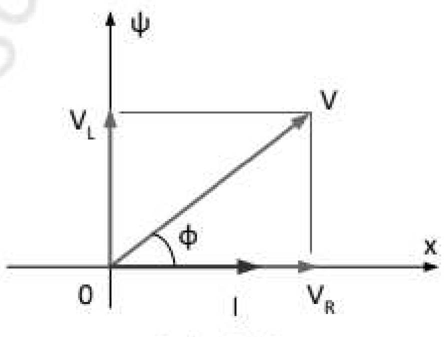
Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι $Z = \sqrt{R^2 + (L \cdot \omega)^2}$.

Το τρίγωνο των αντιστάσεων είναι το εξής:



Σχήμα 2. 14

Η διανυσματική παράσταση των μεγεθών (ενεργές τιμές τάσης και έντασης), φαίνεται στο επόμενο σχήμα :



Σχήμα 2. 15

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο διανυσματικό διάγραμμα προκύπτει η σύνθετη αντίσταση Z:

$$V^2 = V_R{}^2 + V_L{}^2 \Rightarrow V^2 = I^2R^2 + I^2L^2\omega^2 \Rightarrow \sqrt{V^2} = \sqrt{I^2(R^2 + L^2\omega^2)} \Rightarrow \frac{V}{I} = \frac{I\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}{I} \Rightarrow$$

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$$

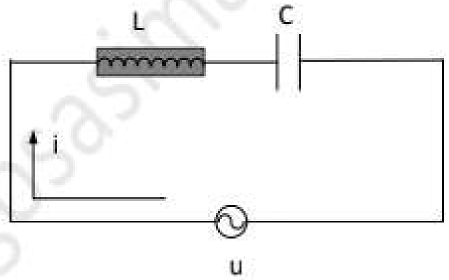
Όταν το πηνίο δεν είναι ιδανικό και έχει μικρή ωμική αντίσταση, η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος R-L σειράς, θα δίνεται από την σχέση: $Z=\sqrt{(R+R_{\pi})^2+X_L^{\ 2}}$.

Επίσης, ορίζοντας την εφφ για το τρίγωνο (η εφαπτομένη φ είναι ίση με την απέναντι πλευρά προς την προσκείμενη του τριγώνου), προκύπτει $εφφ=\frac{V_L}{V_R}=\frac{IX_L}{IR}=\frac{X_L}{R}=\frac{L\cdot\omega}{R}$. Η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος είναι $εφφ=\frac{L\cdot\omega}{R}$.

Ισχύει ότι: $0\leq\varphi\leq90°$, δηλαδή το κύκλωμα έχει **επαγωγική συμπεριφορά**.
Εφαρμόζοντας εναλλασσόμενη τάση V στα άκρα σύνθετου καταναλωτή R-L σε σειρά, η ενεργός τιμή του ρεύματος ισούται με το λόγο της ενεργού τιμής της τάσης και της σύνθετης αντίστασης δίνεται από την σχέση: $I=\frac{V}{Z}=\frac{V}{\sqrt{R^2+(L\cdot\omega)^2}}$.

2.6 Κύκλωμα L-C σε σειρά

Το επόμενο κύκλωμα περιλαμβάνει έναν επαγωγικό, έναν χωρητικό καταναλωτή και μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης (κύκλωμα L-C σειράς):



Σχήμα 2. 16

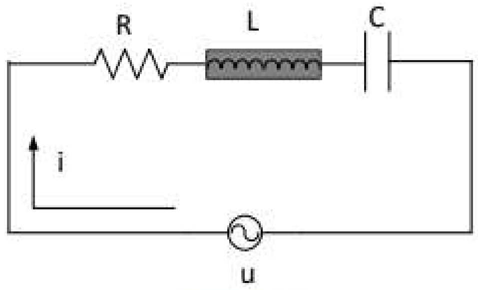
Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι ίση με

$$Z=\sqrt{R^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}\overset{R=0}{\Rightarrow}Z=\sqrt{(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}\Rightarrow Z=L\omega-\frac{1}{C\omega}.$$

Η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος είναι φ=0 .

2.7 Κύκλωμα R-L-C σε σειρά

Το κύκλωμα του σχήματος περιλαμβάνει έναν ωμικό, έναν επαγωγικό, έναν χωρητικό καταναλωτή και μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης (κύκλωμα R-L-C σειράς):

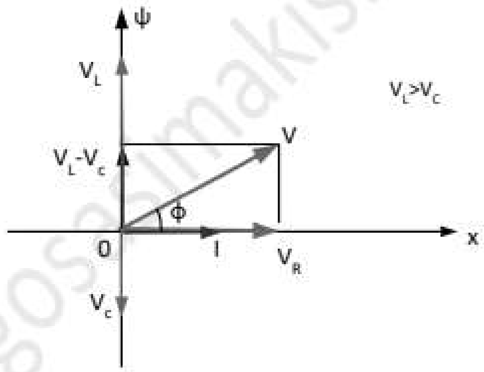


Σχήμα 2. 17

Το πηνίο παρουσιάζει την επαγωγική αντίσταση $X_L = L \cdot \omega$, ενώ ο πυκνωτής παρουσιάζει την χωρητική αντίσταση $X_C = \frac{1}{C \cdot \omega}$. Η πτώση τάσης στα άκρα των καταναλωτών του κυκλώματος (R, L και C) είναι αντίστοιχα:

$$V_R = I \cdot R\,,\ V_L = I \cdot X_L = I \cdot L \cdot \omega \text{ και}$$
$$V_C = I \cdot X_C = \frac{I}{C \cdot \omega}$$

Το διανυσματικό διάγραμμα του κυκλώματος, είναι το εξής:



Σχήμα 2. 18

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο προηγούμενο διανυσματικό διάγραμμα προκύπτει η σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος:

$$V^2 = {V_R}^2 + (V_L - V_C)^2 \Rightarrow V^2 = (IR)^2 + (IL\omega \frac{I}{C\omega})^2 \Rightarrow V^2 = I^2 (R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2)$$

$$V = I\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \Rightarrow \frac{V}{I} = \frac{I\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}{I} \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}.$$

Όταν το πηνίο δεν είναι ιδανικό και έχει μικρή ωμική αντίσταση, η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος θα δίνεται από την σχέση: $Z = \sqrt{(R + R_\pi)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$.

Εφαρμόζοντας λοιπόν εναλλασσόμενη τάση V στα άκρα σύνθετου καταναλωτή R-L-C σε σειρά, **η ενεργός τιμή του ρεύματος** ισούται με το λόγο της ενεργού τιμής της τάσης και της σύνθετης αντίστασης του κυκλώματος (που υπολογίστηκε ότι είναι ίση με $Z=\sqrt{R^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}$) και δίνεται από την σχέση: $I=\frac{V}{Z}=\frac{V}{\sqrt{R^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}}$.

Επίσης από το διανυσματικό διάγραμμα, η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος προκύπτει ως εξής :

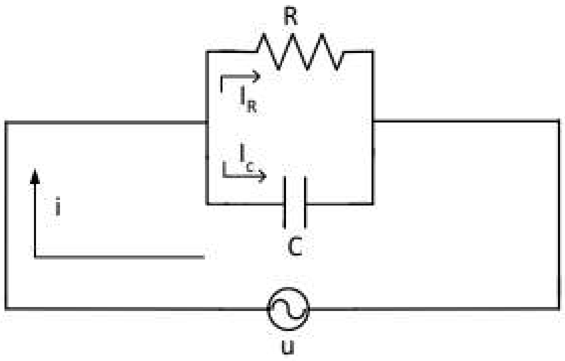
$$\varepsilon\varphi\phi=\frac{V_L-V_C}{V_R}\Rightarrow\varepsilon\varphi\phi=\frac{I\cdot X_L-IX_C}{I\cdot R}=\frac{I(X_L-X_C)}{IR}=\frac{L\omega-\frac{1}{C\omega}}{R},\text{ οπότε } \varepsilon\varphi\phi=\frac{L\cdot\omega-\frac{1}{C\omega}}{R}.$$

— Όταν $V_L>V_C$ ή $X_L-X_C>0\Rightarrow L\omega-\frac{1}{C\omega}>0\Rightarrow L\omega>\frac{1}{C\omega}$, τότε είναι $0<\phi<90^o$ και η τάση προηγείται του ρεύματος (ή αλλιώς το ρεύμα έπεται της τάσης). Το κύκλωμα σε αυτή την περίπτωση έχει **επαγωγική συμπεριφορά**. Τυπική μορφή χρονικών εξισώσεων τάσης και έντασης ρεύματος: $i=I_o\cdot\eta\mu(\omega t-\phi)$ και $u=V_o\cdot\eta\mu(\omega t)$.

— Όταν $V_L<V_C$ ή $X_L-X_C<0\Rightarrow L\omega-\frac{1}{C\omega}<0\Rightarrow L\omega<\frac{1}{C\omega}$, τότε είναι $-90^\circ<\phi<0^\circ$ και η τάση έπεται του ρεύματος (ή αλλιώς το ρεύμα προηγείται της τάσης). Το κύκλωμα σε αυτή την περίπτωση, έχει **χωρητική συμπεριφορά**. Τυπική μορφή χρονικών εξισώσεων τάσης και έντασης ρεύματος: $i=I_o\cdot\eta\mu(\omega t+\phi)$ και $u=V_o\cdot\eta\mu(\omega t)$.

2.8 Κύκλωμα R-C σε παραλληλία

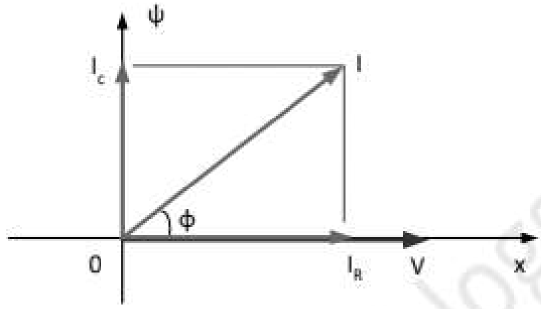
Το επόμενο κύκλωμα περιλαμβάνει έναν ωμικό καταναλωτή, έναν χωρητικό καταναλωτή (πυκνωτής) και μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης (κύκλωμα R-C παραλληλίας):



Σχήμα 2. 19

Ο πυκνωτής παρουσιάζει αντίσταση η οποία δίνεται από την σχέση $X_c = \frac{1}{C\omega}$. Στα άκρα της ωμικής αντίστασης είναι $I_R = \frac{V}{R}$. Επίσης το ρεύμα στα άκρα του πυκνωτή είναι $I_c = \frac{V}{X_c} \Rightarrow I_c = \frac{V}{\frac{1}{C\omega}} \Rightarrow I_c = VC\omega$.

Το διανυσματικό διάγραμμα των εντάσεων του παράλληλου κυκλώματος (ενεργές τιμές) είναι το εξής:



Σχήμα 2. 20

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε την σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος:

$$I^2 = I_R{}^2 + I_C{}^2 \Rightarrow I = \sqrt{(\frac{V}{R})^2 + (\frac{V}{X_C})^2} \Rightarrow I = \sqrt{V^2 \frac{1}{R^2} + V^2 \frac{1}{\frac{1}{C^2\omega^2}}} = \sqrt{V^2}\sqrt{(\frac{1}{R^2} + (C\omega)^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = V\sqrt{\frac{1}{R^2} + (C\omega)^2} \Rightarrow \frac{I}{V} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (C\omega)^2} \overset{\frac{I}{V}=\frac{1}{Z}}{\Rightarrow} Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (C\omega)^2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}{R}} \Rightarrow$$

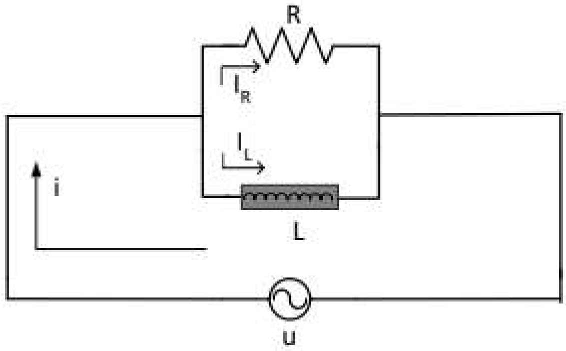
$$\Rightarrow Z = \frac{R}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}} .$$

Επίσης από το τρίγωνο γωνίας φ των ρευμάτων υπολογίζουμε τη διαφορά φάσης φ, μέσω του ορισμού της εφφ (απέναντι πλευρά προς την προσκείμενη):

$$\varepsilon\varphi\phi = \frac{I_C}{I_R} \Rightarrow \varepsilon\varphi\phi = \frac{\frac{V}{X_C}}{\frac{V}{R}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\phi = \frac{RV}{X_C V} = \frac{R}{X_C} = \frac{R}{\frac{1}{C\omega}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\phi = RC\omega .$$

2.9 Κύκλωμα R-L σε παραλληλία

Το επόμενο κύκλωμα αποτελείται από έναν ωμικό, έναν επαγωγικό καταναλωτή (πηνίο) και μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης (κύκλωμα R-L σε παραλληλία):

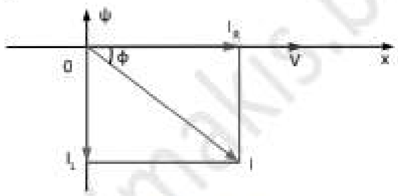


Σχήμα 2. 21

Το πηνίο παρουσιάζει επαγωγική αντίσταση η οποία δίνεται από την σχέση $X_L = L \cdot \omega$.

Στα άκρα της ωμικής αντίστασης είναι $I_R = \frac{V}{R}$. Επίσης το ρεύμα στα άκρα του πηνίου είναι $I_L = \frac{V}{X_L} = \frac{V}{L\omega}$.

Το διανυσματικό διάγραμμα των εντάσεων του παράλληλου κυκλώματος (ενεργές τιμές μεγεθών) είναι το εξής:



Σχήμα 2. 22

Από το διανυσματικό διάγραμμα των ρευμάτων μέσω του πυθαγορείου θεωρήματος για τα διανυσματικά μεγέθη του, μπορούμε να υπολογίσουμε την σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος (R-L παραλληλίας), ως εξής:

$$I^2 = I_R{}^2 + I_L{}^2 \Rightarrow I = \sqrt{(\frac{V}{R})^2 + (\frac{V}{X_L})^2} \Rightarrow I = \sqrt{V^2 \frac{1}{R^2} + V^2 \frac{1}{L^2\omega^2}} = V\sqrt{(\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{L^2\omega^2})} \Rightarrow$$

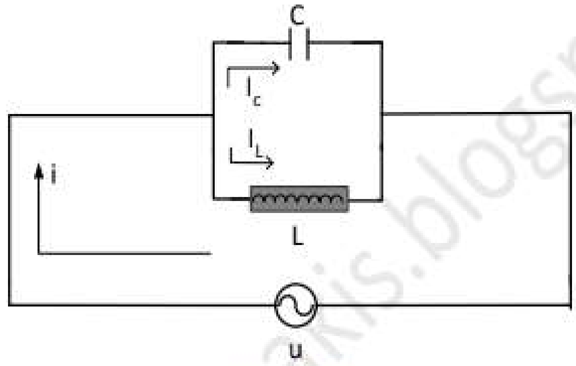
$$\frac{I}{V} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{L^2\omega^2})} \overset{\frac{I}{V}=\frac{1}{Z}}{\Rightarrow} \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{L^2\omega^2})} \Rightarrow Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{L^2\omega^2})}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}}{\sqrt{R^2L^2\omega^2}}} \Rightarrow$$

$$Z = \frac{\sqrt{R^2L^2\omega^2}}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}} \Rightarrow Z = \frac{L \cdot \omega \cdot R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}.$$

Επίσης μπορούμε να υπολογίσουμε τη διαφορά φάσης φ μέσω της εφφ (απέναντι πλευρά προς την προσκείμενη): $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{I_L}{I_R} = \frac{\frac{V}{X_L}}{\frac{V}{R}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \frac{RV}{X_L V} = \frac{R}{X_L} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \frac{R}{L\omega}$.

2.10 Κύκλωμα L-C σε παραλληλία

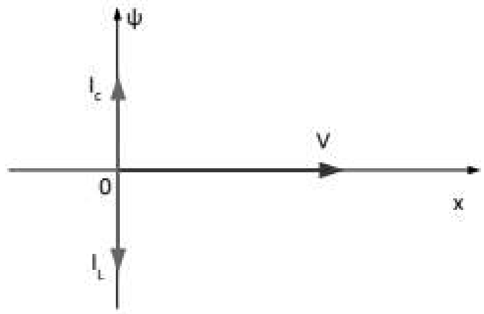
Το επόμενο κύκλωμα περιλαμβάνει δύο παράλληλους κλάδους με ένα πηνίο (επαγωγικό καταναλωτή) έναν πυκνωτή (χωρητικό καταναλωτή) και μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης (κύκλωμα L-C παραλληλίας):



Σχήμα 2. 23

Η χωρητική αντίσταση θα δίνεται από την σχέση $X_C = \frac{1}{C\omega}$. Η επαγωγική αντίσταση είναι $X_L = L \cdot \omega$. Το κύκλωμα L-C παραλληλίας είναι ένα κύκλωμα χωρίς ωμική αντίσταση και γι' αυτό τον λόγο δεν είναι σύνηθες σε πρακτική χρήση.

Το διανυσματικό διάγραμμα είναι:



Σχήμα 2. 24

Είναι προφανές ότι χωρίς ωμική αντίσταση δεν θα έχουμε διαφορά φάσης μεταξύ των μεγεθών των εναλλασσόμενων ρευμάτων.

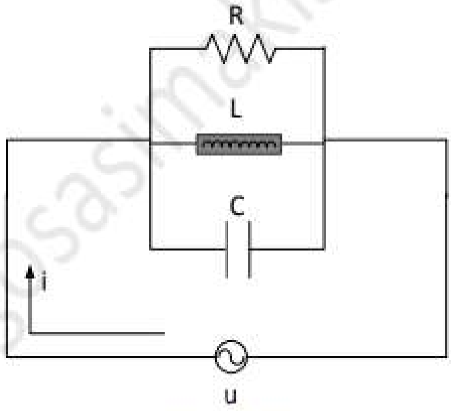
Ο πυκνωτής διαρρέεται από ρεύμα $I_C = \frac{V}{X_C} = \frac{V}{\frac{1}{C\omega}} = \frac{\frac{V}{1}}{\frac{1}{C\omega}} \Rightarrow I_C = VC\omega$. Επίσης το ρεύμα στα άκρα του πηνίου είναι $I_L = \frac{V}{X_L} = \frac{V}{L\omega}$. Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος (με $I=I_L-I_C$) είναι ίση με :

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V}{I_L - I_C} = V\frac{1}{\frac{V}{X_L} - \frac{V}{X_C}} = V\frac{1}{V(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C})} = \frac{1}{\frac{1}{L\omega} - \frac{1}{\frac{1}{C\omega}}} = \frac{1}{\frac{1}{L\omega} - C\omega} \Rightarrow Z = \frac{1}{\frac{1 - C\omega\omega L}{L\omega}}$$

ή απλοποιώντας την έκφραση: $Z = \frac{L\omega}{1 - CL\omega^2}$.

2.11 ΚΥΚΛΩΜΑ R-L-C ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ

Το επόμενο κύκλωμα περιλαμβάνει ωμικό καταναλωτή, επαγωγικό καταναλωτή, χωρητικό καταναλωτή και μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης:



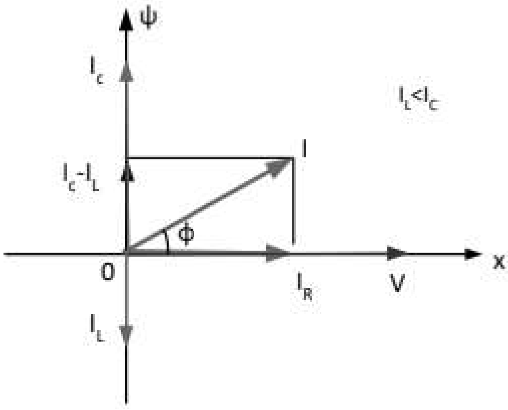
Σχήμα 2. 25

Το πηνίο παρουσιάζει την επαγωγική αντίσταση $X_L = L \cdot \omega$, ενώ ο πυκνωτής παρουσιάζει την χωρητική αντίσταση $X_C = \frac{1}{C \cdot \omega}$.

Η ενεργός τιμή της έντασης στα άκρα των καταναλωτών του κυκλώματος (R, L και C) είναι αντίστοιχα:

$$I_R = \frac{V}{R}, I_L = \frac{V}{X_L} = \frac{V}{L\omega} \text{ και } I_C = \frac{V}{X_C} = \frac{V}{\frac{1}{C\omega}} \Rightarrow I_C = VC\omega.$$

Το διανυσματικό διάγραμμα του κυκλώματος, είναι το εξής:



Σχήμα 2. 26

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο διανυσματικό διάγραμμα προκύπτει η σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος:

$$I^2 = I_R^{\ 2} + (I_C - I_L)^2 \Rightarrow I = \sqrt{(\frac{V}{R})^2 + (\frac{V}{X_C} - \frac{V}{X_L})^2} \Rightarrow I = \sqrt{V^2\frac{1}{R^2} + V^2(\frac{1}{\frac{1}{C\omega}} - \frac{1}{L\omega})^2} \Rightarrow$$

$$I = V\sqrt{(\frac{1}{R^2} + (C\omega - \frac{1}{L\omega})^2)} \Rightarrow \frac{I}{V} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (C\omega - \frac{1}{L\omega})^2)} \overset{\frac{I}{V}=\frac{1}{Z}}{\Rightarrow} Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (C\omega - \frac{1}{L\omega})^2}}$$

Εφαρμόζοντας λοιπόν εναλλασσόμενη τάση V στα άκρα σύνθετου καταναλωτή R-L-C σε παραλληλία, η ενεργός τιμή του ρεύματος ισούται με το λόγο της ενεργού τιμής της τάσης και της σύνθετης αντίστασης του κυκλώματος δηλαδή ισχύει:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (C\omega - \frac{1}{L\omega})^2}}.$$

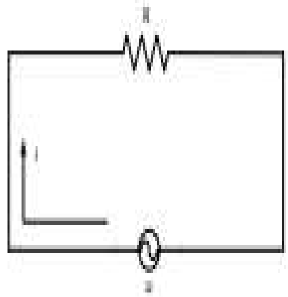
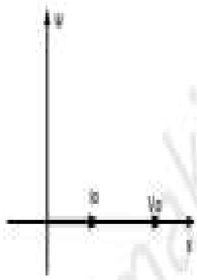
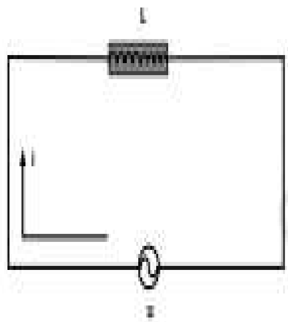
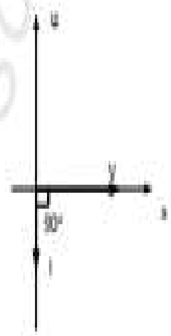
Επίσης από το διανυσματικό διάγραμμα, η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος προκύπτει σύμφωνα με τη εφφ της γωνίας :

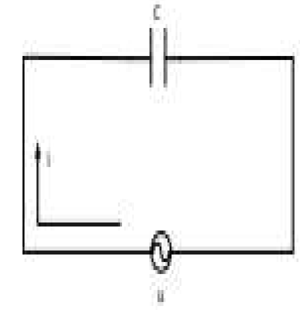
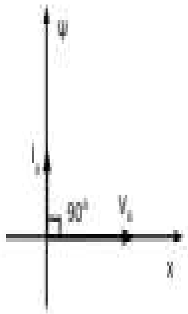
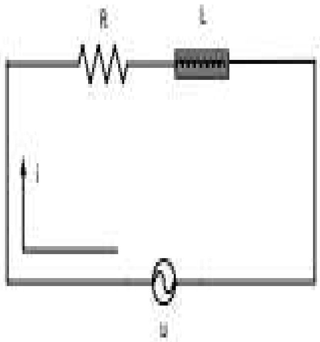
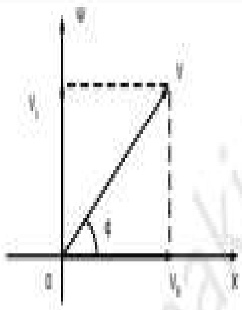
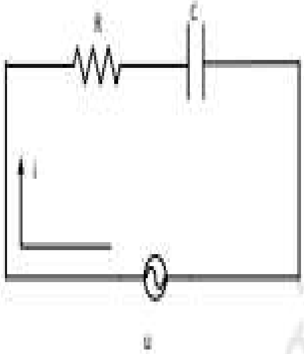
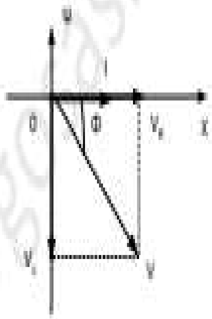
$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{I_C - I_L}{I_R} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \frac{\frac{V}{X_C} - \frac{V}{X_L}}{\frac{V}{R}} = \frac{\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}} = \frac{C\omega - \frac{1}{L\omega}}{\frac{1}{R}}, \text{ οπότε } \varepsilon\varphi\varphi = R(C\omega - \frac{1}{L\omega}).$$

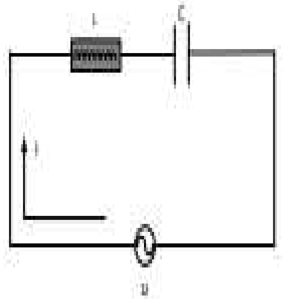
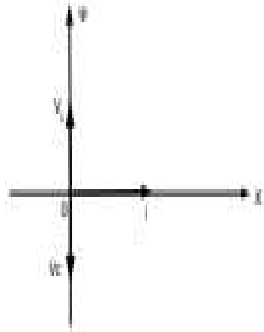
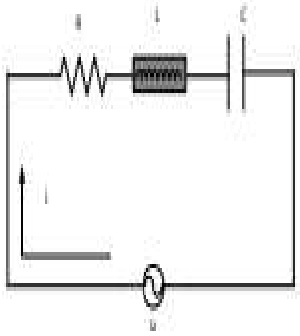
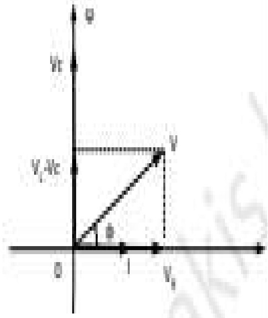
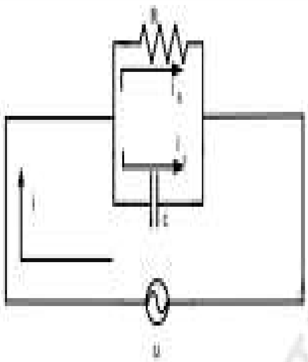
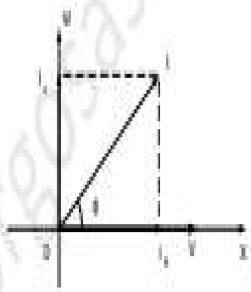
— Όταν $I_C > I_L \Rightarrow \frac{V}{X_C} > \frac{V}{X_L} \Rightarrow \frac{1}{X_C} > \frac{1}{X_L} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{C\omega}} > \frac{1}{L\omega} \Rightarrow C\omega > \frac{1}{L\omega}$, η τάση καθυστερεί του ρεύματος. Το κύκλωμα σε αυτή την περίπτωση έχει **χωρητική συμπεριφορά**.

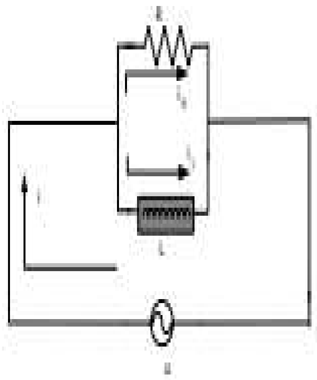
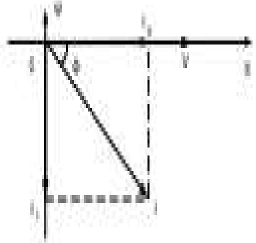
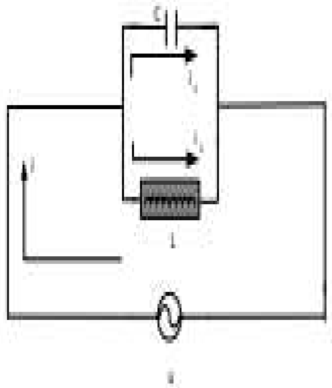
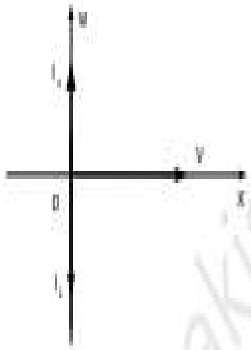
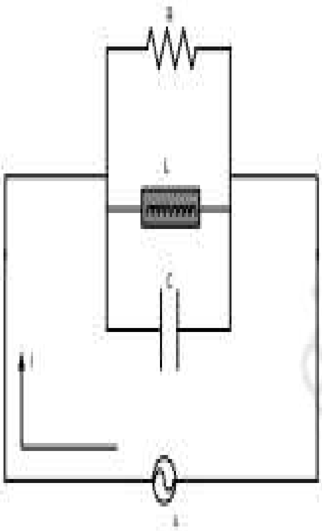
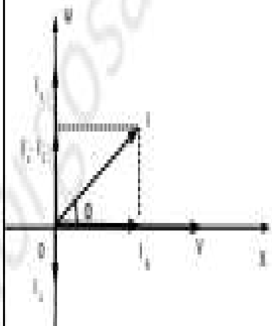
— Όταν $I_C < I_L \Rightarrow \frac{V}{X_C} < \frac{V}{X_L} \Rightarrow \frac{1}{X_C} < \frac{1}{X_L} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{C\omega}} < \frac{1}{L\omega} \Rightarrow C\omega < \frac{1}{L\omega}$, η τάση προηγείται ρεύματος. Το κύκλωμα σε αυτή την περίπτωση, έχει **επαγωγική συμπεριφορά**.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ	ΚΥΚΛΩΜΑ	ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ (Ενεργές τιμές ή πλάτη)	ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΓΕΘΩΝ	ΑΝΤΙΣΤΑΤΕΣ	ΣΥΝΘΕΤΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ	ΔΙΑΦΟΡΑ ΦΑΣΗΣ
R			$i = I_0 ημ(ωt)$ $u = V_0 ημ(ωt)$	$R = \frac{V_{εν}}{I_{εν}} = \frac{V_0}{I_0}$	Z=R	-
L			$i = I_0 ημ(ωt - 90^\circ)$ $u = V_0 ημ(ωt)$ $X_L = \frac{V_{εν}}{I_{εν}} = \frac{V_0}{I_0}$	$X_L = Lω$	$Z=X_L$	-

C			$i=I_0ημ(ωt+90^\circ)$ $u=V_0ημ(ωt)$ $X_c=\frac{V_{εν}}{I_{εν}}=\frac{V_0}{I_0}$	$X_c=\frac{1}{Cω}$	$Z=X_c$	-
RL **ΣΕ ΣΕΙΡΑ**			$V_{εν_R}=I_{εν}R$ $V_{εν_L}=I_{εν}X_L$	R και $X_L=Lω$	$Z=\sqrt{R^2+(Lω)^2}$	$εφφ=\frac{Lω}{R}$
RC **ΣΕ ΣΕΙΡΑ**			$V_{εν_R}=I_{εν}R$ $V_{εν_C}=\frac{I_{εν}}{Cω}$	R και $X_c=\frac{1}{Cω}$	$Z=\sqrt{R^2+(\frac{1}{Cω})^2}$	$εφφ=\frac{1}{CωR}$

LC ΣΕ ΣΕΙΡΑ			$V_{\varepsilon\nu L} = I_{\varepsilon\nu} X_L$ $V_{\varepsilon\nu C} = \frac{I_{\varepsilon\nu}}{C\omega}$	$X_L = L\omega$ και $X_c = \frac{1}{C\omega}$	$Z =$ $= \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ $Z = L\omega - \frac{1}{C\omega}$	-
RLC ΣΕ ΣΕΙΡΑ			$V_{\varepsilon\nu R} = I_{\varepsilon\nu} R$ $V_{\varepsilon\nu L} = I_{\varepsilon\nu} X_L$	R και $X_L = L\omega$ $X_c = \frac{1}{C\omega}$	$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$	$\varepsilon\varphi\phi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$
RC ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ			$I_{\varepsilon\nu R} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{R}$ $I_{\varepsilon\nu C} = \frac{V}{X_C} = VC\omega$	R και $X_c = \frac{1}{C\omega}$	$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (C\omega)^2}}$	$\varepsilon\varphi\phi = C\omega R$

RL ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ			$I_{\varepsilon\nu R}=\frac{V_{\varepsilon\nu}}{R}$ $I_{\varepsilon\nu L}=\frac{V_{\varepsilon\nu}}{X_L}=\frac{V_{\varepsilon\nu}}{L\omega}$	R και $X_L=L\omega$	$Z=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2}+(\frac{1}{L^2\omega^2})}}$	$\varepsilon\varphi\phi=\frac{R}{L\omega}$
LC ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ			$I_{\varepsilon\nu C}=\frac{V_{\varepsilon\nu}}{X_C}=V_{\varepsilon\nu}C\omega$ $I_{\varepsilon\nu L}=\frac{V_{\varepsilon\nu}}{X_L}=\frac{V_{\varepsilon\nu}}{L\omega}$	$X_C=\frac{1}{C\omega}$ $X_L=L\omega$	$Z=\frac{L\omega}{1-CL\omega^2}$	-
RLC ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ			$I_{\varepsilon\nu R}=\frac{V_{\varepsilon\nu}}{R}$ $I_{\varepsilon\nu C}=\frac{V_{\varepsilon\nu}}{X_C}=V_{\varepsilon\nu}C\omega$	R και $X_C=\frac{1}{C\omega}$ $X_L=L\omega$	$Z=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2}+(C\omega-\frac{1}{L\omega})^2}}$	$\varepsilon\varphi\phi=R(C\omega-\frac{1}{L\omega})$

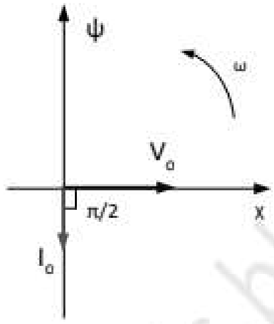
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΕΡΩΤΗΣΗ 2.1

Επαγωγική αντίσταση διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα. Να βρείτε την διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος.

Απάντηση

Η διαφορά φάσης είναι Δφ= 90° ή $\frac{\pi}{2}$ rad. Η τάση προπορεύεται της έντασης του ρεύματος κατά 90^o. Οι χρονικές εξισώσεις δίνονται από τις σχέσεις: $i = I_o ημ(ωt - 90^\circ)$ και $u = V_o \cdot ημ(ωt)$. Η διανυσματική παράσταση είναι η εξής:



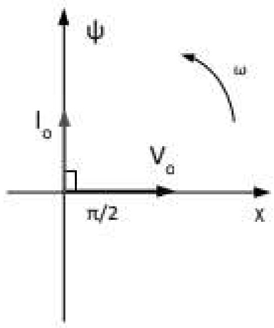
Σχήμα 2. 27

ΕΡΩΤΗΣΗ 2.2

Χωρητική αντίσταση διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα. Να βρείτε την διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος.

Απάντηση

Η διαφορά φάσης είναι Δφ=90^o (ή $\frac{\pi}{2}$ rad). Η τάση καθυστερεί της έντασης του ρεύματος κατά 90°. Οι χρονικές εξισώσεις δίνονται από τις σχέσεις: $i = I_o \cdot ημ(ωt + 90^\circ)$ και $u = V_o \cdot ημ(ωt)$. Η διανυσματική παράσταση είναι η εξής:



Σχήμα 2. 28

ΕΡΩΤΗΣΗ 2.3

Η επαγωγική αντίσταση ενός πηνίου είναι 100Ω, σε συχνότητα 50 Hz. Να βρείτε την νέα επαγωγική αντίσταση, σε συχνότητα 100 Hz.

Απάντηση

Η επαγωγική αντίσταση είναι: $X_L = L \cdot \omega \Rightarrow 100 = L \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \Rightarrow L = \dfrac{100}{314} = 0{,}318\Omega$.

Οπότε για 100 Hz, βρίσκουμε αντίστοιχα ότι $X_L' = L \cdot \omega = 0{,}32 \cdot 2\pi \cdot 100 = 0{,}321 \cdot 628 \Rightarrow$

$$X_L' = 200\Omega.$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 2.4

Τι πληροφορίες παίρνουμε από το διανυσματικό διάγραμμα τάσης - ρεύματος σε ένα σύνθετο κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος σχετικά με το χαρακτήρα του κυκλώματος.

Απάντηση

Πληροφορούμαστε τον χαρακτήρα του κυκλώματος (αν έχει ωμική, επαγωγική ή χωρητική συμπεριφορά), αν το ρεύμα καθυστερεί ή προπορεύεται της τάσεως και την διαφορά φάσης τους.

ΕΡΩΤΗΣΗ 2.5

Η χωρητική αντίσταση ενός πυκνωτή είναι 10Ω σε συχνότητα 50Hz. Να υπολογίσετε την χωρητική αντίσταση σε συχνότητα 100Hz.

Απάντηση

Υπολογίζουμε την χωρητικότητα του πυκνωτή, η οποία ισοδυναμεί με: $X_C = \dfrac{1}{C\omega} \Rightarrow$

$$C = \frac{1}{X_C 2\pi f} = \frac{1}{10 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50} = \frac{1}{3140} = 318{,}5 \cdot 10^{-6} = 318{,}5\,\mu F.$$

Οπότε για συχνότητα 100 Hz υπολογίζουμε ότι η χωρητική αντίσταση είναι:

$$X_C' = \frac{1}{C\omega'} = \frac{1}{318{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 100} = \frac{1000000}{200000} = 5\Omega$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 2.6

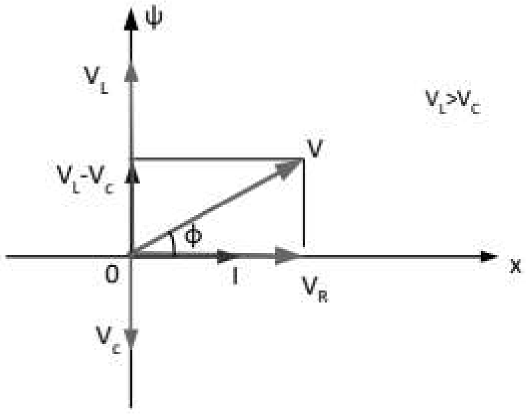
1. Τι γνωρίζετε για την σύνθετη αντίσταση ενός κυκλώματος RLC σε σειρά;

2. Τι γνωρίζετε για την σύνθετη αντίσταση ενός κυκλώματος RLC σε παραλληλία;

Απάντηση

1.

Η σύνθετη αντίσταση (σε κύκλωμα R-L-C σειράς) θα δίνεται από την σχέση $Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \dfrac{1}{C\omega})^2}$. Το διανυσματικό διάγραμμα κυκλώματος R-L-C σειράς, είναι το εξής:



Σχήμα 2. 29

Το πηνίο παρουσιάζει την επαγωγική αντίσταση $X_L = L\omega$, ενώ ο πυκνωτής παρουσιάζει την χωρητική αντίσταση $X_C = \frac{1}{C\omega}$. Η πτώση τάσης στα άκρα των καταναλωτών του κυκλώματος (R, L και C) είναι αντίστοιχα: $V_R = IR$, $V_L = IX_L = IL\omega$ και $V_C = IX_C = \frac{I}{C\omega}$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο προηγούμενο διανυσματικό διάγραμμα προκύπτει η σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος:

$$V^2 = V_R{}^2 + (V_L - V_C)^2 \Rightarrow V^2 = (IR)^2 + (IL\omega - \frac{I}{C\omega})^2 \Rightarrow V^2 = I^2(R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2)$$

$$V = I\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \Rightarrow \frac{V}{I} = \frac{I\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}{I} \overset{Z=\frac{V}{I}}{\Rightarrow} Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}.$$

Από το διανυσματικό διάγραμμα επίσης, η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος προκύπτει ως εξής : $\varepsilon\varphi\phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{IX_L - IX_C}{IR} = \frac{I(X_L - X_C)}{IR} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$.

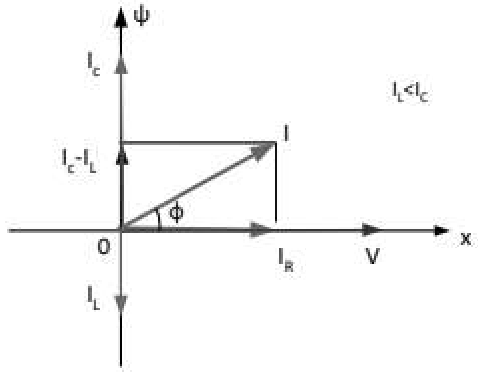
Επομένως, η συμπεριφορά του κυκλώματος εξαρτάται από τις σύνθετες αντιστάσεις.:

— Όταν $V_L>V_C$ ή $X_L - X_C > 0 \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} > 0 \Rightarrow L\omega > \frac{1}{C\omega}$, τότε είναι $0 < \phi < 90^\circ$ (και το ρεύμα καθυστερεί της τάσης). Το κύκλωμα σε αυτή την περίπτωση έχει **επαγωγική συμπεριφορά**.

— Όταν $V_L<V_C$ ή $X_L - X_C < 0 \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} < 0 \Rightarrow L\omega < \frac{1}{C\omega}$, τότε είναι $-90^\circ < \phi < 0^\circ$ (και το ρεύμα προηγείται της τάσης). Το κύκλωμα σε αυτή την περίπτωση, έχει **χωρητική συμπεριφορά**.

2.

Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος (RLC παραλληλίας) είναι ίση με $Z=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2}+(C\omega-\dfrac{1}{L\omega})^2}}$. Το διανυσματικό διάγραμμα του κυκλώματος, είναι το εξής:



Εικόνα 2. 30

Το πηνίο παρουσιάζει την επαγωγική αντίσταση $X_L=L\cdot\omega$, ενώ ο πυκνωτής παρουσιάζει την χωρητική αντίσταση $X_C=\dfrac{1}{C\cdot\omega}$.

Η ενεργός τιμή της έντασης στα άκρα των καταναλωτών του κυκλώματος (R, L και C) είναι αντίστοιχα:

$$I_R=\frac{V}{R},\ I_L=\frac{V}{X_L}=\frac{V}{L\omega}\ \text{ και }\ I_C=\frac{V}{X_C}=\frac{V}{\dfrac{1}{C\omega}}=\frac{\dfrac{V}{1}}{\dfrac{1}{C\omega}}\Rightarrow I_C=VC\omega.$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο διανυσματικό διάγραμμα προκύπτει η σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος:

$$I^2=I_R{}^2+(I_C-I_L)^2\Rightarrow I=\sqrt{(\frac{V}{R})^2+(\frac{V}{X_C}-\frac{V}{X_L})^2}\Rightarrow I=\sqrt{V^2\frac{1}{R^2}+V^2(\frac{1}{\dfrac{1}{C\omega}}-\frac{1}{L\omega})^2}\Rightarrow$$

$$I=V\sqrt{(\frac{1}{R^2}+(C\omega-\frac{1}{L\omega})^2)}\Rightarrow\frac{I}{V}=\sqrt{\frac{1}{R^2}+(C\omega-\frac{1}{L\omega})^2)}\overset{\frac{I}{V}=\frac{1}{Z}}{\Rightarrow}Z=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2}+(C\omega-\dfrac{1}{L\omega})^2}}$$

Επίσης από το διανυσματικό διάγραμμα, η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος προκύπτει σύμφωνα με τη εφφ της γωνίας :

$$\text{εφφ}=\frac{I_C-I_L}{I_R}\Rightarrow\text{εφφ}=\frac{\dfrac{V}{X_C}-\dfrac{V}{X_L}}{\dfrac{V}{R}}=\frac{\dfrac{1}{X_C}-\dfrac{1}{X_L}}{\dfrac{1}{R}}=\frac{C\omega-\dfrac{1}{L\omega}}{\dfrac{1}{R}},\ \text{ οπότε }\ \text{εφφ}=R(C\omega-\frac{1}{L\omega}).$$

Η συμπεριφορά του κυκλώματος εξαρτάται από τις σύνθετες αντιστάσεις. Επομένως:

— Όταν $I_C > I_L \Rightarrow \frac{V}{X_C} > \frac{V}{X_L} \Rightarrow \frac{1}{X_C} > \frac{1}{X_L} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{C\omega}} > \frac{1}{L\omega} \Rightarrow C\omega > \frac{1}{L\omega}$, η τάση καθυστερεί του ρεύματος. Το κύκλωμα σε αυτή την περίπτωση έχει **χωρητική συμπεριφορά**.

— Όταν $I_C < I_L \Rightarrow \frac{V}{X_C} < \frac{V}{X_L} \Rightarrow \frac{1}{X_C} < \frac{1}{X_L} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{C\omega}} < \frac{1}{L\omega} \Rightarrow C\omega < \frac{1}{L\omega}$, η τάση προηγείται ρεύματος. Το κύκλωμα σε αυτή την περίπτωση, έχει **επαγωγική συμπεριφορά**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 2.1

Πυκνωτής χωρητικότητας 200μF διαρρέεται από ρεύμα $i = 5\eta\mu(628t)$ **A.**

Ζητούνται:

1. Η χωρητική του αντίσταση.

2. Η τάση που επικρατεί στα άκρα του.

Απάντηση

1.

Η χωρητική αντίσταση του πυκνωτή είναι

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{200 \cdot 10^{-6} \cdot 628} = \frac{10^6}{125600} = 7{,}96\,\Omega.$$

2.

Το πλάτος της τάσης είναι $V_0 = X_C \cdot I_o = 7{,}96 \cdot 5 = 39{,}8\,V$. Η τάση που επικρατεί στα άκρα του πυκνωτή είναι

$$u = V_o\eta\mu(\omega t - 90^o) = 39{,}8\eta\mu(628t - 90^o)V.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.2

Πηνίο αυτεπαγωγής 0,5 H, διαρρέεται από ρεύμα $i = 2\eta\mu(314t)$ **A.**

Να βρεθούν:

1. Η επαγωγική του αντίδραση X_L.

2. Η τάση που επικρατεί στα άκρα του.

Απάντηση

1.

Η επαγωγική αντίδραση (αντίσταση) του πηνίου είναι

$$X_L = L\omega = 0{,}5 \cdot 314 = 157\ \Omega.$$

2.

Η τάση του πηνίου στα άκρα του είναι

$$u = V_o \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + 90^o) = X_L \cdot I_o\eta\mu(314t + 90^o) = 157 \cdot 2 \cdot \eta\mu(314t + 90^o) = 314\eta\mu(314t + 90^o)$$

(η τάση προηγείται του ρεύματος κατά 90^o ή $\frac{\pi}{2}$).

ΑΣΚΗΣΗ 2.3

Κύκλωμα αποτελείται από ωμική αντίσταση 50 Ω και πηγή εναλλασσόμενης τάσης ενεργού τιμής 220 V. Να βρείτε:

1. Την ενεργό τιμή της έντασης του ρεύματος στον καταναλωτή.

2. Την διαφορά φάσης ρεύματος, τάσης.

Απάντηση

1.

Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος είναι

$$I=\frac{V}{Z}=\frac{V}{R}=\frac{220}{11}=20\text{ A}\cdot$$

2.

Το ρεύμα είναι σε φάση με την τάση (δηλαδή Δφ=0).

ΑΣΚΗΣΗ 2.4

Κύκλωμα αποτελείται από πηνίο με αυτεπαγωγή 2H και πηγή τροφοδοσίας εναλλασσόμενης τάσης 220V, συχνότητας 50Hz. Να βρείτε

1. Την επαγωγική αντίσταση στα άκρα του καταναλωτή.

2. Την ενεργό τιμή της έντασης του ρεύματος.

3. Την διαφορά φάσης ρεύματος και τάσης.

Απάντηση

1.

Η επαγωγική αντίσταση είναι:

$$X_L=L\omega=L\,2\pi f=2\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 50=628\ \Omega\,.$$

2.

Η ένταση του ρεύματος $I=\frac{V}{X_L}=\frac{220}{628}=0{,}35\text{ A}\,.$

3.

Το ρεύμα έπεται της τάσης κατά 90^o.

ΑΣΚΗΣΗ 2.5

Κύκλωμα αποτελείται από πυκνωτή και πηγή τροφοδοσίας εναλλασσόμενης τάσης 220V, συχνότητας 50Hz. Η ένταση του ρεύματος είναι 10 A. Να βρείτε την χωρητικότητα του πυκνωτή.

Απάντηση:

Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι

$$I=\frac{V}{Z}=\frac{V}{\frac{1}{C\omega}}\Rightarrow C=\frac{I}{V\cdot 2\pi f}=\frac{10}{200\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 50}=\frac{10}{62800}=159{,}2\cdot 10^{-6}\text{ F ή }159{,}2\ \mu\text{F}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.6

Πηνίο αυτεπαγωγής L=5 H, συνδέεται με πηγή τάσης 230V και συχνότητα λειτουργίας 50Hz. Να βρεθεί η ενεργός τιμή του ρεύματος που διαρρέει το στοιχείο.

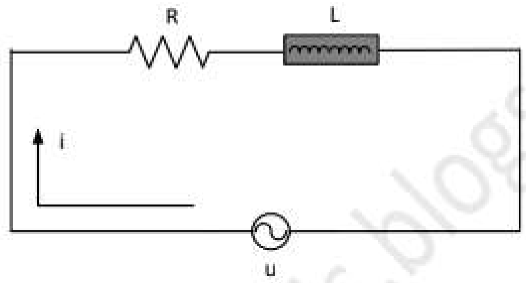
Απάντηση

Η ενεργός τιμή της τάσης είναι 230 V. Επίσης η επαγωγική αντίσταση είναι $X_L=L\cdot\omega=L\cdot 2\pi f=5\cdot 2\cdot\pi\cdot 50=500\pi$ ή $X_L=500\cdot 3{,}14=1570\ \Omega$. Επομένως η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος, που διαρρέει το πηνίο είναι

$$I_{\varepsilon\nu}=\frac{V_{\varepsilon\nu}}{X_L}=\frac{230}{1570}=0{,}146\ \text{A}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.7

Κύκλωμα RL σειράς, τροφοδοτείται από εναλλασσόμενη τάση η οποία προπορεύεται της έντασης του ρεύματος κατά 40^0. Δίνονται οι ενεργές τιμές: I = 20A και V = 220V.



Σχήμα 2. 31

Να βρείτε την σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος και να σχεδιάσετε:

1. Το διανυσματικό διάγραμμα τάσεων και εντάσεων.

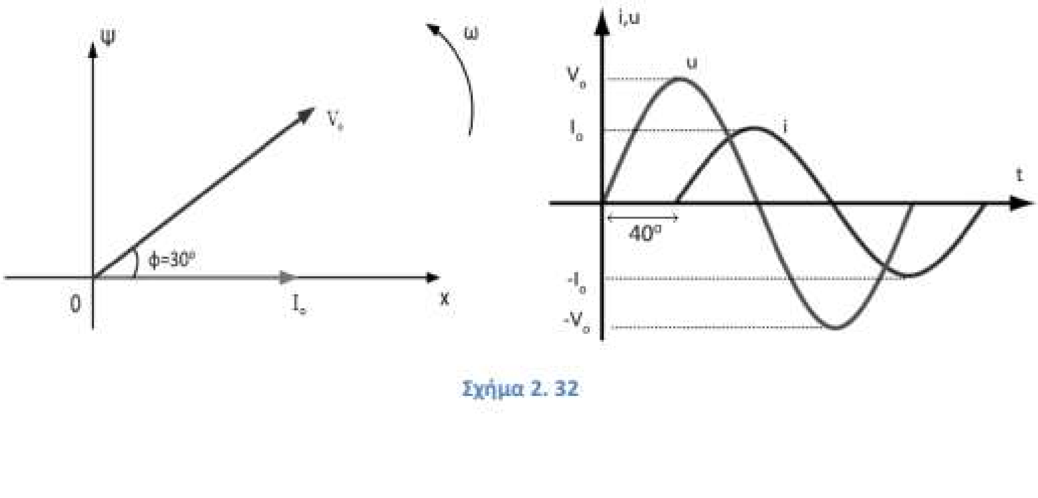
2. Τις ημιτονοειδής καμπύλες.

Απάντηση

Η σύνθετη αντίσταση με $I_{\varepsilon\nu}=20$ A και $I_o=20\sqrt{2}$ A , $V_{\varepsilon\nu}=220$V και $V_o=220\sqrt{2}$ V είναι

$$I_{\varepsilon\nu}=\frac{V_{\varepsilon\nu}}{Z}\Rightarrow Z=\frac{220}{20}=11\,\text{A}$$

Το διανυσματικό διάγραμμα και οι κυματομορφές (με μέγιστες τιμές μεγεθών) είναι οι εξής:



Σχήμα 2. 32

ΑΣΚΗΣΗ 2.8

Κύκλωμα RL σειράς έχει R=20Ω, L=15mH και τροφοδοτείται από πηγή εναλλασσόμενης τάσης 100V, 100Hz.

Ζητούνται:

1. Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος.

2. Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος.

Απάντηση

1.

Η κυκλική συχνότητα είναι $\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 100 = 628\frac{rad}{sec}$.

Η σύνθετη αντίσταση για το κύκλωμα RL σε σειρά δίνεται από τη σχέση

$X_L = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$. Οπότε αντικαθιστώντας τα δεδομένα της εκφώνησης είναι

$$X_L = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} = \sqrt{20^2 + (15 \cdot 10^{-3} \cdot 628)^2} = \sqrt{400 + 9{,}42^2} = \sqrt{400 + 88{,}736} = 22{,}1\Omega.$$

2.

Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος είναι $I_{\varepsilon\nu} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{Z} = \frac{100}{22{,}1} = 4{,}52\,A$.

ΑΣΚΗΣΗ 2.9

Κύκλωμα ωμικής αντίστασης τροφοδοτείται με εναλλασσόμενη τάση $u = 400\eta\mu(314t)$ **. Η ωμική αντίσταση είναι R=50 Ω. Να βρεθούν:**

1. Η συχνότητα f και η περίοδος T.

2. Η ενεργός τιμή της τάσης.

3. Η στιγμιαία τιμή της έντασης του ρεύματος.

Απάντηση

1.

Η κυκλική συχνότητα είναι $\omega = 2\pi f = 314\frac{rad}{sec}$. Επομένως η συχνότητα προκύπτει ότι είναι $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2 \cdot 3{,}14} \Rightarrow f = \frac{314}{6{,}28} = 50Hz$. Η περίοδος είναι $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0{,}02\,sec$.

2.

Η ενεργός τιμή της τάσης και του ρεύματος είναι αντίστοιχα

$$V_{\varepsilon\nu} = \frac{V_o}{\sqrt{2}} = \frac{400}{\sqrt{2}} = 200\sqrt{2} = 282{,}8\,V.$$

3.

Η στιγμιαία τιμή της έντασης του ρεύματος με $I_{\varepsilon\nu} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{R} = \frac{282{,}8}{50} = 5{,}65\,A$, είναι

$$i = I_o\eta\mu(\omega t) = I_{\varepsilon\nu}\sqrt{2}\,\eta\mu\,314t = 5{,}65\sqrt{2}\,\eta\mu\,314t \quad A.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.10

Πηνίο αυτεπαγωγής 100 mH διαρρέεται από ρεύμα $i = ημ(314\,t)$ **. Να βρεθούν:**

1. Η επαγωγική του αντίδραση.

2. Η στιγμιαία τιμή τάσης που επικρατεί στα άκρα του.

Απάντηση

1.

Η επαγωγική αντίσταση (αντίδραση) είναι $X_L = L \cdot \omega = 100 \cdot 10^{-3} \cdot 314 = 31{,}4\,\Omega$.

2.

Είναι $V_0 = X_L \cdot I_o = 31{,}4 \cdot 1 = 31{,}4\,V$. Η τάση προηγείται του ρεύματος κατά 90^o, οπότε η στιγμιαία τάση του πηνίου στα άκρα του, με είναι ίση με

$$u = V_o ημ(\omega t + 90^o) = 31{,}4 ημ(314\,t + 90^o).$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.11

Κύκλωμα με πυκνωτή χωρητικότητας 200μF διαρρέεται από ρεύμα $i = 5ημ(314\,t)$ **A.**

Να βρεθούν

1. Η χωρητική του αντίσταση.

2. Η τάση που επικρατεί στα άκρα του.

Απάντηση:

1.

Η χωρητική αντίσταση (αντίδραση) του πυκνωτή είναι

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{200 \cdot 10^{-6} \cdot 314} = \frac{10^6}{62800} = 15{,}9\,\Omega.$$

2.

Η τάση που επικρατεί στα άκρα του πηνίου (η τάση υστερεί του ρεύματος κατά 90^o) με $V_0 = X_C \cdot I_o = 15{,}9 \cdot 5 = 79{,}5V$, θα είναι

$$u = V_o ημ(\omega t - 90^o) = 79{,}5 ημ(314\,t - 90^o)\,V.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.12

Κύκλωμα RC σειράς αποτελείται από ωμική αντίσταση R=100 Ω και πυκνωτή χωρητικότητας C=5μF. Το κύκλωμα είναι συνδεδεμένο σε πηγή τροφοδοσίας συχνότητας 50 Hz και ενεργούς τάσεως 230 V.

Ζητούνται τα εξής:

1. Να σχεδιάσετε το κύκλωμα της άσκησης.

2. Η σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος.

3. Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος $I_{εν}$**.**

4. Οι τάσεις V_R**,** V_C **στα άκρα των στοιχείων.**

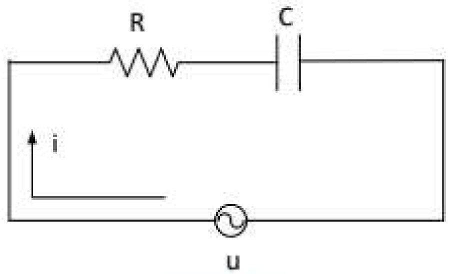
5. Να σχεδιάσετε το τρίγωνο αντιστάσεων.

6. Να σχεδιάσετε το διανυσματικό διάγραμμα τάσεων – ρευμάτων.

Απάντηση

1.

Το κύκλωμα της άσκησης περιλαμβάνει μια αντίσταση, έναν πυκνωτή και την πηγή εναλλασσόμενης τάσης (κύκλωμα R-C σειράς).



Σχήμα 2. 33

2.

Η χωρητική αντίσταση είναι $X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-6} \cdot 314} = \frac{10^6}{1570} = 636{,}9\ \Omega$.

Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι

$$Z = \sqrt{R^2 + (\frac{1}{C \cdot \omega})^2} = \sqrt{100^2 + 636{,}9^2} = \sqrt{10000 + 405.641{,}61} = \sqrt{415641{,}61} = 644{,}7\Omega .$$

3.

Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος είναι $I_{εν} = \frac{V_{εν}}{Z} = \frac{230}{644{,}7} = 0{,}356\,A$.

4.

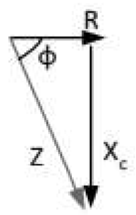
Η πτώση τάσης στα άκρα της χωρητικής αντίστασης είναι

$$V_C = I \cdot X_C = 0{,}356 \cdot 636{,}9 = 227{,}2V\ .$$

Η τάση στην ωμική αντίσταση είναι $V_R = I \cdot R = 0{,}356 \cdot 100 = 35{,}6\ V$.

5.

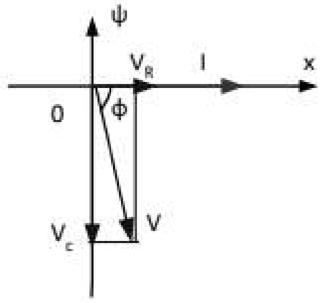
Το τρίγωνο των αντιστάσεων (με τιμές των στοιχείων στο σχήμα, R=100 Ω, X_C=636,9Ω, Z=644,7 Ω και $συνφ = \frac{R}{Z} = \frac{100}{644{,}7} = 0{,}155 \Rightarrow φ = συν^{-1}\,0{,}155 = 81^\circ$) είναι το εξής:



Σχήμα 2. 34

6.

Η διανυσματική παράσταση των μεγεθών (ενεργές τιμές μεγεθών με V=230 V, V_C=226,7 V, V_R=35,6 V και φ=81°), φαίνεται στο επόμενο σχήμα :



Σχήμα 2. 35

ΑΣΚΗΣΗ 2.13

Κύκλωμα RL σειράς αποτελείται από ωμική αντίσταση R=100 Ω και πηνίο αυτεπαγωγής L=1 H. Το κύκλωμα τροφοδοτείται από πηγή εναλλασσόμενης τάσης $u = 230\sqrt{2}\,ημ\,314t$. **Ζητούνται τα εξής:**

1. Να σχεδιάσετε το κύκλωμα της άσκησης.

2. Η σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος.

3. Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος $I_{εν}$.

4. Οι τάσεις V_R, V_C στα άκρα των στοιχείων.

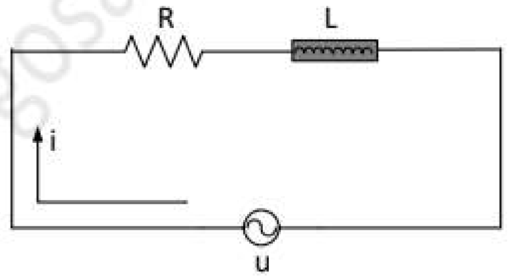
5. Να σχεδιάσετε το τρίγωνο αντιστάσεων.

6. Να σχεδιάσετε το διανυσματικό διάγραμμα τάσεων – ρευμάτων.

Απάντηση

1.

Το κύκλωμα της άσκησης περιλαμβάνει μια αντίσταση, ένα πηνίο και την πηγή εναλλασσόμενης τάσης (κύκλωμα R-L σειράς).



Σχήμα 2. 36

2.

Γνωρίζουμε πως το πηνίο παρουσιάζει αντίσταση η οποία ονομάζεται επαγωγική αντίσταση X_L, που ισοδυναμεί με $X_L = L \cdot ω$. Οπότε είναι $X_L = L \cdot ω = 1 \cdot 314 = 314\ Ω$.

Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι ίση με

$$Z = \sqrt{R^2 + (L \cdot ω)^2} = \sqrt{100^2 + 314^2} = 329{,}5\,Ω.$$

3.

Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος είναι $I_{εν} = \dfrac{V_{εν}}{Z} = \dfrac{\frac{V_o}{\sqrt{2}}}{Z} = \dfrac{230}{329{,}5} = 0{,}69\,A$.

4.

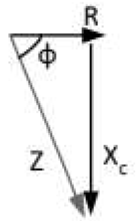
Η πτώση τάσης στα άκρα της χωρητικής αντίστασης είναι

$$V_L = I \cdot X_L = 0{,}69 \cdot 314 = 219{,}181V \ .$$

Η τάση στην ωμική αντίσταση είναι $V_R = I \cdot R = 0{,}691 \cdot 100 = 69{,}1V$.

5.

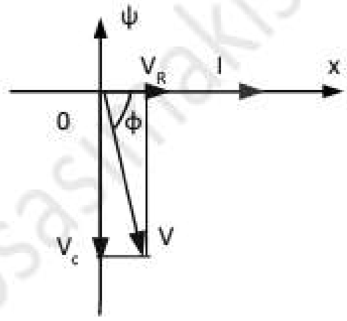
Το τρίγωνο των αντιστάσεων (με τιμές των στοιχείων στο σχήμα, R=100 Ω, X_L=314 Ω, Z=329,5 Ω και $συνφ = \frac{R}{Z} = \frac{100}{329{,}5} = 0{,}30 \Rightarrow φ = συν^{-1} 0{,}30 = 72{,}5^o$) είναι το εξής:



Σχήμα 2. 37

6.

Η διανυσματική παράσταση των μεγεθών (ενεργές τιμές μεγεθών με V=230 V, V_L=219,18 V, V_R=69,1 V και φ=72,5^o), φαίνεται στο επόμενο σχήμα :



Σχήμα 2. 38

ΑΣΚΗΣΗ 2.14

Κύκλωμα RLC σειράς έχει R=50Ω, L=10mH, C=20μF και τροφοδοτείται από εναλλασσόμενο τάση $u = 50\sqrt{2}\,ημ\,314t$. Ζητούνται τα εξής:

1. Να σχεδιάσετε το κύκλωμα.

2. Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος.

3. Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος.

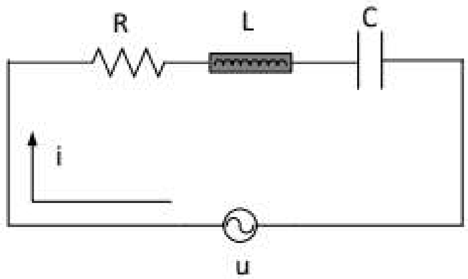
4. Οι τάσεις V_R, V_L,V_c , στα άκρα των στοιχείων.

5. Να εξετάσετε αν το ρεύμα προηγείται της τάσης.

Απάντηση

1.

Το κύκλωμα της άσκησης περιλαμβάνει μια αντίσταση, ένα πηνίο, έναν πυκνωτή και την πηγή εναλλασσόμενης τάσης (κύκλωμα R-L-C σειράς).



Σχήμα 2. 39

2.

Η κυκλική συχνότητα είναι $\omega = 2\pi f = 2\cdot 3{,}14\cdot 50 = 314\dfrac{rad}{sec}$.

Η χωρητική αντίσταση είναι $X_C = \dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{1}{20\cdot 10^{-6}\cdot 314} = 159{,}23\Omega$.

Η χωρητική αντίσταση είναι $X_L = L\omega = 10\cdot 10^{-3}\cdot 314 = 3{,}14\Omega$.

Η σύνθετη αντίσταση ενός κυκλώματος RLC σε σειρά είναι ίση με $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ οπότε

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{50^2 + (3{,}14 - 159{,}23)^2} = \sqrt{2500 + 24364{,}09} = 163{,}8\Omega.$$

3.

Η ενεργός τιμή της έντασης ρεύματος είναι $I_{εν} = \dfrac{V_{εν}}{Z} = \dfrac{50}{163{,}98} = 0{,}30A$.

4.

Οι τάσεις στα άκρα των στοιχείων του κυκλώματος RLC σε σειρά είναι αντίστοιχα

$$V_R = I_{εν}R = 0{,}30\cdot 500 = 152{,}45V, \qquad V_C = I_{εν}X_C = 0{,}30\cdot 159{,}233 = 47{,}77V \text{ και}$$

$$V_L = I_{εν}X_L = 0{,}30\cdot 3{,}14 = 0{,}94V.$$

5.

Η διαφορά φάσης για κύκλωμα RLC σειράς είναι $εφφ = \dfrac{V_L - V_C}{V_R} = \dfrac{0{,}957 - 48{,}53}{152{,}45} = -0{,}31$.

Οπότε προκύπτει $φ = εφ^{-1}φ = εφ^{-1}(-0{,}31) = -17{,}8^{\circ}$.

Το κύκλωμα έχει χωρητική συμπεριφορά, είναι δηλαδή $V_L < V_C$ με $-90^{\circ} < φ < 0^{\circ}$, οπότε η τάση έπεται (καθυστερεί) του ρεύματος.

ΑΣΚΗΣΗ 2.15

Κύκλωμα RC παραλληλίας, αποτελείται από ωμική αντίσταση R=100 Ω και πυκνωτή χωρητικότητας C=5μF. Το κύκλωμα είναι συνδεδεμένο σε πηγή τροφοδοσίας συχνότητας 50 Hz και ενεργούς τάσεως 23 V.

Ζητούνται τα εξής:

1. Να σχεδιάσετε το κύκλωμα της άσκησης.

2. Οι τάσεις V_R, V_C στα άκρα των στοιχείων.

3. Τα ρεύματα (ενεργές τιμές) που διαρρέουν την αντίσταση και τον πυκνωτή.

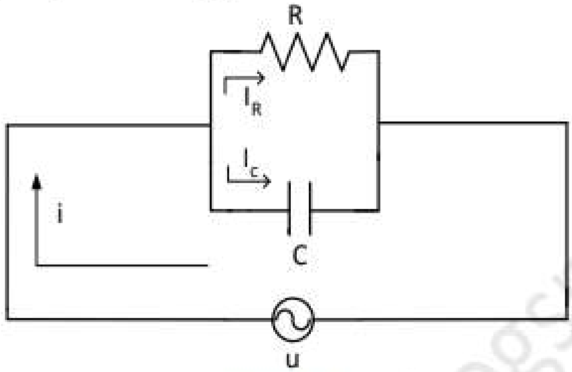
4. Η σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος.

5. Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος $I_{εν}$.

Απάντηση

1.

Το κύκλωμα παραλληλίας είναι το εξής:



Σχήμα 2. 40

2.

Οι τάσεις στα άκρα των στοιχείων (ενεργές τιμές) είναι (λόγω παραλληλίας): V_R=V_C=23 V.

3.

Ο πυκνωτής παρουσιάζει αντίσταση η οποία δίνεται από την σχέση

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C2\pi f} = \frac{1}{5\cdot 10^{-6}\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 50} = \frac{1000000}{1570} = 636{,}9\,\Omega \ .$$

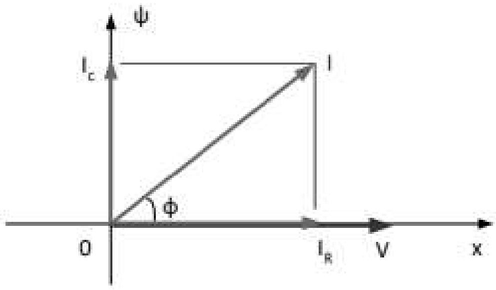
Το ρεύμα (ενεργός τιμή) στα άκρα του πυκνωτή είναι

$$I_C = \frac{V}{X_C} \Rightarrow I_C = \frac{23}{636{,}9} = 0{,}036\ \text{A} \ .$$

Επίσης, η ωμική αντίσταση διαρρέεται από ενεργό ένταση ρεύματος: $I_R = \frac{V}{R} = \frac{23}{100} = 0{,}23\,\text{A}$.

4.

Η γενική μορφή του διανυσματικού διαγράμματος των εντάσεων του παράλληλου κυκλώματος (ενεργές τιμές μεγεθών) είναι το εξής:



Σχήμα 2. 41

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε την σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος:

$$I^2 = I_R^{\ 2} + I_C^{\ 2} \Rightarrow I = \sqrt{(\frac{V}{R})^2 + (\frac{V}{X_C})^2} \Rightarrow I = \sqrt{V^2\frac{1}{R^2} + V^2\frac{1}{\frac{1}{C^2\omega^2}}} = \sqrt{V^2}\sqrt{(\frac{1}{R^2} + C^2\omega^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = V\sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2\omega^2} \Rightarrow \frac{I}{V} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2\omega^2} \overset{\frac{I}{V}=\frac{1}{Z}}{\Rightarrow} Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2\omega^2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}{R}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow Z = \frac{R}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}$. Οπότε η σύνθετη αντίσταση είναι

$$\Rightarrow Z = \frac{100}{\sqrt{1+10000\cdot 25\cdot 10^{-12}314^2}} \Rightarrow Z = \frac{100}{\sqrt{1{,}024649}} = \frac{100}{1{,}0225} = 97{,}8\ \Omega$$

5.

Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος είναι: $I = \frac{V}{Z} = \frac{23}{97{,}8} = 0{,}235A$.

ΑΣΚΗΣΗ 2.16

Κύκλωμα RL παραλληλίας, αποτελείται από ωμική αντίσταση R=100 Ω και πηνίο αυτεπαγωγής L=1 H. Το κύκλωμα είναι συνδεδεμένο σε εναλλασσόμενη πηγή τροφοδοσίας $u = 23\sqrt{2}\,\eta\mu\, 314t$. Ζητούνται τα εξής:

1. Να σχεδιάσετε το κύκλωμα της άσκησης.

2. Οι τάσεις V_R, V_C στα άκρα των στοιχείων.

3. Τα ρεύματα (ενεργές τιμές) που διαρρέουν την αντίσταση και τον πυκνωτή.

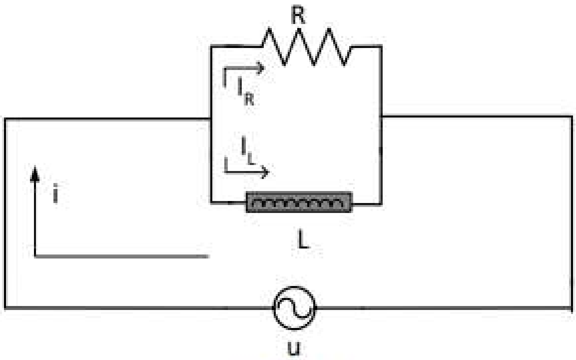
4. Η σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος.

5. Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος $I_{εν}$.

Απάντηση

1.

Το κύκλωμα παραλληλίας είναι το εξής:



Σχήμα 2. 42

2.

Οι τάσεις στα άκρα των στοιχείων (ενεργές τιμές) είναι (λόγω παραλληλίας):

$V_R = V_C = 23$ V.

3.

Το πηνίο παρουσιάζει επαγωγική αντίσταση η οποία δίνεται από την σχέση $X_L = L \cdot \omega = 1 \cdot 314 = 314\,\Omega$. Το ρεύμα (ενεργός τιμή) στα άκρα του πηνίου είναι

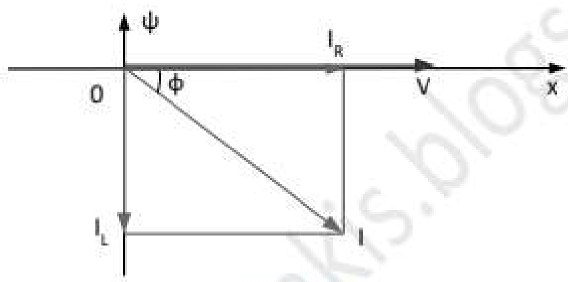
$$I_L = \frac{V}{X_L} \Rightarrow I_L = \frac{V}{L\omega} = \frac{23}{314} = 0{,}0732\text{A ή } 73{,}2\text{ mA}$$

Επίσης, η ωμική αντίσταση διαρρέεται από ενεργό ένταση ρεύματος:

$$I_R = \frac{V}{R} = \frac{23}{100} = 0{,}23\text{ A}.$$

4.

Η γενική μορφή του διανυσματικού διαγράμματος των εντάσεων του παράλληλου κυκλώματος (ενεργές τιμές μεγεθών) είναι το εξής:



Σχήμα 2. 43

Από το διανυσματικό διάγραμμα των ρευμάτων και το τρίγωνο γωνίας φ που απεικονίζεται σε αυτό μέσω του πυθαγορείου θεωρήματος για τα διανυσματικά μεγέθη του, μπορούμε να υπολογίσουμε την σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος (R-L παραλληλίας), ως εξής:

$$I^2 = I_R{}^2 + I_L{}^2 \Rightarrow I = \sqrt{(\frac{V}{R})^2 + (\frac{V}{X_L})^2} \Rightarrow I = \sqrt{V^2\frac{1}{R^2} + V^2\frac{1}{L^2\omega^2}} = V\sqrt{(\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{L^2\omega^2})} \Rightarrow$$

$$\frac{I}{V} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{L^2\omega^2})} \overset{\frac{I}{V}=\frac{1}{Z}}{\Rightarrow} \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{L^2\omega^2})} \Rightarrow Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{L^2\omega^2})}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}}{\sqrt{R^2L^2\omega^2}}} \Rightarrow$$

$$Z = \frac{\sqrt{R^2L^2\omega^2}}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}} \Rightarrow Z = \frac{L\omega R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}.$$

Οπότε η σύνθετη αντίσταση είναι

$$\Rightarrow Z = \frac{1 \cdot 314 \cdot 100}{\sqrt{10000 \cdot + 1^2 \cdot 314^2}} \Rightarrow Z = \frac{31400}{329} = 95{,}4\,\Omega$$

5.

Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος είναι: $I=\dfrac{V}{Z}=\dfrac{\frac{V_o}{\sqrt{2}}}{Z}=\dfrac{23}{95,4}=0,24A$.

ΑΣΚΗΣΗ 2.17

Η σύνθετη αντίσταση ενός κυκλώματος LC παραλληλίας, είναι 20Ω. Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι 100μF. Επίσης η πηγή τροφοδοτεί το κύκλωμα με ενεργό τιμή έντασης ρεύματος 10 Α και κυκλική συχνότητα 100Hz.

1. Να σχεδιάσετε το κύκλωμα.

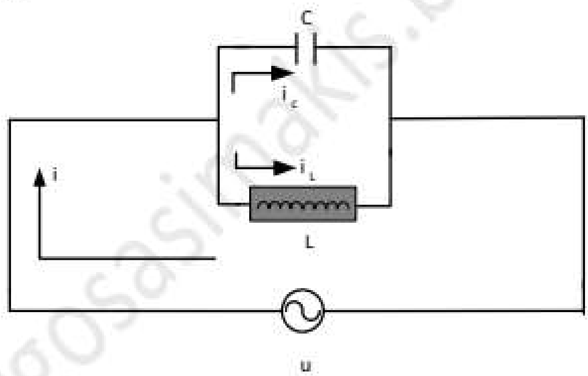
2. Να υπολογίσετε την αυτεπαγωγή του πηνίου

3. Να γράψετε την στιγμιαία χρονική εξίσωση εναλλασσόμενης τάσης της πηγής τροφοδοσίας του κυκλώματος (το ρεύμα προηγείται της τάσης κατά 90^{o}).

Απάντηση

1.

Το κύκλωμα περιλαμβάνει πυκνωτή χωρητικότητας C, πηνίο αυτεπαγωγής L και πηγή εναλλασσόμενης τάσης u.



Σχήμα 2. 44

2.

Η σύνθετη αντίσταση είναι ίση με :

$$Z=\frac{V}{I}=\frac{V}{I_L-I_C}=V\frac{1}{\frac{V}{X_L}-\frac{V}{X_C}}=V\frac{1}{V(\frac{1}{X_L}-\frac{1}{X_C})}=\frac{1}{\frac{1}{L\omega}-C\omega}\Rightarrow 20=\frac{1}{\frac{1}{L\cdot 100}-100\cdot 10^{-6}\cdot 100}\Rightarrow$$

$$20=\frac{1}{\frac{1}{L\cdot 100}-10^{-2}}\Rightarrow 20=\frac{100}{\frac{1}{L}-1}\Rightarrow \frac{1}{L}-1=5\Rightarrow \frac{1}{L}=6\Rightarrow L=0,167\ H$$

3.

Για τις ενεργές τιμές είναι $I=\dfrac{V}{Z}\Rightarrow V=I\cdot Z=10\cdot 20=200\ V$. Οπότε η στιγμιαία τιμή είναι $u=V_o ημωt=200\sqrt{2}\,ημ\,100t$.

ΑΣΚΗΣΗ 2.18

Κύκλωμα RLC σε παράλληλη σύνδεση έχει ωμική αντίσταση R=8Ω, επαγωγική αντίδραση X_L=1,5Ω και χωρητική αντίδραση X_C. Το κύκλωμα τροφοδοτείται από εναλλασσόμενη τάση ενεργού τιμής $V_{εν}$=24V. Το ρεύμα του πυκνωτή έχει ενεργό τιμή $I_{Cεν}$=12A. Να υπολογίσετε:

1. Να σχεδιάσετε το κύκλωμα της άσκησης.

2. Τη χωρητική αντίσταση X_C του πυκνωτή.

3. Την ενεργό τιμή της έντασης του ρεύματος I_R που διαρρέει την ωμική αντίσταση και την ενεργό τιμή της έντασης του ρεύματος I_L που διαρρέει το πηνίο.

4. Την ενεργό τιμή της έντασης του ολικού ρεύματος I που δίνει η πηγή.

5. Τη σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος Z .

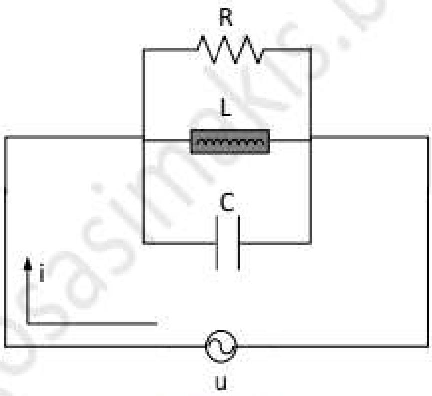
6. Εάν η συχνότητα της πηγής είναι 50Hz να υπολογίσετε την χωρητικότητα του πυκνωτή και την αυτεπαγωγή του πηνίου.

7. Να εξετάσετε την συμπεριφορά (χωρητική ή επαγωγική) του κυκλώματος.

Απάντηση

1.

Το κύκλωμα της άσκησης είναι το επόμενο:



Σχήμα 2. 45

2.

Η χωρητική αντίσταση είναι $V_C = I_C \cdot X_C \Rightarrow X_C = \frac{V_C}{I_C} = \frac{24}{12} = 2\,\Omega$.

3.

Η ενεργός τιμή της έντασης που διαρρέει την αντίσταση είναι $I_R = \frac{V}{R} = \frac{24}{8} = 3$ A.

Επίσης για το πηνίο, είναι $I_L = \frac{V}{X_L} = \frac{24}{1,5} = 16A$.

4.

Το ολικό ρεύμα της πηγής (ενεργός τιμή) είναι

$$I^2 = I_R^2 + (I_L + I_C)^2 \Rightarrow I = \sqrt{3^2 + (16-12)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5\text{ A}.$$

5.

Η σύνθετη αντίσταση είναι $Z=\frac{V}{I}=\frac{24}{5}=4{,}8\ \Omega$.

6.

Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι

$$X_C=\frac{1}{C\cdot\omega}\Rightarrow C=\frac{1}{X_C\cdot\omega}=\frac{1}{2\cdot 314}=0{,}00159\text{F} \text{ ή } 1{,}57\text{ mF.}$$

Η αυτεπαγωγή του πηνίου είναι $X_L=L\cdot\omega\Rightarrow L=\frac{X_L}{\omega}=\frac{1{,}5}{314}=0{,}00477\,\text{H}$ ή 4,77mH.

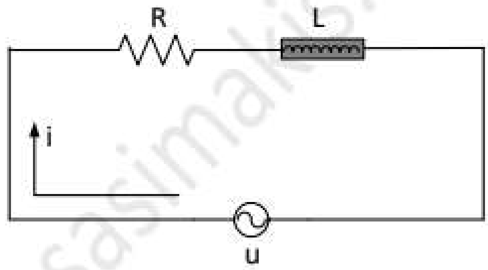
7.

Γνωρίζουμε πως όταν $I_C<I_L$ η τάση προηγείται ρεύματος .

Πράγματι επειδή $I_C=12\,\text{A}\ <\ I_L=16\,\text{A}$ το κύκλωμα έχει επαγωγική συμπεριφορά.

ΑΣΚΗΣΗ 2.19

Κύκλωμα αποτελείται από επαγωγικό καταναλωτή που έχει ωμικό και επαγωγικό χαρακτήρα με τιμές αντίστοιχα R=5Ω, L=10mH. Τροφοδοτείται από εναλλασσόμενη τάση 100V (ενεργός τιμή) και συχνότητα 50Hz.



Σχήμα 2. 46

Να βρεθούν:

1. Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος.

2. Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος.

3. Η τάση στα άκρα των στοιχείων.

4. Το διανυσματικό διάγραμμα τάσεων – ρευμάτων.

Απάντηση

1.

Η κυκλική συχνότητα είναι $\omega=2\pi f=2\cdot 3{,}14\cdot 50=314\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$. Η σύνθετη αντίσταση για το κύκλωμα RL σε σειρά δίνεται από τη σχέση $Z=\sqrt{R^2+(L\omega)^2}$.

Οπότε αντικαθιστώντας τα δεδομένα της εκφώνησης, προκύπτει

$$Z=\sqrt{R^2+(L\omega)^2}\overset{\omega=2\pi f}{=}\sqrt{5^2+(10\cdot 10^{-3}\cdot 314)^2}=\sqrt{25+9{,}85}=5{,}9\Omega.$$

2.

Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος είναι $I_{εν} = \frac{V_{εν}}{Z} = \frac{100}{5,9} = 16,9\,A$.

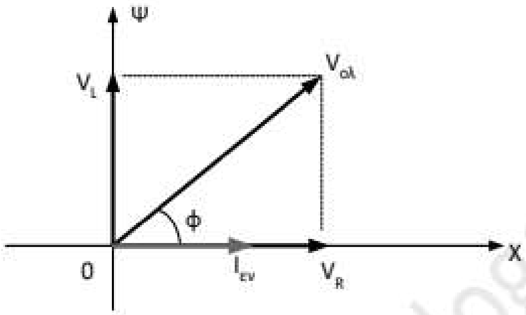
3.

Οι τάση στα άκρα των στοιχείων είναι

$$V_L = I_{εν}X_L = I_{εν}\cdot L\cdot\omega = 16,9\cdot 10\cdot 10^{-3}\cdot 314 = 53V \text{ και } V_R = I_{εν}R = 16,9\cdot 5 = 84,5V.$$

4.

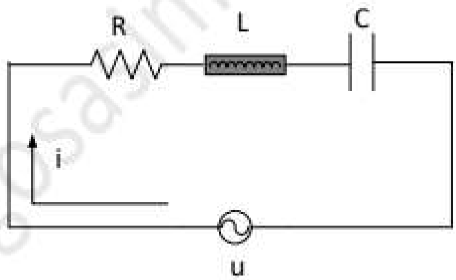
Το διανυσματικό διάγραμμα τάσεων και ρεύματος, είναι το εξής :



Σχήμα 2. 47

ΑΣΚΗΣΗ 2.20

Κύκλωμα RLC σειράς έχει R=100Ω, L=10mH, C=20μF και τροφοδοτείται από εναλλασσόμενη τάση 200V, 50Hz.



Σχήμα 2. 48

Να βρεθούν τα εξής:

1. Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος.

2. Οι τάσεις V_R, V_L,V_C στα άκρα των στοιχείων.

3. Το διανυσματικό διάγραμμα τάσεων και ρευμάτων.

Απάντηση

1.

Η χωρητική αντίσταση είναι

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C\cdot 2\pi f} = \frac{1}{20\cdot 10^{-6}\cdot 2\cdot 3,14\cdot 50} = 159,23\Omega.$$

Η χωρητική αντίσταση είναι $X_L = L\omega = 10\cdot 10^{-3}\cdot 314 = 3,14\Omega$.

Η σύνθετη αντίσταση ενός κυκλώματος RLC σε σειρά είναι ίση με $Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}$,

οπότε $Z=\sqrt{100^2+(3{,}14-159{,}23)^2}=\sqrt{10000+24292{,}4}=185{,}1\Omega$.

2.

Η ενεργός τιμή της έντασης ρεύματος είναι $I_{εν}=\frac{V_{εν}}{Z}=\frac{200}{185{,}17}=1{,}08\,A$.

3.

Οι τάσεις στα άκρα των στοιχείων του κυκλώματος RLC σε σειρά είναι αντίστοιχα

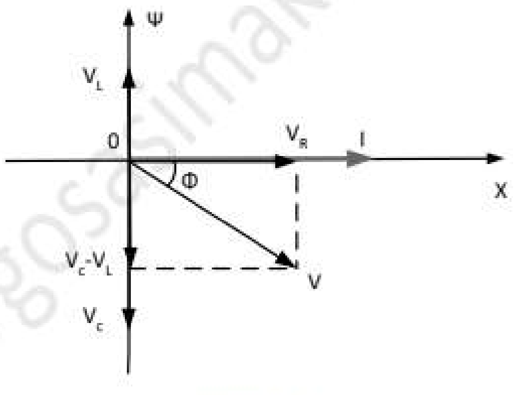
$$V_R=I_{εν}R=1{,}08\cdot 100=108\,V \quad , \; V_C=I_{εν}X_C=1{,}08\cdot 159{,}23=171{,}9\,V$$

$$\text{και } V_L=I_{εν}X_L=1{,}08\cdot 3{,}14=3{,}39\,V.$$

4.

Η διαφορά φάσης για κύκλωμα RLC σειράς είναι $εφφ=\frac{V_L-V_C}{V_R}=\frac{3{,}39-171{,}9}{108}=-1{,}56$.

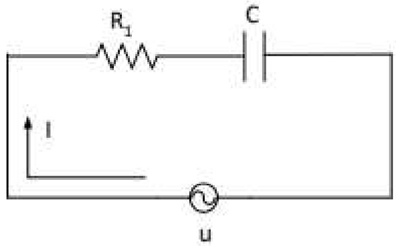
Οπότε προκύπτει $φ=εφ^{-1}φ=εφ^{-1}(-1{,}56)=-57{,}3^{\circ}$. Το διανυσματικό διάγραμμα του κυκλώματος RLC σε σειρά, είναι το επόμενο. Το διάγραμμα (με τις ενεργές τιμές που υπολογίστηκαν) έχει την επόμενη μορφή, επειδή το κύκλωμα έχει χωρητική συμπεριφορά, είναι δηλαδή $V_L<V_C$ με $-90^{\circ}<φ<0^{\circ}$, οπότε το ρεύμα προηγείται της τάσης.



Σχήμα 2. 49

ΑΣΚΗΣΗ 2.21

Δίνεται το κύκλωμα του σχήματος, που περιλαμβάνει σε σειρά, ωμική και χωρητική αντίσταση με αντίστοιχες τιμές R_1=200Ω και C=5μF. Το κύκλωμα τροφοδοτείται από πηγή με ενεργό τιμή τάσης 200V και συχνότητα f=50Hz



Σχήμα 2. 50

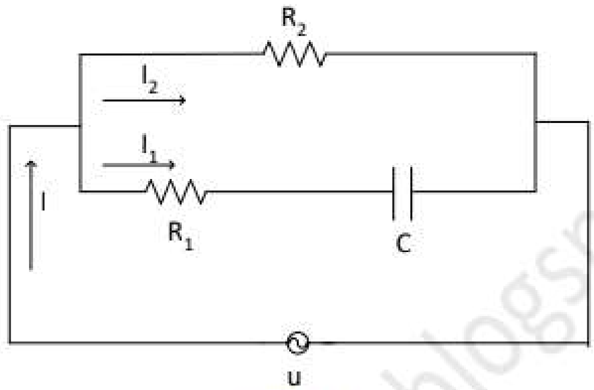
Να βρεθούν:

1. Η σύνθετη αντίσταση Z_I του κυκλώματος.

2. Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος του κυκλώματος.

3. Οι τάσεις V_R, V_C στα άκρα των στοιχείων.

Στην συνέχεια τοποθετούμε μία ωμική αντίσταση R_2=200Ω, παράλληλα στον κλάδο της σύνθετης αντίστασης του προηγούμενου κυκλώματος, διατηρώντας ίδια τα στοιχεία του.



Σχήμα 2. 51

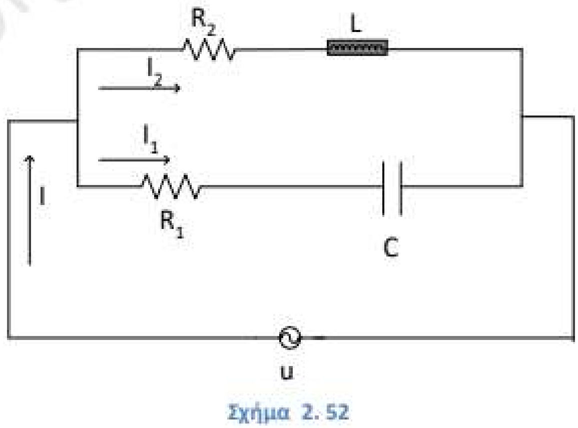
Να βρεθούν:

4. Το ρεύμα I_1 και I_2 του κυκλώματος

5. Η διαφορά φάσης μεταξύ τάσεως V και ρεύματος I

6. Η σύνθετη αντίσταση Z_{II} του κυκλώματος.

Έπειτα τοποθετούμε μία επαγωγική αντίσταση σε σειρά με την αντίσταση R_2, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα, διατηρώντας ίδια τα στοιχεία του κυκλώματος. Ο συντελεστής αυτεπαγωγής είναι L=1 H.



Σχήμα 2. 52

Να βρεθούν:

7. Το ρεύμα I_1 και I_2 του κυκλώματος

8. Η διαφορά φάσης μεταξύ τάσεως V και ρεύματος I

9. Η σύνθετη αντίσταση Z_{III} του κυκλώματος.

Απάντηση

1.

Η χωρητική αντίσταση είναι $X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{5\cdot 10^{-6}\cdot 314} = \frac{10^6}{1570} = 636{,}9\ \Omega$. Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι

$$Z_I = \sqrt{R^2 + (\frac{1}{C\cdot\omega})^2} = \sqrt{200^2 + 636{,}9^2} = \sqrt{40000 + 405.641{,}61} = \sqrt{445641{,}61} = 667{,}7\Omega .$$

2.

Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος είναι $I_{\varepsilon\nu} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{Z} = \frac{200}{667{,}7} = 0{,}29\,A$.

3.

Η πτώση τάσης στα άκρα της χωρητικής αντίστασης είναι

$$V_C = I\cdot X_C = 0{,}29\cdot 636{,}9 = 190{,}7V\ .$$

Η τάση στην ωμική αντίσταση είναι $V_R = I\cdot R = 0{,}299\cdot 200 = 59{,}8\ V$.

4.

Η χωρητική αντίσταση βρέθηκε από το 1$^{\text{ο}}$ ερώτημα $X_C = \frac{1}{C\omega} = 636{,}9\ \Omega$. Οπότε για τον κλάδο που περιλαμβάνει την R_1 και τον C, υπολογίζουμε την σύνθετη αντίσταση $Z_1 = \sqrt{R_1{}^2 + X_C{}^2} = \sqrt{200^2 + 636{,}9^2} = \sqrt{40000 + 405641{,}6} = 667{,}6\ \Omega$.

Το ρεύμα του κλάδου είναι

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{200}{667{,}6} = 0{,}30\ A .$$

Το ρεύμα του αντιστάτη R_2, είναι

$$I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{200}{200} = 1\,A .$$

5.

Θα υπολογίσουμε την ολική ένταση του ρεύματος. Η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της έντασης με το διάνυσμα της τάσης για την ωμική αντίσταση R_2 είναι μηδέν, $\phi_2=0$ (δεν υπάρχει διαφορά φάσης). Η γωνία (διαφορά φάσης) που σχηματίζει το διάνυσμα της έντασης με το διάνυσμα της τάσης για την ωμική αντίσταση R_1 και τον πυκνωτή είναι

$$\varepsilon\phi\phi_1 = \frac{X_C}{R_1} = \frac{636{,}9}{200} = 3{,}18 \Rightarrow \phi_1 = \varepsilon\phi^{-1}3{,}18 = 72{,}57^{o}$$

Το ερώτημα θα απαντηθεί με βάση το νόμο του συνημίτονου σύμφωνα με τον οποίο ισχύει $I_{o\lambda} = \sqrt{I_1{}^2 + I_2{}^2 + 2I_1\,I_2\,\sigma\upsilon\nu(\phi_2 - \phi_1)^{o}}$ και $\varepsilon\phi\theta = \frac{I_2\eta\mu(\phi_2-\phi_1)^{o}}{I_1 + I_2\sigma\upsilon\nu(\phi_2-\phi_1)^{o}}$.

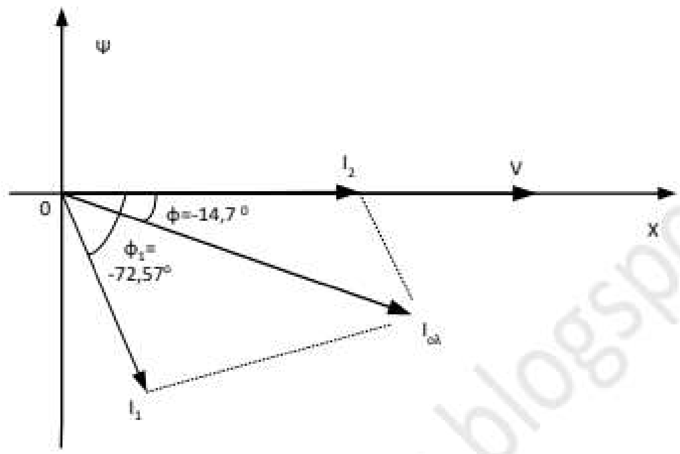
Επομένως προκύπτει ότι $I_{o\lambda} = \sqrt{I_1{}^2 + I_2{}^2 + 2I_1\,I_2\,\sigma\upsilon\nu(\phi_2 - \phi_1)^{o}} =$

$$=\sqrt{0{,}3^2+1^2+2\cdot 0{,}3\cdot 1\cdot \sigma\upsilon\nu\, 72{,}57^o}=\sqrt{0{,}09+1+0{,}6\cdot 0{,}30}=\sqrt{1{,}27}=1{,}13\ \text{A}.$$

και επίσης $\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{1\eta\mu(0-72{,}57^o)}{0{,}3+1\sigma\upsilon\nu(0-72{,}57^o)}=\dfrac{-0{,}3\cdot 0{,}95}{0{,}3+1\cdot 0{,}30}=\dfrac{-0{,}95}{0{,}6}=-1{,}57$ ή

$$\theta=\varepsilon\varphi^{-1}(-1{,}57)\Rightarrow \theta=-57{,}8^\circ$$

Επομένως η διαφορά φάσης είναι: φ=-57,8°+72,5°=14,7° και η τάση V προηγείται της έντασης του ρεύματος του κυκλώματος .



Σχήμα 2. 53

Το διανυσματικό άθροισμα των ρευμάτων είναι

$$i_1+i_2=I_{o\lambda}\cdot \eta\mu(\omega t+\theta)=1{,}13\eta\mu(314\,t-14{,}7^o)\ \text{A}.$$

6.

Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι $Z_{||}=\dfrac{V}{I}$. Τελικά η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι $Z_{||}=\dfrac{V}{I}=\dfrac{200}{1{,}13}=176{,}9$ A

7.

Η επαγωγική αντίσταση είναι

$$X_L=L\cdot\omega=L\cdot 2\pi f=1\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 50=314\Omega.$$

Επίσης η χωρητική αντίσταση υπολογίστηκε (1^o ερώτημα), $X_C=\dfrac{1}{C\omega}=636{,}9\ \Omega$ ενώ για τον κλάδο που περιλαμβάνει την R_1 και τον C, βρέθηκε η σύνθετη αντίσταση (4^o ερώτημα) ότι είναι $Z_1=\sqrt{R_1^{\ 2}+X_C^{\ 2}}=667{,}6\ \Omega$. Το ρεύμα του κλάδου που περιλαμβάνει ωμική και χωρητική αντίσταση είναι $I_1=\dfrac{V}{Z_1}=\dfrac{200}{667{,}6}=0{,}30$ A.

Οπότε για τον κλάδο που περιλαμβάνει την ωμική αντίσταση R_2 και το πηνίο L βρίσκουμε την σύνθετη αντίσταση του κλάδου :

$$Z_2=\sqrt{R^2+X_L^{\ 2}}=\sqrt{200^2+314^2}=372{,}28\Omega.$$

Το ρεύμα είναι $I_2 = \frac{V}{Z_2} = \frac{200}{372{,}28} = 0{,}54A$.

8.

Η γωνία (διαφορά φάσης) που σχηματίζει το διάνυσμα της έντασης με το διάνυσμα της τάσης για την ωμική αντίσταση R_1 και τον πυκνωτή είναι

$$\varepsilon\varphi\phi_1 = \frac{X_C}{R_1} = \frac{636{,}9}{200} = 3{,}18 \Rightarrow \phi_1 = \varepsilon\varphi^{-1}3{,}18 = 72{,}57^{o}$$

Η γωνία (διαφορά φάσης) που σχηματίζει το διάνυσμα της έντασης με το διάνυσμα της τάσης για την ωμική αντίσταση R_2 και το πηνίο είναι

$$\varepsilon\varphi\phi_2 = \frac{X_L}{R_2} = \frac{314}{200} = 1{,}57 \Rightarrow \phi_2 = \varepsilon\varphi^{-1}1{,}57 = 57{,}5^{o}$$

Η τάση προηγείται του ρεύματος I_1 κατά γωνία ϕ_1=72,57°. Η τάση έπεται του ρεύματος I_2 κατά γωνία ϕ_2=57,5°.

Η ολική ένταση του ρεύματος του κυκλώματος για τις τιμές των ρευμάτων I_1 και I_2 είναι (σύμφωνα με τον νόμο των συνημιτόνων και ακολουθώντας την πορεία επίλυσης του 5^{ου} ερωτήματος)

$$I_{ολ} = \sqrt{I_1^{\,2} + I_2^{\,2} + 2I_1I_2\sigma\upsilon\nu(\phi_2 - \phi_1)^{o}} =$$

$$= \sqrt{(0{,}30\cdot)^2 + (0{,}54\cdot)^2 + 2\cdot 0{,}30\cdot 0{,}54\cdot \sigma\upsilon\nu(57{,}5-(72{,}57))^{o}} \Rightarrow$$

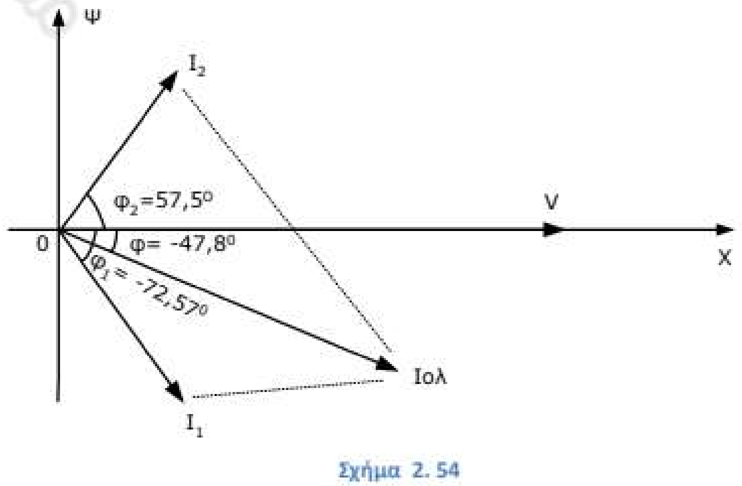
$$I_{ολ} == \sqrt{0{,}09 + 0{,}29 + 0{,}32\cdot\sigma\upsilon\nu(-15{,}07)^{o}} = \sqrt{0{,}68} = 0{,}83A$$

Επίσης

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{0{,}54\cdot\eta\mu(-15{,}06^{o})}{0{,}3+0{,}54\cdot\sigma\upsilon\nu(-15{,}06^{o})} = \frac{0{,}54\cdot(-0{,}26)}{0{,}3+0{,}54\cdot 0{,}97} = \frac{-0{,}14}{0{,}82} = -0{,}17 \Rightarrow$$

$$\theta = \varepsilon\varphi^{-1}1(-0{,}17^{o}) = -9{,}68^{o}$$

Το διανυσματικό διάγραμμα των ρευμάτων και της τάσης είναι:



Σχήμα 2. 54

Επομένως η διαφορά φάσης είναι: φ=-9,68°+57,5°=47,8° και η τάση V προηγείται της έντασης του ρεύματος του κυκλώματος. Το διανυσματικό άθροισμα των ρευμάτων είναι $i_1 + i_2 = I_{ολ} \cdot ημ(ωt+θ) = 0{,}83 \cdot ημ(314\,t - 47{,}8^o)$ A.

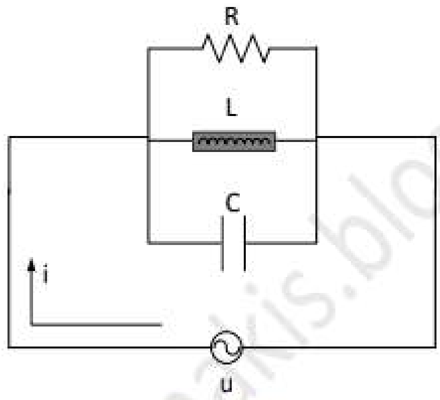
9.

Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι

$$Z_{III} = \frac{V}{I} = \frac{200}{0{,}83} = 240{,}9\,\Omega.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.22

Κύκλωμα RLC σε παραλληλία έχει τιμές στοιχείων R=100Ω, L=1H, C=10μF και τροφοδοτείται από εναλλασσόμενη τάση 40V, 50Hz.



Σχήμα 2. 55

Να βρεθούν τα εξής:

1. Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος.

2. Η ενεργός τιμές εντάσεων ρεύματος του κυκλώματος (I, I_R, I_L, I_c).

3. Την διαφορά φάσης του κυκλώματος.

Απάντηση

1.

Η χωρητική αντίσταση είναι $X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C \cdot 2\pi f} = \frac{1}{10 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50} = 318{,}5\Omega$.

Η επαγωγική αντίσταση είναι $X_L = L\omega = 1 \cdot 314 = 314\Omega$.

Η σύνθετη αντίσταση κυκλώματος RLC σε παραλληλία είναι ίση με

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (C\omega - \frac{1}{L\omega})^2}},$$

οπότε προκύπτει

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (C\omega - \frac{1}{L\omega})^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{100^2} + (\frac{1}{10 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50} - \frac{1}{1 \cdot 314})^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0{,}0001 + (318{,}5 - 314)^2}} = \frac{1}{4{,}5} \Rightarrow Z = 0{,}23\Omega$$

2.

Η ενεργός τιμή της έντασης ρεύματος είναι $I_{εν} = \frac{V_{εν}}{Z} = \frac{40}{0{,}23} = 173{,}9\,A$. Οι ενεργές τιμές των ρευμάτων των στοιχείων είναι

$$I_R = \frac{V_{εν}}{R} = \frac{40}{100} = 0{,}04\,A\,,\quad I_L = \frac{V_{εν}}{X_L} = \frac{40}{314} = 0{,}127\,A \quad \text{και} \quad I_C = \frac{V_{εν}}{X_C} = \frac{40}{318{,}5} = 0{,}125\,A\,.$$

3.

Η διαφορά φάσης κυκλώματος σε παραλληλία RLC , είναι

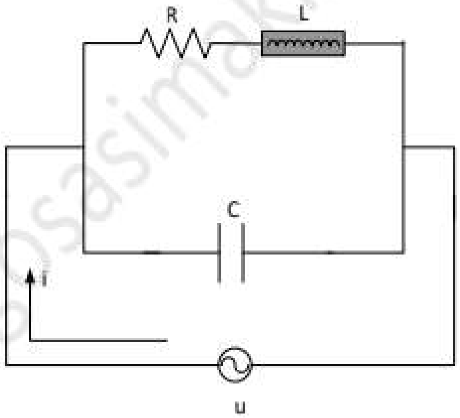
$$εφφ = \frac{I_C - I_L}{I_R} = \frac{0{,}125 - 0{,}127}{0{,}04} = -0{,}035\,.$$

Οπότε προκύπτει και $φ = εφ^{-1}φ = εφ^{-1}(-0{,}035) = -2{,}87^{o}$.

Το κύκλωμα παρουσιάζει επαγωγική συμπεριφορά ($I_L > I_C$) καθώς η τάση προηγείται του ρεύματος.

ΑΣΚΗΣΗ 2.23

Το κύκλωμα του σχήματος αποτελείται από πυκνωτή χωρητικότητας 50 μF, πηνίο αυτεπαγωγής 1 H και ωμική αντίσταση 10 Ω (σύνδεση παραλληλίας). Στα άκρα του κυκλώματος εφαρμόζεται τάση 200 V, συχνότητας 50 Hz.



Σχήμα 2. 56

Να υπολογίσετε τα εξής:

1. Το ρεύμα I_L στο πηνίο και το I_C στον πυκνωτή.

2. Το ολικό ρεύμα

Απάντηση

1.

Η κυκλική συχνότητα είναι ω=2πf=314 rad/sec. Τότε η επαγωγική και χωρητική αντίσταση θα ισοδυναμούν με

$$X_L = L \cdot ω = 314 \cdot 1 = 314\,Ω \ \text{και} \ X_c = \frac{1}{C \cdot ω} = \frac{1}{314 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^6}{15700} = 63{,}69\,Ω\,.$$

Το ρεύμα στα άκρα του πηνίου είναι: $I_L = \frac{V_{εν}}{X_L} = \frac{200}{314} = 0{,}63\,A$.

Ομοίως στο πυκνωτή είναι $I_C = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{X_C} = \frac{200}{63,69} = 3,14\,A$

2.

Το ολικό ρεύμα θα είναι $I = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{Z}$. Υπολογίζουμε την σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{X_c} - \frac{1}{X_L})^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{10^2} + (\frac{1}{63,69} - \frac{1}{314})^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0,01 + (0,015701051 - 0,003184713)^2}} \Rightarrow Z = \frac{1}{0,1118} = 8,95\,\Omega$$

οπότε τελικά $I = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{Z} = \frac{200}{8,95} = 22,35\,A$

ΑΣΚΗΣΗ 2.24 *(εξετάσεις 2010)*

Εάν η επαγωγική αντίσταση ενός πηνίου είναι X_L=50Ω σε συχνότητα f=100Hz, να υπολογιστεί η τιμή αυτής σε συχνότητα f=200Hz.

Απάντηση

Η αυτεπαγωγή του πηνίου δίνεται από την

$$X_L = L \cdot \omega \text{ ή } L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{50}{2\pi \cdot 100} = \frac{50}{\pi 200} = \frac{1}{4\pi} = \frac{0,125}{\pi} Hz.$$

Εάν η συχνότητα διπλασιαστεί γίνει 200Hz, τότε η νέα επαγωγική αντίσταση θα γίνει

$$X_L' = L \cdot \omega' = \frac{1}{4\pi} \cdot 2\pi f' = \frac{1}{2} 200 = 100\ \Omega.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.25 *(εξετάσεις 2012)*

Σε εναλλασσόμενο ρεύμα συχνότητας f, ένας πυκνωτής χωρητικότητας C παρουσιάζει χωρητική αντίσταση Xc=100Ω. Στην ίδια συχνότητα, να υπολογίσετε τη χωρητική αντίδραση ενός δεύτερου πυκνωτή τετραπλάσιας χωρητικότητας από τον πρώτο.

Απάντηση

Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι

$$X_c = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C \cdot 2\pi f} \text{ ή } 100 = \frac{1}{C \cdot 2\pi f} \Rightarrow C = \frac{1}{200\pi f}.$$

Ζητείται η νέα χωρητική αντίσταση διατηρώντας σταθερή τη συχνότητα του εναλλασσόμενου ρεύματος και τετραπλασιάζοντας τη χωρητικότητα του πυκνωτή (C′=4C). Οπότε θα είναι

$$X_C{}' = \frac{1}{C'\omega} = \frac{1}{C' \cdot 2\pi f} \overset{C'=4C}{\Rightarrow} X_C{}' = \frac{1}{4C \cdot 2\pi f} \overset{C=\frac{1}{100 \cdot 2\pi f}}{\Rightarrow} X_C{}' = \frac{1}{4} 100 = 25\Omega.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.26 *(εξετάσεις 2010)*

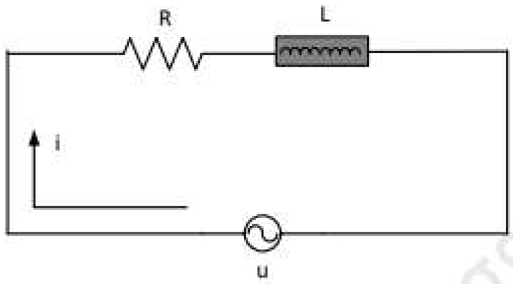
Κύκλωμα σειράς αποτελείται από ωμική αντίσταση R=3 Ω και πηνίο με επαγωγική αντίσταση X_L=4Ω. Το κύκλωμα τροφοδοτείται με εναλλασσόμενη τάση ενεργού τιμής $V_{εν}$=230V. Να υπολογίσετε:

1. Τη σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος.

2. Την ενεργό τιμή του ρεύματος $I_{εν}$ που διαρρέει το κύκλωμα.

Απάντηση

Το κύκλωμα της άσκησης είναι το εξής:



Σχήμα 2. 57

1.

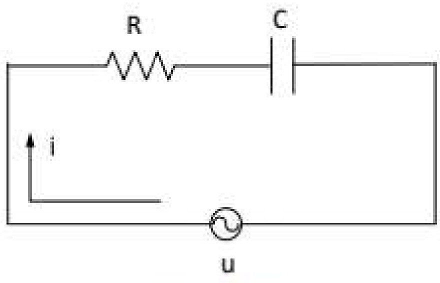
Η σύνθετη αντίσταση είναι: $Z=\sqrt{R^2+X_L^{\ 2}}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5\Omega$.

2 .

Η ενεργός τιμή του ρεύματος είναι $I_{εν}=\frac{V_{εν}}{Z}=\frac{230}{5}=46A$.

ΑΣΚΗΣΗ 2.27 *(εξετάσεις 2012)*

Κύκλωμα σειράς που αποτελείται από ωμικό αντιστάτη R=30Ω και πυκνωτή χωρητικότητας C (X_c=40 Ω), τροφοδοτείται από πηγή εναλλασσόμενης τάσης u. Το κύκλωμα της άσκησης είναι το εξής:



Σχήμα 2. 58

Η στιγμιαία τιμή τάσης στα άκρα του ωμικού αντιστάτη R είναι $u_R=60\sqrt{2}\,ημ(1000t)V$ **. Να υπολογίσετε:**

1. Την τιμή της χωρητικότητας C του πυκνωτή.

2. Την ενεργό τιμή του ρεύματος ($I_{εν}$) που διαρρέει το κύκλωμα, καθώς και τη στιγμιαία τιμή του I.

3. Την τιμή της σύνθετης αντίστασης Z του κυκλώματος.

4. Την ενεργό τιμή ($V_{C,εν}$) της τάσης στα άκρα του πυκνωτή και την ενεργό τιμή (V) της τάσης τροφοδοσίας του κυκλώματος.

Απάντηση

1.

Η χωρητικότητα είναι: $X_C = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow C = \frac{1}{X_C \omega} = \frac{1}{40 \cdot 1000} \Rightarrow C = 25\mu F$.

2.

Η ενεργός ένταση ρεύματος είναι: $I_{εν} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \overset{I_0 = \frac{V_0}{R}}{=} \frac{V_0}{R\sqrt{2}} = \frac{60\sqrt{2}}{30\sqrt{2}} = 2A$ και η στιγμιαία τιμή του είναι: $i = I_0 ημωt = \frac{V_0}{R}ημωt = \frac{60\sqrt{2}}{30}ημ1000t = 2\sqrt{2}ημ1000t$ A.

3.

Η σύνθετη αντίσταση είναι

$$Z^2 = R^2 + X_C^2 = 30^2 + 40^2 = 900 + 1600 = 2500 \Rightarrow Z = \sqrt{2500} = 50\Omega$$

4.

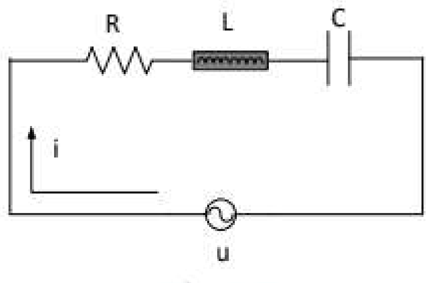
Οι ενεργός τιμή στα άκρα του πυκνωτή είναι

$$I_{εν} = \frac{V_{C,εν}}{X_C} \Rightarrow V_{C,εν} = I_{εν} \cdot X_C = 2 \cdot 40 = 80 Volt$$

και της πηγής $$I_{εν} = \frac{V_{εν}}{Z} \Rightarrow V_{εν} = I_{εν} \cdot Z = 2 \cdot 50 = 100 Volt.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.28 *(εξετάσεις 2015)*

Στο κύκλωμα RLC σειράς του παρακάτω σχήματος, η ωμική αντίσταση είναι R=50Ω και η στιγμιαία τιμή της τάσης στα άκρα του πηνίου είναι $u_L = 100\sqrt{2} \cdot ημ1000t$ V. Η ενεργός τιμή της τάσης στα άκρα του πηνίου είναι διπλάσια της ενεργού τιμής της τάσης στα άκρα του πυκνωτή ($V_L = 2V_C$).



Σχήμα 2. 59

Το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα ενεργού τιμής $I_{εν}$=1A . Να υπολογίσετε:

1. Την ενεργό τιμή της τάσης V_L του πηνίου και την ενεργό τιμή της τάσης V_C του πυκνωτή.

2. Την ενεργό τιμή της τάσης τροφοδοσίας.

3. Την τιμή της σύνθετης αντίστασης Z του κυκλώματος.

4. Την επαγωγική αντίδραση X_L και την αυτεπαγωγή L του πηνίου.

5. Να σχεδιάσετε το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων και ρεύματος του κυκλώματος.

Απάντηση

1.

Η ενεργός τιμή της τάσης του πηνίου είναι $V_L = \frac{V_o}{\sqrt{2}} = 100\,\text{Volt}$

και η ενεργός τιμή του πυκνωτή είναι $V_L = 2V_C$ ή $V_C = \frac{100}{2} = 50\,\text{Volt}$.

2.

Η τάση τροφοδοσίας του κυκλώματος (ενεργές τιμές) είναι

$$V = \sqrt{V^2 + (V_L - V_C)^2} = \sqrt{50^2 - (100-50)^2} = 50\sqrt{2}\ \text{Volt}\ .$$

3.

Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι $Z = \frac{V}{I} = 50\sqrt{2}\,\Omega$

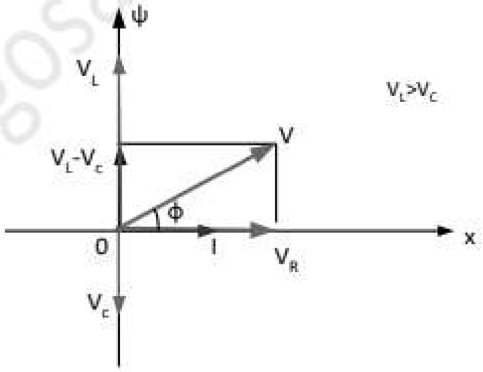
4.

Η επαγωγική αντίσταση και η αυτεπαγωγή του πηνίου, αντίστοιχα είναι

$$X_L = \frac{V_L}{I} = 100\Omega \qquad \text{και} \qquad X_L = L\omega \Rightarrow L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{100}{1000} = 0{,}1\text{H}$$

5.

Το διανυσματικό διάγραμμα με ενεργές τιμές μεγεθών για επαγωγική συμπεριφορά κυκλώματος με τιμές $V=50\sqrt{2}$ και V_L-V_C=100-50=50V είναι



Σχήμα 2. 60

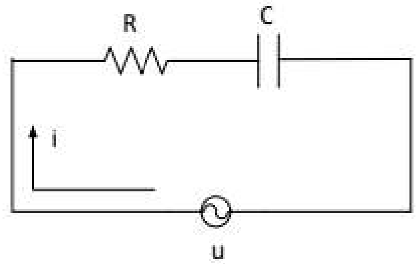
ΑΣΚΗΣΗ 2.29 *(εξετάσεις 2017)*

Αντίσταση R = 30 Ω και πυκνωτής με χωρητική αντίσταση X_C = 40 Ω συνδέονται σε σειρά. Η στιγμιαία τιμή της έντασης του ρεύματος δίνεται από τη σχέση i=4$\sqrt{2}$ ημ1000t A. Να υπολογίσετε:

1. Την ενεργό τιμή της έντασης του ρεύματος $I_{εν}$ που διαρρέει το κύκλωμα.

2. Την ενεργό τιμή της τάσης $V_{εν}$ τροφοδοσίας του κυκλώματος.

3. Την ενεργό τιμή της τάσης V_R στα άκρα της αντίστασης και την ενεργό τιμή της τάσης V_C στα άκρα του πυκνωτή.
4. Την τιμή της χωρητικότητας C του πυκνωτή.
Απάντηση
Το κύκλωμα της άσκησης είναι το εξής:



Σχήμα 2. 61

1.

Η ενεργός τιμή της έντασης του κυκλώματος είναι $I_{εν} = \frac{I_o}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4\,\text{Volt}$.

2.

Η ενεργός τιμή της τάσης του κυκλώματος είναι

$$V_{εν} = I_{εν} \cdot Z = I_{εν}\sqrt{X_C^2 + R^2} = 4\sqrt{1600 + 900} = 4 \cdot 50 = 200\,\text{Volt} .$$

3.

Η ενεργός τάση στα άκρα της αντίστασης είναι

$$V_{R\,EV} = I_{EV} \cdot R = 4 \cdot 30 = 120\,\text{Volt}$$

Η ενεργός τάση στα άκρα της χωρητικής αντίστασης είναι

$$V_{C\,EV} = I_{EV} \cdot X_C = 4 \cdot 40 = 160\,\text{Volt} .$$

4.

Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι: $X_C = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow C = \frac{1}{X_C \omega} = \frac{1}{40 \cdot 1000} \Rightarrow C = 25\mu F$.

ΑΣΚΗΣΗ 2.30 *(εξετάσεις 2018)*
Στα άκρα ενός πυκνωτή εφαρμόζεται στιγμιαία τάση u_C=200ημωt. Εάν η χωρητική αντίδραση του πυκνωτή είναι X_C=10Ω, να γράψετε την εξίσωση της στιγμιαίας έντασης του ρεύματος του πυκνωτή.
Απάντηση
Η εξίσωση της στιγμιαίας έντασης ρεύματος του πυκνωτή έχει γενική μορφή :

$$i = I_o \cdot ημ(\omega t + 90^\circ) = \frac{V_o}{X_C} \cdot ημ(\omega t + 90^\circ) = \frac{200}{10} \cdot ημ(\omega t + 90^\circ) = 20 \cdot ημ(\omega t + 90^\circ) .$$

ή $i = 20 \cdot ημ(\omega t + \frac{\pi}{2})$ (καθώς το ρεύμα προηγείται 90° της τάσης).

ΑΣΚΗΣΗ 2.31 *(εξετάσεις 2019)*

Κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος τροφοδοτείται με τάση u=220ημ(ωt+30°) V και διαρρέεται από ρεύμα i =10ημ(ωt+30°) A. Να βρείτε:

1. Ποιο μέγεθος προπορεύεται (τάση ή ρεύμα).

2. Την συμπεριφορά του κυκλώματος (χωρητική ή επαγωγική).

Απάντηση

1.

Επειδή η διαφορά φάσης είναι θετική καθώς, $\Delta\phi=30^{\circ}-(-30^{\circ})=30^{\circ}+30^{\circ}=60^{\circ}>0$, προπορεύεται η τάση του ρεύματος.

2.

Το κύκλωμα παρουσιάζει επαγωγική συμπεριφορά επειδή $0^{\circ}\leq\phi\leq90^{\circ}$ ή $0^{\circ}\leq60^{\circ}\leq90^{\circ}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2.32 *(εξετάσεις 2019)*

Κύκλωμα RLC σειράς αποτελείται από ωμική αντίσταση R=80 Ω, πυκνωτή αμελητέας ωμικής αντίστασης με χωρητική αντίδραση X_C και ιδανικό πηνίο επαγωγικής αντίδρασης $X_L=2X_C$. Το κύκλωμα τροφοδοτείται από πηγή εναλλασσόμενης τάσης με ενεργό τιμή V=100 V. Η στιγμιαία τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι $u_C=60\sqrt{2}$ ημ(314t) V.

Να υπολογίσετε:

1. Την ενεργό τιμή της τάσης V_C στα άκρα του πυκνωτή.

2. Την ενεργό τιμή της τάσης V_L στα άκρα του πηνίου.

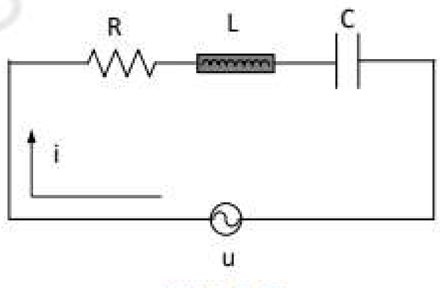
3. Την ενεργό τιμή της τάσης V_R στα άκρα της ωμικής αντίστασης.

4. Την ενεργό τιμή της έντασης του ρεύματος I που διαρρέει το κύκλωμα.

5. Τη σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος.

Απάντηση

Το κύκλωμα της άσκησης είναι το εξής:



Σχήμα 2. 62

1.

Η ενεργός τιμή της τάσης U_C στα άκρα του πυκνωτή είναι

$$V_{C,\epsilon\nu}=\frac{V_o}{\sqrt{2}}=\frac{60\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=60\,\text{Volt}.$$

2.

Από την εκφώνηση ξέρουμε ότι $X_L=2X_C$. Η ενεργός τιμή της τάσης U_L στα άκρα του πυκνωτή είναι $\frac{V_{L,\varepsilon\nu}}{I_{\varepsilon\nu}}=2\frac{V_{C,\varepsilon\nu}}{I_{\varepsilon\nu}}\Rightarrow V_{L,\varepsilon\nu}=2V_{C,\varepsilon\nu}\Rightarrow V_{L,\varepsilon\nu}=2\cdot 60=120\text{Volt}$.

3.

Η ενεργός τιμή της τάσης στα άκρα του ωμικού καταναλωτή είναι

$$V=\sqrt{V_R^{\ 2}+\left(V_L-V_C\right)^2}\Rightarrow V_R^{\ 2}=\sqrt{V^{\ 2}-\left(V_L-V_C\right)^2}=\sqrt{100^2-\left(120-60\right)^2}=\sqrt{10000-3600}\Rightarrow$$

$$V_R=\sqrt{6400}=80\ V.$$

4.

Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος, είναι

$$V_{R,\varepsilon\nu}=I_{\varepsilon\nu}\cdot R\Rightarrow 80=I_{\varepsilon\nu}\cdot 80\Rightarrow I_{\varepsilon\nu}=1\ A.$$

5.

Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι

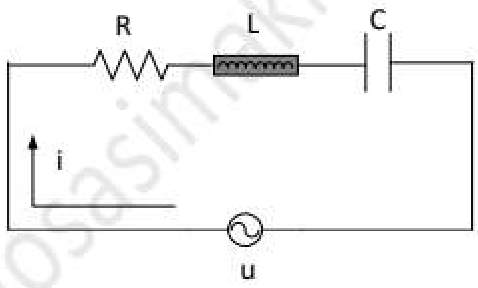
$$Z=\frac{V_{\varepsilon\nu}}{I_{\varepsilon\nu}}=\frac{100}{1}=100\ \Omega.$$

Αν θες να ζήσεις μια ευτυχισμένη ζωή, εξάρτησέ την από έναν στόχο,
όχι από ανθρώπους ή αντικείμενα.
Albert Einstein

Κεφάλαιο 3$^{\text{Ο}}$
ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ

3.1 ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ ΣΕΙΡΑΣ

Έστω κύκλωμα που περιλαμβάνει τρία στοιχεία R, L και C (σε σειρά):

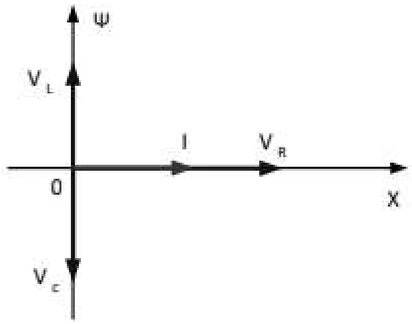


Σχήμα 3. 1

Όταν μεταβάλλεται η κυκλική συχνότητα του κυκλώματος, τότε διαφοροποιείται η τρέχουσα κατάστασή του και έτσι μεταβάλλονται τα στοιχεία της επαγωγικής και χωρητικής αντίδρασης (L και C κατά περίπτωση).

<u>**Συντονισμό κυκλώματος**</u> (σε κύκλωμα με στοιχεία RLC σειράς), έχουμε όταν η εφαρμοζόμενη τάση βρίσκεται σε φάση με το ρεύμα εισόδου του κυκλώματος. Πιο απλά δύναται να λέμε ότι έχουμε **κατάσταση συντονισμού** όταν η συμπεριφορά ενός κυκλώματος RLC είναι καθαρά ωμική. Το ρεύμα I είναι κοινό στο κύκλωμα RLC.

Το διανυσματικό διάγραμμα των τάσεων V_R, V_L, V_C στα άκρα καθ' ενός από τα στοιχεία R, L, C είναι το επόμενο:



Σχήμα 3. 2

Στο διανυσματικό διάγραμμα είναι $V_L = V_C$ (ωμική συμπεριφορά κυκλώματος). Οπότε αντικαθιστώντας τις τιμές των πτώσεων τάσεων στα άκρα του πηνίου και του πυκνωτή, προκύπτει η κυκλική συχνότητα συντονισμού ω_o είναι:

$$V_L = V_C \Rightarrow IX_L = IX_C \Rightarrow X_L = X_C \Rightarrow L\omega_o = \frac{1}{C\omega_o} \Rightarrow \omega_o{}^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

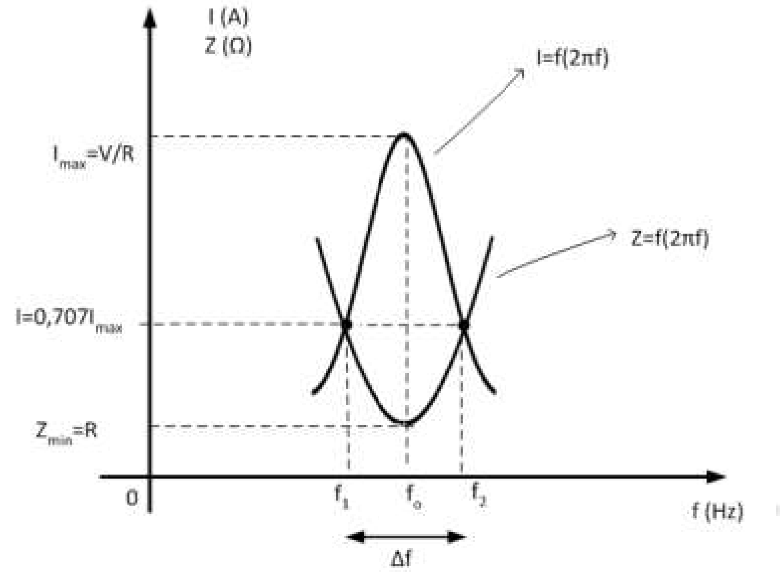
Στον συντονισμό σειράς εμφανίζεται το φαινόμενο της **υπέρτασης**. Επίσης η ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.
Προκύπτει και η συχνότητα συντονισμού f_o ισοδύναμα, ως εξής:

$$f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} \overset{\omega_o=\sqrt{\frac{1}{LC}}}{\Rightarrow} f_o = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{2\pi} \Rightarrow f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Η συχνότητα συντονισμού $f_o = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}$, καλείται και ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος και ο μαθηματικός τύπος είναι γνωστός ως τύπος του Thomson.

Επειδή στον συντονισμό RLC σειράς, δεν έχουμε διαφορά φάσης το κύκλωμα απορροφά μόνο πραγματική ισχύ ($P=V_{εν}\cdot I_{εν}$), και μεταφέρεται από την πηγή στην ωμική αντίσταση (όπως θα μελετηθεί αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο). Επίσης καθώς το ρεύμα είναι μέγιστο στην κατάσταση συντονισμού, τότε και η απορροφούμενη ισχύς είναι μέγιστη. Μεταξύ πηνίου και πυκνωτή πραγματοποιείται συνεχώς μια ταλάντωση ενέργειας (η ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή) με συχνότητα ίση με την συχνότητα του συντονισμού (το κύκλωμα είναι ένας ηλεκτρικός ταλαντωτής ενέργειας).

<u>Καμπύλη συντονισμού</u> είναι η μορφή της καμπύλης που προκύπτει από την μεταβολή της σύνθετης αντίστασης και του ρεύματος σε συνάρτηση με την κυκλική συχνότητας. Η μορφή, φαίνεται ακολούθως:



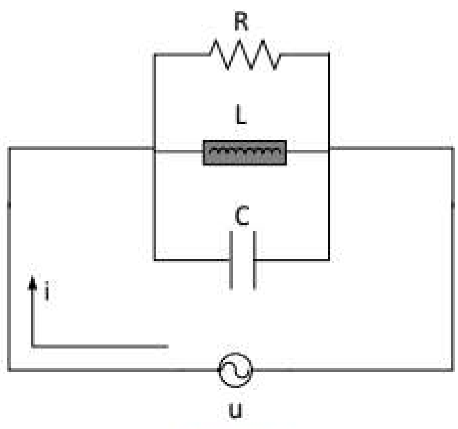
Σχήμα 3. 3

Παρατηρώντας την μορφή των καμπυλών, στην συχνότητα συντονισμού η σύνθετη αντίσταση παίρνει την μικρότερη τιμή ενώ για την ίδια τιμή συχνότητας συντονισμού το ρεύμα παίρνει μέγιστη δυνατή τιμή.

Συνοπτικά είναι: $f_o = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \begin{cases} Z_{min} = R \\ I_{max} = \frac{V}{R} \end{cases}$.

3.2 ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ Ή ΑΝΤΙΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ

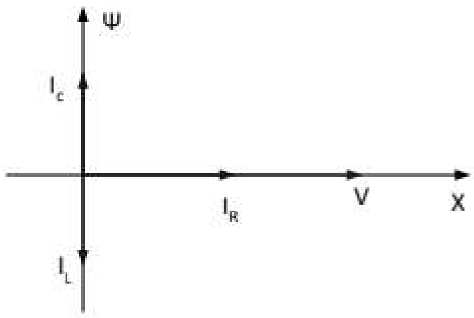
Το κύκλωμα του παράλληλου συντονισμού περιλαμβάνει (συνδεδεμένα παράλληλα μεταξύ τους), μία ωμική αντίσταση, ένα πηνίο και ένα πυκνωτή. Η τροφοδοσία του κυκλώματος γίνεται από μία πηγή εναλλασσόμενης τάσης.



Σχήμα 3. 4

Παράλληλο συντονισμό έχουμε όταν η τιμή του διανύσματος της έντασης του ρεύματος στο πηνίο να είναι ίση με την τιμή του διανύσματος της έντασης του ρεύματος στο πυκνωτή έτσι ώστε να είναι $I_L=I_C$ (διατηρώντας ίδια την τάση στα άκρα των στοιχείων του κυκλώματος).

Διανυσματικά ο παράλληλος συντονισμός απεικονίζεται ως εξής:



Σχήμα 3. 5

Στον παράλληλο συντονισμό η τάση είναι κοινή στα άκρα των στοιχείων του κυκλώματος, δηλαδή η κυκλική συχνότητα συντονισμού είναι

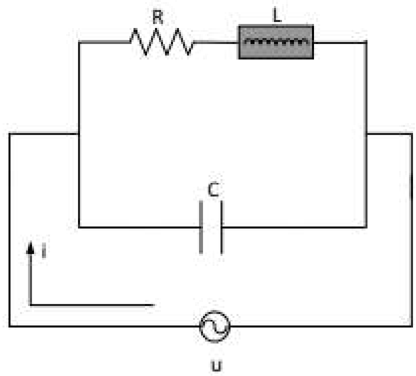
$$I_L = I_C \Rightarrow \frac{V}{X_L} = \frac{V}{X_C} \Rightarrow X_L = X_C \Rightarrow L\omega_o = \frac{1}{C\omega_o} \Rightarrow \omega_o^{\,2} = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Επίσης η συχνότητα συντονισμού, είναι ισοδύναμα:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow 2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

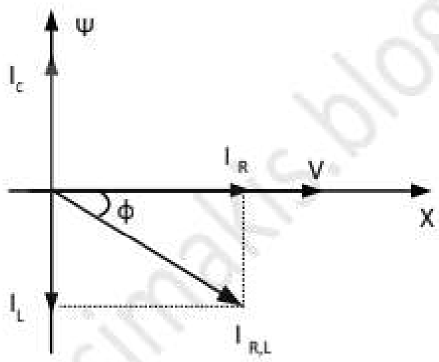
Ιδιοσυχνότητα καλούμε την συχνότητα συντονισμού που θα γίνει ίδια με την συχνότητα της πηγής, ώστε να είναι ίση με $f_o = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Και στον συντονισμό σειράς και παραλληλίας παρατηρούμε ότι η συχνότητα συντονισμού είναι η ίδια. Σε πρακτικές κατασκευές κυκλωμάτων, ο παράλληλος συντονισμός έχει την μορφή του επόμενου κυκλώματος (σύνδεση παράλληλα ενός πυκνωτή και ενός πραγματικού πηνίου το οποίο περιλαμβάνει ωμική αντίσταση μικρής τιμής και συντελεστή επαγωγής L) και το κύκλωμα βρίσκεται σε κατάσταση αντισυντονισμού όταν η σύνθετη επαγωγική αντίσταση γίνει ίση με την χωρητική αντίσταση.



Σχήμα 3. 6

Στον παράλληλο συντονισμό η ένταση του ρεύματος παίρνει την ελάχιστη τιμή, I_{min} και είναι συμφασική με την τάση. Η τάση V και η ένταση I είναι πλάτη ή ενεργές τιμές. Διανυσματικά τα μεγέθη (τάσης και έντασης) στον παράλληλο συντονισμό του προηγούμενου κυκλώματος παραλληλίας, είναι τα εξής:



Σχήμα 3. 7

Το ρεύμα στον πυκνωτή προηγείται της τάσης κατά 90°, είναι $I_C = \dfrac{V}{X_C} = VC\omega$. Το ρεύμα του πηνίου είναι $I_L = \dfrac{V}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$. Το ρεύμα στο πηνίο έπεται της τάσης κατά γωνία φ η οποία είναι $\varepsilon\varphi\phi = \dfrac{L\cdot\omega}{R}$ (ή $\phi = \varepsilon\varphi^{-1}(\dfrac{L\omega}{R})$).

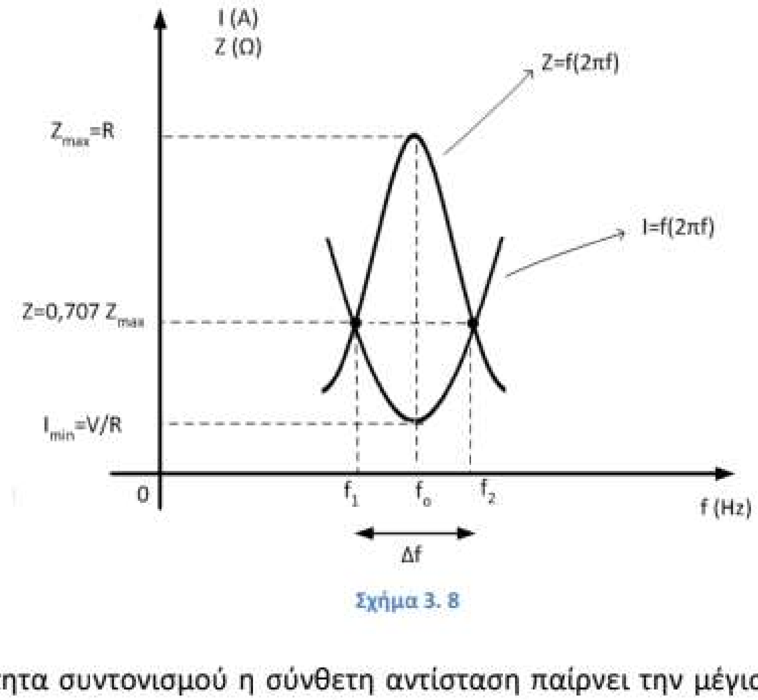
Η κυκλική συχνότητα συντονισμού είναι $\omega_o = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{L^2}}$.

Η συχνότητα συντονισμού προκύπτει ότι είναι $f_o = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{L^2}}$. Επειδή στο κύκλωμα του σχήματος 3.6, η αντίσταση είναι πολύ μικρή δηλαδή $R^2 << (L\omega_O)^2$, τότε η συχνότητα συντονισμού θα γίνει ισοδύναμα $f_o = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}$ (και ομοίως η κυκλική συχνότητα συντονισμού θα είναι $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$).

Η ελάχιστη τιμή του ρεύματος του κυκλώματος είναι $I_{min} = \frac{VR}{\omega_0{}^2 L^2}$.

<u>Υπεραντίσταση</u> στον παράλληλο συντονισμό, καλείται το φαινόμενο της δημιουργίας μεγάλης αντίστασης (Z_{max}) στο κύκλωμα.
Ιδιαίτερο γνώρισμα στο κύκλωμα παραλληλίας (όπως και στο συντονισμό κυκλώματος σειράς) είναι η ταλάντωση ενέργειας και η περιοδική ανταλλαγή της, μεταξύ πηνίου και πυκνωτή. Η ενέργεια διατηρείται και καταναλώνεται από το ωμικό στοιχείο του κυκλώματος.

<u>Καμπύλη συντονισμού</u> είναι η μορφή της καμπύλης που προκύπτει από την μεταβολή της σύνθετης αντίστασης και του ρεύματος σε συνάρτηση με την κυκλική συχνότητα. Η μορφή τους φαίνεται ακολούθως:



Σχήμα 3. 8

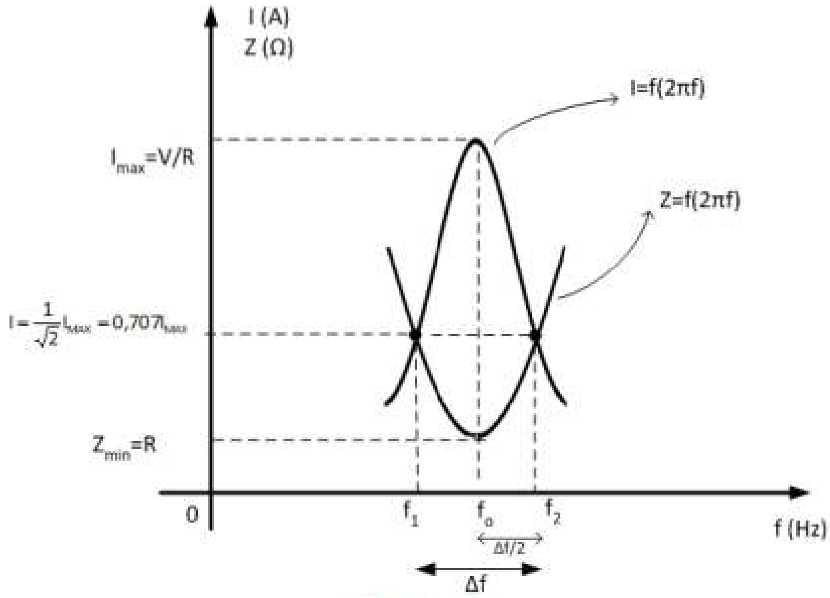
Στην συχνότητα συντονισμού η σύνθετη αντίσταση παίρνει την μέγιστη τιμή ενώ για την ίδια τιμή συχνότητας συντονισμού το ρεύμα παίρνει την ελάχιστη δυνατή τιμή.

Συνοπτικά είναι: $f_o = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \begin{cases} Z_{max} = R \\ I_{min} = \frac{V}{R} \end{cases}$.

3.3 ΖΩΝΗ ΔΙΕΛΕΥΣΗΣ

Α) ΣΕ ΚΥΚΛΩΜΑ RLC ΣΕΙΡΑΣ

Η καμπύλη της συχνότητας του συντονισμού κυκλώματος RLC σειράς, παρουσιάζει γύρω από την συχνότητα συντονισμού μια «στενότητα». Αυτή η περιοχή ερμηνεύεται με την ζώνη διέλευσης ή ζώνη συντονισμού Δf του κυκλώματος και είναι ιδιαίτερης σημασίας για την υλοποίηση κυκλωμάτων.



Σχήμα 3. 9

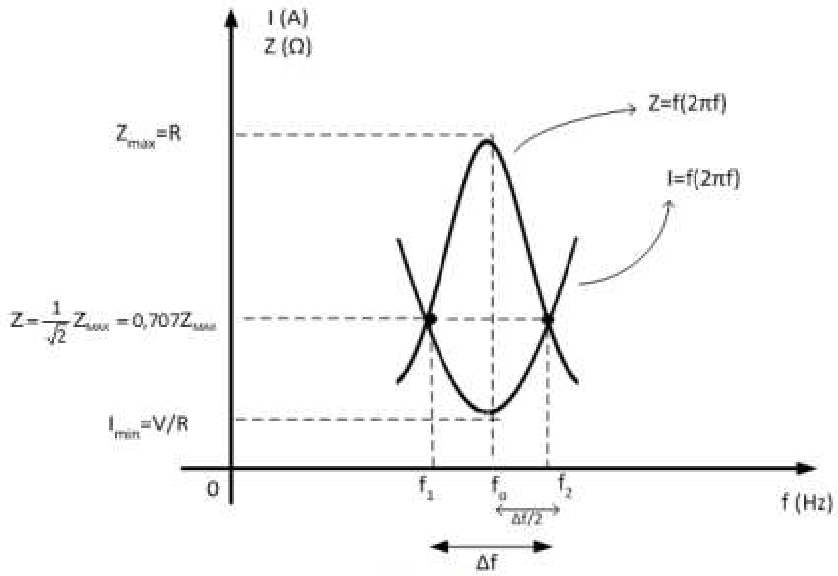
Η περιοχή που ορίζουν οι δύο πλευρικές συχνότητες f_1 και f_2, αποτελούν την ζώνη διέλευσης. Η ζώνη διέλευσης είναι ίση με $\Delta f = f_2 - f_1$. Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα RLC σειράς στον συντονισμό είναι το μέγιστο δυνατό. Η ενεργή του τιμή είναι $I = \frac{I_{MAX}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{MAX} = 0,707 I_{MAX}$ Επίσης για τις πλευρικές τιμές συχνοτήτων είναι (όπως απεικονίζεται και στο σχήμα) $f_2 - f_0 = \frac{\Delta f}{2}$ ή Δf=2(f_2-f_0) καθώς και $f_0 - f_1 = \frac{\Delta f}{2}$ ή Δf=2(f_0-f_1) .

Εξισώνοντας τις σχέσεις προκύπτει ότι $\left.\begin{cases} \Delta f = 2(f_2 - f_0) \\ \Delta f = 2(f_0 - f_1) \end{cases}\right\} \overset{(-)}{\Rightarrow} f_2 - f_0 = f_0 - f_1 \Rightarrow$

$\Delta f = f_2 - f_1$.

Β) ΣΕ ΚΥΚΛΩΜΑ RLC ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ

Η ζώνη διέλευσης ενός κυκλώματος RLC σε παραλληλία, ορίζεται από το διάστημα των δύο πλευρικών συχνοτήτων f_1 και f_2 (και παρατηρούμε ότι είναι ίδια με αυτή του κυκλώματος RLC σε σειρά).



Σχήμα 3. 10

Επίσης για τις πλευρικές τιμές συχνοτήτων είναι (όπως απεικονίζεται και στο σχήμα) $f_2 - f_0 = \frac{\Delta f}{2}$ ή $\Delta f=2(f_2-f_0)$ καθώς και $f_0 - f_1 = \frac{\Delta f}{2}$ ή $\Delta f=2(f_0-f_1)$.

Εξισώνοντας τις σχέσεις προκύπτει ότι $\left.\begin{cases}\Delta f = 2(f_2 - f_0) \\ \Delta f = 2(f_0 - f_1)\end{cases}\right\} \overset{(-)}{\Rightarrow} f_2 - f_0 = f_0 - f_1 \Rightarrow$

$\Delta f = f_2 - f_1$

Η ζώνη διέλευσης, επομένως είναι $\Delta f = f_2 - f_1$

3.4 ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ

Α) ΣΕ ΚΥΚΛΩΜΑ RLC ΣΕΙΡΑΣ

Συντελεστής ποιότητας κυκλώματος ή υπέρτασης Q_π, καλείται το πηλίκο της ενεργής τιμής της τάσης στα άκρα του πηνίου ή του πυκνωτή στον συντονισμό προς την τάση τροφοδοσίας του κυκλώματος. Είναι δηλαδή

$$Q_\pi = \frac{V_L}{V_R} \quad \text{(ή ομοίως για τον πυκνωτή } Q_\pi = \frac{V_C}{V_R}\text{)}.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των τάσεων στα άκρα των στοιχείων προκύπτει ότι:

$$Q_\pi = \frac{V_L}{V_R} = \frac{IX_L}{IR} = \frac{X_L}{R} = \frac{L\omega_O}{R} \overset{\omega_o=\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\Rightarrow} Q_\pi = \frac{L\omega_O}{R} = \frac{L\frac{1}{\sqrt{LC}}}{R} = L\frac{1}{R\sqrt{LC}} = \frac{\sqrt{L^2}}{R\sqrt{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L^2}{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

και ομοίως $Q_{\pi} = \frac{V_C}{V_R} = \frac{IX_C}{IR} = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{C\omega_O R} \overset{\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}}{\Rightarrow}$

$$Q_{\pi} = \frac{1}{C\omega_O R} = \frac{\sqrt{LC}}{CR} = \frac{\sqrt{LC}}{R\sqrt{C^2}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{LC}{CC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Επομένως ο συντελεστής ποιότητας θα ισοδυναμεί με: $Q_{\pi} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

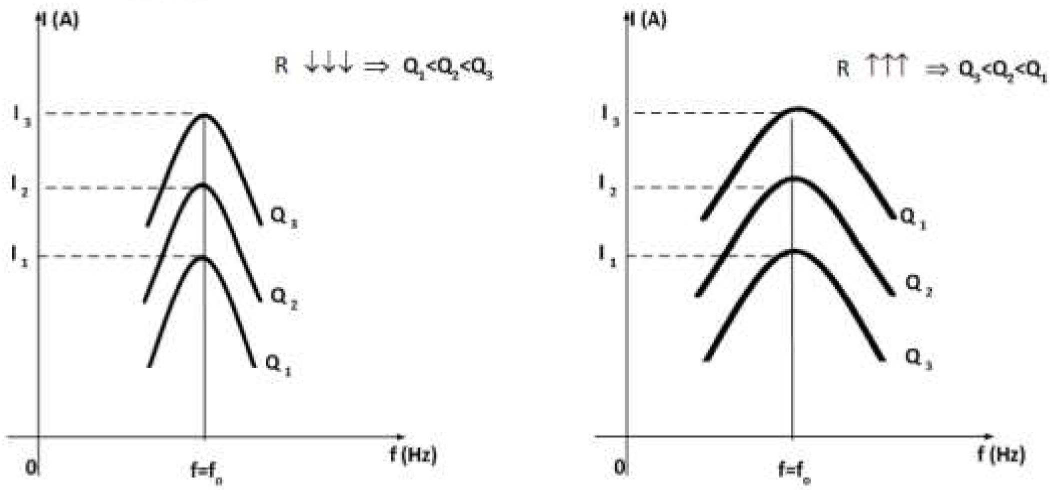
Ο συντελεστής ποιότητας μας δείχνει πόσες φορές είναι μεγαλύτερη η V_R ή η V_C, από την τάση της πηγής τροφοδοσίας V του κυκλώματος. Το φαινόμενο κατά το οποίο η τάση στο πηνίο ή στον πυκνωτή είναι πολύ μεγαλύτερη από την τάση της πηγής, ονομάζεται **υπέρταση.** Είναι σημαντικό να δίνεται βαρύτητα κατά την σχεδιαστική πορεία ενός κυκλώματος στον συντελεστή ποιότητάς του (καθώς είναι συχνό το φαινόμενο εμφάνισης υπερτάσεων στο κύκλωμα RLC), ώστε να αποφεύγονται τυχόν καταστροφές (όπως διαρροή διηλεκτρικών πυκνωτών). Ο συντελεστής ποιότητας του συντονισμένου κυκλώματος παίρνει τιμές μέχρι 300 (από 10 έως 300).

Επίσης παρατηρούμε ότι στο κύκλωμα RLC σειράς, διατηρώντας σταθερό τον λόγο L/C και μεταβάλλοντας την τιμή της ωμικής αντίστασης R, μπορούμε να αυξομειώσουμε την τιμή του Q_{π}. Συγκεκριμένα αυξάνοντας την τιμή της ωμικής αντίστασης R, τόσο μικραίνει ο συντελεστής ποιότητας Q_{π}. Αντιστρόφως μειώνοντας την τιμή της ωμικής αντίστασης R, μεγαλώνει η τιμή της έντασης του ρεύματος και του συντελεστή ποιότητας Q.

Οι καμπύλες συντονισμού στενεύουν και πλαταίνουν ανάλογα με την περίπτωση.

Α) Όταν η αντίσταση μικραίνει οι καμπύλες συντονισμού «στενεύουν» και ο συντελεστής ποιότητας αυξάνει.

Β) Όταν η αντίσταση μεγαλώνει οι καμπύλες συντονισμού «φαρδαίνουν» και ο συντελεστής ποιότητας μειώνεται.



Σχήμα 3. 11

Ο συντελεστής ποιότητας Q_π, εκφράζεται επίσης και από την ζώνη διέλευσης και ορίζεται ως ο λόγος της συχνότητας συντονισμού προς την ζώνη διέλευσης.

Οπότε $Q_\pi = \frac{f_o}{f_2 - f_1}$ ή $f_2 - f_1 = \frac{f_o}{Q_\pi} \Rightarrow \Delta f = \frac{f_o}{Q_\pi}$.

Β) ΣΕ ΚΥΚΛΩΜΑ RLC ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ

Συντελεστής ποιότητας Q_π παράλληλου κυκλώματος RLC (με ίδια τάση τροφοδοσίας στα στοιχεία του), καλούμε το πηλίκο της ενεργής τιμής της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο I_L ή τον πυκνωτή I_C, προς την ενεργή τιμή της έντασης που διαρρέει την ωμική αντίσταση R. Δίνεται από την σχέση $Q_\pi = \frac{I_L}{I_R}$ ή $Q_\pi = \frac{I_C}{I_R}$.

Ο συντελεστής ποιότητας θα ισοδυναμεί αντιστοίχως με

$$Q_\pi = \frac{I_L}{I_R} = \frac{\frac{V}{X_L}}{\frac{V}{R}} = \frac{VR}{VX_L} = \frac{R}{X_L} \Rightarrow Q_\pi = \frac{R}{L\omega_O} \overset{\omega_o=\sqrt{\frac{1}{LC}}}{\Rightarrow} Q_\pi = \frac{R}{L\omega_O} = \frac{R}{L\sqrt{\frac{1}{LC}}} = \frac{R}{\sqrt{\frac{L^2}{LC}}} = \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

και ομοίως προκύπτει

$$Q_\pi = \frac{I_C}{I_R} = \frac{\frac{V}{X_C}}{\frac{V}{R}} = \frac{VR}{VX_C} = \frac{R}{X_C} = \frac{R}{\frac{1}{C\omega_O}} \Rightarrow Q_\pi = RC\omega_O \overset{\omega_o=\sqrt{\frac{1}{LC}}}{\Rightarrow} Q_\pi = C\sqrt{\frac{1}{LC}}R = R\sqrt{\frac{C^2}{LC}} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Όταν η αντίσταση είναι πολύ μικρή, δηλαδή $R^2 << (L\omega_O)^2$ τα ρεύματα θα δίνονται από την σχέση $I_L = I_C = Q_\pi I_{min}$.

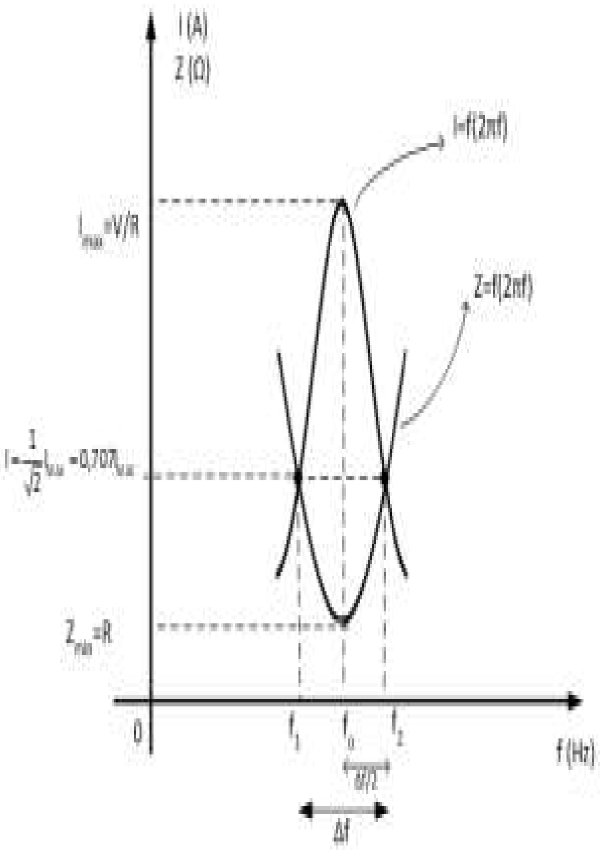
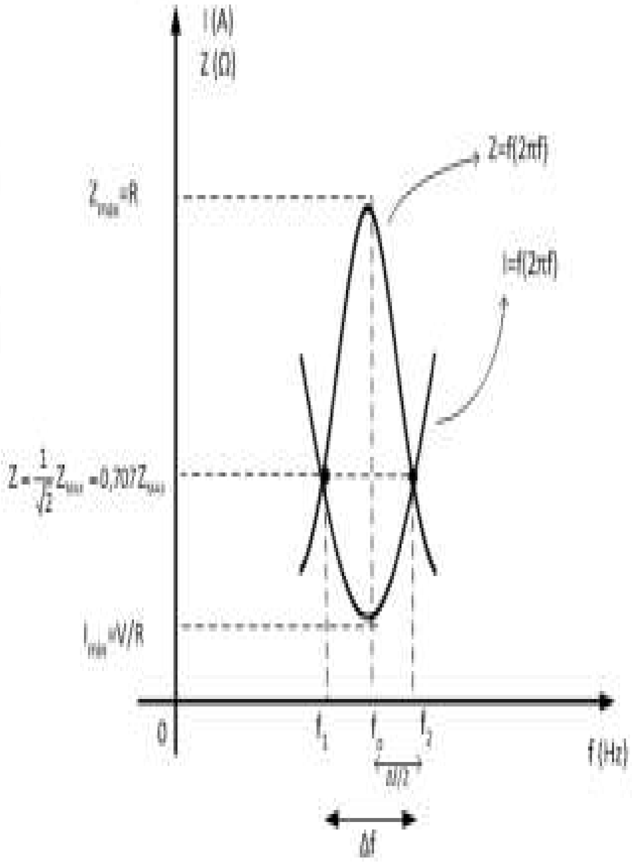
Επίσης παρατηρούμε ότι στο κύκλωμα RLC παραλληλίας, διατηρώντας σταθερό τον λόγο C/L και μεταβάλλοντας την τιμή της ωμικής αντίστασης R, τότε όσο αυξάνεται η τιμή της ωμικής αντίστασης R, τόσο αυξάνει ο συντελεστής ποιότητας Q_π και αντιστρόφως μειώνοντας την τιμή της ωμικής αντίστασης R μειώνεται η τιμή του συντελεστή ποιότητας Q_π.

Ο συντελεστής ποιότητας Q_π, εκφράζεται επίσης και από την ζώνη διέλευσης και ορίζεται ως ο λόγος της συχνότητας συντονισμού προς την ζώνη διέλευσης.

Οπότε $Q_\pi = \frac{f_o}{f_2 - f_1}$ ή $f_2 - f_1 = \frac{f_o}{Q_\pi} \Rightarrow \Delta f = \frac{f_o}{Q_\pi}$.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ 3^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

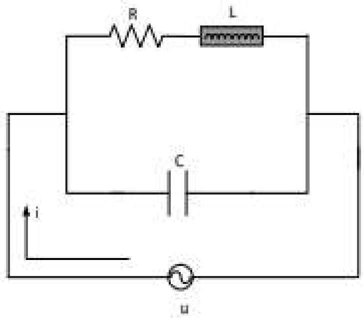
	ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ ΣΕΙΡΑΣ	ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ
Συχνότητα Συντονισμού	$f_o = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$ (όταν $R^2 \ll (L\omega_o)^2$ είναι $f_o = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}$)
Κυκλική Συχνότητα Συντονισμού	$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$ (όταν $R^2 \ll (L\omega_o)^2$ είναι $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$)
Συντελεστής ποιότητας	$Q_\pi = \frac{L\omega_o}{R}$ ή $Q_\pi = \frac{1}{C\omega_o R}$ ή $Q_\pi = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$	$Q_\pi = \frac{R}{L\omega_o}$ ή $Q_\pi = RC\omega_o$ ή $Q_\pi = R\sqrt{\frac{C}{L}}$
Εύρος Ζώνης	$\Delta f = f_2 - f_1$ ή $Q_\pi = \frac{f_o}{f_2 - f_1}$ ή $\Delta f = \frac{f_o}{Q_\pi}$	$\Delta f = f_2 - f_1$ ή $Q_\pi = \frac{f_o}{f_2 - f_1}$ ή $\Delta f = \frac{f_o}{Q_\pi}$

Πλευρικές Συχνότητες	$f_2 - f_0 = \dfrac{\Delta f}{2}$ και $f_0 - f_1 = \dfrac{\Delta f}{2}$	$f_2 - f_0 = \dfrac{\Delta f}{2}$ και $f_0 - f_1 = \dfrac{\Delta f}{2}$
Καμπύλες Συντονισμού		

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΕΡΩΤΗΣΗ 3.1

Δίνεται το επόμενο κύκλωμα συντονισμού παραλληλίας.



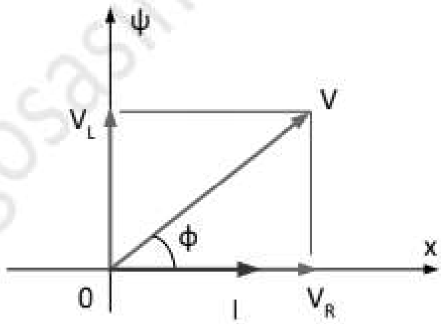
Σχήμα 3. 12

Να αποδείξετε ότι η χωρητικότητα του πυκνωτή στον παράλληλο συντονισμό του κυκλώματος, δίνεται από την σχέση: $C = \frac{L}{R^2 + L^2\omega^2}$.

Απάντηση

Για το κύκλωμα παράλληλου συντονισμού του σχήματος, η τάση τροφοδοσίας είναι κοινή στα άκρα του πυκνωτή (X_C) και στα άκρα της σύνθετης αντίστασης (των X_L και R με $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$).

Καταρχήν, το διανυσματικό διάγραμμα για των κλάδο με τα στοιχεία RL σε σειρά (αντίστασης και πηνίου), είναι:

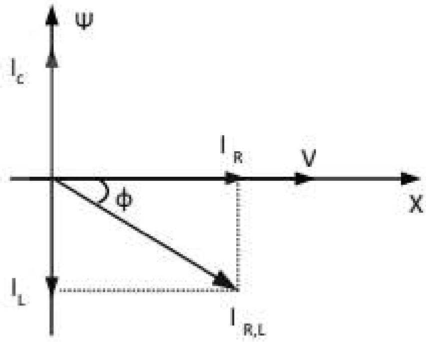


Σχήμα 3. 13

Από τον ορισμό του ημιτόνου $\left(ημφ = \frac{απέναντι}{υποτείνουσα}\right)$, για το τρίγωνο γωνίας φ του διαγράμματος, προκύπτει ότι :

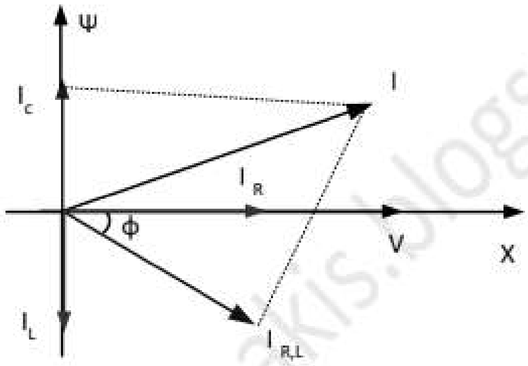
$$ημφ = \frac{V_L}{V} = \frac{I \cdot X_L}{I \cdot Z} \Rightarrow ημφ = \frac{L\omega_O}{\sqrt{R^2 + L^2\omega_O^{\ 2}}}$$

Επίσης, το διανυσματικό διάγραμμα των ρευμάτων I_C, $I_L = I_{RL}ημφ$ και $I_R = I_{RL}ημφ$ είναι το εξής:



Σχήμα 3. 14

Προχωρώντας την διανυσματική ανάλυση το διανυσματικό διάγραμμα θα δώσει τη τιμή του ενεργού ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.



Σχήμα 3. 15

Το ρεύμα στον πυκνωτή προηγείται της τάσης κατά 90°, είναι $I_C = \frac{V}{X_C} = VC\omega$. Το ρεύμα του πηνίου είναι $I_L = \frac{V}{X_L} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$. Ο συντονισμός προϋποθέτει ότι ισχύει $I_C = I_{RL}$. Επίσης από τον ορισμό του ημίτονου για το τρίγωνο γωνίας φ που σχηματίστηκε στο προηγούμενο σχήμα, έχουμε ότι

$$\eta\mu\phi = \frac{I_L}{I_{RL}} \overset{I_C = I_L}{\Longrightarrow} \eta\mu\phi = \frac{I_L}{I_{RL}} \Rightarrow I_C = \eta\mu\phi \cdot I_{RL} \underset{I_{RL} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}}{\overset{I_C = \frac{V}{X_C}}{\Longrightarrow}}$$

$$\frac{V}{X_C} = \frac{V\eta\mu}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \Rightarrow \frac{1}{X_C} = \frac{\eta\mu\phi}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \overset{X_C = \frac{1}{C\omega}}{\Longrightarrow} \frac{1}{\frac{1}{C\omega}} = \frac{\eta\mu\phi}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \Rightarrow C\omega = \frac{\eta\mu\phi}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}.$$

Τελικά γνωρίζοντας ότι $\eta\mu\phi = \frac{L\omega_O}{\sqrt{R^2 + L^2\omega_O^{\ 2}}}$, αντικαθιστώντας προκύπτει ότι:

$$C\omega_o = \frac{\eta\mu\varphi}{\sqrt{R^2+L^2{\omega_o}^2}} \overset{\eta\mu\varphi=\frac{L\omega_O}{\sqrt{R^2+L^2{\omega_O}^2}}}{\Rightarrow} C\omega_O = \frac{\frac{L\omega_O}{\sqrt{R^2+L^2{\omega_O}^2}}}{\sqrt{R^2+L^2{\omega_O}^2}} \Rightarrow$$

$$C\omega_O = \frac{L\omega_O}{\sqrt{R^2+L^2{\omega_O}^2}^2} \Rightarrow C = \frac{L}{R^2+L^2{\omega_O}^2}$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 3.2

Κύκλωμα RLC σειράς έχει συχνότητα συντονισμού 25 KHz. Εάν οι τιμές των L και C υποδιπλασιαστούν, πόση θα είναι η νέα συχνότητα συντονισμού;

Απάντηση

Η συχνότητα συντονισμού δίνεται από την: $f_o = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}$. Υποδιπλασιάζουμε τα L,C ώστε να είναι $L' = \frac{L}{2}$ και $C' = \frac{C}{2}$. Αντικαθιστώντας στην συχνότητα συντονισμού προκύπτει ότι :

$$f_o' = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{2\cdot 3,14}\frac{1}{\sqrt{L'C'}} \overset{L'=\frac{L}{2}}{\underset{C'=\frac{C}{2}}{=}} \frac{1}{2\cdot 3,14}\frac{1}{\sqrt{\frac{L}{2}\cdot\frac{C}{2}}} = \frac{1}{2\cdot 3,14}\frac{1}{\sqrt{\frac{LC}{4}}} = \frac{1}{2\cdot 3,14}\frac{2}{\sqrt{LC}} \Rightarrow$$

$$f_o' = \frac{1}{3,14}\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{3,14}\cdot 2\pi f_o = \frac{1}{3,14}2\cdot 3,14\cdot 25000 = 50000 = 50\text{KHz}.$$

Η συχνότητα συντονισμού θα διπλασιαστεί.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3.3

Κύκλωμα RLC σειράς έχει συχνότητα συντονισμού 10KHz. Να βρεθούν οι πλευρικές συχνότητες όταν η ζώνη διέλευσης είναι 0,5 KHz.

Απάντηση

Οι πλευρικές συχνότητες δίνονται από τις σχέσεις: $f_0 - f_1 = \frac{\Delta f}{2}$ και $f_2 - f_0 = \frac{\Delta f}{2}$.

Αντικαθιστώντας, προκύπτει ότι

$$f_1 = f_o - \frac{\Delta f}{2} = 10 - \frac{0,5}{2} = 9,75\text{KHz} \quad \text{και}$$

$$f_2 = f_0 + \frac{\Delta f}{2} = 10 + \frac{0,5}{2} = 10,25\text{KHz}.$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 3.4

Κύκλωμα συντονισμού σειράς έχει ζώνη διέλευσης 1KHz. Να βρείτε την νέα ζώνη διέλευσης όταν ο συντελεστής ποιότητας υποδιπλασιαστεί.

Απάντηση

Η ζώνη διέλευσης δίνεται από την: $\Delta f = \frac{f_o}{Q_\pi}$ ή $\frac{f_o}{Q_\pi} = 1KHz$. Υποδιπλασιάζουμε τον συντελεστή ποιότητας (διατηρώντας την συχνότητα), ώστε να γίνει $Q'_\pi=0,5\cdot Q_\pi$, οπότε αντικαθιστώντας στην νέα σχέση της ζώνης διέλευσης, προκύπτει ότι

$$\Delta f' = \frac{f_o}{Q'_\pi} \overset{Q'_\pi=2Q_\pi}{\Rightarrow} \Delta f' = \frac{f_o}{\frac{1}{2}Q_\pi} = 2\frac{f_o}{Q_\pi} \overset{\frac{f_o}{Q_\pi}=1KHz}{\Longrightarrow} \Delta f' = 2\cdot 1 = 2KHz \ .$$

Η νέα ζώνη διέλευσης θα διπλασιαστεί.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3.5

1. Τι δηλώνει ο συντελεστής ποιότητας στον παράλληλο συντονισμό;

2. Τι είναι οι υπερεντάσεις στον παράλληλο συντονισμό;

Απάντηση

1.

Ο συντελεστής ποιότητας, είναι το πηλίκο της ενεργής τιμής της έντασης του ρεύματος που διαρρέει τον επαγωγικό ή χωρητικό καταναλωτή, προς την ενεργό τιμή της έντασης που διαρρέει τον ωμικό καταναλωτή, δηλαδή ισχύει

$$Q_\pi = \frac{I_L}{I_R} \quad (\text{ή} \quad Q_\pi = \frac{I_C}{I_R}).$$

Ο συντελεστής ποιότητας, δηλώνει πόσες φορές είναι το I_L (ή το I_c), μεγαλύτερο από το ελάχιστο ρεύμα I_{min} του κυκλώματος παράλληλου συντονισμού.

2.

Στον παράλληλο συντονισμό λέμε ότι εμφανίζονται υπερεντάσεις καθότι τα ρεύματα στο πηνίο ή τον πυκνωτή είναι Q_π φορές μεγαλύτερα από το ελάχιστο ρεύμα I_{min} (φαινόμενο υπερέντασης).

ΕΡΩΤΗΣΗ 3.6

Πότε εμφανίζονται τα φαινόμενα του συντονισμού κυκλώματος σειράς και του παράλληλου κυκλώματος;

Απάντηση

Όταν έχουμε συντονισμένο κύκλωμα, μεταφέρεται μέγιστη πραγματική ισχύ από την πηγή στην ωμική αντίσταση ($X_L=X_C$). Η εφαρμοζόμενη τάση είναι σε φάση με το ρεύμα εισόδου του κυκλώματος.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3.7

1. Τι καλούμε ταλαντωτή σειράς;

2. Τι καλούμε παράλληλο ταλαντωτή;

Απάντηση

1.

Σε κύκλωμα σειράς RLC (τροφοδοτούμενο με τάση V και μεταβαλλόμενη συχνότητα f), για συχνότητα f_0, όταν η επαγωγική αντίσταση X_L γίνει ίση με την χωρητική αντίσταση X_C, τότε το κύκλωμα συντονίζεται ως προς την πηγή τροφοδοσίας. Αυτό καλείται και ταλαντωτής σειράς.

2.

Επίσης, όταν σε κύκλωμα παραλληλίας (RLC) που τροφοδοτείται με τάση V και μεταβαλλόμενη συχνότητα f, για συχνότητα f_0, όταν η επαγωγική αντίσταση X_L γίνει ίση με την χωρητική αντίσταση X_C, τότε το κύκλωμα είναι σε παράλληλο συντονισμό και καλείται παράλληλος ταλαντωτής.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3.8

1. Τι γνωρίζετε για τις υπερτάσεις;

2. Τι γνωρίζετε για τα υπερρευμάτα;

Απάντηση

1.

Για συντονισμό κυκλώματος σειράς, ισχύει ότι: $V_L=V_C=Q_\pi \cdot V$, όπου Q_π ο συντελεστής ποιότητας του κυκλώματος. Οι υπερτάσεις είναι επικίνδυνες για το κύκλωμα και τα στοιχεία του. Ο συντελεστής ποιότητας προφυλάσσει το κύκλωμα. Εάν το πηνίο και το μαγνητικό του περίβλημα σπειρών καθώς και η χωρητικότητα φορτίου του πυκνωτή δεν είναι οι κατάλληλες, τότε μπορεί να συμβούν υπερτάσεις και καταστροφή του κυκλώματος.

2.

Για την κατάσταση συντονισμού κυκλώματος RLC σε παραλληλία, ισχύει ότι: $I_L=Q_\pi \cdot I= I_C$. Τα ρεύματα των στοιχείων είναι Q_π φορές μεγαλύτερα από το συνολικό ρεύμα του κυκλώματος. Αυτό το φαινόμενο εμφανίζει τις υπερεντάσεις (φαινόμενο υπερέντασης ή υπερρευμάτων) στον συντονισμό, που μπορεί να οδηγήσουν στην καταστροφή μέσω της θέρμανσης των αγωγών και μεταλλικών στοιχείων.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3.9

Να υπολογίσετε τον συντελεστή ποιότητας κυκλώματος RLC σειράς.

Απάντηση

Συντελεστής ποιότητας κυκλώματος ή υπέρτασης Q_π, καλείται το πηλίκο της ενεργής τιμής της τάσης που επικρατεί στα άκρα του πηνίου (ή του πυκνωτή) στον συντονισμό προς την τάση τροφοδοσίας του κυκλώματος. Είναι δηλαδή

$$Q_\pi = \frac{V_L}{V_R} \quad \text{(ή ομοίως για τον πυκνωτή } Q_\pi = \frac{V_C}{V_R}\text{)}.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των τάσεων στα άκρα των στοιχείων προκύπτει ότι:

$$Q_\pi = \frac{V_L}{V_R} = \frac{IX_L}{IR} = \frac{X_L}{R} = \frac{L\omega_O}{R} \overset{\omega_o=\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\Rightarrow} Q_\pi = \frac{L\omega_O}{R} = \frac{L\frac{1}{\sqrt{LC}}}{R} = L\frac{1}{R\sqrt{LC}} = \frac{\sqrt{L^2}}{R\sqrt{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L^2}{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\text{και ομοίως } Q_\pi = \frac{V_C}{V_R} = \frac{IX_C}{IR} = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{C\omega_O R} \overset{\omega_o=\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\Rightarrow}$$

$$Q_\pi = \frac{1}{C\omega_O R} = \frac{\sqrt{LC}}{CR} = \frac{\sqrt{LC}}{R\sqrt{C^2}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{LC}{CC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Επομένως ο συντελεστής ποιότητας θα ισοδυναμεί με: $Q_\pi = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 3.1

Κύκλωμα RLC σειράς τροφοδοτείται με εναλλασσόμενη τάση $u = 200ημ(500t + 40^o)$ **και στιγμιαία ένταση** $i = 2ημ(500t + 40^o)$**. Δίνεται L=0,1H. Να βρεθούν οι τιμές των R και C.**

Απάντηση

Οι ενεργές τιμές των μεγεθών της τάσης και του ρεύματος είναι

$$V_{εν} = \frac{V_o}{\sqrt{2}} = \frac{200}{\sqrt{2}} = 141{,}4V \quad και \quad I_{εν} = \frac{I_o}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = 1{,}414A.$$

Το κύκλωμα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού (τάση και ρεύμα, συμφασικά με φάση φ=40°),οπότε VL=Vc ή XL=Xc. Η ωμική αντίσταση R μέσω των ενεργών τιμών είναι

$$I_{εν} = \frac{V_{εν}}{R} \Rightarrow R = \frac{V_{εν}}{I_{εν}} = \frac{141{,}4}{1{,}414} = 100A.$$

Από την συχνότητα συντονισμού θα υπολογίσουμε την τιμή της χωρητικότητας του πυκνωτή, οπότε

$$ω_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow ω_o^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow C = \frac{1}{Lω_o^2} = \frac{1}{0{,}1 \cdot 500^2} = \frac{1}{25000} \Rightarrow C = 40μF.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.2

Κύκλωμα RLC σειράς τροφοδοτείται με εναλλασσόμενη τάση $u = 200\sqrt{2}\,ημ\,500t$ **. Το κύκλωμα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού. Η ωμική αντίσταση του κυκλώματος είναι 100Ω και η χωρητική αντίσταση 40 Ω. Να βρεθούν:**

1. Οι τάσεις στα άκρα των στοιχείων του κυκλώματος.

2. Ο συντελεστής ποιότητας του κυκλώματος.

3. Η ζώνη διέλευσης.

4. Οι πλευρικές συχνότητες.

Απάντηση

1.

Η κυκλική συχνότητα συντονισμού είναι ω=500 rad/sec. Η επαγωγική και χωρητική αντίσταση θα είναι ισοδύναμες, δηλαδή $X_L=X_C$ καθώς έχουμε συντονισμό στο κύκλωμα. Οπότε $X_L=X_C$=40 Ω. Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος, θα είναι

$$I_{εν} = \frac{V_{εν}}{Z} = \frac{V_{εν}}{R} \overset{V_{εν}=\frac{V_o}{\sqrt{2}}}{=} \frac{200}{100} = 2A$$

Η ενεργός τάση στα άκρων των αντιστάσεων είναι $I_{εν} = \frac{V_{εν,R}}{R} \Rightarrow V_R = 2 \cdot 100 = 200$ V.

Επίσης επειδή το κύκλωμα είναι συντονισμένο οι τάσεις θα πρέπει να ισοδυναμούν δηλαδή, V_L=V_C. Η τάση στα άκρα του πηνίου, είναι

$$V_L = I_{εν} \cdot X_L = 2 \cdot 40 = 80 \text{ V και ομοίως } V_C = I_{εν} \cdot X_C = 2 \cdot 40 = 80 \text{ V}$$

2.

Ο συντελεστής ποιότητας (για κύκλωμα σειράς) είναι: $Q_π = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$. Υπολογίζουμε την τιμή της αυτεπαγωγής του πηνίου και της χωρητικότητας του πυκνωτή. Είναι

$$X_L = L\omega_o \Rightarrow L = \frac{X_L}{\omega_o} = \frac{40}{200} = 0{,}2 \text{ H}$$

και επίσης από την κυκλική συχνότητα συντονισμού η αυτεπαγωγή του πηνίου είναι

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow 500^2 = \frac{1}{0{,}2 \cdot C} \Rightarrow C = \frac{1}{0{,}2 \cdot 250000} = \frac{1}{50000} = 0{,}00002 = 20\ \mu\text{F}$$

Οπότε αντικαθιστώντας ο συντελεστής ποιότητας προκύπτει ότι είναι

$$Q_π = \frac{1}{100}\sqrt{\frac{0{,}2}{20 \cdot 10^{-6}}} = \sqrt{0{,}01 \cdot 10^6} = \sqrt{100000} \Rightarrow Q_π = 100.$$

3.

Η ζώνη διέλευσης είναι $\Delta f = \frac{f_o}{Q_π} = \frac{\frac{\omega_o}{2\pi}}{Q_π} = \frac{500}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 100} = \frac{5}{6{,}28} = 0{,}79\text{Hz}$.

4.

Οι πλευρικές συχνότητες (με $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{500}{2 \cdot 3{,}14} = \frac{500}{6{,}28} = 79{,}61\text{ Hz}$), είναι

$$f_0 - f_1 = \frac{\Delta f}{2} \Rightarrow f_1 = f_o - \frac{\Delta f}{2} = 79{,}61 - 0{,}79 \Rightarrow f_1 = 78{,}82\text{Hz}$$

και $$f_2 - f_0 = \frac{\Delta f}{2} \Rightarrow f_2 = f_o + \frac{\Delta f}{2} = 79{,}61 + 0{,}79 \Rightarrow f_2 = 80{,}4\text{ Hz}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.3

Σε κύκλωμα συντονισμού RLC σειράς, δίνεται ο συντελεστής ποιότητας $Q_π$=10.
Να βρείτε τον συντελεστή ποιότητας όταν:
1. Η ζώνη διέλευσης του κυκλώματος διπλασιάζεται
2. Η ζώνη διέλευσης του κυκλώματος υποδιπλασιάζεται.
Απάντηση

Ο συντελεστής ποιότητας συνδέεται με την ζώνη διέλευσης και τη συχνότητα συντονισμού, μέσω της σχέσης $\Delta f = \frac{f_o}{Q_π} \Rightarrow Q_π = \frac{f_o}{\Delta f} \Rightarrow f_o = \Delta f \cdot 10$.

1.

Εάν διπλασιάσουμε την ζώνη διέλευσης, δηλαδή γίνει Δf′=2Δf, τότε ο συντελεστής ποιότητας, θα γίνει $Q'_\pi = \frac{f_o}{\Delta f'} = \frac{f_o}{2\Delta f} \Rightarrow f_o = Q'_\pi 2\Delta f$. Εξισώνοντας την συχνότητα συντονισμού των δύο σχέσεων, προκύπτει $\Delta f \cdot 10 = Q'_\pi 2\Delta f \Rightarrow Q'_\pi = 5$ (δηλαδή ο συντελεστής ποιότητας υποδιπλασιάζεται, όταν διπλασιάζεται η ζώνη διέλευσης).

2.

Με τον ίδιο τρόπο εάν υποδιπλασιάσουμε την ζώνη διέλευσης, δηλαδή γίνει Δf′=0,5·Δf, τότε ο συντελεστής ποιότητας, θα γίνει $Q'_\pi = \frac{f_o}{\Delta f'} = \frac{f_o}{0,5 \cdot \Delta f} \Rightarrow f_o = \frac{Q'_\pi \Delta f}{2}$.

Εξισώνοντας την συχνότητα συντονισμού των δύο σχέσεων, προκύπτει $\Delta f \cdot 10 = \frac{Q'_\pi \Delta f}{2} \Rightarrow Q'_\pi = 20$ (δηλαδή ο συντελεστής ποιότητας διπλασιάζεται, όταν υποδιπλασιάζεται η ζώνη διέλευσης).

ΑΣΚΗΣΗ 3.4

Κύκλωμα RLC παραλληλίας (το «κατασκευαστικό» κύκλωμα), περιλαμβάνει πηνίο αυτεπαγωγής L=5 H και ωμική αντίσταση R=100 Ω σε σειρά, παράλληλα με πυκνωτή χωρητικότητας C=5 μF και τροφοδοτείται από ενεργό τάση 100 V. Το κύκλωμα είναι σε κατάσταση συντονισμού.

1. Να σχεδιάσετε το κύκλωμα του παράλληλου συντονισμού.

2. Να βρείτε την συχνότητα συντονισμού του κυκλώματος.

3. Να βρείτε τον συντελεστή ποιότητας του κυκλώματος.

4. Να βρείτε την ζώνη διέλευσης

5. Να βρείτε την ενεργό τιμή της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο.

6. Μηδενίζουμε την τιμή της ωμικής αντίσταση R. Να υπολογίσετε, τη νέα συχνότητα συντονισμού.

Στην συνέχεια τροποποιούμε το κύκλωμα και τοποθετούμε τα στοιχεία του κυκλώματος R, L και C, παράλληλα μεταξύ τους (κύκλωμα RLC παραλληλίας).

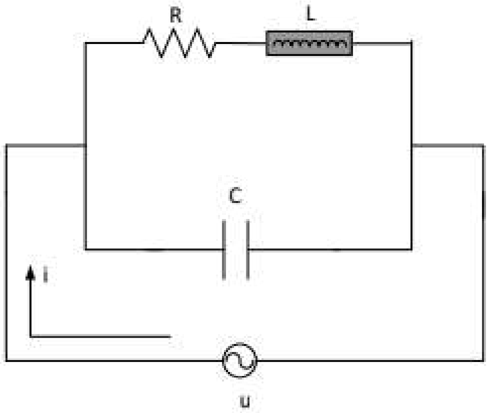
7. Να σχεδιάσετε το νέο κύκλωμα.

8. Να βρείτε την σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος.

Απάντηση

1.

Το κύκλωμα του παράλληλου συντονισμού, είναι το επόμενο:



Σχήμα 3. 16

2.

Όταν R=100Ω, η συχνότητα συντονισμού στον παράλληλο συντονισμό (με αντίσταση R=100 Ω >>0), θα είναι

$$f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{5\cdot 5\cdot 10^{-6}} - \frac{100^2}{5^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{25}\cdot 10^6 - \frac{10000}{25}} \Rightarrow$$

$$f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{40000 - 400} = \frac{\sqrt{396000}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}198{,}9 = 79{,}4\,\text{Hz}.$$

3. Ο συντελεστής ποιότητας είναι

$$Q_\pi = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 100\sqrt{\frac{5\cdot 10^{-6}}{5}} = 0{,}1.$$

4. Η ζώνη διέλευσης είναι

$$\Delta f = \frac{f_o}{Q_\pi} = \frac{79{,}4}{0{,}1} = 794\text{Hz}.$$

5.Το ρεύμα του πηνίου είναι

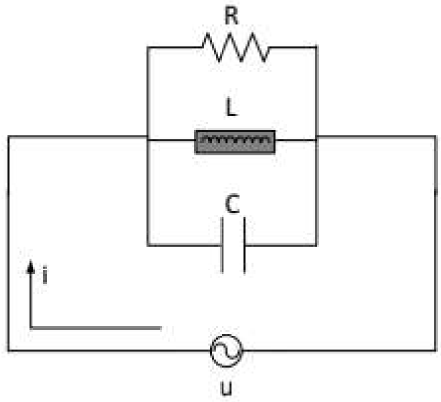
$$I_L = \frac{V}{X_L} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \overset{\omega=2\pi f}{=} \frac{100}{\sqrt{100^2 + (5\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 79{,}4)^2}} = \frac{100}{\sqrt{6225846{,}7}} \Rightarrow$$

$$I_L = \frac{100}{2495{,}1} = 0{,}0447\,\text{A}.$$

6. Όταν μηδενίσουμε την τιμή της ωμικής αντίστασης (R=0) η συχνότητα συντονισμού θα είναι

$$f_o = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{5\cdot 5\cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{5}10^3 = \frac{100}{\pi} = 31{,}84\frac{\text{rad}}{\text{sec}}.$$

7.Το κύκλωμα παραλληλίας είναι το επόμενο:



Σχήμα 3. 17

Το ρεύμα στο πηνίο είναι $I_L = \frac{V}{X_L} = \frac{1}{L \cdot \omega} \overset{\omega=2\pi f}{=} \frac{100}{5 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 79{,}4} = \frac{100}{2493{,}16} = 0{,}04\,A$.

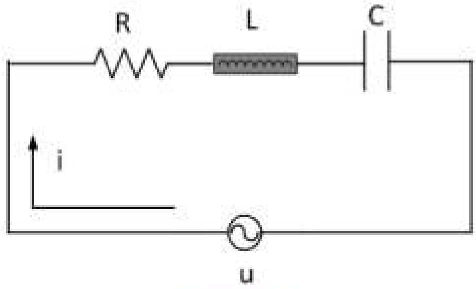
8. Η ολική σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος με ω=2πf=498,6 rad/sec,

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (C\omega - \frac{1}{L\omega})^2}} \Rightarrow Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{100^2} + (5 \cdot 10^{-6} \cdot 498{,}6 - \frac{1}{5 \cdot 498{,}6})^2}} \Rightarrow$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{10^{-4} + (2493{,}16 \cdot 10^{-6} - 0{,}00040109)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}00219206}} = \frac{1}{0{,}046819} \Rightarrow Z = 21{,}35\Omega.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.5

Κύκλωμα RLC σειράς βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού και αποτελείται από τα στοιχεία με τιμές R=30Ω, X_L=200Ω. Συνδέεται με πηγή εναλλασσόμενης τάσης 230V, 60Hz.



Σχήμα 3. 18

Να βρείτε την τιμή της χωρητικότητας C .

Απάντηση

Επειδή έχουμε συντονισμό, θα είναι X_L=Xc. Οπότε η κυκλική συχνότητα είναι

$$\omega_o = 2\pi f = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 60 = 376{,}8 \frac{rad}{sec}.$$

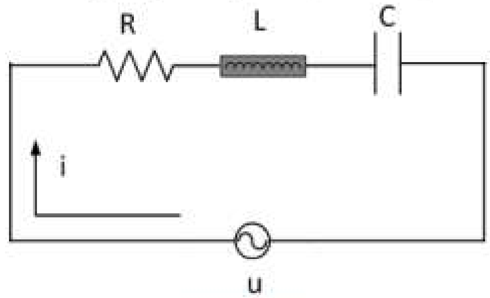
Η χωρητική αντίσταση είναι $X_L = L\omega_o \Rightarrow L = \frac{X_L}{\omega_o} = \frac{200}{376,8} = 0,53H \Rightarrow L = 0,53H$.

Οπότε μέσω της συχνότητας συντονισμού θα υπολογίσουμε την τιμή της χωρητικότητας του πυκνωτή η οποία είναι

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega_o^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow C = \frac{1}{L\omega_o^2} = \frac{1}{0,53 \cdot 376,8^2} = 0,000013289 = 13,29\mu F.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.6

Κύκλωμα RLC σειράς έχει R=100Ω, L=4H και βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού. Τροφοδοτείται από εναλλασσόμενη τάση 100V, 500 rad/sec.



Σχήμα 3. 19

Να βρεθούν τα εξής:

1. Οι τάσεις V_L, V_c στα άκρα των καταναλωτών.

2. Ο συντελεστής ποιότητας Q_π.

3. Οι πλευρικές συχνότητες f_1, f_2 .

Απάντηση

1.

Είναι X_L=X_C (οπότε και Z=R). Το κύκλωμα είναι σε συντονισμό. Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \frac{1}{L\omega_o^2} = \frac{1}{4 \cdot 500^2} = \frac{1}{1000000} \quad ή \quad C = 1\mu F.$$

Η συχνότητα συντονισμού είναι $f_o = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{2 \cdot 3,14}\frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-6}}} = 79,6Hz$.

Η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος είναι

$$I_{εν} = \frac{V_{εν}}{Z} = \frac{V_{εν}}{R} = \frac{100}{100} = 1A.$$

Για την επαγωγή η τάση στα άκρα της είναι $V_L = I_{εν}X_L = I_{εν}L\omega = 1 \cdot 4 \cdot 500 = 2000V$,

Η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι $V_C = I_{εν}X_C = I_{εν}\frac{1}{C\omega} = 1\frac{1}{10^{-6}500} = 2000V$

2.

Ο συντελεστής ποιότητας σε κύκλωμα σειράς είναι $Q_\pi = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$. Οπότε

αντικαθιστώντας προκύπτει $Q_\pi = \frac{1}{100}\sqrt{\frac{4}{10^{-6}}} = 0{,}01\sqrt{4\cdot 10^{6}} = 0{,}01\cdot 2\cdot 10^{3} \Rightarrow Q_\pi = 20$.

3.

Η ζώνη διέλευσης είναι

$$\Delta f = \frac{f_o}{Q_\pi} = \frac{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}}{Q_\pi} = \frac{\frac{1}{2\cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{1}{4\cdot 10^{-6}}}}{20} = \frac{1}{6{,}28}\frac{1}{2\cdot 10^{-3}\cdot 20} = 3{,}98\text{Hz}.$$

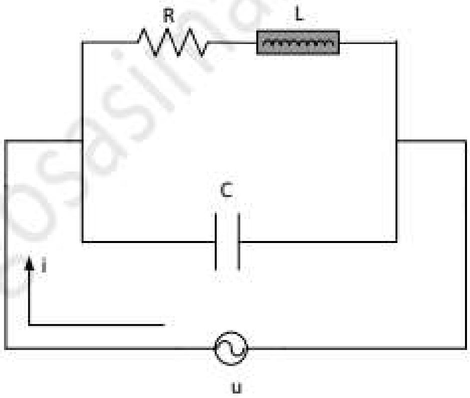
Οι πλευρικές συχνότητες είναι

$$f_0 - f_1 = \frac{\Delta f}{2} \Rightarrow f_1 = f_o - \frac{\Delta f}{2} = 79{,}6 - \frac{3{,}98}{2} \Rightarrow \quad f_1 = 77{,}6\text{Hz}$$

και $$f_2 - f_0 = \frac{\Delta f}{2} \Rightarrow f_2 = f_o + \frac{\Delta f}{2} = 79{,}6 + \frac{3{,}98}{2} \Rightarrow \quad f_2 = 81{,}59\text{Hz} \quad .$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.7

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος (στοιχείων RLC παραλληλίας) η αυτεπαγωγή του πηνίου είναι L=0,2H και η χωρητικότητα του πυκνωτή C=30μF.



Σχήμα 3 20

Να βρεθούν τα εξής:

1. Η κυκλική συχνότητα συντονισμού όταν η αντίσταση είναι R=60Ω.

2. Ο συντελεστής ποιότητας Q_π.

3. Οι πλευρικές συχνότητες f_1, f_2.

Απάντηση

1.

Η κυκλική συχνότητα συντονισμού όταν είναι R=0 δίνεται από την $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Στην άσκηση είναι R=60Ω. Τότε η συχνότητα συντονισμού θα είναι $f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$.

Επομένως η κυκλική συχνότητα δίνεται από την σχέση:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = \sqrt{\frac{1}{0{,}2 \cdot 30 \cdot 10^{-6}} - \frac{60^2}{0{,}2^2}} = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot 10^6 - 90000} = 276{,}8 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}.$$

2.

Ο συντελεστής ποιότητας προκύπτει ότι είναι

$$Q_\pi = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 60\sqrt{\frac{30 \cdot 10^{-6}}{0{,}2}} = 60 \cdot \sqrt{150} \cdot 10^{-3} = 60 \cdot 12{,}2 \cdot 10^{-3} = 0{,}73.$$

3.

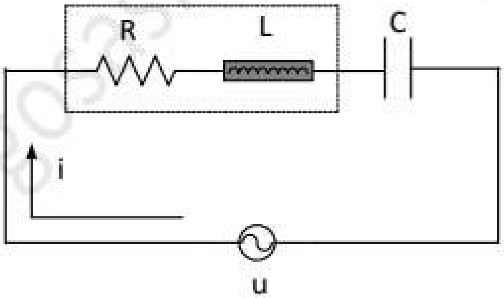
Η ζώνη διέλευσης είναι $\Delta f = \dfrac{f_o}{Q_\pi} = \dfrac{\frac{\omega_o}{2\pi}}{Q_\pi} = \dfrac{\frac{276{,}8}{6{,}28}}{0{,}73} = \dfrac{16{,}2}{0{,}73} = 22{,}2\text{Hz}$. Επομένως οι πλευρικές συχνότητες θα ισοδυναμούν:

$$f_0 - f_1 = \frac{\Delta f}{2} \Rightarrow f_1 = f_o - \frac{\Delta f}{2} = 276{,}8 - \frac{22{,}2}{2} = 276{,}8 - 11{,}1 \Rightarrow f_1 = 265{,}7\text{Hz}$$

και $$f_2 - f_0 = \frac{\Delta f}{2} \Rightarrow f_2 = f_o + \frac{\Delta f}{2} = 276{,}8 + \frac{22{,}2}{2} = 322{,}7 + 11{,}1 \Rightarrow f_2 = 287{,}5\text{Hz}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.8

Κύκλωμα σύνθετης αντίστασης σε σειρά, αποτελείται από επαγωγική αντίσταση (πηνίο ωμικής αντίστασης 20 Ω και αυτεπαγωγής 1 Η) και πυκνωτή (χωρητικότητας 20 μF). Στα άκρα του καταναλωτή εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση 200 V, 50 Hz.



Σχήμα 3.21

Να υπολογίστε:

1. Τη σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος.

2. Τη πτώση τάσης στο πηνίο και τον πυκνωτή.

3. Το συντελεστή ισχύος του καταναλωτή.

4. Εάν το κύκλωμα τροφοδοτηθεί με μεταβλητή συχνότητα, να βρεθεί η συχνότητα συντονισμού και ο συντελεστής ποιότητας του κυκλώματος.

Απάντηση

1.

Η κυκλική συχνότητα είναι ω=2πf=314 rad/sec. Τότε η επαγωγική και χωρητική αντίσταση θα ισοδυναμούν με

$$X_L = L \cdot \omega \overset{\omega=2\pi f}{=} 314 \cdot 1 = 314\,\Omega \text{ και } X_c = \frac{1}{C \cdot \omega} = \frac{1}{314 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^6}{6280} = 159{,}2\,\Omega.$$

Η σύνθετη επαγωγική αντίσταση είναι

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L)^2} \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + (L \cdot \omega)^2} = \sqrt{20^2 + 314^2} = \sqrt{400 + 98596} = 444{,}5\,\Omega.$$

Η σύνθετη αντίσταση ολόκληρου του κυκλώματος είναι

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} = \sqrt{400 + 154{,}8} = 23{,}5\,\Omega.$$

2. Η ενεργός ένταση είναι $I_{\varepsilon\nu} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{Z} = \frac{200}{23{,}5} = 8{,}5\,A$.

Στα άκρα του πυκνωτή η τάση είναι $V_C = I \cdot \frac{1}{C\omega} = 8{,}5 \cdot 159{,}2 = 1354{,}9$ Volt και στα άκρα του πηνίου είναι $V_L = I \cdot X_L = 8{,}5 \cdot 314 = 2669$ Volt.

3.

Επειδή $V_c < V_L$ θα έχουμε επαγωγική συμπεριφορά. Τότε $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{20}{23{,}5} = 0{,}85$.

4.

Η συχνότητα συντονισμού είναι

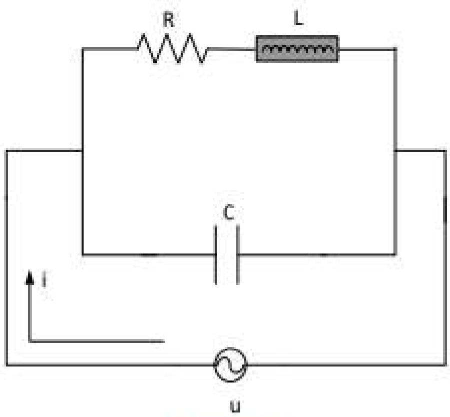
$$f_o = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14}\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{6{,}28}\frac{1000}{4{,}47} = 35{,}6\,\text{Hz}.$$

Επίσης ο συντελεστής ποιότητας είναι $Q_\pi = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ οπότε αντικαθιστώντας προκύπτει

$$Q_\pi = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{20}\sqrt{\frac{1}{20 \cdot 10^{-6}}} = 11{,}1.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.9

Πυκνωτής χωρητικότητας 50 μF, πηνίο αυτεπαγωγής 1 Η και ωμική αντίσταση 10 Ω συνδέονται παράλληλα (όπως στο σχήμα). Στα άκρα του κυκλώματος εφαρμόζεται τάση 400 V, συχνότητας 50 Hz.



Σχήμα 3.22

Να υπολογίσετε τα εξής:

1. Το ρεύμα I_L στο πηνίο και το I_C στον πυκνωτή.

2. Το ολικό ρεύμα.

3. Εάν το κύκλωμα τροφοδοτηθεί με μεταβλητή συχνότητα, να βρεθεί η συχνότητα συντονισμού και ο συντελεστής ποιότητας του κυκλώματος.

Απάντηση

1.

Η κυκλική συχνότητα είναι ω=2πf=314 rad/sec. Τότε η επαγωγική και χωρητική αντίσταση θα ισοδυναμούν με

$$X_L = L\cdot\omega = 314\cdot 1 = 314\,\Omega \text{ και } X_c = \frac{1}{C\cdot\omega} = \frac{1}{314\cdot 50\cdot 10^{-6}} = \frac{10^6}{15700} = 63{,}69\,\Omega.$$

Το ρεύμα στα άκρα του πηνίου είναι: $I_L = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{X_L} = \frac{200}{314} = 0{,}63\,\text{A}$.

Ομοίως στο πυκνωτή είναι $I_C = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{X_C} = \frac{400}{63{,}69} = 6{,}28\,\text{A}$

2.

Το ολικό ρεύμα θα είναι $I = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{Z}$. Υπολογίζουμε την σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{X_c} - \frac{1}{X_L})^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{10^2} + (\frac{1}{63{,}69} - \frac{1}{314})^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0{,}01 + (0{,}015701051 - 0{,}003184713)^2}} \Rightarrow Z = \frac{1}{0{,}1118} = 8{,}95\,\Omega$$

οπότε τελικά $I = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{Z} = \frac{400}{8{,}95} = 44{,}69\,\text{A}$

3.

Η συχνότητα συντονισμού είναι

$$f_o = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\cdot 3{,}14}\frac{1}{\sqrt{01\cdot 50\cdot 10^{-6}}} = \frac{1}{6{,}28}\frac{1000}{2{,}23} = \frac{1000}{14{,}05} = 71{,}1\,\text{Hz}.$$

Επίσης ο συντελεστής ποιότητας είναι

$$Q_\pi = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{1}{50\cdot 10^{-6}}} = 14{,}14.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.10 *(εξετάσεις 2011)*

Κύκλωμα RLC σειράς που βρίσκεται σε συντονισμό αποτελείται από μια ωμική αντίσταση R, πηνίο με επαγωγική αντίσταση X_L=628Ω και πυκνωτή με χωρητική

αντίσταση X_C=628Ω. Το κύκλωμα τροφοδοτείται με εναλλασσόμενη τάση $u = 300\sqrt{2} \cdot ημ(314t)\ V$ **και διαρρέεται από ενεργό ένταση I=10 A. Να υπολογίσετε:**

1. Την ωμική αντίσταση R,

2. Την τιμή του συντελεστή αυτεπαγωγής L του πηνίου,

3. Την ενεργό τιμή της πτώσης τάσης του πηνίου (V_L),

4. Το συντελεστή ποιότητας ($Q_π$) του κυκλώματος.

Απάντηση

1.

Η ωμική αντίσταση είναι: $R = \frac{V_{εν}}{I_{εν}} = \frac{\frac{V_0}{\sqrt{2}}}{I_{εν}} = \frac{300}{10} = 30\,Ω$.

2.

Ο συντελεστής αυτεπαγωγής είναι: $X_L = Lω \Rightarrow L = \frac{X_L}{ω} = \frac{628}{314} = 2\,H$.

3.

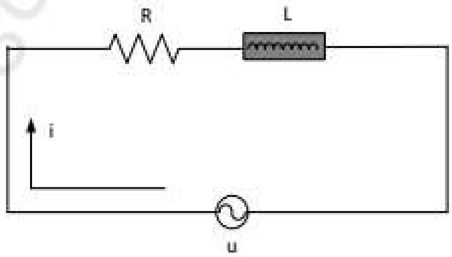
Η πτώση τάσης (ενεργός τιμή) του πηνίου είναι $V_L = I \cdot X_L = 10 \cdot 628 = 6280\,V$.

4.

Ο συντελεστής ποιότητας είναι $Q_π = \frac{V_L}{V} = \frac{6280}{300} = 20{,}9 \approx 21$.

ΑΣΚΗΣΗ 3.11 *(εξετάσεις 2014)*

Κύκλωμα σειράς, το οποίο αποτελείται από ωμικό αντιστάτη με τιμή R=30Ω και ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L=0,16H, τροφοδοτείται από πηγή εναλλασσόμενης τάσης $u = 150\sqrt{2} \cdot ημ250t\ V$ **.**



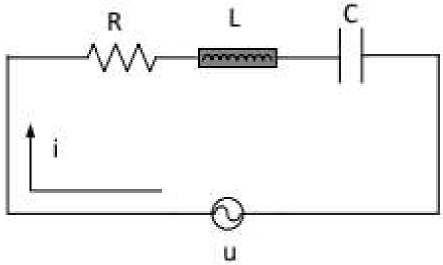
Σχήμα 3.23

Να υπολογίσετε:

1. Την τιμή της σύνθετης αντίστασης Ζ του κυκλώματος.

2. Την ενεργό τιμή του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.

Στη συνέχεια, διατηρώντας την ίδια τάση τροφοδοσίας u, προστίθεται σε σειρά στο κύκλωμα πυκνωτής και το κύκλωμα έρχεται σε κατάσταση συντονισμού.



Σχήμα 3.24

Να υπολογίσετε:

3. Την τιμή της χωρητικότητας C του πυκνωτή.

4. Την ενεργό τιμή του ρεύματος $I'_{εν}$.

5. Το συντελεστή ποιότητας $Q_π$.

Απάντηση

1.

Η επαγωγική αντίσταση είναι $X_L = ωL = 250 \cdot 0{,}16 = 40Ω$.

Η σύνθετη αντίσταση προκύπτει:

$$Z = \sqrt{{R_{ολ}}^2 + {X_L}^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50Ω$$

2.

Η ενεργός τιμή ρεύματος είναι $I = \frac{V_{εν}}{Z} = \frac{150}{50} = 3A$

3.

Το κύκλωμα είναι σε κατάσταση συντονισμού. Οπότε η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι

$$X_L = X_C \Rightarrow C = \frac{1}{ω^2 L} = \frac{1}{250^2 \cdot 0{,}16} = 100\,μF$$

4.

Η ενεργός ένταση είναι $I' = \frac{V_{εν}}{R} = \frac{150}{30} = 5A$

5.

Ο συντελεστής ποιότητας του κυκλώματος είναι

$$Q_π = \frac{X_L}{R} = \frac{ω_o L}{R} = \frac{250 \cdot 0{,}16}{30} = \frac{4}{3} \text{ (ή μέσω του τύπου } Q_π = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = ... = \frac{4}{3} \text{).}$$

Κεφάλαιο 4^{ο}
ΙΣΧΥΣ ΣΤΟ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ

4.1 Η ΙΣΧΥΣ ΣΤΟ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ

Στο εναλλασσόμενο ρεύμα, όπως είδαμε στο 1^{ο} κεφάλαιο, το ρεύμα και η τάση είναι ημιτονοειδής συναρτήσεις στον χρόνο. Η ισχύς στο εναλλασσόμενο ρεύμα θα είναι περιοδικά μεταβαλλόμενη στον χρόνο. Η στιγμιαία ισχύς θα δίνεται με χρήση εναλλασσόμενων μεγεθών από την σχέση:

$$P = u \cdot i \qquad \text{(Μονάδες μέτρησης τα Watt)}.$$

Έστω κύκλωμα με πηγή εναλλασσόμενης τάσης, διαφορά φάσης φ, στιγμιαία τιμή τάσης $u = V_o ημ(ω \cdot t)$ και στιγμιαία τιμή έντασης $i = I_o ημ(ω \cdot t)$. Το κύκλωμα έχει στιγμιαία ισχύς P που ισοδυναμεί με $P = u \cdot i = V_0 ημ(ωt) \cdot I_0 ημ(ωt + φ)$.

Η στιγμιαία ισχύς γίνεται ισοδύναμα:

$$P = V_0 ημ(ωt) \cdot I_0 ημ(ωt + φ) = V_o \cdot I_o \cdot ημ(ωt) \cdot ημ(ωt + φ) \underset{\text{όπου } α=ωt \text{ και } β=ωt+φ}{\overset{ημα \cdot ημβ = \frac{1}{2}(συν(α-β) - συν(α+β))}{\Longrightarrow}}$$

$$P = V_o I_o \frac{1}{2} συν(ωt - (ωt + φ)) - συν(ωt + ωt + φ)) \Rightarrow P = \frac{V_o I_o}{2}\left(συν(-φ) - συν(2ωt + φ)\right) \Rightarrow$$

$$P = \frac{V_o I_o}{2} συνφ - \frac{V_o I_o}{2} συν(2ωt + φ).$$

Η ισχύς P είναι το άθροισμα δύο «συνιστωσών» των $\frac{V_o I_o}{2} συνφ$ και $\frac{V_o I_o}{2} συν(2ωt + φ)$.

Η ισχύς P=$\frac{V_o I_o}{2}$συνφ έχει πάντα θετική τιμή ($0 \leq$ συνφ ≤ 1) και καλείται πραγματική ισχύς. **Η πραγματική ισχύς καλείται και μέση τιμή ισχύος**.

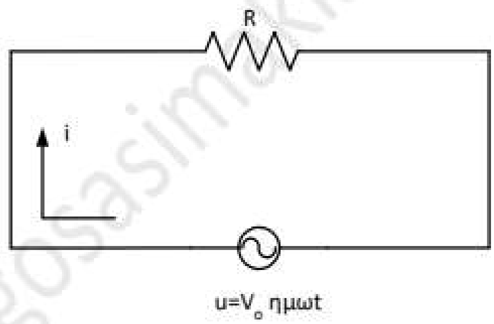
Η δεύτερη εναλλασσόμενη «συνιστώσα» P=$\frac{V_o I_o}{2}$συν(2ωt+ φ) μεταβάλλεται περιοδικά με συχνότητα 2ω. Όμως επειδή, όση ενέργεια μεταφέρεται στην κατανάλωση, ισόποση αποδίδεται πίσω στην πηγή, δεν έχουμε συνολική κατανάλωση ενέργειας (οφειλόμενη στην δεύτερη «συνιστώσα») και είναι P=$\frac{V_o I_o}{2}$συν(2ωt+ φ) =0.

Η ισχύς θα δίνεται από την σχέση P=$\frac{V_o I_o}{2}$συνφ ή διαφορετικά με χρήση ενεργών (και όχι στιγμιαίων) τιμών τάσης και ρεύματος από την P=VIσυνφ.

4.2 ΙΣΧΥΣ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΕ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

1. ΩΜΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ

Έστω κύκλωμα ωμικής αντίστασης με χρήση πηγής εναλλασσόμενης τάσης:



Σχήμα 4. 1

Στο κύκλωμα ωμικής αντίστασης το ρεύμα και η τάση βρίσκονται σε φάση. Όταν το ρεύμα και η τάση παίρνει την μέγιστη τιμή τότε και η ισχύς είναι η μέγιστη. Η ισχύς δεν είναι ποτέ αρνητική, θα είναι πάντα θετική. Η μέση τιμή της ισχύος είναι

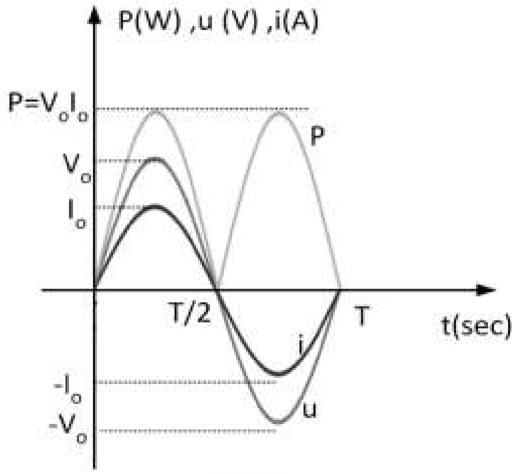
$$P = V_{εν} I_{εν} \overset{V_{εν}=\frac{V_o}{\sqrt{2}}}{\underset{I_{εν}=\frac{I_o}{\sqrt{2}}}{=}} \frac{V_O I_O}{2}$$

Σε ωμικό καταναλωτή η μέση τιμή της ισχύος καλείται και πραγματική ισχύς.

Η ηλεκτρική ισχύς είναι το ηλεκτρικό έργο που καταναλώνεται στον ωμικό καταναλωτή στην μονάδα του χρόνου $P = \frac{W_{ηλ}}{t} = \frac{E}{t}$.

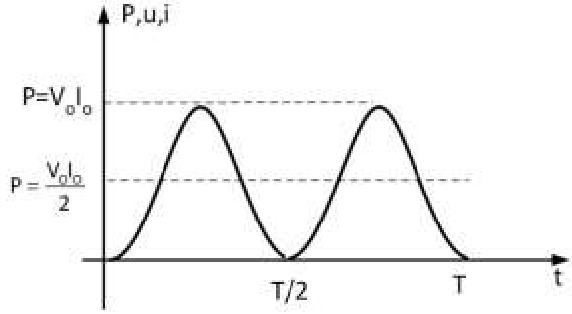
Η ηλεκτρική ενέργεια δίνεται από την σχέση: $E = Pt = \frac{V_O I_O}{2} t = V\sqrt{2} \cdot I\sqrt{2}\frac{t}{2} = V_{εν} I_{εν} t$.

Η γραφική παράσταση που απεικονίζει τα μεγέθη των τάσεων, ρευμάτων και ισχύος φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 4. 2

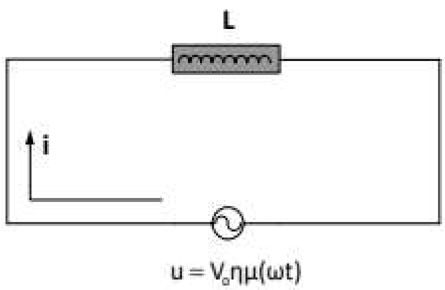
Παρατηρούμε πως και η ισχύς είναι ημιτονοειδής καμπύλη, με περίοδο T/2. Η μέση τιμή της ισχύος είναι $P = V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu} = \frac{V_O I_O}{2}$ (η ηλεκτρική ενέργεια είναι $E = Pt = \frac{V_O I_O}{2} t$).



Σχήμα 4. 3

2. ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ

Έστω κύκλωμα που περιλαμβάνει μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης και μία επαγωγική αντίσταση.



Σχήμα 4. 4

Στο κύκλωμα επαγωγικής αντίστασης η τάση προηγείται του ρεύματος κατά 90^{o} (ή $\frac{\pi}{2}$ rad). Η στιγμιαία ισχύς P μεταβάλλεται περιοδικά με διπλάσια συχνότητα από την τάση και το ρεύμα. Επίσης, επειδή δεν καταναλώνεται πραγματική ισχύς στην επαγωγική αντίσταση, η ενεργός τιμή (δηλαδή η μέση τιμή από τις στιγμιαίες τιμές $P = u \cdot i$), είναι P=0 καθώς,

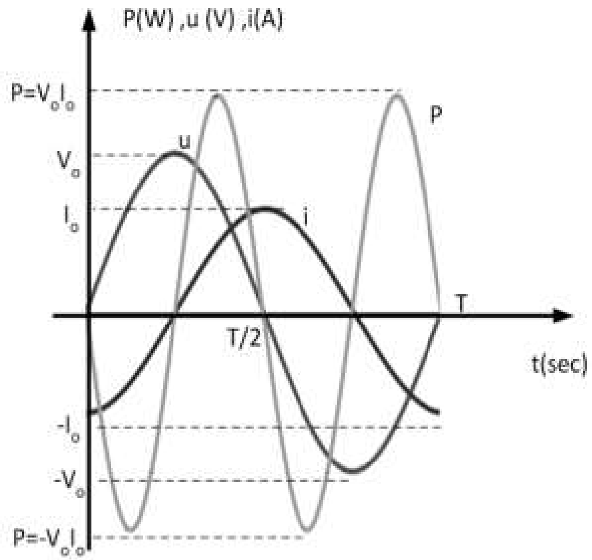
$$P = V_{εν} I_{εν} συν\, 90^{o} = V_{εν} I_{εν}\, 0 = 0$$

Το κύκλωμα τότε παρουσιάζει την άεργο ισχύ Q. Η άεργος ισχύς Q δίνεται από την σχέση

$$Q = V_{εν} I_{εν} = \frac{V_o I_o}{2}.$$

Μονάδα μέτρησης της άεργου ισχύος είναι: VAr.

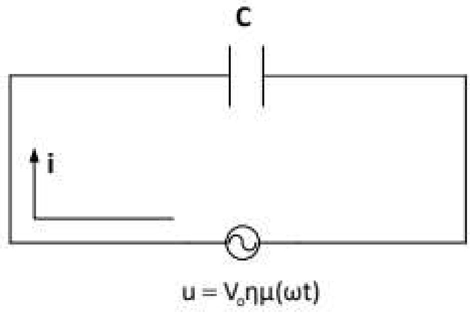
Η γραφική παράσταση που απεικονίζει τα μεγέθη του κυκλώματος είναι η εξής:



Σχήμα 4. 5

3. ΧΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ

Έστω κύκλωμα που περιλαμβάνει μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης και μία χωρητική αντίσταση.



Σχήμα 4. 6

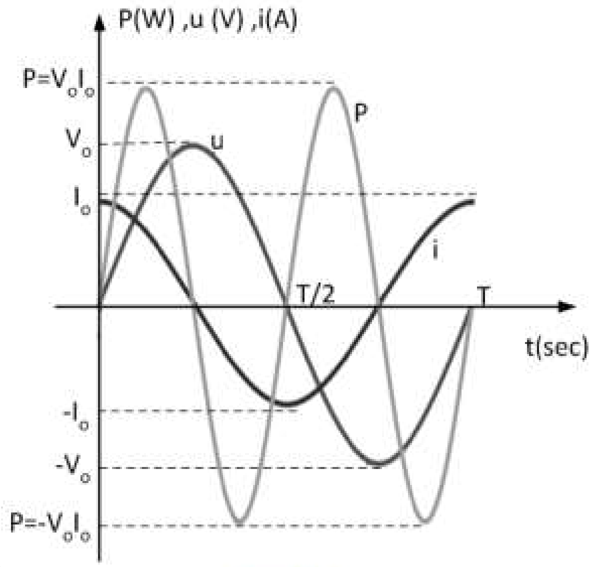
Στο κύκλωμα επαγωγικής αντίστασης η τάση καθυστερεί του ρεύματος κατά 90^o (ή $\frac{\pi}{2}$ rad). Η στιγμιαία ισχύς P μεταβάλλεται περιοδικά με διπλάσια συχνότητα από την τάση και το ρεύμα. Επίσης, επειδή δεν καταναλώνεται πραγματική ισχύ στην χωρητική αντίσταση, η ενεργός τιμή (δηλαδή η μέση τιμή από τις στιγμιαίες τιμές $P = u \cdot i$), είναι P=0 καθώς,

$$P = V_{εν} I_{εν} συν\,90^o = V_{εν} I_{εν}\, 0 = 0$$

Το κύκλωμα τότε παρουσιάζει την άεργο ισχύ Q.
Η άεργος ισχύς Q δίνεται από την σχέση

$$Q = V_{εν} I_{εν} = \frac{V_o I_o}{2}.$$

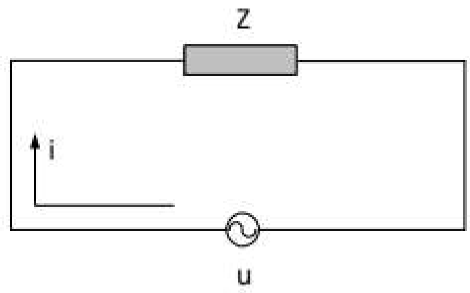
Μονάδα μέτρησης της άεργου ισχύος είναι: VAr.
Η γραφική παράσταση που απεικονίζει τα μεγέθη του κυκλώματος είναι η εξής:



Σχήμα 4. 7

4.3 ΤΡΙΓΩΝΟ ΙΣΧΥΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗΣ

Έστω κύκλωμα που περιλαμβάνει σύνθετη αντίσταση Z, το οποίο διαρρέεται από ρεύμα $i = I_o ημ(ωt + φ_1)$ και εφαρμόζεται τάση $u = V_o ημ(ωt + φ_2)$, με διαφορά φάσης $Δφ = φ_2 - φ_1 = φ$.



Σχήμα 4. 8

Στην πράξη οι κατασκευές κυκλωμάτων είναι συνδυασμός καταναλωτών. Για το συγκεκριμένο κύκλωμα σύνθετης αντίστασης, εκτός από την πραγματική ισχύ (P), διακρίνουμε την άεργο (Q) και την φαινόμενη ισχύ (S). Συγκεκριμένα:

Πραγματική ισχύς P, καλείται η ισχύς που καταναλώνεται στο ωμικό μέρος της σύνθετης αντίστασης υπό μορφή θερμότητας και είναι ισοδύναμα

$$P = V_{εν} I_{εν} συνφ = \frac{V_o I_o}{2} συνφ .$$

Μονάδα μέτρησης: Watt.

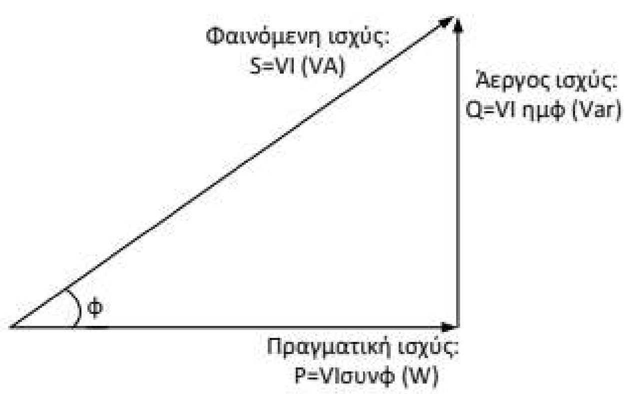
Άεργος ισχύς Q, καλείται η ισχύς που παρουσιάζεται στο επαγωγικό ή το χωρητικό μέρος της σύνθετης αντίστασης και είναι $Q = V_{εν} I_{εν} ημφ = \frac{V_o I_o}{2} ημφ$.

Μονάδα μέτρησης: VAr.

Φαινόμενη ισχύς S, καλείται το γινόμενο ενεργών τιμών τάσης και ρεύματος και δίνεται από τη σχέση $S = V_{εν} I_{εν} = \frac{V_o I_o}{2}$.

Μονάδα μέτρησης: VA (VoltAmpere).

Η πραγματική, η άεργος και η φαινόμενη ισχύς συνδέονται με το **τρίγωνο ισχύος**:



Σχήμα 4. 9

Το πυθαγόρειο θεώρημα, στο τρίγωνο ισχύος μεταξύ των πλευρών του (υποτείνουσα=S, απέναντι πλευρά=Q και προσκείμενη πλευρά=P), θα δώσει: $S^2 = P^2 + Q^2$, οπότε προκύπτει:

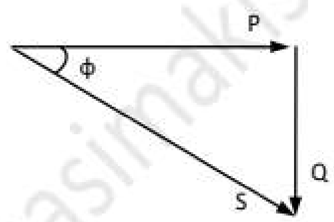
$$S^2 = P^2 + Q^2 \underset{Q=V_{εν}I_{εν}ημφ}{\overset{P=V_{εν}I_{εν}συνφ}{\Rightarrow}} S^2 = V_{εν}{}^2 I_{εν}{}^2 συν^2φ + V_{εν}{}^2 I_{εν}{}^2 ημ^2φ \Rightarrow$$

$$S^2 = V_{εν}{}^2 I_{εν}{}^2 \left(συν^2φ + ημ^2φ\right) \overset{συν^2φ+ημ^2φ=1}{=} (V_{εν}I_{εν})^2 + 1 \Rightarrow S = VI$$

Συντελεστής Ισχύος καλείται το **συνφ**. Ο συντελεστής ισχύος (συνφ) είναι πάντα θετικός. Καθώς η γωνία φ παίρνει τιμές από -90° έως +90° (δηλαδή $-90^o \le φ \le 90^o$) ή ισοδύναμα $0 \le συνφ \le 1$.

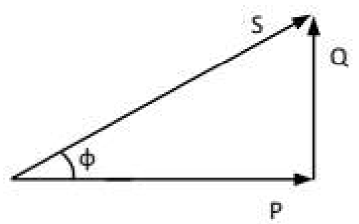
Η πραγματική ισχύς P είναι πάντα θετική (καθώς $συνφ = \frac{P}{VI}$) κάτι που δεν ισχύει στην άεργο ισχύ η οποία μπορεί να είναι και αρνητική. Ειδικότερα:

- **Όταν Q<0 το κύκλωμα εμφανίζει χωρητική** συμπεριφορά ή η τάση έπεται του ρεύματος κατά γωνία φ. Ο συντελεστής ισχύος τότε, ονομάζεται χωρητικός (ή προπορείας). Το τρίγωνο ισχύος σε αυτή την περίπτωση είναι το εξής:



Σχήμα 4. 10

- **Όταν Q>0 το κύκλωμα εμφανίζει επαγωγική** συμπεριφορά ή η τάση προηγείται του ρεύματος κατά γωνία φ. Ο συντελεστής ισχύος τότε, ονομάζεται επαγωγικός (ή μεταπορείας). Το τρίγωνο ισχύος σε αυτή την περίπτωση είναι το εξής:



Σχήμα 4. 11

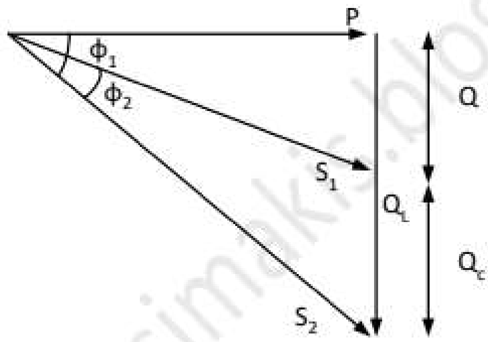
4.4 ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗ

Αντιστάθμιση ή διόρθωση του συντελεστή ισχύος, καλείται η ελάττωση της επαγωγικής άεργης ισχύος μέσω αύξησης της χωρητικής άεργης ισχύος. Η αντιστάθμιση της άεργης ισχύος μας οδηγεί στην βελτίωση (ή αλλιώς στην αύξηση) του συντελεστή ισχύος (δηλαδή του συνφ).

Η αντιστάθμιση επιτυγχάνεται με την τοποθέτηση σε παράλληλη σύνδεση πυκνωτών η «συμπεριφορά» των οποίων, αντιτίθεται σε αυτή των επαγωγικών καταναλωτών. Αυτή η σύνδεση πυκνωτών έχει ως αποτέλεσμα να παράγεται χωρητική άεργη ισχύς.

Η επαγωγική άεργη ισχύς Q_L που απορροφάται από το δίκτυο, αντισταθμίζεται από την χωρητική άεργο ισχύ Q_c με αποτέλεσμα την μικρότερη κατανάλωση άεργης ισχύος και τελικά λιγότερη κατανάλωση ενέργειας (οπότε και οικονομικότερα χρεωστικά τιμολόγια ενέργειας από την πάροχο εταιρεία μεταφοράς και διανομής ηλεκτρικής ενέργειας).

Η αντιστάθμιση φαίνεται στο εξής σχήμα:



Σχήμα 4. 12

Πριν την αντιστάθμιση έχουμε γωνία ϕ_1 και φαινόμενη ισχύ S_1, ενώ μετά την αντιστάθμιση έχουμε γωνία ϕ_2 και φαινόμενη ισχύ S_2.

Από το προηγούμενο σχήμα και το τρίγωνο ισχύων είναι

$$Q=Q_L-Q_c<Q_L \quad \text{και} \quad \phi_2<\phi_1 \Rightarrow \text{συν}\phi_1<\text{συν}\phi_2$$

Ισχύουν από το τρίγωνο οι εξής τύποι:

$$\text{εφ}\phi_1=\frac{Q_L}{P}, \quad \text{εφ}\phi_2=\frac{Q_L-Q_C}{P}$$

όπου ϕ_1 η γωνία πριν την αντιστάθμιση και ϕ_2 η γωνία μετά την αντιστάθμιση Αφαιρώντας κατά μέλη θα προκύψει η άεργος τιμή της ισχύος αντιστάθμισης:

$$\text{εφ}\phi_1-\text{εφ}\phi_2=\frac{Q_L}{P}-\frac{Q_L-Q_C}{P}\Rightarrow \text{εφ}\phi_1-\text{εφ}\phi_2=\frac{Q_C}{P}$$

Οπότε ολοκληρώνοντας τις πράξεις τελικά ισχύει ότι

$$Q_C=P\left(\text{εφ}\phi_1-\text{εφ}\phi_2\right)$$

Η τελική άεργη ισχύς μετά την αντιστάθμιση είναι:

$$Q = Q_L - Q_C \Rightarrow Q_C = Q_L - Q .$$

Ο πυκνωτής αντιστάθμισης δίνεται από την σχέση:

$$Q_C = \frac{V^2}{X_C} = \omega C V^2 \Rightarrow \ C = \frac{Q_C}{\omega V^2} = \frac{Q_C}{2\pi f V^2}$$

Διακρίνουμε τα εξής τρία βασικά είδη αντιστάθμισης:

◊ **Ατομική** αντιστάθμιση καλείται η άμεση σύνδεση πυκνωτή σε κάθε επαγωγικό καταναλωτή. Αυτό το είδος αντιστάθμισης εφαρμόζεται σε μεγάλους καταναλωτές, αυξημένης διάρκειας σε λειτουργία και χρήση.

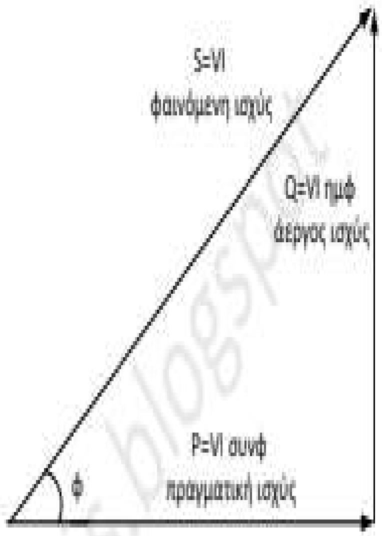
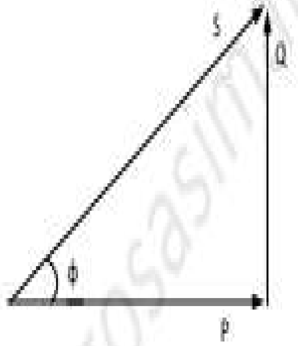
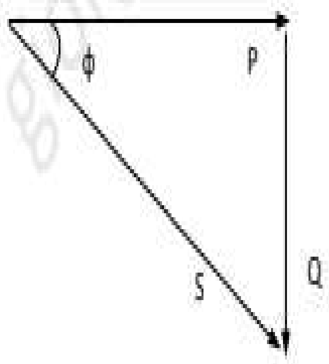
◊ **Ομαδική** αντιστάθμιση καλείται η αντιστάθμιση με χρήση ενός κοινού πυκνωτή σε κάθε ομάδα επαγωγικών καταναλωτών ίδιας ισχύος και διάρκειας λειτουργίας. Η αντιστάθμιση λαμπτήρων φθορισμού είναι μια εφαρμογή της ομαδικής αντιστάθμισης.

◊ **Κεντρική** αντιστάθμιση καλείται η αντιστάθμιση της άεργης ισχύος ενός πλήθους επαγωγικών καταναλωτών διαφορετικής ισχύος και διάρκειας λειτουργίας από μια ομάδα πυκνωτών των οποίων η άεργη ισχύ που απαιτείται για την βελτίωση του συντελεστή ισχύος προέρχεται από μια εγκατάσταση αυτοματισμού.

Για να πραγματοποιηθούν και τα τρία βασικά είδη αντιστάθμισης θα πρέπει ο κατασκευαστής να αναγράφει στους πυκνωτές αντιστάθμισης εκτός της τάσης και της συχνότητας λειτουργίας και την άεργη ισχύ σε KVAr που παράγουν οι πυκνωτές, ώστε να είναι γνωστή η τάση της γραμμής και της άεργης ισχύος που πρέπει να αντισταθμιστεί.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ 4^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Φυσικό μέγεθος	Μαθηματικός τύπος	Μονάδα μέτρησης
Γενική μορφή εξίσωσης εναλλασσόμενων μεγεθών	$A = \alpha_o \eta\mu(\omega t + \phi_o)$	A, V, W … κ.α.
Κυκλική συχνότητα	$\omega = 2\pi f$	$\frac{rad}{sec}$
Φάση ταλάντωσης	$\phi = \omega t + \phi_o$	rad
Ενεργός τάση	$V_{\varepsilon\nu} = \frac{V_o}{\sqrt{2}}$	Volt
Ενεργός ένταση ρεύματος	$I_{\varepsilon\nu} = \frac{I_o}{\sqrt{2}}$.	Ampere
Πραγματική ισχύς	$P = V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu} \sigma\upsilon\nu\phi$ ή $P = \frac{V_o I_o}{2}\sigma\upsilon\nu\phi$	Watt
Άεργος ισχύς	$Q = V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu} \eta\mu\phi$ ή $Q = \frac{V_o I_o}{2}\eta\mu\phi$	VAr
Φαινόμενη ισχύς	$S = V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu}$	VA
Συντελεστής ισχύος	$\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{P}{VI}$, $0 \leq \sigma\upsilon\nu\phi \leq 1$	-
Σχέση ισχύων	$S^2 = P^2 + Q^2$ ** καθώς εύκολα προκύπτει μετά τις πράξεις ότι : $P^2 + Q^2 = V_{\varepsilon\nu}^2 I_{\varepsilon\nu}^2 \sigma\upsilon\nu^2\phi + V_{\varepsilon\nu}^2 I_{\varepsilon\nu}^2 \eta\mu^2\phi = V_{\varepsilon\nu}^2 I_{\varepsilon\nu}^2(\sigma\upsilon\nu^2\phi + \eta\mu^2\phi) = (V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu})^2 = S^2$	$(VA)^2 = W^2 + (VAr)^2$

Χωρητικότητα πυκνωτή αντιστάθμισης	$Q_C = \frac{V^2}{X_C} = \omega C V^2 \Rightarrow C = \frac{Q_C}{\omega V^2} = \frac{Q_C}{2\pi f V^2}$	Farad
Τρίγωνο Ισχύος		
Επαγωγική συμπεριφορά		Είναι Q>0. Το κύκλωμα παρουσιάζει επαγωγική συμπεριφορά η τάση προηγείται του ρεύματος κατά γωνία φ. Ο συντελεστής ισχύος (συνφ) καλείται επαγωγικός ή μεταπορείας.
Χωρητική συμπεριφορά		Είναι Q<0 . Το κύκλωμα παρουσιάζει χωρητική συμπεριφορά η τάση έπεται του ρεύματος κατά γωνία φ. Ο συντελεστής ισχύος (συνφ) καλείται χωρητικός ή προπορείας.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΕΡΩΤΗΣΗ 4.1

Ποια ισχύς σε κυκλώματα συνεχούς και εναλλασσομένου ρεύματος, έχει ίδια χαρακτηριστικά;

Απάντηση

Είναι η πραγματική ισχύς (η ενεργός ισχύ του κυκλώματος) η οποία δίνεται από την σχέση

$$P = \frac{V_O I_O}{2} \text{ ή } P = V_{εν} I_{εν} .$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 4.2

Ποια είναι η ισχύς στο εναλλασσόμενο ρεύμα που δεν εξαρτάται από την φάση φ;

Απάντηση

Η φαινόμενη ισχύς δεν εξαρτάται από την φάση φ (καθώς $S = V_{εν} I_{εν}$).

ΕΡΩΤΗΣΗ 4.3

Τι γνωρίζετε για την πραγματική, την άεργη και την φαινόμενη ισχύ;

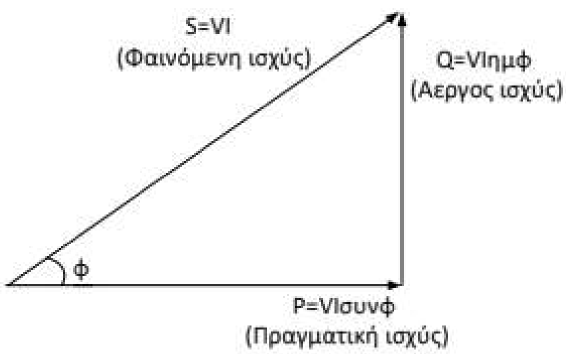
Απάντηση

Πραγματική Ισχύς καλείται η ισχύς που καταναλώνεται στο ωμικό μέρος της σύνθετης αντίστασης υπό μορφή θερμότητας. Δίνεται από τη σχέση $P = V_{εν} I_{εν} συνφ = \frac{V_o I_o}{2} συνφ$, με μονάδα μέτρησης τα Watt.

Άεργος Ισχύς καλείται η ισχύς που παρουσιάζεται στο επαγωγικό ή το χωρητικό μέρος της σύνθετης αντίστασης. Δίνεται από τη σχέση $Q = V_{εν} I_{εν} ημφ = \frac{V_o I_o}{2} ημφ$. Μονάδα μέτρησης: VAr.

Φαινόμενη Ισχύς καλείται το γινόμενο ενεργών τιμών τάσης και ρεύματος και δίνεται από τη σχέση $S = V_{εν} I_{εν} = \frac{V_o I_o}{2}$. Μονάδα μέτρησης: VA (VoltAmpere).

Η πραγματική, άεργος και φαινόμενη ισχύς συνδέονται με το τρίγωνο ισχύος του επόμενου σχήματος :



Σχήμα 4. 13

ΕΡΩΤΗΣΗ 4.4

Να περιγράψετε τι συμβαίνει όταν έχουμε άεργη κατανάλωση σε ένα κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος.

Απάντηση

Το σημαντικό σε κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με άεργη κατανάλωση, βρίσκεται στον συντελεστή ισχύος. Όσο μικρότερος είναι ο συντελεστής ισχύος (με σταθερή τάση και πραγματική ισχύ), τόσο μεγαλύτερο είναι το ρεύμα στο δίκτυο και η άεργη ισχύς. Όταν έχουμε άεργη κατανάλωση σε ένα δίκτυο έχουμε και ταυτόχρονη επιβάρυνσή του με αποτέλεσμα η ΔΕΗ να καθορίζει ένα ελάχιστο συντελεστή ισχύος. Η άεργη ισχύς αυξάνει το ρεύμα φόρτισης των γραμμών και των καταναλωτών με αρνητικές επιπτώσεις στο δίκτυο διανομής και επομένως ταυτόχρονη οικονομική επιβάρυνση στους καταναλωτές.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4.5

Για ποιο λόγο η άεργος ισχύς πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψιν από μια επιχείρηση για την κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας;

Απάντηση

Η άεργη ισχύς πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψιν στους υπολογισμούς (και για τον υπολογισμό της επιθυμητής παροχής ηλεκτρικής ενέργειας) καθώς με γνωστή την πραγματική ισχύ και χωρίς περιορισμό στην άεργο ισχύ (δηλαδή χωρίς αντιστάθμιση ή διόρθωση του συντελεστή ισχύος), η παρεχόμενη ενέργεια θα επιβαρύνει την επιχείρηση. Επίσης οι κατασκευαστές πυκνωτών αντιστάθμισης θα πρέπει να δηλώνουν την άεργη ισχύ που παράγουν σε KVAr οι πυκνωτές, ώστε να γίνει η κατάλληλη επιλογή για μια οικονομική παροχή στην επιχείρηση.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4.6

Πότε η άεργος ισχύς διαφορετικών καταναλωτών χαρακτηρίζεται επαγωγική και πότε χωρητική;

Απάντηση

Όταν $Q<0$ το κύκλωμα καταναλωτών παρουσιάζει χωρητική συμπεριφορά και το ρεύμα προηγείται της τάσης κατά γωνία φ. Ο συντελεστής ισχύος (συνφ) τότε καλείται χωρητικός (ή προπορείας). Αντιθέτως όταν η άεργη ισχύς είναι θετική ($Q>0$) το κύκλωμα των καταναλωτών παρουσιάζει επαγωγική συμπεριφορά, ο συντελεστής ισχύος είναι επαγωγικός (ή μεταπορείας) και το ρεύμα καθυστερεί της τάσης κατά γωνία φ.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4.7

Τι γνωρίζετε για τα τρία βασικά είδη αντιστάθμισης;

Απάντηση

Τα τρία βασικά είδη αντιστάθμισης είναι τα εξής:

1. Ατομική αντιστάθμιση καλείται η άμεση σύνδεση πυκνωτή σε κάθε επαγωγικό καταναλωτή. Αυτό το είδος αντιστάθμισης εφαρμόζεται σε μεγάλους καταναλωτές, μεγάλης διάρκειας χρήσης.

2. Ομαδική αντιστάθμιση καλείται η αντιστάθμιση με χρήση ενός κοινού πυκνωτή σε κάθε ομάδα επαγωγικών καταναλωτών ίδιας ισχύος και διάρκειας λειτουργίας. Η αντιστάθμιση λαμπτήρων φθορισμού είναι μια εφαρμογή της ομαδικής αντιστάθμισης.

3. Κεντρική αντιστάθμιση καλείται η αντιστάθμιση της άεργης ισχύος ενός πλήθους επαγωγικών καταναλωτών διαφορετικής ισχύος και διάρκειας λειτουργίας από μια ομάδα πυκνωτών των οποίων η άεργη ισχύς που απαιτείται για την βελτίωση του συντελεστή ισχύος προέρχεται από μια εγκατάσταση αυτοματισμού.

Για να πραγματοποιηθούν και τα τρία βασικά είδη αντιστάθμισης θα πρέπει ο κατασκευαστής να αναγράφει στους πυκνωτές αντιστάθμισης εκτός της τάσης και της συχνότητας λειτουργίας και την άεργη ισχύ σε KVAr που παράγουν οι πυκνωτές, ώστε να είναι γνωστή η τάση της γραμμής και της άεργης ισχύος που πρέπει να αντισταθμιστεί.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 4.1

Σε κύκλωμα σύνθετης αντίστασης, η τάση τροφοδοσίας είναι $u = 15ημ(ωt + 10^\circ)$ **και το ρεύμα** $i = 10ημ(ωt - 50^\circ)$.

1. Να βρείτε την πραγματική ισχύ, την άεργο ισχύ, την φαινόμενη ισχύ και το συντελεστή ισχύος του κυκλώματος.

2. Να υπολογίσετε την σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος.

Απάντηση

1.

Οι ενεργές τιμές της τάσης και του ρεύματος, είναι αντίστοιχα

$$V_{εν} = \frac{V_o}{\sqrt{2}} = \frac{15}{\sqrt{2}} = 7{,}5\sqrt{2}\ \text{V} \text{ και } I_{εν} = \frac{I_o}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}\ \text{A}.$$

Η διαφορά φάσης μεταξύ της τάσης και του ρεύματος είναι

$$\Delta\phi = \phi_V - \phi_i = 10^\circ - (-50^\circ) = 60^\circ \Rightarrow \Delta\phi > 0,$$

κάτι που σημαίνει ότι η τάση προηγείται του ρεύματος, οπότε συνφ=συν60°=0,5.

Ο συντελεστής ισχύος, τότε είναι συνφ=0,5 μεταπορείας.

Η πραγματική ισχύς είναι $P = V_{εν} I_{εν} συνφ = 7{,}5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}\, συν60^\circ = 75 \cdot 0{,}5 \Rightarrow P = 37{,}5\text{W}$.

Η φαινόμενη ισχύς είναι $S = V_{εν} I_{εν} = \frac{V_o I_o}{2} = \frac{15 \cdot 10}{2} = 75\text{VA}$.

Από το τρίγωνο ισχύος η άεργος ισχύς θα είναι $S^2 = P^2 + Q^2 \Rightarrow Q^2 = S^2 - P^2 \Rightarrow$

$$Q = \sqrt{75^2 - 37{,}5^2} = \sqrt{1406{,}25 + 5625} \Rightarrow Q = 64{,}95\,\text{VAr}.$$

2.

Η σύνθετη αντίσταση είναι $I_{εν} = \frac{V_{εν}}{Z} \Rightarrow Z = \frac{V_{εν}}{I_{εν}} = \frac{7{,}5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = 1{,}5\Omega$.

ΑΣΚΗΣΗ 4.2

Σύνθετη αντίσταση διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα ενεργού τιμής 35 Α. Το κύκλωμα έχει φαινόμενη ισχύ 3500 VA με συντελεστή ισχύος 0,7 μεταπορείας. Βρείτε την σύνθετη αντίσταση.

Απάντηση

Είναι συνφ=0,76 μεταπορείας οπότε το κύκλωμά περιλαμβάνει ωμική και επαγωγική αντίσταση, δηλαδή ισχύει $συνφ = \frac{R}{Z} \Rightarrow R = συνφ \cdot Z$.

Επίσης $S = V_{εν} I_{εν} \Rightarrow 3500 = V \cdot 35 \Rightarrow V = \frac{3500}{35} = 100\,\text{Volt}$, ενώ η πραγματική ισχύς είναι $P = V_{εν} I_{εν} συν\varphi = 100 \cdot 35 \cdot 0{,}7 = 2450\text{W}$.

Η άεργος ισχύς είναι

$$S^2 = P^2 + Q^2 \Rightarrow Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{3500^2 - 2450^2} \Rightarrow$$
$$Q = \sqrt{12250000 - 6002500} = \sqrt{6247500} = 2500\,VAr.$$

Η ενεργός τιμή της ένταση του ρεύματος είναι $I_{εν} = \dfrac{V_{εν}}{Z} \Rightarrow Z = \dfrac{V_{εν}}{I_{εν}} = \dfrac{100}{35} = 2{,}85\,\Omega$,

οπότε η ωμική αντίσταση από το τρίγωνο αντιστάσεων είναι

$$R = συν\,\phi \cdot Z = 0{,}7 \cdot 2{,}85 = 1{,}99\,\Omega.$$

Τελικά προκύπτει ότι

$$Z^2 = R^2 + {X_L}^2 \Rightarrow X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{2{,}85^2 - 2^2} = \sqrt{8{,}12 - 3{,}98} = \sqrt{4{,}14} \Rightarrow Z = 2{,}03\,\Omega.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.3

Σύνθετη αντίσταση Z διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα ενεργού τιμής 20 A, με φαινόμενη ισχύ 3000 VA και συντελεστή ισχύος 0,7 μεταπορείας.

1. Βρείτε την πραγματική και άεργο ισχύ του κυκλώματος

2. Κατασκευάστε το τρίγωνο ισχύος.

3. Βρείτε την σύνθετη αντίσταση.

4. Κατασκευάστε το τρίγωνο αντιστάσεων.

Απάντηση

1.

Ο συντελεστής ισχύος είναι μεταπορείας, δηλαδή έχουμε επαγωγική αντίσταση στο κύκλωμα της άσκησης. Είναι συνφ=0,7 ή $\phi = συν^{-1}0{,}7 = 45{,}5^{o}$.

Επίσης η φαινόμενη ισχύς δίνεται από την σχέση: $S = V_{εν} I_{εν} = 3000\,VA$. Οπότε γνωρίζοντας την ενεργό ένταση ίση με 20Α, προκύπτει

$$V_{εν} \cdot 20 = 3000\,VA \Rightarrow V_{εν} = 150\,V.$$

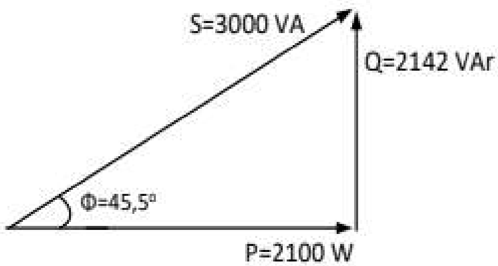
Η πραγματική ισχύς είναι $P = V_{εν} I_{εν} συνφ = 150 \cdot 20 \cdot 0{,}7 = 3000\,W = 2100\,W$.

Η άεργος ισχύς είναι $S^2 = P^2 + Q^2 \Rightarrow$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{3000^2 - 2100^2} = \sqrt{900 - 441} \cdot 100 = 21{,}42 \cdot 100 = 2142\,VA.$$

2.

Το τρίγωνο ισχύος είναι το εξής:



Σχήμα 4. 14

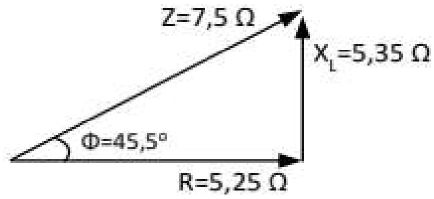
3.

Η σύνθετη αντίσταση είναι $I_{εν} = \frac{V_{εν}}{Z} \Rightarrow Z = \frac{V_{εν}}{I_{εν}} = \frac{150}{20} = 7{,}5\,\Omega$. Επίσης είναι συνφ=0,7 ή $συνφ = \frac{R}{Z} = 0{,}7 \Rightarrow R = 0{,}7 \cdot Z = 0{,}7 \cdot 7{,}5 = 5{,}25\,\Omega$. Η επαγωγική αντίσταση είναι

$$Z^2 = R^2 + X_L{}^2 \Rightarrow X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{7{,}5^2 - 5{,}25^2} = \sqrt{56{,}25 - 27{,}56} = \sqrt{28{,}68} \Rightarrow X_L = 5{,}35\,\Omega.$$

4.

Το τρίγωνο αντιστάσεων είναι το εξής:



Σχήμα 4. 15

ΑΣΚΗΣΗ 4.4

Κύκλωμα αποτελείται από ωμική αντίσταση R=50 Ω και πυκνωτή χωρητικότητας C=10 μF, συνδεδεμένα σε σειρά. Τροφοδοτείται από εναλλασσόμενη τάση 100V, συχνότητας 50HZ.

Να βρεθούν:

1. Η επαγωγική αντίσταση X_c .

2. Η σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος.

3. Η ενεργός ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, και την ενεργό τιμή των τάσεων στα άκρα των στοιχείων (R και L).

4. Την διαφορά φάσης του κυκλώματος

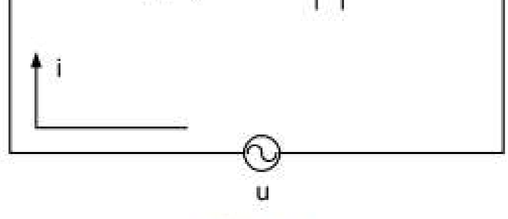
5. Το διανυσματικό διάγραμμα τάσεων.

6. Τις ισχύς του κυκλώματος (φαινόμενη, πραγματική και άεργη ισχύς).

7. Να γίνει το τρίγωνο ισχύος

Απάντηση

Το κύκλωμα της άσκησης είναι το εξής:



Σχήμα 4.16

1.

Η χωρητική αντίσταση είναι

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C \cdot 2\pi f} = \frac{1}{10 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50} = \frac{10^6}{3140} = \frac{1000}{3{,}14} = 318{,}48\Omega .$$

2.

Η σύνθετη αντίσταση είναι

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^{\,2}} = \sqrt{50^2 + 318{,}48^2} = \sqrt{2500 + 101423{,}9} = \sqrt{103923{,}9} = 322{,}3\Omega .$$

3.

Η ενεργός τιμή του ρεύματος είναι $I_{εν} = \dfrac{V}{Z} = \dfrac{100}{322{,}3} = 0{,}31\,A$. Επίσης η ενεργός τιμή των τάσεων στα άκρα των καταναλωτών, είναι $V_R = I \cdot R = 0{,}31 \cdot 50 = 15{,}5V$ και

$$V_C = I \cdot X_C = 0{,}31 \cdot 318{,}48 = 98{,}72V .$$

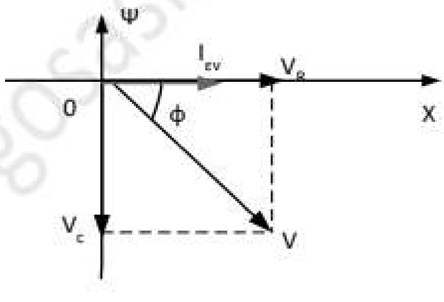
4.

Η διαφορά φάσης του κυκλώματος είναι

$$εφ\phi = \frac{X_C}{R} = \frac{318{,}48}{50} = 6{,}36 \Rightarrow \phi = εφ^{-1}\,6{,}36 \Rightarrow \phi = 81^{\circ} .$$

5.

Το διανυσματικό διάγραμμα τάσεων και ρεύματος με ενεργές τιμές (τις $I_{εν} = 0{,}31\,A$, $V_R = 15{,}5V$, $V_C = 98{,}72V$, και $\phi = 81^{\circ}$), είναι το εξής:



Σχήμα 4.17

6.

Η πραγματική ισχύς είναι

$$P = V_{εν} I_{εν} συνφ \Rightarrow P = 100 \cdot 0{,}31 \cdot συν\,81 = 100 \cdot 0{,}31 \cdot 0{,}156 = 4{,}83\,W .$$

Η άεργη ισχύς είναι

$$Q = V_{εν} I_{εν} ημφ \Rightarrow P = 100 \cdot 0{,}31 \cdot ημ\,81 = 100 \cdot 0{,}31 \cdot 0{,}988 \cdot = 30{,}62\,VAr .$$

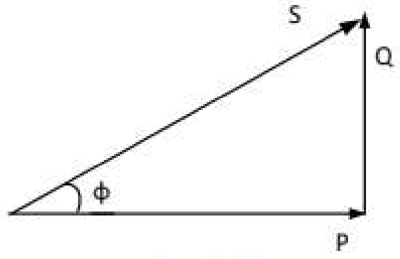
Η φαινόμενη ισχύς είναι $S = V_{εν} I_{εν} = 100 \cdot 0{,}31 = 31\ VA$.

Η φαινόμενη ισχύς μπορεί αν υπολογιστεί και από το τρίγωνο ισχύος μέσω της σχέσης $S^2 = P^2 + Q^2$. Θα είναι προκύψει, επίσης

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{4{,}38^2 + 30{,}62^2} = \sqrt{19{,}18 + 937{,}58} = 30{,}94\,VA .$$

7.

Το τρίγωνο ισχύος με τις τιμές των $P = 4{,}83\,W$, $Q = 30{,}62\,VAr$, $S = 30{,}9$ VA και $\phi = 81^o$ είναι το εξής:



Σχήμα 4.18

ΑΣΚΗΣΗ 4.5

Κύκλωμα έχει τάση τροφοδοσίας $u = 100\eta\mu(\omega t + 20^o)$ και ρεύμα $i = \eta\mu(\omega t - 45^o)$. Να βρείτε όλες τις ισχύς και το συντελεστή ισχύος του κυκλώματος.

Απάντηση

Η διαφορά φάσης μεταξύ των μεγεθών τάσης και ρεύματος είναι

$$\Delta\phi = \phi_V - \phi_I = 20^o - (-45^o) = 65^o \Rightarrow \Delta\phi > 0 \ ,$$

δηλαδή το ρεύμα καθυστερεί της τάσης κατά 65^o και ο συντελεστής ισχύος είναι συνφ=συν65°=0,42 μεταπορείας.

Η πραγματική ισχύς είναι

$$P = \frac{V_o I_o}{2}\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{100\cdot 1}{2}\sigma\upsilon\nu 65^o = 50\cdot 0{,}42 \Rightarrow P = 21{,}13\,W\,.$$

Η φαινόμενη ισχύς είναι $S = V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu} = \frac{V_o I_o}{2} = \frac{100\cdot 1}{2} = 50\,VA.$

Από το τρίγωνο ισχύος η άεργος ισχύς θα είναι $S^2 = P^2 + Q^2 \Rightarrow Q^2 = S^2 - P^2 \Rightarrow$

$$Q = \sqrt{50^2 - 21{,}13^2} = \sqrt{2500 - 446{,}4} \Rightarrow Q = 45{,}3\,VAr\,.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.6

Κύκλωμα σύνθετης αντίστασης τροφοδοτείται από πηγή εναλλασσόμενου ρεύματος ενεργού τιμής 10 Α. Η φαινόμενη ισχύς είναι 3 KVA και ο συντελεστής ισχύος, 0,8 μεταπορείας. Να βρεθεί η πραγματική ισχύς, η άεργη ισχύς και η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος.

Απάντηση

Ο συντελεστής ισχύος είναι μεταπορείας, δηλαδή έχουμε επαγωγική αντίσταση στο κύκλωμα της άσκησης. Είναι συνφ=0,8 (οπότε και φ=συν^{-1}0,8=36,8^o)

$$\text{ή } \sigma\upsilon\nu\phi = \frac{R}{Z} = 0{,}8 \Rightarrow R = 0{,}8\cdot Z\ .$$

Επίσης η φαινόμενη ισχύς δίνεται από την σχέση: $S = V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu} = 3000\,VA$.Οπότε γνωρίζοντας την ενεργό ένταση ίση με 10Α, προκύπτει

$$Z = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{I_{\varepsilon\nu}} = \frac{\frac{S}{I_{\varepsilon\nu}}}{I_{\varepsilon\nu}} = \frac{\frac{3000}{10}}{10} \frac{3000}{10^2} = \frac{3000}{100} = 30\,\Omega \cdot$$

Η πραγματική ισχύς είναι $P = V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu} \sigma\upsilon\nu\varphi = I_{\varepsilon\nu}^2 Z \sigma\upsilon\nu\varphi = 10^2 \cdot 30 \cdot 0{,}8 = 2400\,W$.

Η άεργος ισχύς είναι

$$Q = V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu} \eta\mu\varphi = I_{\varepsilon\nu}^2 Z \eta\mu\varphi = 10^2 \cdot 30 \cdot \eta\mu\, 36{,}8^{o} = 100 \cdot 30 \cdot 0{,}6 = 1800\,W$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.7

Κύκλωμα αποτελείται από τρείς σύνθετους καταναλωτές (Z_1, Z_2 και Z_3) συνδεδεμένους παράλληλα μεταξύ τους και συνδέεται σε πηγή εναλλασσόμενης τάσης. Ο Z_1 έχει φαινόμενη ισχύ 2KVA με συντελεστή ισχύος συνφ=0,8 μεταπορείας. Ο Z_2 έχει φαινόμενη ισχύ 2,5KVA με συντελεστή ισχύος συνφ=1. Ο Z_3 έχει φαινόμενη ισχύ 3KVA με συντελεστή ισχύος συνφ=0,6 μεταπορείας. Να βρείτε την συνολική άεργη, πραγματική και φαινόμενη ισχύς του συστήματος των καταναλωτών.

Απάντηση

1.

Για την σύνθετη αντίσταση Z_1 οι ισχύς είναι οι εξής:

Η πραγματική ισχύς είναι $P_1 = V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu} \sigma\upsilon\nu\varphi = S_1 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 2000 \cdot 0{,}8 = 1600\,W$.

Η άεργος ισχύς είναι

$$S_1^{\,2} = P_1^{\,2} + Q_1^{\,2} \Rightarrow Q_1 = \sqrt{S_1^{\,2} - P_1^{\,2}} = \sqrt{2000^2 - 1600^2} = \sqrt{4000000 - 2560000} = 1200\,VAr\,.$$

Για την σύνθετη αντίσταση Z_2 οι ισχύς είναι οι εξής:

Η πραγματική ισχύς είναι $P_2 = V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu} \sigma\upsilon\nu\varphi = S_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 2500 \cdot 1 = 2500\,W$.

Η άεργος ισχύς είναι $S_1^{\,2} = P_1^{\,2} + Q_1^{\,2} \Rightarrow Q_1 = \sqrt{S_1^{\,2} - P_1^{\,2}} = 0\,VAr$.

Για την σύνθετη αντίσταση Z_3 οι ισχύς είναι οι εξής:

Η πραγματική ισχύς είναι $P_3 = V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu} \sigma\upsilon\nu\varphi = S_3 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = 3000 \cdot 0{,}6 = 1800\,W$.

Η άεργος ισχύς είναι

$$S_3^{\,2} = P_3^{\,2} + Q_3^{\,2} \Rightarrow Q_3 = \sqrt{S_3^{\,2} - P_3^{\,2}} = \sqrt{3000^2 - 1800^2} = \sqrt{9000000 - 3240000} = 2400\,VAr\,.$$

Επομένως οι συνολικές τιμές για το κύκλωμα, είναι οι εξής:

Η ολική πραγματική ισχύς είναι $P_{o\lambda} = P_1 + P_2 + P_3 = 1600 + 2500 + 1800 = 5900\,W$.

Η ολική άεργος ισχύς είναι $Q_{o\lambda} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1200 + 0 + 2400 = 3600\,VAr$.

Η ολική φαινόμενη ισχύς είναι

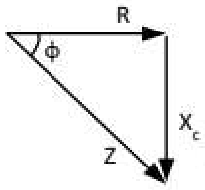
$$S^2 = P^2 + Q^2 \Rightarrow S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{5900^2 + 3600^2} = \sqrt{34810000 + 12960000} = 6911{,}5\,VA\,.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.8

Κύκλωμα RC σειράς έχει καταναλωτές με τιμές R=8Ω και X_C=6Ω. Τροφοδοτείται με ενεργό τάση τροφοδοσίας 200V. Να σχεδιάσετε το τρίγωνο ισχύος του κυκλώματος.

Απάντηση

Το κύκλωμα της άσκησης περιλαμβάνει ωμικό και χωρητικό καταναλωτή. Από το τρίγωνο των αντιστάσεων του (για τα στοιχεία κυκλώματος RC σειράς), υπολογίζουμε το ημφ ($ημφ = \frac{απέναντι}{υποτείνουσα}$) και το συνφ ($συνφ = \frac{προσκείμενη}{υποτείνουσα}$), προκειμένου να αντικαταστήσουμε στις μαθηματικές εκφράσεις των ισχύων του κυκλώματος και να κατασκευαστεί έτσι το τρίγωνο ισχύων. Το τρίγωνο των αντιστάσεων (σύμφωνα με όσα μελετήθηκαν στο 2^ο κεφάλαιο) είναι το εξής:



Σχήμα 4. 19

Οπότε $συνφ = \frac{R}{Z} \underset{Z=\sqrt{R^2+X_C^2}}{=} \frac{R}{\sqrt{R^2+X_C^2}} = \frac{8}{\sqrt{8^2+6^2}} \Rightarrow συνφ = \frac{8}{\sqrt{100}} = 0{,}8$.

Και το $ημφ = \frac{X_C}{Z} \underset{Z=\sqrt{R^2+X_C^2}}{\Rightarrow} ημφ = \frac{X_C}{\sqrt{R^2+X_C^2}} = \frac{6}{\sqrt{8^2+6^2}} = \frac{6}{\sqrt{100}} = 0{,}6$.

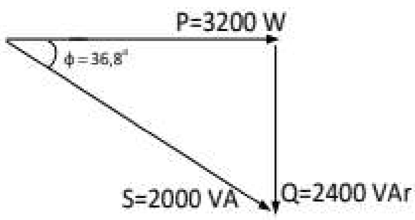
Η πραγματική ισχύς, είναι:

$$P = V_{εν} I_{εν} συνφ = V_{εν} \frac{V_{εν}}{Z} συνφ \underset{Z=\sqrt{R^2+X_C^2}}{=} 200 \cdot \frac{200}{\sqrt{100}} \cdot 0{,}8 = 3200\,W.$$

Η άεργος ισχύς, είναι: $Q = V_{εν} I_{εν} ημφ = V_{εν} \frac{V_{εν}}{Z} ημφ \underset{Z=\sqrt{R^2+X_C^2}}{=} 200 \cdot \frac{200}{\sqrt{100}} \cdot 0{,}6 = 2400\,VAr$.

Η φαινόμενη ισχύς, είναι: $S = V_{εν} I_{εν} = 200 \frac{200}{\sqrt{100}} = 2000\,VA$.

Τέλος, γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής ισχύος είναι $συνφ = 0{,}8$ ή $φ = συν^{-1} 0{,}8 = 36{,}8^o$. Το τρίγωνο ισχύος είναι το εξής:



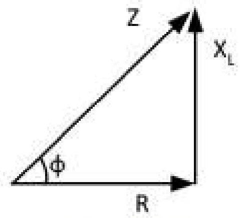
Σχήμα 4. 20

ΑΣΚΗΣΗ 4.9

Κύκλωμα RL σειράς έχει καταναλωτές με τιμές R=8Ω και X_L=6Ω. Τροφοδοτείται με ενεργό τάση τροφοδοσίας 200V. Να σχεδιάσετε το τρίγωνο ισχύος του κυκλώματος.

Απάντηση

Το τρίγωνο των αντιστάσεων για τα στοιχεία κυκλώματος RL σειράς, είναι το κάτωθι:



Σχήμα 4. 21

Οπότε $\text{συνφ}=\frac{R}{Z}\underset{Z=\sqrt{R^2+X_L^2}}{=}\frac{R}{\sqrt{R^2+X_L^{\,2}}}=\frac{8}{\sqrt{8^2+6^2}}\Rightarrow\text{συνφ}=\frac{8}{\sqrt{100}}=0{,}8$.

Και το $\text{ημφ}=\frac{X_L}{Z}\underset{Z=\sqrt{R^2+X_L^2}}{=}\frac{X_L}{\sqrt{R^2+X_L^{\,2}}}=\frac{6}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{6}{\sqrt{100}}=0{,}6$.

Η πραγματική ισχύς, είναι:

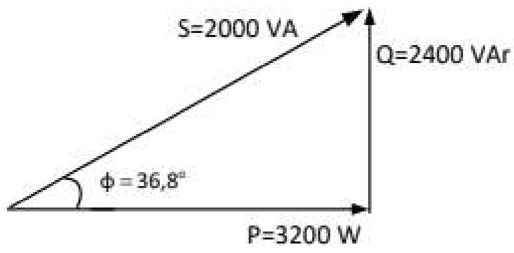
$$P=V_{εν}I_{εν}\text{συνφ}=V_{εν}\frac{V_{εν}}{Z}\text{συνφ}\underset{Z=\sqrt{R^2+X_L^2}}{=}200\cdot\frac{200}{\sqrt{100}}\cdot 0{,}8=3200\,W.$$

Η άεργος ισχύς, είναι: $Q=V_{εν}I_{εν}\text{ημφ}=V_{εν}\frac{V_{εν}}{Z}\text{ημφ}\underset{Z=\sqrt{R^2+X_L^2}}{=}200\cdot\frac{200}{\sqrt{100}}\cdot 0{,}6=2400\,VAr$.

Η φαινόμενη ισχύς, είναι: $S=V_{εν}I_{εν}=200\frac{200}{\sqrt{100}}=2000\,VA$.

Τέλος, γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής ισχύος είναι $\text{συνφ}=0{,}8$ ή $φ=\text{συν}^{-1}0{,}8=36{,}8^{o}$.

Τελικά το τρίγωνο ισχύος για επαγωγική συμπεριφορά του κυκλώματος είναι:



Σχήμα 4. 22

ΑΣΚΗΣΗ 4.10

Μονοφασικός κινητήρας τροφοδοτείται με ενεργό τιμή τάσεως 400 V, κυκλικής συχνότητας 314 rad/sec. Λειτουργεί απορροφώντας από το δίκτυο τροφοδοσίας

ενεργό τιμή ρεύματος 15 Α. Ο συντελεστής ισχύος είναι 0,67. Συνδέουμε πυκνωτή χωρητικότητας 20 μF, για να επιτευχθεί αντιστάθμιση . Να υπολογίσετε

1. Την άεργο ισχύ του δικτύου.

2. Το νέο συντελεστή ισχύος, μετά την αντιστάθμιση.

Απάντηση

1.

Ο συντελεστής ισχύος είναι $συνφ = 0{,}67 \Rightarrow φ = συν^{-1}\, 0{,}67 = 48^{o}$.

Η άεργος ισχύς είναι $Q = V_{εν} I_{εν} ημφ = 400 \cdot 15 \cdot ημ\, 48^{o} = 6000 \cdot 0{,}743 = 4458{,}9 \text{ VAr}$.

2.

Μετά την αντιστάθμιση η άεργος ισχύς και ο συντελεστής ισχύος αλλάζουν τιμή. Η νέα άεργος ισχύς είναι $Q' = V_{εν} I_{εν} ημφ'$. Όμως με γνωστή την χωρητικότητα του πυκνωτή αντιστάθμισης, είναι

$$Q' = \frac{V^2}{X_C} = ωCV^2 \Rightarrow Q' = 314 \cdot 20 \cdot 10^{-6} \cdot 400^2 = 1004{,}8 \text{ VAr}.$$

Οπότε, $Q' = V_{εν} I_{εν} ημφ' \Rightarrow ημφ' = \dfrac{Q'}{V_{εν} \cdot I_{εν}} = \dfrac{1004{,}8}{400 \cdot 15} = 0{,}1674 \Rightarrow φ' = ημ^{-1}\, 0{,}1674 = 9{,}64^{o}$.

Επομένως ο νέος συντελεστής ισχύος μετά την αντιστάθμιση είναι

$$συνφ' = συν\, 9{,}64^{o} = 0{,}98.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.11

Χρησιμοποιούμε σε κύκλωμα σύνθετου καταναλωτή 5 KW, πυκνωτές αντιστάθμισης σε παράλληλη σύνδεση, ώστε ο αρχικός συντελεστής ισχύος να βελτιωθεί από 0,7 μεταπορείας σε 0,9 μεταπορείας. Να υπολογιστεί η συνολική άεργος ισχύς των πυκνωτών αντιστάθμισης.

Απάντηση

Η φαινόμενη και άεργος ισχύς πριν την προσθήκη πυκνωτών είναι

$$P = S \cdot συνφ \Rightarrow S = \frac{P}{συνφ} = \frac{5000}{0{,}7} = 7142{,}8 \text{VA} \text{ και}$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{7142{,}8^2 - 5000^2} = \sqrt{51020408{,}16 - 25000000} = 5101 \text{VAr}.$$

Μετά την αντιστάθμιση η νέα φαινόμενη και άεργος ισχύς είναι αντίστοιχα

$$S' = \frac{P'}{συνφ} = \frac{5000}{0{,}9} = 5555{,}5 \text{VA}.$$

$$Q' = \sqrt{S'^2 - P^2} = \sqrt{5555{,}5^2 - 5000^2} = \sqrt{5864197{,}53} = 2421{,}61 \text{VAr}.$$

Τελικά για την αντιστάθμιση απαιτούνται

$$ΔQ = Q - Q' = 5101 - 2421{,}61 = 2679{,}3 \text{VAr}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.12

Καταναλωτής ισχύος 10kW τροφοδοτείται από πηγή εναλλασσόμενης τάσης 230V και συχνότητας 50Hz. Ο καταναλωτής συνδέεται παράλληλα με συστοιχία πυκνωτών χωρητικότητας 200μF, με αποτέλεσμα να αυξηθεί ο συντελεστής ισχύος σε 0,94 επαγωγικός. Να βρεθεί πριν την αντιστάθμιση, ο αρχικός συντελεστής ισχύος.

Απάντηση

Μετά την αντιστάθμιση γνωρίζοντας πως συνφ=0,94, δηλαδή $\varphi=\sigma\upsilon\nu^{-1}0{,}94=20^{o}$, προκύπτει ότι:

$$Q_C = S\cdot \eta\mu\varphi = V\cdot I\cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow C\cdot\omega\cdot V^2 = V\cdot I\cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow$$

$$I = \frac{C\cdot\omega\cdot V}{\eta\mu\varphi} \overset{\omega=2\pi f}{=} \frac{200\cdot10^{-6}\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 230}{\eta\mu 20^{o}} \Rightarrow I = \frac{14{,}44}{0{,}34} = 42{,}4\,\text{A}.$$

Επίσης με $Q_c = V^2\omega C = 230^2\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 200\cdot 10^{-6} = 3322{,}12\text{ VAr} = 3{,}3212\text{ KVAr}$, μετά την αντιστάθμιση, έχουμε

$$Q=Q_L-Q_C \text{ ή } Q_c = Q_L - Q = P\varepsilon\varphi\varphi_1 - P\varepsilon\varphi\varphi_2 = P(\varepsilon\varphi\varphi_1 - \varepsilon\varphi\varphi_2) \Rightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\varphi_1 = \frac{Q_c}{VI} + \varepsilon\varphi\varphi_2 \overset{\varphi_2=20^o}{=} \frac{3322{,}12}{230\cdot 42{,}4} + \varepsilon\varphi 20^{o} \Rightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\varphi_1 = \frac{3322{,}12}{9752} + \varepsilon\varphi 20^{o} = 3{,}4 + 0{,}328 = 3{,}76 \quad \text{ή} \quad \varphi_1=\varepsilon\varphi^{-1}3{,}76=75{,}12^{o}.$$

Τελικά πριν την αντιστάθμιση ο συντελεστής ισχύος είναι

συνφ=συν75,12^{o}=>συνφ=0,25.

ΑΣΚΗΣΗ 4.13

Δίκτυο καταναλωτών απορροφά 100Α με συντελεστή ισχύος συνφ=0,67 επαγωγικό από τροφοδοσία τάσης 10KV και συχνότητας 50Hz. Να βρείτε την χωρητικότητα του πυκνωτή αντιστάθμισης ώστε να αυξηθεί ο συντελεστής ισχύος, και να γίνει συνφ=0,90.

Απάντηση

Η κυκλική συχνότητα είναι ω=2πf=314 rad/sec. Ο πυκνωτής αντιστάθμισης θα είναι:

$$C = \frac{Q_C}{\omega^2 V} = \frac{Q_L - Q}{\omega^2 V} = \frac{V\cdot I\cdot(\eta\mu\varphi_1 - \eta\mu\varphi_2)}{\omega\ V^2}$$

Ο αρχικός συντελεστής Ισχύος είναι $\sigma\upsilon\nu\varphi_1 = 0{,}67 \Rightarrow \varphi_1 = \sigma\upsilon\nu^{-1}0{,}67 = 47{,}9^{o}$ (ή $\eta\mu\varphi_1=\eta\mu 47{,}9^{o}= 0{,}74$).Μετά την αντιστάθμιση ο συντελεστής ισχύος είναι $\sigma\upsilon\nu\varphi_2 = 0{,}9 \Rightarrow \varphi_2 = \sigma\upsilon\nu^{-1}0{,}9 = 25{,}8^{o}$ (ή $\eta\mu\varphi_2=\eta\mu 25{,}8^{o}=0{,}43$). Αντικαθιστώντας προκύπτει η χωρητικότητα του πυκνωτή αντιστάθμισης:

$$C = \frac{V\cdot I\cdot(\eta\mu\varphi_1 - \eta\mu\varphi_2)}{\omega\ V^2} \overset{\omega=2\pi f}{=} \frac{100(0{,}74-0{,}43)}{2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 10\cdot 10^3} = \frac{30{,}41}{3140000} = 9{,}7\,\mu\text{F}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.14

Ηλεκτρικός κινητήρας (μονοφασικός), έχει τα εξής χαρακτηριστικά (ονομαστικά) μεγέθη: τάση 400V/230 V (πολική/φασική), ισχύς 20 KW, συντελεστή ισχύος συνφ=0,7 και συχνότητα 50 Hz.

Να βρείτε τα εξής:

1. Το αρχικό ρεύμα πριν την αντιστάθμιση.

2. Την μείωση του ρεύματος που απορροφάει ο κινητήρας ώστε ο συντελεστής ισχύος να αυξηθεί σε συνφ=0,9 (επαγωγικό).

3. Τον πυκνωτή αντιστάθμισης.

Απάντηση

1.

Το ρεύμα πριν την αντιστάθμιση είναι: $I = \frac{P}{V \cdot συνφ} = \frac{20000}{230 \cdot 0,7} = 124,2\ A$.

2.

Το ρεύμα μετά την αντιστάθμιση είναι $I = \frac{P}{V \cdot συνφ'} = \frac{20000}{230 \cdot 0,9} = 96,6\ A$. Οπότε η μείωση του ρεύματος που απορροφάει ο κινητήρας είναι:

$$ΔI=124,2-96,6=27,58\ A.$$

3.

Πριν την αντιστάθμιση είναι

$$Q_L = V \cdot I \cdot ημφ \overset{ημ^2φ=1-συν^2φ=1-0,7^2=0,51 \Rightarrow ημφ=\sqrt{0,51}=0,71}{=} 230 \cdot 124,2 \cdot 0,71 = 20,4\,KVAr.$$

Επίσης μετά είναι

$$Q = V \cdot I \cdot ημφ' \overset{ημ^2φ=1-συν^2φ=1-0,9^2=0,51 \Rightarrow ημφ=\sqrt{0,19}=0,43}{=} 230 \cdot 96,6 \cdot 0,43 = 9,684\,KVAr.$$

Τελικά ο πυκνωτής αντιστάθμισης ισοδυναμεί με

$$C = \frac{Q_c}{ωV^2} = \frac{Q_L - Q}{2πfV^2} = \frac{20,4 - 9,684}{314 \cdot 230^2} = \frac{10,716 \cdot 10^3}{314 \cdot 52900} = 645,13\,μF.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.15 *(εξετάσεις 2009)*

Ένα κύκλωμα σειράς R, L, C έχει R=30Ω, L=60mH, C=50μF . Στα άκρα του εφαρμόζεται τάση κυκλικής συχνότητας $ω = 1000 \frac{rad}{sec}$. Αν η ενεργός τιμή του ρεύματος, που διαρρέει το κύκλωμα, είναι 4 A, να υπολογιστούν:

1.Η επαγωγική αντίσταση X_L του πηνίου και η χωρητική αντίσταση X_C του πυκνωτή.

2.Η σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος.

3.Η ενεργός τιμή της τάσης V στα άκρα του κυκλώματος.

4.Η φαινόμενη, η πραγματική και η άεργη ισχύς (δίνεται συνφ=0,6 και ημφ=0,8).

5.Να χαρακτηριστεί η συμπεριφορά του κυκλώματος (ωμική, επαγωγική, χωρητική).

Απάντηση

1.

Η επαγωγική αντίσταση είναι: $X_L = L\omega = 60 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 = 60\Omega$. Η χωρητική αντίσταση είναι: $X_c = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{50 \cdot 10^{-6} \cdot 1000} = \frac{1}{50 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{5}100 = \frac{100}{5} = 20\Omega$.

2.

Η σύνθετη αντίσταση είναι: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - \frac{1}{X_C})^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50\Omega$.

3.

Η ενεργός τιμή της τάσης είναι: $V_{\varepsilon\nu} = I_{\varepsilon\nu} Z = 4 \cdot 50 = 200\,V$.

4.

Η φαινόμενη ισχύς είναι: $S = V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu} = 200 \cdot 4 = 800\,VA$

Η πραγματική ιςχύς είναι:

$$P = V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu} \sigma\upsilon\nu\varphi = 200 \cdot 4 \cdot 0{,}6 = 480\,W$$

Η άεργη ισχύς είναι :

$$Q = V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu} \eta\mu\,\varphi = 200 \cdot 4 \cdot 0{,}8 = 640\,W$$

5.

Η συμπεριφορά του κυκλώματος είναι επαγωγική καθώς:

$X_L - X_C = 60 - 20 = 40\Omega > 0 \Rightarrow X_L > X_C$ (ή $V_L > V_C$ ή $0 < \varphi < 90°$) - επαγωγική συμπεριφορά

ΑΣΚΗΣΗ 4.16 *(εξετάσεις 2010)*

Μονοφασικό δίκτυο με ενεργό τιμή τάσης $V_{\varepsilon\nu}$=100V και κυκλική συχνότητα $\omega = 10^4 \frac{rad}{sec}$ τροφοδοτεί κατανάλωση με άεργη ισχύ Q=700VAr (επαγωγικού χαρακτήρα). Για την αντιστάθμιση ποσοστού 90% της άεργης ισχύος συνδέεται πυκνωτής χωρητικότητας C, παράλληλα με τον καταναλωτή. Να υπολογίσετε:

1. Την ενεργό τιμή της έντασης του ρεύματος $I_{\varepsilon\nu}$ αν $\eta\mu\varphi = \sigma\upsilon\nu\varphi \cong 0{,}7$ (πριν την αντιστάθμιση).

2. Την πραγματική ισχύ του κυκλώματος (πριν την αντιστάθμιση).

3. Τη φαινόμενη ισχύ του κυκλώματος (πριν την αντιστάθμιση).

4. Την τιμή C του πυκνωτή αντιστάθμισης.

Απάντηση

1.

Η ενεργός τιμή είναι

$$Q = V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu} \eta\mu\varphi \Rightarrow I_{\varepsilon\nu} = \frac{Q}{V_{\varepsilon\nu}\eta\mu\varphi} = \frac{700}{100 \cdot 0{,}7} = \frac{700}{70} = 10\,A.$$

2.

Πριν την αντιστάθμιση είναι $P = V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu} \sigma\upsilon\nu\varphi = 100 \cdot 10 \cdot 0{,}7 = 700\,W$.

3.

Πριν την αντιστάθμιση είναι $S = V_{εν} I_{εν} = 100 \cdot 10 = 1000\,VA$.

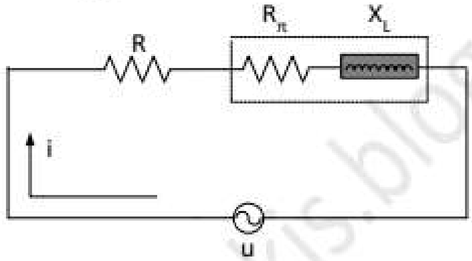
4.

Μετά την αντιστάθμιση είναι

$$Q_C = \frac{V^2}{X_C} = \omega C V^2 \Rightarrow C = \frac{Q_C}{\omega V^2} \overset{Q_C=\frac{90}{100}Q}{=} \frac{700 \cdot 0{,}9}{10000 \cdot 100^2} = \frac{630}{10^8} = 630 \cdot 10^{-8} = 6{,}3\mu C.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.17 *(εξετάσεις 2013)*

Κύκλωμα περιλαμβάνει ωμική αντίσταση R=3Ω και πραγματικό πηνίο συνδεδεμένα σε σειρά, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το πηνίο παρουσιάζει ωμική αντίσταση $R_π$=1Ω και επαγωγική αντίσταση X_L=3Ω. Το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I_{εν}$=2A.



Σχήμα 4. 23

Να υπολογίσετε:

1. Την τάση V_R στα άκρα της αντίστασης.

2. Τη συνολική ωμική αντίσταση $R_{ολ}$ του κυκλώματος.

3. Τη σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος.

4. Το συντελεστή ισχύος (συνφ) του κυκλώματος.

5. Την τάση στα άκρα του κυκλώματος και την πραγματική ισχύ του κυκλώματος.

Απάντηση

1.

Η τάση στα άκρα της αντίστασης είναι: $V_R = IR = 6\,\Omega$.

2.

Η ολική ωμική αντίσταση είναι $R_{ολ} = R + R_π = 4\Omega$.

3.

Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι

$$Z = \sqrt{R_{ολ}^{\ 2} + X_L^{\ 2}} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5\Omega.$$

Ο συντελεστής ισχύος είναι: $συνφ = \frac{R_{ολ}}{Z} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

5.

Η τάση στα άκρα του κυκλώματος είναι: $V = ZI = 10\,Volt$. Η πραγματική ισχύ είναι:

$$P = VIσυνφ = 10 \cdot 2 \cdot 0{,}8 = 16 \text{ Watt}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.18 *(εξετάσεις 2014)*

Σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση u= 200 $\sqrt{2}$ ημ700t V. Το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα με ενεργό τιμή έντασης I= 5A. Η πραγματική ισχύς του κυκλώματος είναι P=600W. Να υπολογίσετε:

1. Τη φαινόμενη ισχύ S.

2. Το συντελεστή ισχύος συνφ.

3. Την άεργο ισχύ Q.

Στη συνέχεια, συνδέεται παράλληλα πυκνωτής, ώστε ο συντελεστής ισχύος του (αντισταθμισμένου) κυκλώματος να γίνει συνφ=0,8 επαγωγικός και ημφ=0,6.
Να υπολογίσετε:

4. Τη νέα φαινόμενη ισχύ S και την νέα άεργο ισχύ Q μετά την αντιστάθμιση.

5. Τη χωρητικότητα C του πυκνωτή αντιστάθμισης.

Απάντηση

1.

Η φαινόμενη ισχύς είναι $S = V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu} = \dfrac{200\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot 5 = 1000\,VA = 1KVA$.

2.

Ο συντελεστής ισχύος είναι $\sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{P}{S} = 0{,}6$.

3.

Η άεργος ισχύς είναι $Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8KVAr$ ή 800 VAr.

4.

Η νέα τιμή της φαινόμενης ισχύς θα είναι: $\sigma\upsilon\nu\varphi' = \dfrac{P}{S'} \Rightarrow S' = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75\,KVA$

Η νέα άεργος ισχύς είναι $Q' = S'\eta\mu\varphi = 0{,}75 \cdot 0{,}6 = 0{,}45\,KVAr$.

(βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα και με χρήση της σχέσης $Q' = \sqrt{S'^2 - P^2} = ...450$ VAr).

5.

Η χωρητικότητα του πυκνωτή της αντιστάθμισης είναι

$$C = \frac{Q_C}{V_{\varepsilon\nu}^2 \omega} = \frac{350}{200^2 \cdot 700} = \frac{350}{28 \cdot 10^6} = 12{,}5\,\mu F.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.19 *(εξετάσεις 2016)*

Μονοφασικός καταναλωτής με άεργο επαγωγική ισχύ Q=600 Var και πραγματική ισχύ P=800W, τροφοδοτείται από δίκτυο με ενεργό τιμή τάσης $V_{\varepsilon\nu}$=100V και κυκλική συχνότητα ω=1000 rad/s. Να υπολογίσετε:

1. Τη φαινόμενη ισχύ S του κυκλώματος.

2. Τον συντελεστή ισχύος συνφ του κυκλώματος.

Στη συνέχεια θα συνδεθεί παράλληλα στον καταναλωτή πυκνωτής ώστε να υπάρξει πλήρης αντιστάθμιση (συνφ$_T$=1). Μετά την αντιστάθμιση να υπολογίσετε:

3. Τη φαινόμενη ισχύ S_T του κυκλώματος.

4. Την άεργο ισχύ Q_T του κυκλώματος.

5. Τη χωρητικότητα C του πυκνωτή.

Απάντηση

1.

Η φαινόμενη ισχύς είναι

$$S^2 = P^2 + Q^2 \Rightarrow S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{800^2 + 600^2} = 1000\ \text{VA}$$

2.

Ο συντελεστής ισχύος είναι $\text{συνφ} = \frac{P}{S} = 0{,}8$.

3.

Η νέα φαινόμενη ισχύς του κυκλώματος είναι $S_T = \text{συν}\varphi \cdot P_T = 1 \cdot 800 = 800\ \text{VA}$.

4.

Η άεργος ισχύς, μετά την αντιστάθμιση είναι

$$S_T{}^2 = P^2 + Q_T{}^2 \Rightarrow Q_T = \sqrt{P^2 - S_{TT}{}^2} = \sqrt{800^2 - 800^2} = 0\ \text{VAr}.$$

5.

Η χωρητικότητα του πυκνωτή της αντιστάθμισης είναι

$$C = \frac{Q_C}{V_{εν}^2 ω} = \frac{Q - Q_T}{V_{εν}^2 ω} = \frac{600 - 0}{100^2 \cdot 1000} = \frac{600}{10000000} = 6 \cdot 10^{-5}\ \text{F} = 60\ \mu\text{F}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.20 *(εξετάσεις 2018)*

Κύκλωμα RLC σε παράλληλη σύνδεση έχει ωμική αντίσταση R= 4Ω, επαγωγική αντίδραση X_L=1,5Ω και χωρητική αντίδραση X_C . Το κύκλωμα τροφοδοτείται από εναλλασσόμενη τάση ενεργού τιμής $V_{εν}$=12V. Το ρεύμα του πυκνωτή έχει ενεργό τιμή $I_{C,εν}$=12Α. Να υπολογίσετε:

1. Τη χωρητική αντίδραση X_C του πυκνωτή.

2. Την ενεργό τιμή της έντασης του ρεύματος I_R που διαρρέει την ωμική αντίσταση και την ενεργό τιμή της έντασης του ρεύματος I_L που διαρρέει το πηνίο.

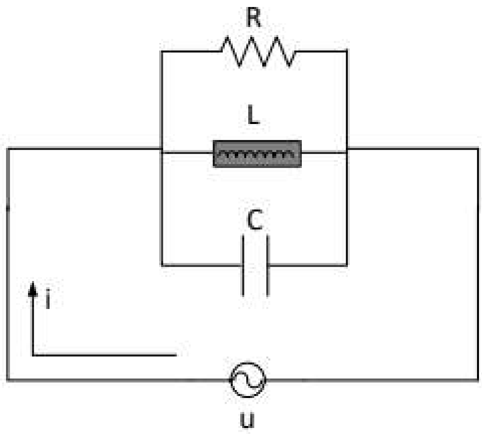
3. Την ενεργό τιμή της έντασης του ολικού ρεύματος I που δίνει η πηγή.

4. Τη σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος Z .

5. Τη φαινόμενη ισχύ του κυκλώματος S.

Απάντηση

Το κύκλωμα της άσκησης είναι το επόμενο:



Σχήμα 4.24

1.

Η χωρητική αντίδραση (αντίσταση) είναι $V_C = I \cdot X_C \Rightarrow X_C = \frac{V_C}{I} = \frac{12}{12} = 1\,\Omega$

2.

Η ενεργός τιμή της έντασης που διαρρέει την αντίσταση είναι $I_R = \frac{V}{R} = \frac{12}{4} = 3\text{ A}$.

Επίσης για το πηνίο, είναι $I_L = \frac{V}{X_L} = \frac{12}{1{,}5} = 8\text{A}$.

3.

Το ολικό ρεύμα της πηγής (ενεργός τιμή) είναι

$$I^2 = I_R^2 + (I_L + I_C)^2 \Rightarrow I = \sqrt{3^2 + (8-12)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5\text{ A}.$$

4.

Η σύνθετη αντίσταση είναι $Z = \frac{V}{I} = \frac{12}{5} = 2{,}4\,\Omega$.

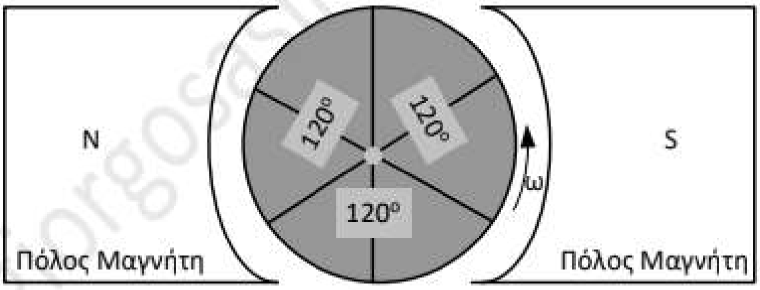
5.

Η φαινόμενη ισχύς είναι $S = V \cdot I = 12 \cdot 5 = 60\text{ VA}$.

Κεφάλαιο 5^{ο}
ΤΡΙΦΑΣΙΚΟ ΡΕΥΜΑ

5.1 ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΤΡΙΦΑΣΙΚΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

Ο τρόπος παραγωγής της τριφασικής ισχύος και ενέργειας γίνεται με την περιστροφή σε έναν κοινό άξονα τριών όμοιων πλαισίων, εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου. Τα πλαίσια είναι μετατοπισμένα στον χώρο κατά 120° (ή $\frac{2\pi}{3}$ rad, ακτίνια).



Σχήμα 5. 1

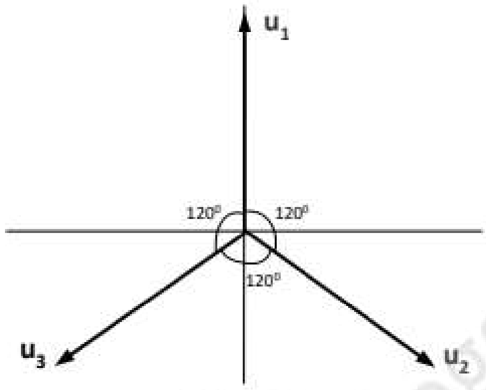
Κατά την διαδικασία παράγονται εναλλασσόμενες τάσεις που είναι μετατοπισμένες μεταξύ τους κατά το 1/3 της περιόδου (δηλαδή T/3, 2T/3, 3T/3=T, …), και σε μία πλήρη περίοδο T να έχουμε και μια πλήρη περιστροφή του πλαισίου κατά 360° (ή 2π rad). Οι εναλλασσόμενες τάσεις έχουν φερόμενη ονομασία L_1, L_2, L_3 (ή παλαιότερα, την ονομασία R, S, T), οι οποίες είναι τρεις μεμονωμένες μονοφασικές εναλλασσόμενες τάσεις που έχουν ίδια συχνότητα f, ίδιο πλάτος τάσης V_o, και χρονική καθυστέρηση η μία με την άλλη 120° (διαφέρουν δηλαδή μεταξύ τους κατά 2π/3 ή 120°).
Αυτό το σύστημα **καλείται τριφασικό σύστημα τάσεων ή ρευμάτων.**

Οι εξισώσεις τάσεων, ενός τριφασικού συμμετρικού συστήματος είναι οι εξής:

$$u_1 = V_o \cdot \eta\mu\omega \cdot t \ , \ u_2 = V_o \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + 120^o) = V_o \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \frac{2\pi}{3}) \text{ και}$$

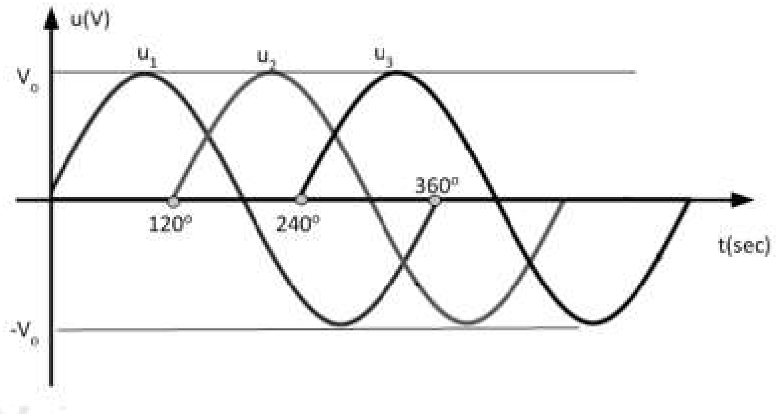
$$u_3 = V_o \cdot \eta\mu(\omega \cdot t - 120^o) = V_o \cdot \eta\mu(\omega \cdot t - \frac{2\pi}{3}) \ .$$

Το αντίστοιχο διανυσματικό διάγραμμα τάσεων είναι το εξής:



Σχήμα 5. 2

Η απεικόνιση των τριών τάσεων του εναλλασσόμενου ρεύματος σε κοινό διάγραμμα τάσεως και χρόνου στο τριφασικό συμμετρικό σύστημα φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Σχήμα 5. 3

Η μονοφασική τάση στην Ευρώπη έχει τιμές 230V, f=50Hz και περίοδο $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50}$ $= 0{,}02 \text{sec}$. Στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής, αντίστοιχα η τάση είναι 117V με συχνότητα 60Hz και περίοδο 1/60=0,01667 sec.

Οι τιμές των στιγμιαίων ρευμάτων έχουν επίσης διαφορά φάσης 120^o, και οι αντίστοιχες χρονικές εξισώσεις τους είναι της μορφής:

$i_1 = I_o \cdot \eta\mu\omega t$, $i_2 = I_o \cdot \eta\mu(\omega t + 120^o)$ και $i_3 = I_o \cdot \eta\mu(\omega t + 240^o)$.

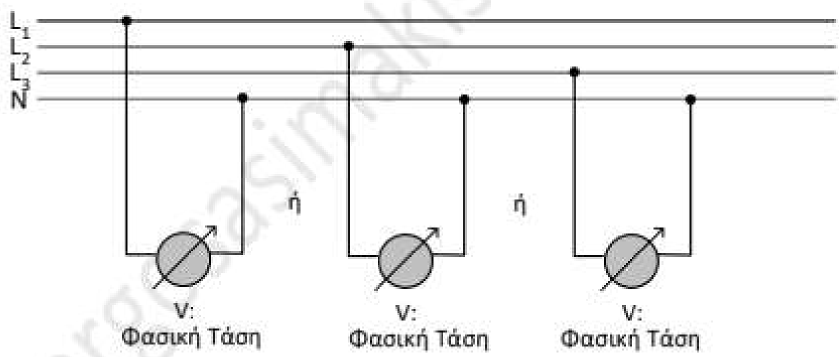
Συμμετρικό τριφασικό σύστημα τάσεων καλούμε αυτό στο οποίο οι τάσεις έχουν ίδιο μέτρο και διαφορά φάσης 120° ή 2π/3. Ασύμμετρο τριφασικό σύστημα τάσεων καλείται το σύστημα στο οποίο οι τάσεις δεν έχουν ίδιο μέτρο και παρουσιάζουν διαφορά φάσης μεταξύ τους πέραν των 120°. Ορθή (θετική) διαδοχή φάσης έχουμε όταν η διαφορά φάσης των τριών τάσεων μεταξύ τους είναι 120°. Στην αντίθετη περίπτωση που η διαφορά φάσης είναι -120° ή -2π/3, η διαδοχή των φάσεων είναι αρνητική (αντίστροφη). **Οι τρεις στιγμιαίες τάσεις u_1, u_2, u_3 κάθε χρονική στιγμή έχουν αλγεβρικό άθροισμα μηδέν. Δηλαδή** $u_1+u_2+u_3=0$.

5.2 ΦΑΣΙΚΗ ΚΑΙ ΠΟΛΙΚΗ ΤΑΣΗ

Φασική τάση (V_ϕ): Ονομάζουμε την τάση που εφαρμόζεται μεταξύ αγωγού φάσης (L_1 ή L_2 ή L_3) και ουδετέρου (N). Καλούμε την διαφορά δυναμικού μεταξύ των άκρων κάθε φάσης (L_1 ή L_2 ή L_3) και του ουδετέρου (N). Όταν έχουμε σύνδεση σε αστέρα η τάση στα άκρα των τυλιγμάτων είναι φασική.

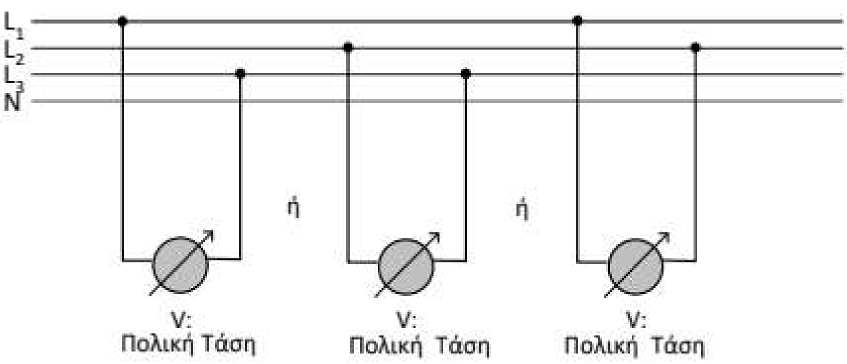
Πολική τάση (V_π): Ονομάζουμε την τάση που εφαρμόζεται μεταξύ δύο αγωγών φάσης (L_1-L_2 ή L_2-L_3 ή L_3-L_1). Καλούμε την διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο ακροδεκτών διαφορετικών φάσεων.

Η μέτρηση και η πρακτική σύνδεση με βολτόμετρο της φασικής τάσης, γίνεται ως εξής:



Σχήμα 5. 4

Η μέτρηση και η πρακτική σύνδεση με βολτόμετρο της πολικής τάσης, γίνεται ως εξής:



Σχήμα 5. 5

Ρεύμα γραμμής καλούμε το ρεύμα που διαρρέει τους αγωγούς L_1, L_2, L_3. Το ρεύμα ραμμής δίνεται από την σχέση: $I_\varphi = \frac{V_\varphi}{Z}$. Σε σύνδεση τριγώνου, το ρεύμα γραμμής (I_π) είναι ίσο με $I_\pi = \sqrt{3} \cdot I_\phi$. Σε σύνδεση αστέρα, το ρεύμα αστέρα (I_Φ) θα είναι ίσο με το ρεύμα της γραμμής. Συνοψίζοντας ισχύουν:

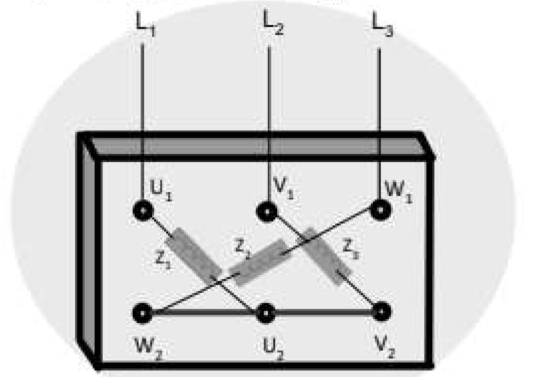
ΣΥΝΔΕΣΜΟΛΟΓΙΑ	ΡΕΥΜΑ	ΤΑΣΗ
Δ (Τρίγωνο)	$I_\pi = \sqrt{3} \cdot I_\varphi$	$V_\pi = V_\varphi$
Υ (Αστέρα)	$I_\pi = I_\varphi$	$V_\pi = \sqrt{3} \cdot V_\varphi$

5.3 ΣΥΝΔΕΣΗ ΑΣΤΕΡΑ ΚΑΙ ΣΥΝΔΕΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Οι ηλεκτρικές μηχανές (κινητήρες και γεννήτριες εναλλασσομένου τριφασικού ρεύματος) μπορούν να συνδεθούν σε συνδεσμολογία **Αστέρα (Υ)** και σε συνδεσμολογία **Τριγώνου (Δ)** (στα άκρα των τυλιγμάτων τους). Αυτό έχει αποτέλεσμα την δημιουργία ενός διαφορετικού συστήματος ρευμάτων και τάσεων για την κάθε περίπτωση συνδεσμολογίας, όπως φαίνεται στα επόμενα σχήματα (καθώς στο κιβώτιο κάθε μηχανής γίνονται εσωτερικά διαφορετικές συνδέσεις, στα άκρα των τυλιγμάτων).

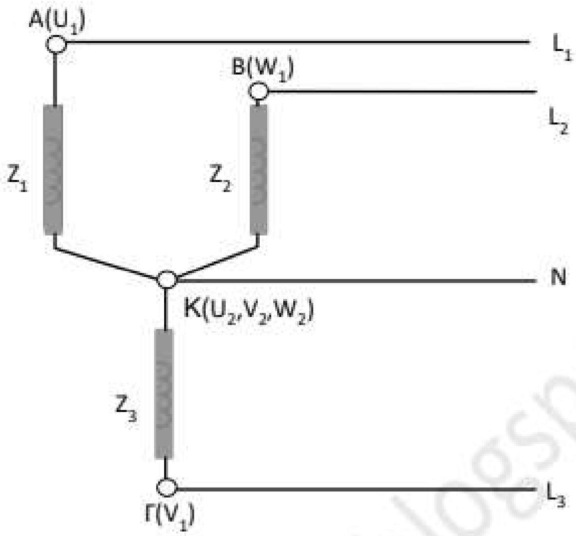
Σύνδεση Αστέρα:

Σε ηλεκτρική μηχανή εναλλασσόμενου ρεύματος όταν συνδέεται σε αστέρα, η σύνδεση των αγωγών θα πραγματοποιηθεί όπως φαίνεται στο ακροκιβώτιο του σχήματος (στο εσωτερικό του κουτιού γίνεται αστεροειδής σύνδεσης αγωγών). «Εμπειρικά» η σύνδεση των καλωδίων στο ακροκιβώτιο της μηχανής γίνεται με ένωση δύο αγωγών μεταξύ των (κάτω) οριζόντιων τυλιγμάτων.



Σχήμα 5. 6

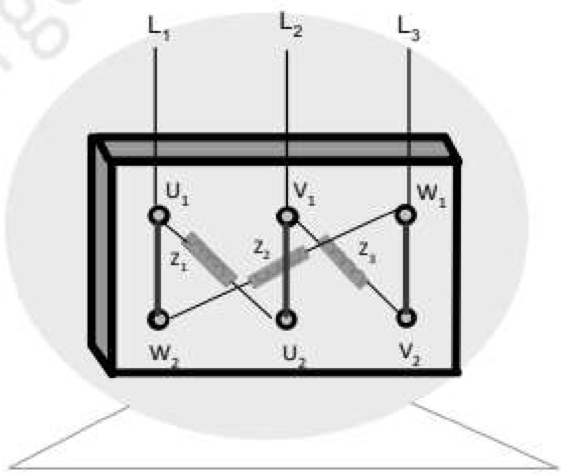
Η σύνδεση των αγωγών σε αστέρα, έχει την μορφή του επόμενου σχήματος (το οποίο απεικονίζει τον τρόπο σύνδεσης μιας τριφασικής μηχανής σε αστέρα). Οι τρεις φάσεις συμβολίζονται με L_1, L_2, L_3 και ο ουδέτερος με N.



Σχήμα 5. 7

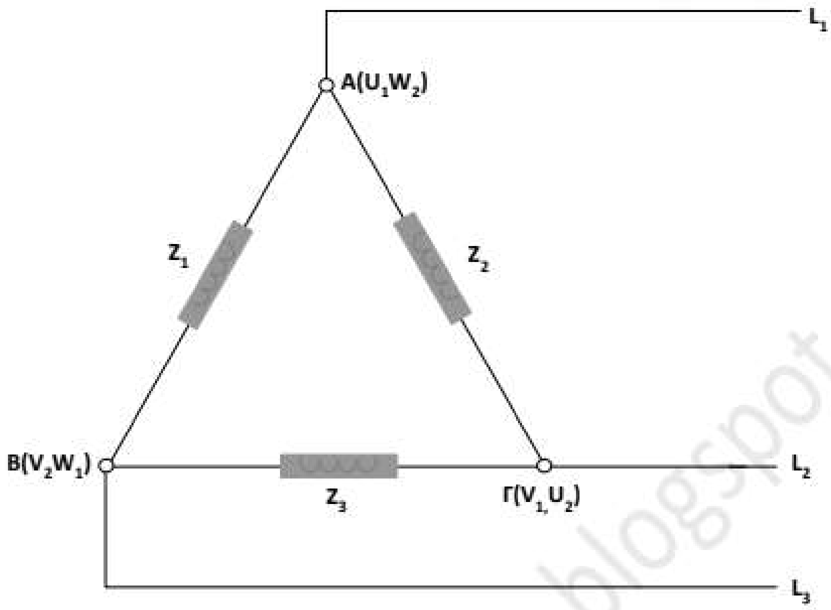
Σύνδεση τριγώνου:

Σε ηλεκτρική μηχανή εναλλασσόμενου ρεύματος όταν συνδέεται σε τρίγωνο, η σύνδεση των αγωγών θα πραγματοποιηθεί όπως φαίνεται στο ακροκιβώτιο του σχήματος (στο εσωτερικό του κουτιού γίνεται τριγωνοειδής σύνδεση αγωγών). «Εμπειρικά» η σύνδεση των καλωδίων στο ακροκιβώτιο της μηχανής γίνεται με ένωση τριών αγωγών μεταξύ των κατακόρυφων (πάνω και κάτω) τυλιγμάτων.



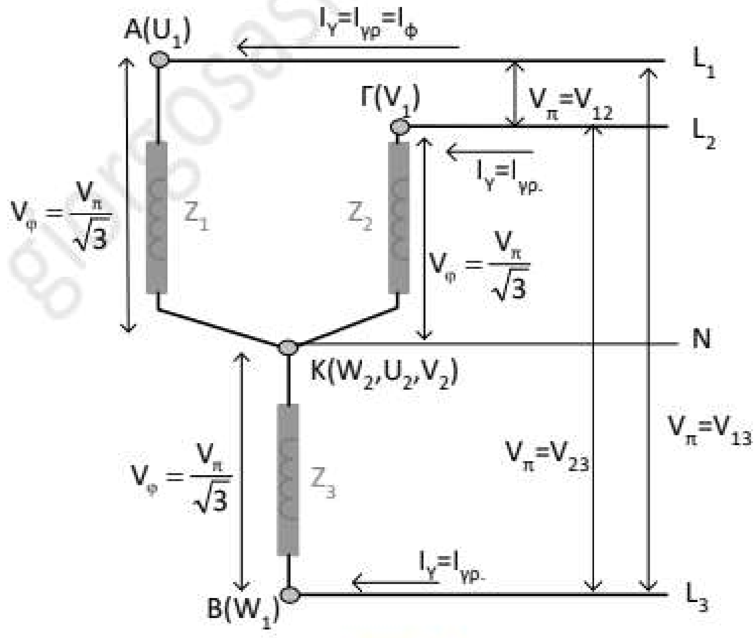
Σχήμα 5. 8

Η σύνδεση των αγωγών σε τρίγωνο, έχει την μορφή του επόμενου σχήματος το οποίο απεικονίζει τον αντίστοιχο τρόπο σύνδεσης μιας τριφασικής μηχανής σε τρίγωνο. Στην συνδεσμολογία τριγώνου δεν υπάρχει ουδέτερος κόμβος.



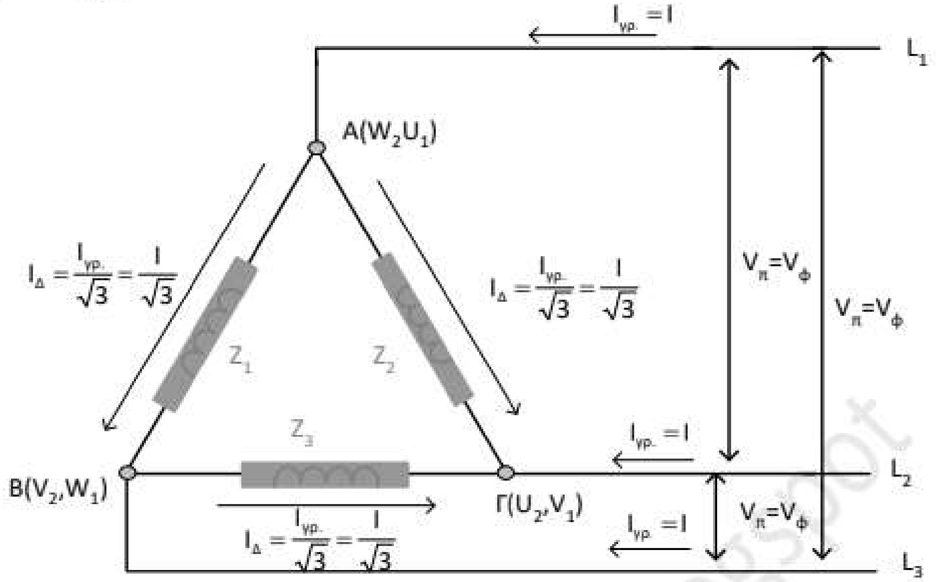
Σήμα 5. 9

Η Πολική και Φασική τάση σε σύνδεση Αστέρα στα τυλίγματα, φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Σχήμα 5. 10

Η Πολική και Φασική τάση σε σύνδεση Τριγώνου στα τυλίγματα, φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



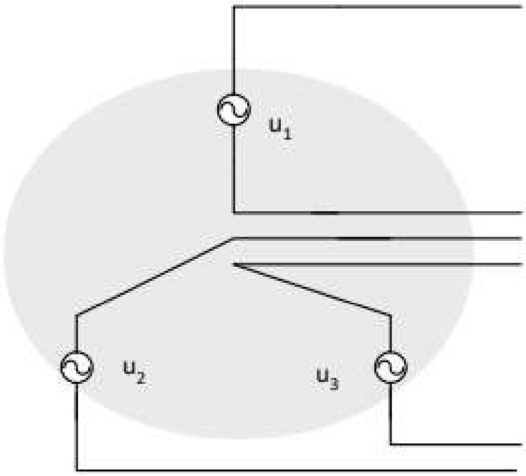
Σχήμα 5. 11

Το ρεύμα γραμμής κατά την σύνδεση τριφασικών συμμετρικών καταναλωτών σε τρίγωνο είναι τρείς φορές μεγαλύτερο (τριπλάσιο) του ρεύματος γραμμής όταν η σύνδεση των ίδιων καταναλωτών γίνεται σε αστέρα, δηλαδή $I_Δ=3\cdot I_Y$.

Πράγματι, έστω τρία όμοια φορτία σύνθετης αντίστασης 23 Ω, τα οποία συνδέονται σε δίκτυο με πολική/φασική τάση 400/230V. Τότε **Α) σε σύνδεση αστέρα** το ρεύμα γραμμής είναι ίδιο με το ρεύμα που ρέει τα φορτία και στα άκρα των φορτίων είναι $I_Y=\frac{V_φ}{Z}=\frac{230}{23}=10A=I_{γρ}$. Ομοίως, **Β) σε σύνδεση τριγώνου** το ρεύμα που διαρρέει τα φορτία είναι $I_Δ=\frac{V_π}{Z}=\frac{400}{23}=17{,}3A$. Επομένως στο τρίγωνο το ρεύμα γραμμής θα είναι $I_{γρ}=\sqrt{3}\cdot I_Δ=17{,}3\sqrt{3}=30{,}12A$. Τελικά όντως το ρεύμα γραμμής σε σύνδεση τριγώνου είναι τρείς φορές μεγαλύτερο από το ρεύμα γραμμής σύνδεσης σε αστέρα καθότι $I_Δ=3I_Y=3\cdot 10\approx 30$ A.

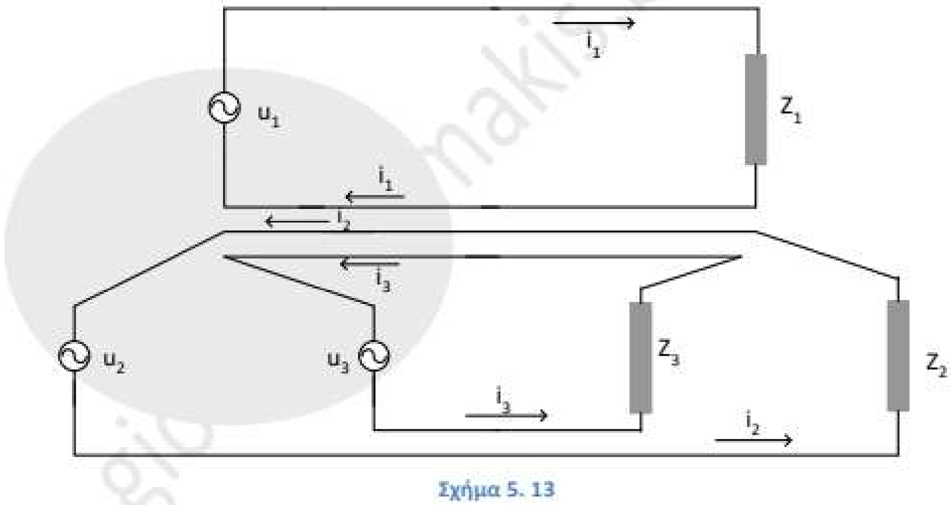
5.4 ΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΕΩΝ ΜΕ ΤΡΙΦΑΣΙΚΟ ΡΕΥΜΑ

Έστω μια ηλεκτρική γεννήτρια η οποία αποτελείται από τρία περιστρεφόμενα πλαίσια όπως του σχήματος.



Σχήμα 5. 12

— Συνδέουμε τις πηγές με τρείς σύνθετες αντιστάσεις καταναλωτών ίδιας τιμής (Z_1=Z_2=Z_3=Z), ως ένα ανεξάρτητο τριφασικό σύστημα κάνοντας χρήση 6 αγωγών σύνδεσης. Τότε για το σύστημα που δημιουργείται το άθροισμα των στιγμιαίων τιμών των τριών ρευμάτων είναι μηδέν.



Σχήμα 5. 13

Το αλγεβρικό άθροισμα των στιγμιαίων τιμών των ρευμάτων εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι μηδέν. Πράγματι είναι:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = \frac{u_1}{Z_1} + \frac{u_2}{Z_2} + \frac{u_3}{Z_3} = \frac{u_1}{Z} + \frac{u_2}{Z} + \frac{u_3}{Z} = \frac{u_1 + u_2 + u_3}{Z} = \frac{u}{Z}$$

Όμως επειδή

$$u = u_1 + u_2 + u_3 = V_o ημωt + V_o ημ(ωt + 120^o) + V_o ημ(ωt - 120^o) \underset{ημ(α-β)=ημασυνβ-ημβσυνα}{\overset{ημ(α+β)=ημασυνβ+συναημβ}{\Longrightarrow}}$$

$$V_o ημωt + V_o\left(ημωtσυν120^o + ημ120^o \cdot συνωt\right) + V_o\left(ημωtσυν120^o - συνωt \cdot ημ120^o\right) =$$

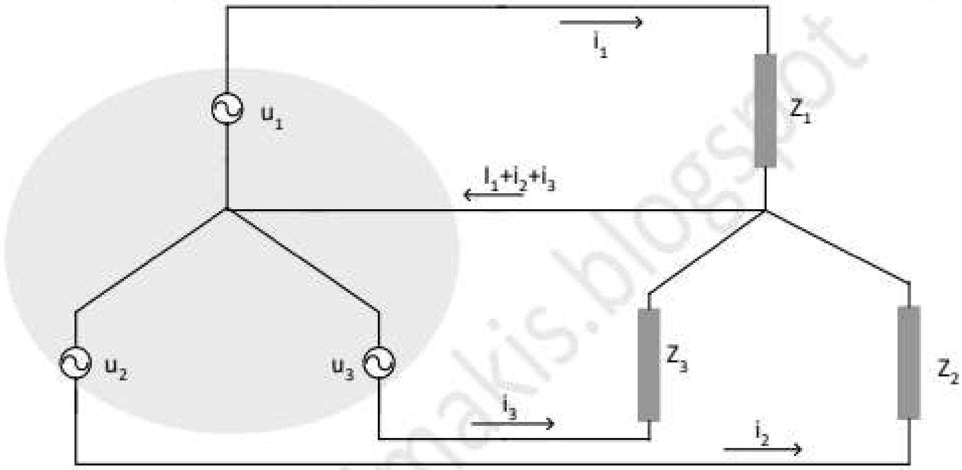
$$V_o\left[ημωt + \left(ημωtσυν120^o + ημ120^o \cdot συνωt\right) + \left(ημωtσυν120^o - συνωt \cdot ημ120^o\right)\right] \Rightarrow$$

$$u = V_o\left(\eta\mu\omega t + \eta\mu\omega t \cdot \sigma\upsilon\nu 120^\circ + \eta\mu\omega t \cdot \sigma\upsilon\nu 120^\circ\right) = V_o\left(\eta\mu\omega t + 2\cdot\eta\mu\omega t \cdot \sigma\upsilon\nu 120^\circ\right) =$$

$$V_o\left(\eta\mu\omega t + 2\cdot\eta\mu\omega t \cdot (-\frac{1}{2})\right) = V_o\eta\mu\omega t - V_o\eta\mu\omega t = 0.$$

Τελικά $i = i_1 + i_2 + i_3 = \frac{u}{Z} = 0$.

— Επίσης εάν συνδέουμε τις πηγές με τρείς σύνθετες αντιστάσεις καταναλωτών ίδιας τιμής (Z_1=Z_2=Z_3=Z), ως ένα ανεξάρτητο τριφασικό σύστημα κάνοντας χρήση όμως 4 αγωγών (φάσεις και ουδέτερος αγωγός Ν) σύνδεσης, τότε για το σύστημα που δημιουργείται το άθροισμα των στιγμιαίων τιμών των τριών ρευμάτων είναι μηδέν.



Σχήμα 5. 14

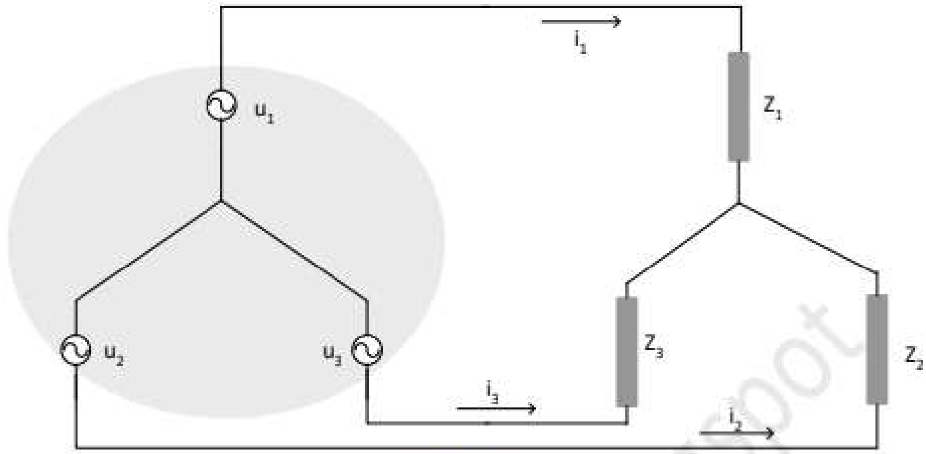
Το αλγεβρικό άθροισμα των στιγμιαίων τιμών των ρευμάτων εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι μηδέν:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = \frac{u_1}{Z_1} + \frac{u_2}{Z_2} + \frac{u_3}{Z_3} = \frac{u_1}{Z} + \frac{u_2}{Z} + \frac{u_3}{Z} = \frac{u_1 + u_2 + u_3}{Z} = \frac{u}{Z} = 0$$

— Επίσης εάν συνδέουμε τις πηγές με τρείς σύνθετες αντιστάσεις καταναλωτών διαφορετικής τιμής $Z_1 \neq Z_2 \neq Z_3 \neq Z$, η σύνδεση ενός αλληλένδετου τριφασικού συστήματος με χρήση 4 αγωγών θα δώσει το ολικό ρεύμα το οποίο όμως, δεν είναι μηδέν, καθώς τα φορτία δεν είναι συμμετρικά και ο ουδέτερος (δηλαδή ο κοινός αγωγός) δεν διαρρέεται από ρεύμα (το σύνολο των ρευμάτων δηλαδή θα είναι $i = i_1 + i_2 + i_3 = \frac{u_1}{Z_1} + \frac{u_2}{Z_2} + \frac{u_3}{Z_3} \Rightarrow i \neq 0$.

Η σύνδεση με 4 αγωγούς είναι οικονομικότερη της σύνδεσης με έξι αγωγούς.

— Η σύνδεση ενός αλληλένδετου τριφασικού συστήματος μπορεί να γίνει με χρήση 3 αγωγών. Αυτή η μορφή τροφοδότησης καταναλωτών τριφασικού ρεύματος με 3 αγωγούς φάσεων L_1, L_2 και L_3 και χωρίς ουδέτερο N, είναι οικονομικότερος για την συντήρηση, την κατασκευή και για την μεταφορά της ηλεκτρικής ενέργειας.

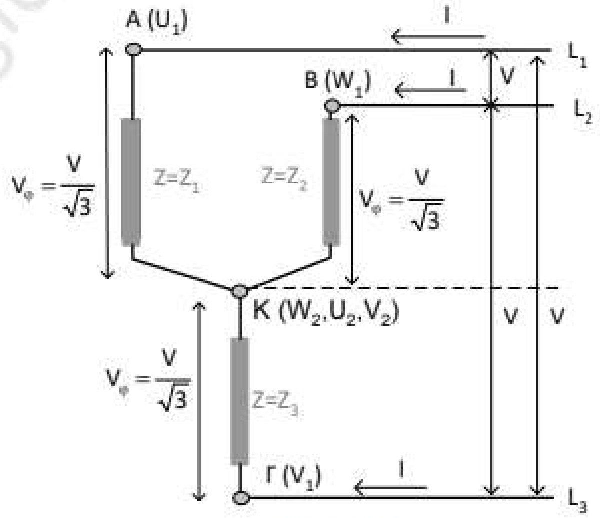


Σχήμα 5. 15

5.5 ΙΣΧΥΣ ΤΟΥ ΤΡΙΦΑΣΙΚΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

Σε μονοφασικό σύστημα, η πραγματική ισχύς της σύνθετης αντίστασής του, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι $P = V \cdot I \cdot \text{συνφ}$ (ενεργές τιμές μεγεθών). Σε ισορροπημένο τριφασικό σύστημα όμοιων καταναλωτών, για σύνδεση σε αστέρα και σε τρίγωνο, η πραγματική ισχύς, θα δίνεται από την σχέση $P = \sqrt{3} \cdot V \cdot I \cdot \text{συνφ}$ (πολικές τιμές μεγεθών).

Α) Πράγματι για **σύνδεση σε αστέρα,** η συνολική πραγματική ισχύς για το τριφασικό σύστημα είναι $P = 3 \cdot V_{\varphi} \cdot I_{\varphi} \cdot \text{συνφ}$.

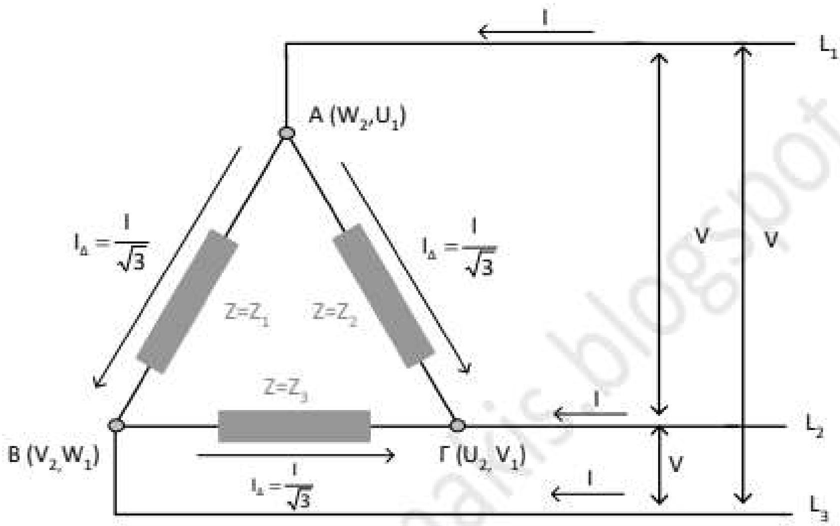


Σχήμα 5. 16

Όμως με $V = V_\pi = \sqrt{3} \cdot V_\varphi \Rightarrow V_\varphi = \dfrac{V}{\sqrt{3}}$ και $I = I_\varphi = I_\pi$ (για την σύνδεση αστέρα), τότε προκύπτει ότι

$$P = 3 \cdot V_\varphi \cdot I_\varphi \cdot συνφ = 3 \cdot \frac{V}{\sqrt{3}} \cdot I \cdot συνφ \Rightarrow P = \sqrt{3} \cdot V \cdot I \cdot συνφ.$$

Ομοίως Β) για την **σύνδεση τριγώνου** (με $V = V_\varphi = V_\pi$ και $I = I_\pi = \sqrt{3} \cdot I_\Delta$) η συνολική ισχύς θα γίνει επίσης $P = 3 \cdot V_\varphi \cdot I_\varphi \cdot συνφ = 3 \cdot V \cdot \dfrac{I}{\sqrt{3}} \cdot συνφ \Rightarrow P = \sqrt{3} \cdot V \cdot I \cdot συνφ$.



Σχήμα 5. 17

Τελικά προκύπτει πως σε κάθε ισορροπημένο τριφασικό σύστημα η πραγματική ισχύς θα δίνεται από την ίδια σχέση $P = \sqrt{3}\, V \cdot I \cdot συνφ$ (πολικές τιμές τάσης και ρεύματος).

Σημαντική παράμετρος είναι η αριθμητική ισχύς που παρέχει μια τριφασική μηχανή, όταν η σύνδεσή της είναι σε τρίγωνο, καθώς είναι 3 φορές μεγαλύτερη από την ισχύ που παρέχεται (από την ίδια μηχανή), όταν είναι σε σύνδεση αστέρα. Ισχύει δηλαδή ότι $P_\Delta = 3 \cdot P_Y$.

Πράγματι έστω πως έχουμε έναν Α.Τ.Κ.Β.Δ (ασύγχρονος τριφασικός κινητήρας βραχυκυκλωμένου δρομέα), που τροφοδοτείται με (φασική/πολική) 230/400V, 50Hz και παρουσιάζει συντελεστή ισχύος συνφ=0,8. Κάθε τύλιγμα θεωρούμε ότι το αντιπροσωπεύει μια αντίσταση των 23Ω.

Τότε για **Α) σύνδεση σε αστέρα** και γνωρίζοντας πως το ρεύμα που διαρρέει κάθε αντίσταση είναι $I = \dfrac{V}{R} = \dfrac{230}{23} = 10A$, η ισχύς που καταναλώνεται ισοδυναμεί με

$$P = \sqrt{3}\, V \cdot I \cdot συνφ \Rightarrow P = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 10 \cdot 0{,}8 \Rightarrow P = 3200\sqrt{3} = 5543W.$$

Ομοίως για **Β) σύνδεση σε τρίγωνο**, το ρεύμα που διαρρέει κάθε αντίσταση είναι $I=\frac{V}{R}=\frac{400}{23}=17{,}4A$. Επίσης είναι $I_{\pi}=\sqrt{3}\cdot I_{\varphi}=17{,}4\sqrt{3}$ A, οπότε αντικαθιστώντας η ισχύς που καταναλώνεται θα ισοδυναμεί με

$$P=\sqrt{3}\,VI\cdot συν\,\phi=\sqrt{3}\cdot 400\cdot 17{,}4\sqrt{3}\cdot 0{,}8 \Rightarrow P=16704W.$$

Πράγματι η ισχύς στην σύνδεση σε τρίγωνο (16704 W ή 3·5543=16704) είναι 3 φορές μεγαλύτερη από την ισχύ σε σύνδεση αστέρα(5.543W), δηλαδή $3\cdot P_{Y}=P_{\Delta}$.

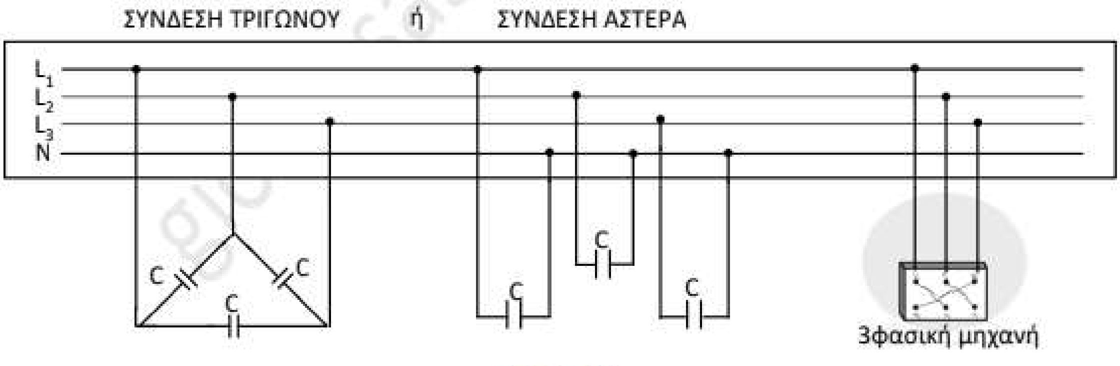
Η **πραγματική ισχύς**, στο τριφασικό σύστημα δίνεται από την σχέση $P=\sqrt{3}\,VI\cdot συνφ$. Η φαινόμενη και η άεργος ισχύς συνδέονται με την πραγματική μέσω της σχέσης $S^2=P^2+Q^2$ και του τριγώνου ισχύος (όπως αναλύθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο σελίδα 120, σχήμα 4.9).

Η φαινόμενη ισχύς στο τριφασικό σύστημα δίνεται από την σχέση $S=\sqrt{3}\,VI$.

Η άεργος ισχύς στο τριφασικό σύστημα δίνεται από την σχέση $Q=\sqrt{3}\,VI\cdot ημ\,\phi$.

5.6 ΑΝΤΙΣΤΑΘΜΙΣΗ ΣΕ ΤΡΙΦΑΣΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

Η αντιστάθμιση σε τριφασικά συστήματα γίνεται με χρήση τριών όμοιων πυκνωτών και με αντιστοιχία σε κάθε μία φάση και ένα πυκνωτή. Πραγματοποιείται σε σύνδεση πυκνωτών σε αστέρα και σε τρίγωνο, όπως στο σχήμα.



Σχήμα 5. 18

Η χωρητικότητα του πυκνωτή αντιστάθμισης δίνεται από την σχέση: $C=\frac{Q_C}{\omega V^2}=\frac{Q_C}{2\pi f V^2}$

η οποία εύκολα προκύπτει καθώς είναι

$$Q_C=V_C I_C=V_C\frac{V_C}{X_C}=V_C\frac{V_C}{\frac{1}{C\omega}}=V_C^{\,2}C\omega \Rightarrow C=\frac{Q_C}{V_C^{\,2}\cdot 2\pi f}.$$

Πρακτικά, αποδεικνύεται ότι η χωρητικότητα των πυκνωτών σε σύνδεση τριγώνου είναι ίση με το 1/3 της σύνδεσης σε αστέρα δηλαδή

$$C_{\Delta} = \frac{1}{3} C_{Y} \text{ ή } C_{Y} = 3C_{\Delta} .$$

Οικονομικότερη επιλογή για αντιστάθμιση τριφασικών συστημάτων είναι η σύνδεση πυκνωτών σε τρίγωνο. Σε εγκαταστάσεις όμως Υψηλής Τάσης η τοποθέτησή των πυκνωτών αντιστάθμισης γίνεται σε σύνδεση αστέρα.

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ 5^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Εξισώσεις τριφασικού συμμετρικού συστήματος	$u_1 = V_o \cdot ημω \cdot t$ $u_2 = V_o \cdot ημ(ω \cdot t + 120^o) = V_o \cdot ημ(ω \cdot t + \frac{2π}{3})$ $u_3 = V_o \cdot ημ(ω \cdot t - 120^o) = V_o \cdot ημ(ω \cdot t - \frac{2π}{3})$	
ΣΥΝΔΕΣΜΟΛΟΓΙΑ	ΤΑΣΗ	ΡΕΥΜΑ
Y (Αστέρα)	$V_π = \sqrt{3} \cdot V_φ$	$I_π = I_φ$
Δ (Τρίγωνο)	$V_π = V_φ$	$I_π = \sqrt{3} \cdot I_φ$
Το αλγεβρικό άθροισμα των τάσεων είναι 0	$u_1 + u_2 + u_3 = 0$	
Το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων είναι 0	$i = i_1 + i_2 + i_3 = 0$	
Πραγματική ισχύς τριφασικού συστήματος	$P = \sqrt{3} \cdot V \cdot I \cdot συνφ$	
Φαινόμενη ισχύς τριφασικού συστήματος	$S^2 = P^2 + Q^2$ $S = \sqrt{3} \cdot V \cdot I$	
Άεργος ισχύς τριφασικού συστήματος	$Q = \sqrt{3} \cdot V \cdot I \cdot ημφ$	
Χωρητικότητα πυκνωτή αντιστάθμισης	$C = \frac{Q_C}{ωV^2} = \frac{Q_C}{2πfV^2}$	

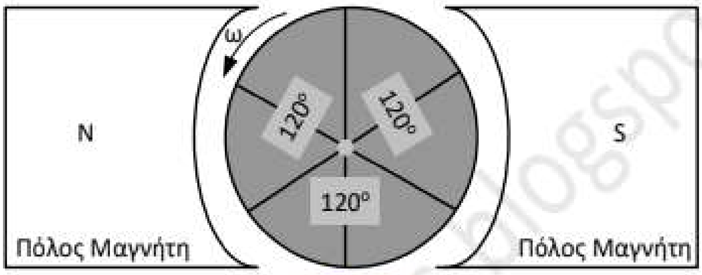
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΕΡΩΤΗΣΗ 5.1

Να περιγράψετε την κατά 120^o μετατόπιση στο χώρο των πλαισίων που περιστρέφονται εντός μαγνητικού πεδίου για την παραγωγή τριφασικής εναλλασσόμενης τάσης. Γιατί επιθυμούμε τριφασικά συστήματα τάσης;

Απάντηση

Τρία όμοια πλαίσια περιστρέφονται σε έναν κοινό άξονα εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου μετατοπισμένα στον χώρο κατά 120° μεταξύ τους. Όταν συμβαίνει αυτό έχουμε παραγωγή τριφασικής εναλλασσόμενης τάσης. Δηλαδή παράγονται τρείς εναλλασσόμενες τάσεις μετατοπισμένες κατά 1/3 της περιόδου (T/3 ή 120° ή 2π/3 rad) .



Σχήμα 5. 19

Οι εξισώσεις των τριών φάσεων είναι: $u_1 = V_o ημωt$, $u_2 = V_o ημ(ωt + 120^o)$, και $u_3 = V_o ημ(ωt - 120^o)$. Οι τρεις φάσεις u_1, u_2 και u_3 έχουν ίδιο πλάτος, περίοδο και χρονική καθυστέρηση ίση με το 1/3 της περιόδου (ή διαφορά φάσης 120°).

Τα τριφασικά συστήματα χρησιμοποιούνται επειδή η τριφασική ισχύς παρέχει σημαντική οικονομία στην λειτουργία και το κόστος που παρέχεται στο δίκτυο μεταφοράς της ηλεκτρικής ενέργειας.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5.2

Τριφασικό δίκτυο έχει φασική τάση 400V. Πόση είναι η πολική τάση;

Απάντηση

Για σύνδεση τριγώνου η πολική τάση είναι $V_π = V_φ = 400V$.

Για σύνδεση αστέρα η πολική τάση είναι $V_π = \sqrt{3} \cdot V_φ = \sqrt{3} \cdot 400 \approx 690V$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5.3

Τριφασικό σύστημα 4 αγωγών (φάσεις L_1, L_2, L_3 και ουδέτερος N), έχει πολική τάση 400V. Μονοφασικός καταναλωτής συνδέεται στο σύστημα μεταξύ φάσης L_1 και ουδετέρου N. Τι τάση θα δείξει το βολτόμετρο που συνδέουμε στα άκρα του;

Απάντηση

Στα άκρα του καταναλωτή θα επικρατεί (μεταξύ L_1 και N) πολική τάση 400V.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5.4

Τρείς αντιστάσεις είναι συνδεδεμένες σε αστέρα. Τι τάση έχει κάθε αντίσταση όταν η πολική τάση σε μια τριφασική γραμμή χωρίς ουδέτερο αγωγό είναι 400V;

Απάντηση

Στα άκρα κάθε αντίστασης θα επικρατεί τάση 230V (για σύνδεση σε αστέρα είναι $V_\phi = \frac{V_\pi}{\sqrt{3}} = \frac{400}{1{,}732} \approx 230V$).

ΕΡΩΤΗΣΗ 5.5

Τριφασικός κινητήρας (με τρία όμοια τυλίγματα) παρέχει ισχύ μέσω του άξονά του σε τυχαίο μηχανικό φορτίο. Ο κινητήρας συνδέεται σε αστέρα και τρίγωνο. Πότε τα τυλίγματα του διαρρέονται από μεγαλύτερο ρεύμα; Πότε καταναλώνεται μεγαλύτερη ισχύς;

Απάντηση

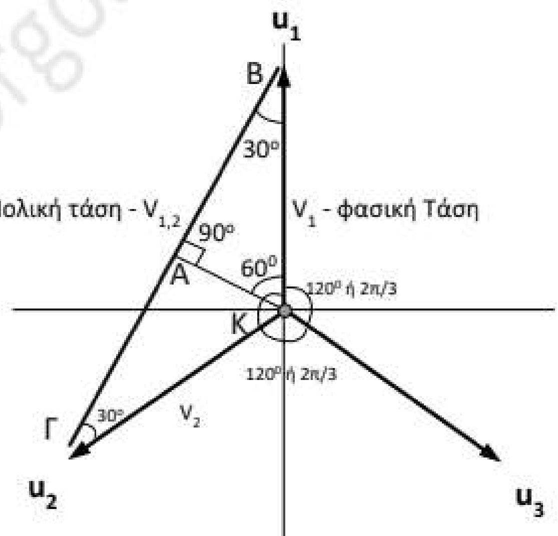
Μεγαλύτερο ρεύμα από το δίκτυο απορροφάται όταν η συνδεσμολογία στο «ακροκιβώτιο» του κινητήρα είναι σε τρίγωνο ($I_\Delta = 3I_Y$). Η ισχύς που καταναλώνεται στην σύνδεση σε τρίγωνο είναι 3 φορές μεγαλύτερη από την ισχύ σε σύνδεση αστέρα ($3P_Y = P_\Delta$).

ΕΡΩΤΗΣΗ 5.6

Από το διανυσματικό διάγραμμα πολικών τάσεων να αποδείξετε την σχέση μεταξύ πολικών και φασικών τάσεων: $V_\pi = \sqrt{3} \cdot V_\phi$.

Απάντηση

Το διανυσματικό διάγραμμα είναι το εξής :



Σχήμα 5. 20

Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο περιοριζόμαστε σε ένα μέρος του (συμμετρία διαγράμματος), στο τρίγωνο που σχηματίζεται $K\hat{A}B$ και στο συμμετρικό του $\Gamma\hat{A}K$.

Για την πολική τάση $V_{1,2}$ (ισοδύναμα $V_{1,2}$=ΒΓ), με γνωστό ότι οι φασικές τάσεις V_1 και V_2, είναι ισότιμες (V_1=V_2), προκύπτει ότι:

$$\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{BA} + \mathrm{A\Gamma} \underset{\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Gamma K}}}{\overset{\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BK}}}{=}} \mathrm{BK}\sigma\upsilon\nu 30^\circ + \mathrm{\Gamma K}\sigma\upsilon\nu 30^\circ = (\mathrm{BB} + \mathrm{\Gamma K})\sigma\upsilon\nu 30^\circ = 2V_1 \sigma\upsilon\nu 30^\circ \Rightarrow$$

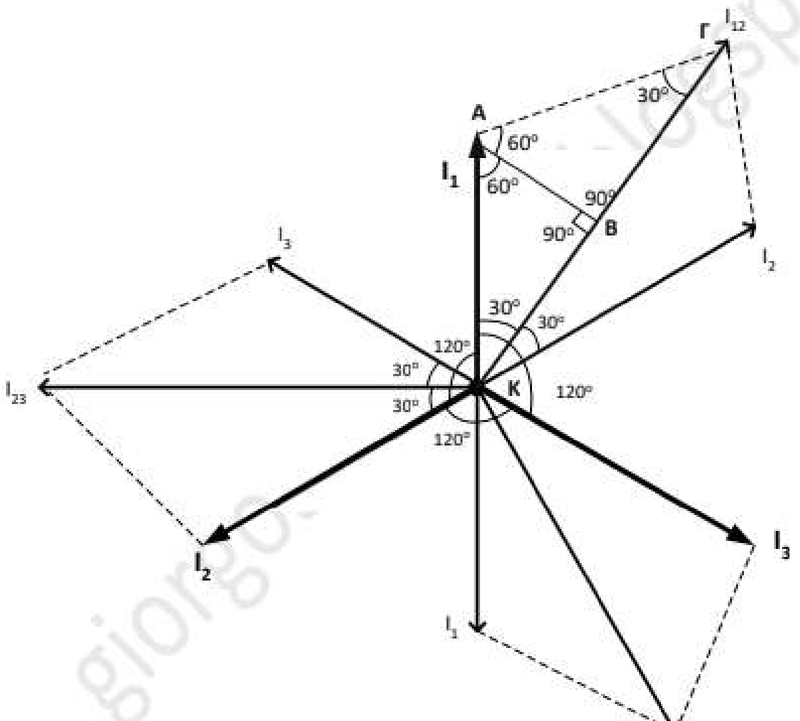
$$V_{1,2} = 2V_1 \frac{\sqrt{3}}{2} = V_1\sqrt{3} \text{ (ή } V_\pi = \sqrt{3}\cdot V_\phi \text{).}$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 5.7

Για το διανυσματικό διάγραμμα ρευμάτων γραμμής και τριγώνου να αποδείξετε την σχέση μεταξύ πολικών και φασικών ρευμάτων: $I_\pi = I_\phi\sqrt{3}$ **ή** $I_{12} = I_1\sqrt{3}$.

Απάντηση

Το διανυσματικό διάγραμμα είναι το εξής:



Σχήμα 5. 21

Από το διανυσματικό διάγραμμα, προκύπτουν τα ρεύματα γραμμής και τριγώνου, εξαιτίας της συμμετρίας που δημιουργείται (τριγωνικές μορφές) των πολικών (I_{12}, I_{23} και I_{31}) και φασικών ρευμάτων (I_1, I_2 και I_3). Από τον ορισμό του συνημίτονου ($\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}$) του σχηματισμένου τριγώνου $\mathrm{K}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}$ και θεωρώντας ότι ΚΓ=I_{12}, ΚΑ=I_1, προκύπτει ότι:

$$\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\mathrm{KB}}{\mathrm{KA}} = \frac{\frac{I_{12}}{2}}{I_1} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{I_{12}}{2I_1} \Rightarrow I_{12} = I_1\sqrt{3} \text{ (ή } I_\pi = I_\phi\sqrt{3} \text{).}$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 5.8

Να αποδείξετε ότι οι τρεις στιγμιαίες τάσεις u_1, u_2, u_3 κάθε χρονική στιγμή έχουν αλγεβρικό άθροισμα μηδέν. Δηλαδή $u_1+u_2+u_3=0$.

Απάντηση

Με τις τάσεις u_1, u_2 και u_3 αντίστοιχα να είναι οι :

$V_o ημωt$, $V_o ημ(ωt+120^o)$ και $V_o ημ(ωt-120^o)$, πράγματι, προκύπτει ότι u=0 καθότι:

$$u=u_1+u_2+u_3=V_o ημωt+V_o ημ(ωt+120^o)+V_o ημ(ωt-120^o) \overset{\substack{ημ(α+β)=ημασυνβ+συναημβ \\ ημ(α-β)=ημασυνβ-ημβσυνα}}{\underset{α=ωt \text{ και } β=120^o}{\Longrightarrow}}$$

$$V_o ημωt+V_o\left(ημωtσυν120^o+ημ120^o\cdot συνωt\right)+V_o\left(ημωtσυν120^o-συνωt\cdot ημ120^o\right)=$$

$$V_o\left[ημωt+\left(ημωtσυν120^o+ημ120^o\cdot συνωt\right)+\left(ημωtσυν120^o-συνωt\cdot ημ120^o\right)\right]\Rightarrow$$

$$u=V_o\left(ημωt+ημωt\cdot συν120^o+ημωt\cdot συν120^o\right)=V_o\left(ημωt+2\cdot ημωt\cdot συν120^o\right)=$$

$$V_o\left(ημωt+2\cdot ημωt\cdot(-\frac{1}{2})\right)=V_o ημωt-V_o ημωt\Rightarrow u=0.$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 5.9

Σχεδιάστε ένα τριφασικό κύκλωμα με τα εξής:

1. Πηγή τάσης συνδεδεμένη σε αστέρα και καταναλωτή συνδεδεμένο σε τρίγωνο (σύνδεση Υ-Δ).

2. Πηγή τάσης συνδεδεμένη σε τρίγωνο και καταναλωτή συνδεδεμένο σε αστέρα (σύνδεση Δ-Υ).

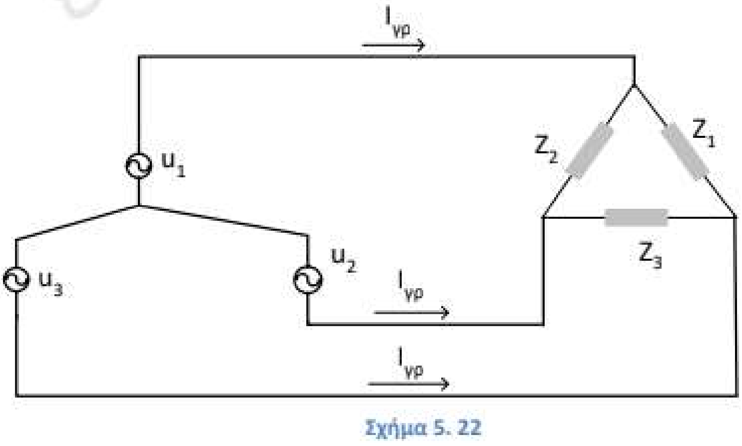
3. Πηγή τάσης συνδεδεμένη σε αστέρα και καταναλωτή συνδεδεμένο σε αστέρα (σύνδεση Υ-Υ).

4. Πηγή τάσης συνδεδεμένη σε τρίγωνο και καταναλωτή συνδεδεμένο σε τρίγωνο (σύνδεση Δ-Δ).

Απάντηση

1.

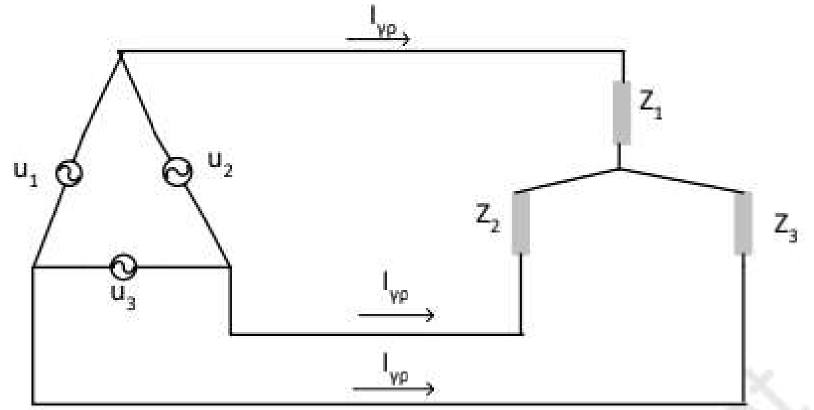
Για σύνδεση Υ-Δ, το σχέδιο είναι το επόμενο:



Σχήμα 5. 22

2.

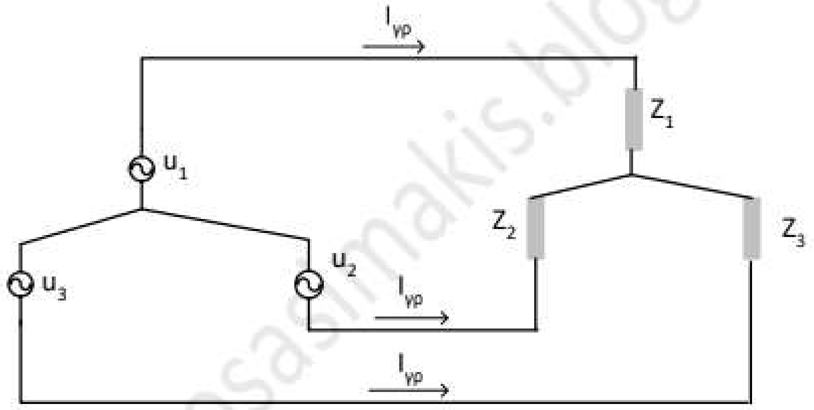
Για σύνδεση Δ-Υ, το σχέδιο είναι το επόμενο:



Σχήμα 5. 23

3.

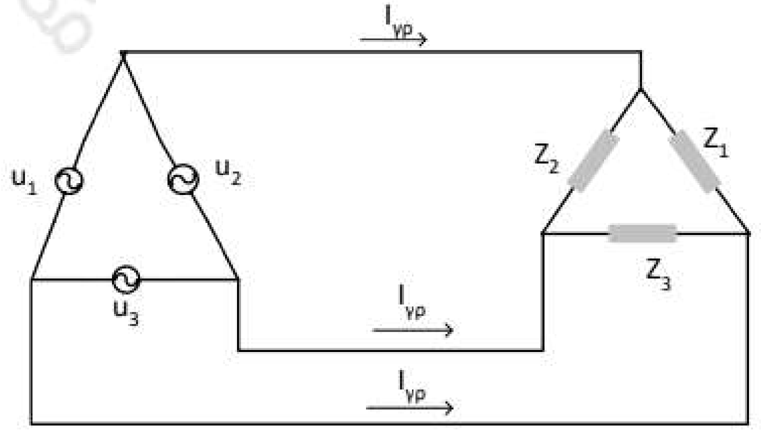
Για σύνδεση Υ-Υ, το σχέδιο είναι το επόμενο:



Σχήμα 5. 24

4.

Για σύνδεση Δ-Δ, το σχέδιο είναι το επόμενο:



Σχήμα 5. 25

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Δίνονται για τις ασκήσεις $\sqrt{3}=1,732$, $\sqrt{2}=1,414$ και π=3,14. Δεκτά τα αποτελέσματα και χωρίς την αριθμητική αντικατάσταση των $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ και του π, όπου αυτά εμφανίζονται.

ΑΣΚΗΣΗ 5.1

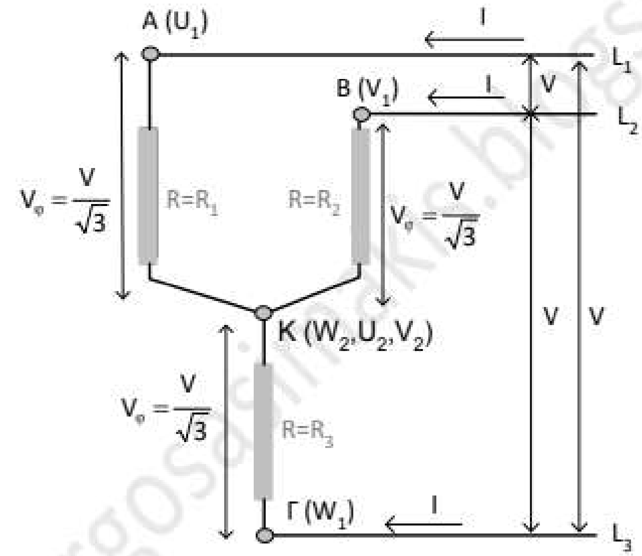
Τρείς ωμικές αντιστάσεις $R_1=R_2=R_3=R=20\Omega$ (συμμετρικό σύστημα καταναλωτών) τροφοδοτούνται από δίκτυο 230/400 V (φασική/πολική τάση), σε σύνδεση Αστέρα. Ζητούνται:

1. Η ένταση των ρευμάτων που διαρρέει τα φορτία.

2. Η ένταση του ρεύματος γραμμής.

Απάντηση

Για σύνδεση αστέρα των αντιστάσεων, έχουμε το εξής διάγραμμα σύνδεσης:



Σχήμα 5. 26

Στο σχήμα, το ρεύμα που διαρρέει τους αγωγού των φάσεων L_1, L_2 και L_3, καλείται ρεύμα γραμμής και συμβολίζεται με $I=I_{γραμμής}$. Στα άκρα κάθε αντίστασης έχουμε φασική τάση V_{ϕ}.

1.

Τα φορτία των σύνθετων αντιστάσεων (καταναλωτών) διαρρέονται από ρεύμα

$$I_{\phi}=\frac{V_{\phi}}{Z}=\frac{230}{23}\Rightarrow I_{\phi}=10\text{A}$$

2.

Το ρεύμα γραμμής που διαρρέει κάθε γραμμή φάσης σε σύνδεση αστέρα, είναι $I=I_{\phi}=10$ A.

ΑΣΚΗΣΗ 5.2

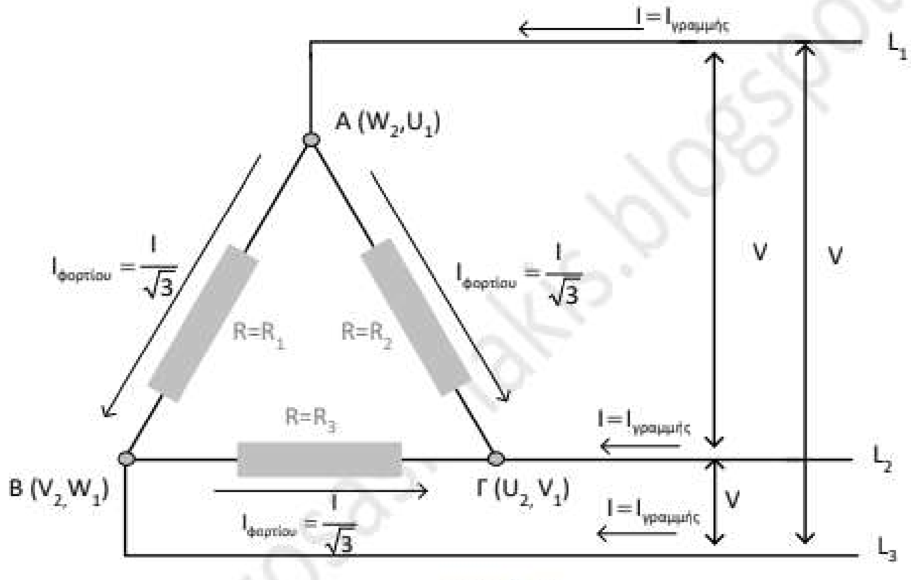
Τρείς ωμικές αντιστάσεις R_1=R_2=R_3=R=20Ω (συμμετρικό σύστημα καταναλωτών) τροφοδοτούνται από δίκτυο 230/400 V (φασική/πολική τάση), σε σύνδεση Τριγώνου. Ζητούνται:

1. Η ένταση των ρευμάτων που διαρρέει τα φορτία.

2. Η ένταση του ρεύματος γραμμής.

Απάντηση

Για σύνδεση τριγώνου των αντιστάσεων, έχουμε το επόμενο διάγραμμα σύνδεσης. Στο σχήμα, το ρεύμα που διαρρέει τους αγωγού των φάσεων L_1, L_2 και L_3, καλείται ρεύμα γραμμής και συμβολίζεται με $I=I_{γραμμής}$. Στα άκρα κάθε αντίστασης έχουμε το πολικό ρεύμα $I_π=I_{φορτίου}=I_φ$. Επίσης οι τάσεις μεταξύ των φορτίων και των φάσεων τροφοδοσίας είναι ίσες δηλαδή $V=V_π=V_φ$.



Σχήμα 5. 27

1.

Τα φορτία των σύνθετων αντιστάσεων (καταναλωτών) διαρρέονται από ρεύμα

$$I_{φορτίου} = \frac{V_φ}{R} = \frac{V_π}{P} = \frac{400}{23} \Rightarrow I = 17{,}39A \ .$$

2.

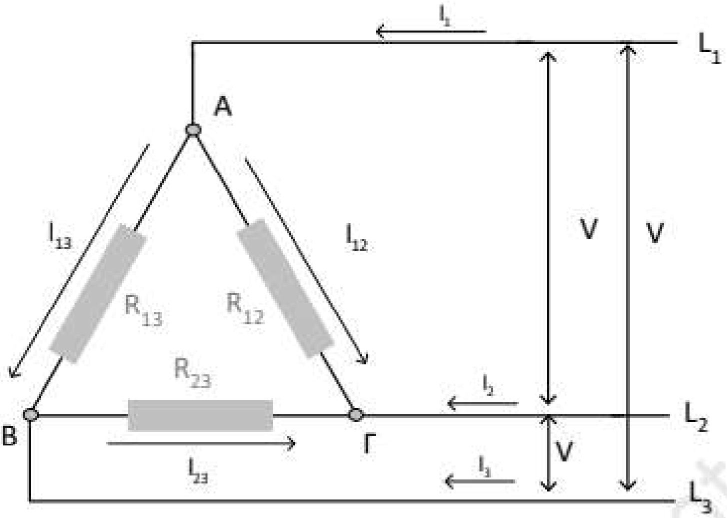
Το ρεύμα γραμμής που διαρρέει κάθε γραμμή φάσης είναι

$$I = \sqrt{3} I_{φορτίου} = \sqrt{3}\frac{V_π}{R} = \frac{400}{23} \Rightarrow I_φ = 17{,}39\sqrt{3}\ A\ .$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.3

Τριφασικό σύστημα αποτελείται από τρείς όμοιες αντιστάσεις (συμμετρικό σύστημα καταναλωτών) συνδεδεμένο σε τρίγωνο, με R_1=R_2=R_3=100 Ω σε κάθε φάση τροφοδοσίας. Η πηγή εναλλασσόμενης τάσης είναι 230 V. Υπολογίστε το ρεύμα γραμμής (πολικό ρεύμα).

Απάντηση



Σχήμα 5.28

Το ρεύμα γραμμής για σύνδεση τριγώνου, είναι: $I_\pi = \sqrt{3} \cdot I_\Phi = \sqrt{3}\frac{V_\Phi}{R} = \sqrt{3}\frac{400}{100} = 4\sqrt{3}$ A

ή I_π=6,9 A .

ΑΣΚΗΣΗ 5.4

Τρεις όμοιες ωμικές αντιστάσεις R_1=R_2=R_3=R=20 Ω, είναι συνδεδεμένες σε τρίγωνο και τροφοδοτούνται με αγωγούς από δίκτυο πολικής τάσης V=400V. Να υπολογιστούν:

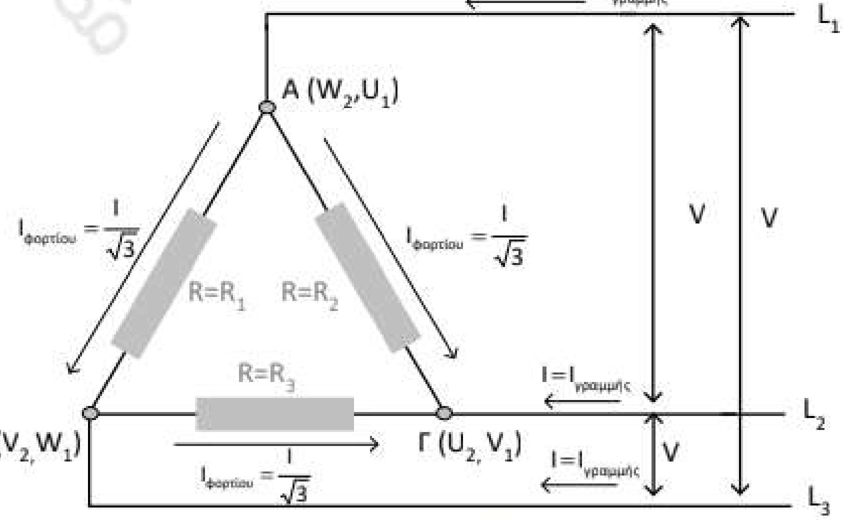
1. Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τις αντιστάσεις.

2. Η ένταση του ρεύματος στους αγωγούς της γραμμής τροφοδοσίας.

3. Η ισχύς που καταναλώνεται σε κάθε αντίσταση.

4. Να υπολογίσετε τα ερωτήματα 1,2 και 3 όταν οι αντιστάσεις συνδεθούν σε αστέρα.

Απάντηση



Σχήμα 5.29

Έχουμε σύνδεση τριγώνου. Στο σχήμα, το ρεύμα που διαρρέει τους αγωγού των φάσεων L_1, L_2 και L_3, καλείται ρεύμα γραμμής και συμβολίζεται με $I=I_{γραμμής}$. Στα άκρα κάθε αντίστασης έχουμε το πολικό ρεύμα $I_π=I_φ=I_{φορτίου}$. Επίσης οι τάσεις μεταξύ των φορτίων και των φάσεων τροφοδοσίας είναι ίσες δηλαδή $V=V_π=V_φ$.

1.

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τις αντιστάσεις (με σύνδεση σε τρίγωνο δηλαδή η πολική τάση είναι ισοδύναμη με την φασική), θα είναι ίση με

$$I_φ=\frac{V_φ}{R}=\frac{V_π}{R}=\frac{400}{20}\Rightarrow I_φ=20A.$$

2.

Το ρεύμα γραμμής (δηλαδή η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τους αγωγούς τροφοδοσίας) θα είναι $I_{γρ}=\sqrt{3}I_φ$, οπότε αντικαθιστώντας $I=20\sqrt{3}\ A$.

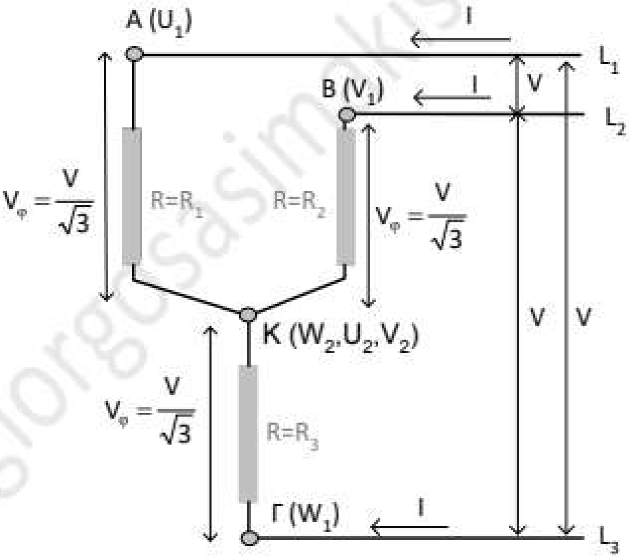
3.

Η ισχύς που καταναλώνεται σε κάθε αντίσταση είναι

$$P=I_φ{}^2\cdot R=(20)^2\cdot 20=400\cdot 20=8000W \text{ ή } 8KW.$$

4.

Συνδέουμε τις όμοιες αντιστάσεις σε αστέρα.



Σχήμα 5. 30

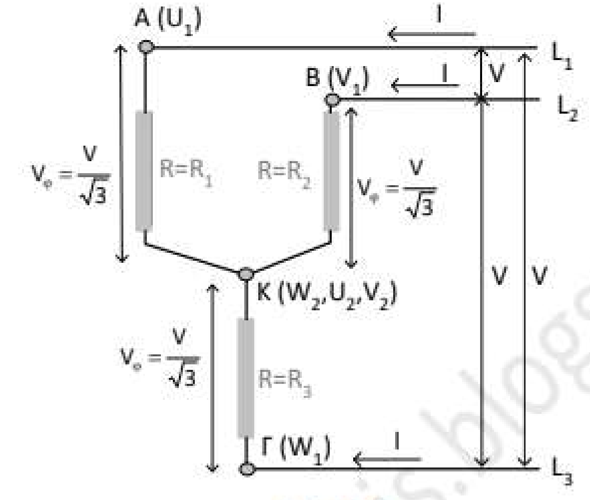
Τότε η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τις αντιστάσεις, είναι $I_φ=\frac{V_φ}{R}=\frac{\frac{V_π}{\sqrt{3}}}{R}=\frac{\frac{400}{\sqrt{3}}}{20}=20\sqrt{3}A$. Επίσης το ρεύμα γραμμής που διαρρέει τους αγωγούς τροφοδοσίας θα είναι $I=I_{γρ}=I_φ=20\sqrt{3}\ A$. Τέλος, η ισχύς που καταναλώνεται σε κάθε αντίσταση είναι

$$P=I_φ{}^2\cdot R=\left(20\sqrt{3}\right)^2\cdot 20=24000\,W \text{ ή } 24KW.$$

◊ Επαληθεύουμε από τα αποτελέσματα, ότι η ισχύς σε τρίγωνο είναι τρείς φορές μεγαλύτερη από την ισχύ σε αστέρα (δηλαδή $P_Y = \frac{1}{3} P_\Delta$).

ΑΣΚΗΣΗ 5.5

Τρεις αντιστάσεις R_1=R_2=R_3=R=40Ω, συνδεδεμένες σε αστέρα διαρρέονται από ρεύμα έντασης Ι=5 Α. Να βρείτε την φασική και πολική τάση του δικτύου.



Σχήμα 5.31

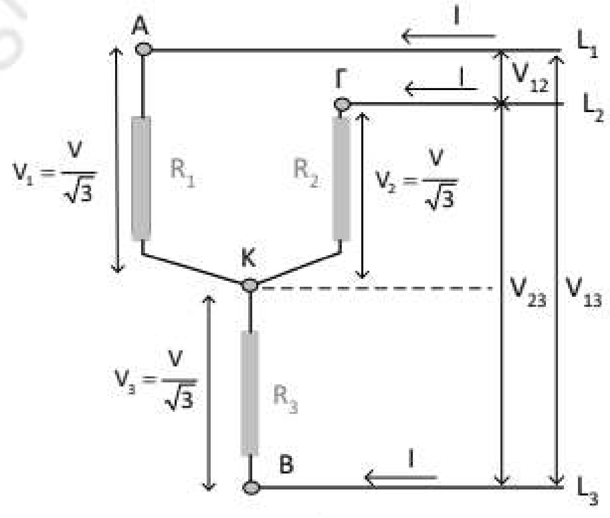
Απάντηση

Η φασική τάση είναι $V_\phi = I_\phi \cdot R = 5 \cdot 40 = 200V$.

Η πολική τάση είναι $V_\pi = \sqrt{3} \cdot V_\phi = \sqrt{3} \cdot 200 = 347V$.

ΑΣΚΗΣΗ 5.6

Ένα τριφασικό κύκλωμα αποτελείται από συμμετρικό καταναλωτή συνδεδεμένο σε αστέρα με 100Ω σε κάθε φάση (R_1=R_2=R_3=100 Ω). Η πηγή εναλλασσόμενης τάσης είναι 400V. Υπολογίστε το φασικό ρεύμα.



Σχήμα 5.32

Απάντηση

Η φασική τάση είναι

$$V_\phi = \frac{V_\pi}{\sqrt{3}} = \frac{400}{\sqrt{3}}\,V\,.$$

Οπότε και το φασικό ρεύμα είναι

$$I_\phi = \frac{V_\phi}{R} = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}}}{100} = 2{,}3\ A\,.$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.7

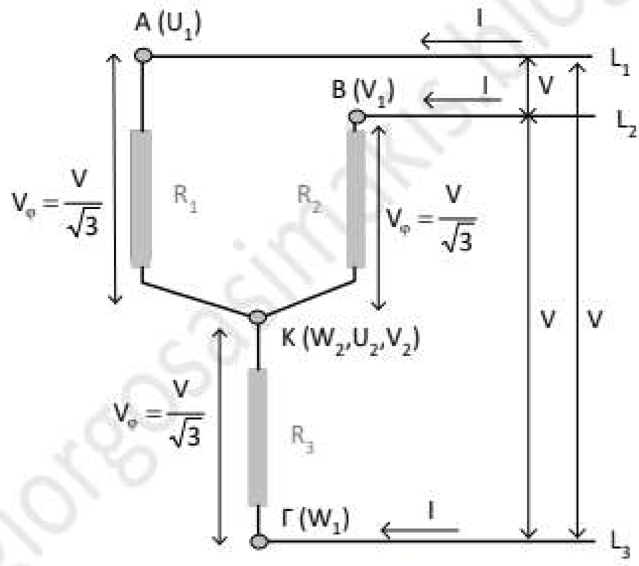
Τρεις ωμικές αντιστάσεις R_1=R_2=20Ω, R_3=10Ω, είναι συνδεδεμένες σε αστέρα και τροφοδοτούνται από πηγή πολικής τάσης V=400V και 50Hz. Να υπολογιστούν:

1. Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τις αντιστάσεις

2. Η ένταση του ρεύματος στους αγωγούς της γραμμής τροφοδοσίας

3. Η ένταση του ρεύματος του ουδετέρου αγωγού.

Απάντηση



Σχήμα 5.33

1.

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει την αντιστάσεις R_1, είναι

$$I_1 = \frac{V_\phi}{R_1} = \frac{\frac{V_\pi}{\sqrt{3}}}{R_1} = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}}}{20} = 20\sqrt{3}\,A\,.$$

Επίσης για την R_2, το ρεύμα είναι $I_2 = \frac{V_\phi}{R_2} = \frac{\frac{V_\pi}{\sqrt{3}}}{R_2} = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}}}{20} = 20\sqrt{3}\,A$.

Για την αντίσταση R_3, το ρεύμα είναι $I_3 = \frac{V_\phi}{R_3} = \frac{\frac{V_\pi}{\sqrt{3}}}{R_3} = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}}}{10} = 40\sqrt{3}\,A$.

2.

Το ρεύμα γραμμής που διαρρέει τους αγωγούς τροφοδοσίας θα είναι

$$I_1 = I_2 = I_{γρ} = 20\sqrt{3}\ \text{A}.$$

Για την αντίσταση R_3, είναι

$$I_3 = I_{γρ,3} = 40\sqrt{3}\ \text{A}.$$

3.

Το ρεύμα του ουδετέρου, είναι το άθροισμα των τριών φάσεων (φασικών στιγμιαίων ρευμάτων) και είναι ισοδύναμα με ω=2πf=2·3,14·50=314 rad/sec και αντίστοιχα πλάτη ρευμάτων I_{o1}=I_{o2}= $\left(20\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{2} = 20\sqrt{6}$ A και I_{o3}= $\left(10\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{2} = 10\sqrt{6}$ A :

$$i = i1 + i2 + i3 = \left(20\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{2}\cdot ημ(314t) + \left(20\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{2}\cdot ημ(314t - 120^\circ) +$$
$$+\left(10\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{2}\cdot ημ(314t - 240^\circ) \Rightarrow$$
$$i = 20\sqrt{6}\,ημ(314t) + 20\sqrt{6}\cdot ημ(314t - 120^\circ) + 10\sqrt{6}\cdot ημ(314t - 240^\circ).$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.8

Τρεις όμοιες ωμικές αντιστάσεις R_1=R_2=R_3=R, είναι συνδεδεμένες σε τρίγωνο και τροφοδοτούνται με αγωγούς από δίκτυο πολικής τάσης V=400V. Κάθε αντίσταση διαρρέεται από ρεύμα έντασης 5 A. Να υπολογιστούν:

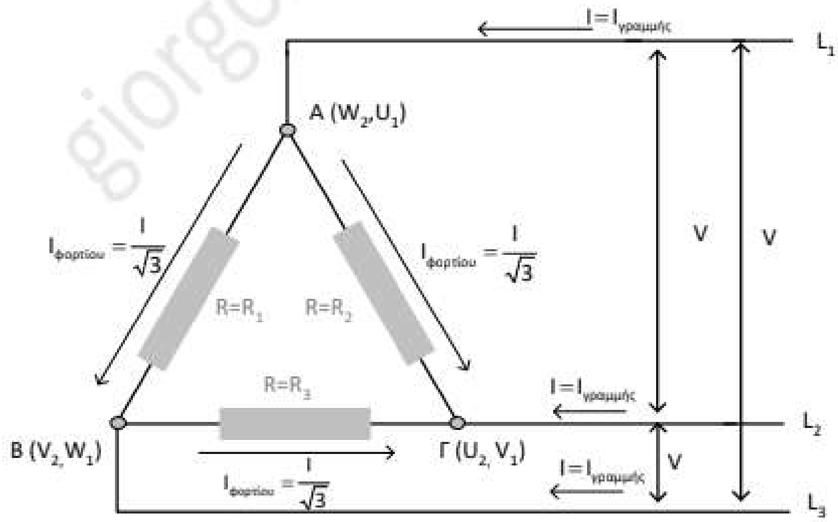
1. Η φασική τάση του δικτύου τροφοδότησης.

2. Η ένταση του ρεύματος στους αγωγούς της γραμμής τροφοδοσίας.

3. Η τιμή των ωμικών αντιστάσεων.

4. Η ισχύς που καταναλώνεται σε κάθε αντίσταση και σε όλες μαζί (συνολική ισχύς).

Απάντηση



Σχήμα 5.34

1.

Η φασική τάση για σύνδεση τριγώνου είναι $V_\pi = V_\phi = 400\,\text{V}$

2.

Το ρεύμα γραμμής (δηλαδή η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τους αγωγούς τροφοδοσίας) θα είναι $I_{γρ} = \sqrt{3}I_{φ}$, οπότε αντικαθιστώντας προκύπτει $I = 5\sqrt{3}$ A.

3.

Οι ωμικές αντιστάσεις είναι $R = \frac{V_{φ}}{I_{φ}} = \frac{400}{5} = 80\ \Omega$. Οπότε $R_1=R_2=R_3=80\ \Omega$.

4.

Η ισχύς σε κάθε αντίσταση για σύνδεση τριγώνου είναι

$$P = {I_{φ}}^2 \cdot R = \left(5\sqrt{3}\right)^2 \cdot 80 = 25 \cdot 80 = 2000\ \text{W} \quad ή\ \ 2\text{KW}.$$

Η συνολική ισχύς των αντιστάσεων είναι $P = 3 \cdot V_{φ} I_{φ} = 6000$ W ή 6KW.

(ή με πολικές τιμές $P = \sqrt{3} \cdot V_{π} I_{π} = \sqrt{3} V_{π} I_{π} = 6000$ W)

ΑΣΚΗΣΗ 5.9

Τρεις αντιστάσεις $R_1=R_2=R_3=R=40\Omega$, συνδέονται σε αστέρα και δίκτυο πολικής τάσης V=400V. Να βρεθούν:

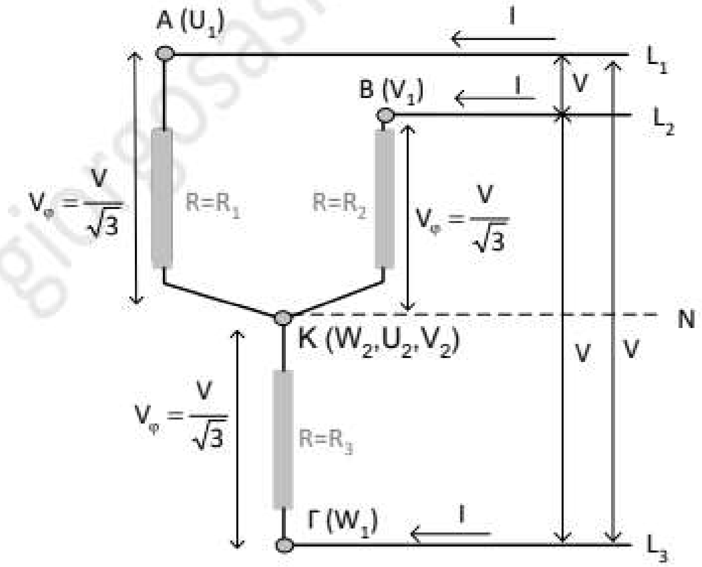
1. Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τις αντιστάσεις.

2. Η ένταση του ρεύματος στους αγωγούς της γραμμής τροφοδοσίας.

3. Η ισχύς που καταναλώνεται σε κάθε αντίσταση.

Απάντηση

Η σύνδεση των αντιστάσεων είναι σε αστέρα.



Σχήμα 5. 35

1.

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τις αντιστάσεις σε σύνδεση αστέρα, είναι

$$I_{φ} = \frac{V_{φ}}{R} = \frac{\frac{V_{π}}{\sqrt{3}}}{R} = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}}}{40} = \frac{400 \cdot \sqrt{3}}{40 \cdot 3} \Rightarrow I_{φ} = 5{,}78\,\text{A}.$$

2.

Το ρεύμα γραμμής (δηλαδή η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τους αγωγούς τροφοδοσίας σε σύνδεση αστέρα), θα είναι $I_{γρ} = I_{φ} = 5{,}78A$.

3.

Η ισχύς που καταναλώνεται σε κάθε αντίσταση είναι $P = I_{φ}^{2} \cdot R = 5{,}87^{2} \cdot 40 = 1333{,}3W$.

ΑΣΚΗΣΗ 5.10

Τρεις αντιστάσεις R_1=R_2=R_3=R=40Ω, συνδέονται σε τρίγωνο και δίκτυο πολικής τάσης V=400V. Να βρεθούν:

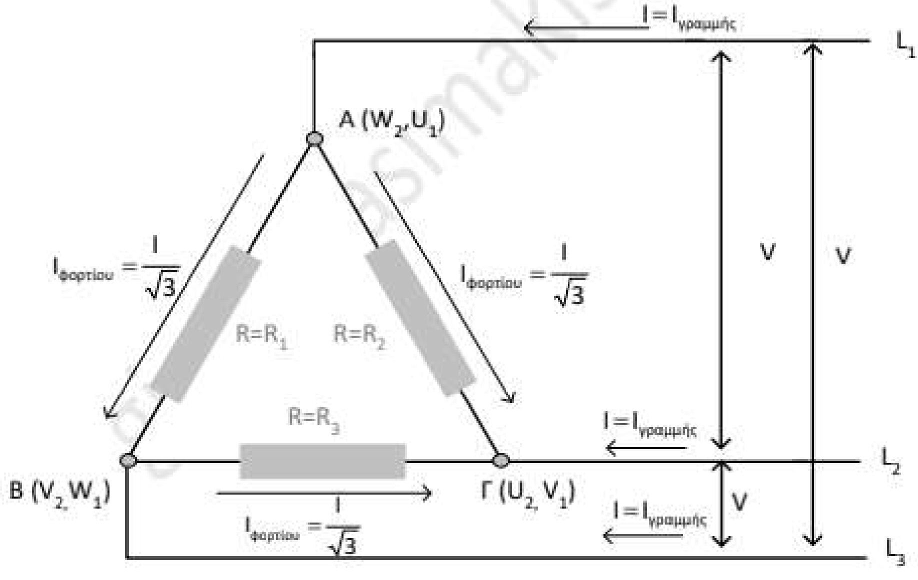
1. Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τις αντιστάσεις.

2. Η ένταση του ρεύματος των γραμμών τροφοδοσίας (L_1, L_2, L_3).

3. Η ισχύς κατανάλωσης για κάθε αντίσταση.

Απάντηση

Για σύνδεση τριγώνου των αντιστάσεων, έχουμε το επόμενο διάγραμμα σύνδεσης. Στο σχήμα, το ρεύμα που διαρρέει τους αγωγού των φάσεων L_1, L_2 και L_3, καλείται ρεύμα γραμμής και συμβολίζεται με $I=I_{γραμμής}$. Στα άκρα κάθε αντίστασης έχουμε το πολικό ρεύμα $I_π=I_φ=I_{φορτίου}$. Επίσης οι τάσεις μεταξύ των φορτίων και των φάσεων τροφοδοσίας είναι ίσες, δηλαδή $V=V_π=V_φ$.



Σχήμα 5. 36

1.

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τις αντιστάσεις (σε σύνδεση τριγώνου η πολική τάση είναι ισοδύναμη με την φασική), θα είναι ίση με

$$I_φ = \frac{V_φ}{R} = \frac{V_π}{R} = \frac{400}{40} \Rightarrow I_φ = 10A.$$

2.

Το ρεύμα γραμμής θα είναι $I_{γρ} = \sqrt{3} I_φ$, οπότε αντικαθιστώντας $I_{γρ} = \sqrt{3} \cdot 10 = 17{,}32A$.

3.

Η ισχύς σε κάθε αντίσταση είναι

$$P = I_\phi{}^2 \cdot R = 10^2 \cdot 40 = 4000\,W = 4KW\,.$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.11

Τρεις ωμικές αντιστάσεις R_1=R_2=R_3=20Ω, είναι συνδεδεμένες σε αστέρα και τροφοδοτούνται από πηγή πολικής τάσης V=400V. Να υπολογιστούν:

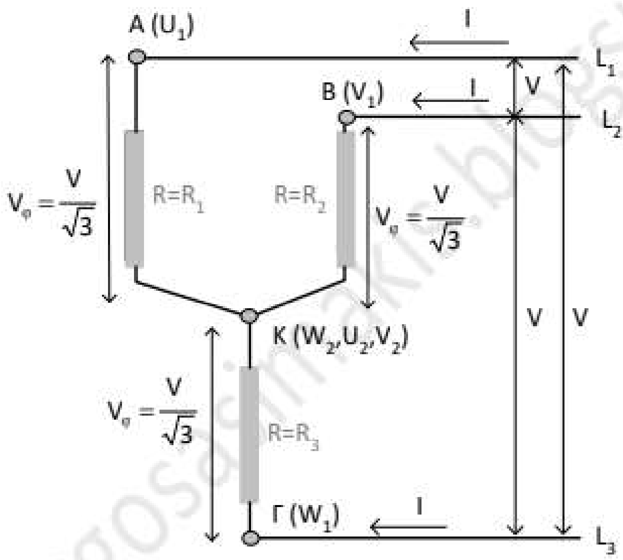
1. Η τάση στα άκρα κάθε αντίστασης.

1. Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τις αντιστάσεις

3. Η ένταση του ρεύματος των γραμμών τροφοδοσίας (L_1, L_2, L_3).

4. Αποσυνδέεται από την σύνδεση η αντίσταση R_3. Να βρείτε την τάση και την ισχύ στα άκρα κάθε αντίστασης.

Απάντηση



Σχήμα 5. 37

1.

Η τάση στα άκρα κάθε αντίστασης για σύνδεση αστέρα είναι

$$V_\phi = \frac{V_\pi}{\sqrt{3}} = \frac{400}{\sqrt{3}} \approx 230\,V\,.$$

2.

Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τις αντιστάσεις R_1,R_2 και R_3 είναι

$$I = \frac{V_\phi}{R} = \frac{\frac{V_\pi}{\sqrt{3}}}{R} = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}}}{20} = 20\sqrt{3}\,A\,.$$

3.

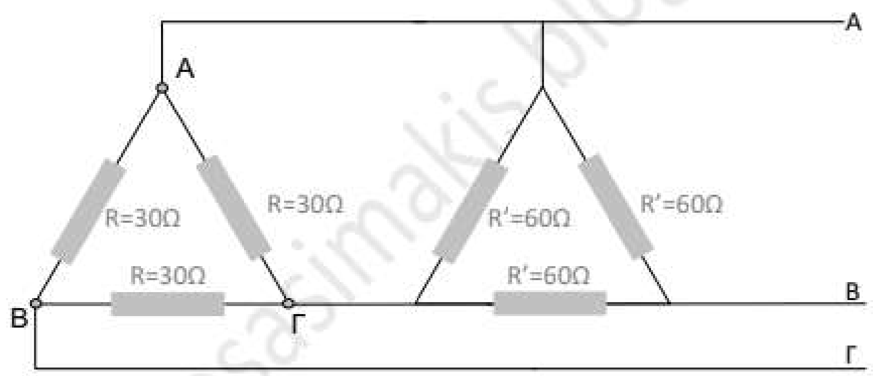
Το ρεύμα γραμμής που διαρρέει τους αγωγούς τροφοδοσίας είναι

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_{\gamma\rho} = 20\sqrt{3}\;A\,.$$

4.
Για τις αντιστάσεις R_1, R_2 (που απομένουν συνδεδεμένες όταν αποσυνδεθεί μία από τις αντιστάσεις και συγκεκριμένα η αντίσταση R_3), η τάση που θα επικρατεί στα άκρα κάθε μιας εξ' αυτών θα είναι $V_\phi = \frac{V_\pi}{2} = \frac{400}{2} = 200\,V$. Επίσης το ρεύμα που διαρρέει κάθε μια εκ των δύο αντιστάσεων που απομένουν στο κύκλωμα είναι $I = \frac{V_\phi}{R} = \frac{200}{20} \Rightarrow I = 10\,A$. Η ισχύς επομένως κάθε αντίστασης θα είναι ίση με $P = I_\phi^{\,2} \cdot R = 10^2 \cdot 20 = 2000\,W$.

ΑΣΚΗΣΗ 5.12

Τριφασικό συμμετρικό σύστημα αντιστάσεων αποτελείται από δύο ομάδες συμμετρικών αντιστάσεων συνδεδεμένες σε τρίγωνο, όπως απεικονίζεται στο σχήμα. Η πρώτη ομάδα αντιστάσεων αποτελείται από τις $R_1=R_2=R_3=30\ \Omega$ και η δεύτερη από τις $R'_1=R'_2=R'_3=60\ \Omega$.



Σχήμα 5. 38

Το σύστημα τροφοδοτείται από πηγή εναλλασσόμενης τάσης 230V. Να βρείτε το ρεύμα γραμμής (πολικό ρεύμα).

Απάντηση

Η ολική αντίσταση είναι $R = \frac{30 \cdot 60}{30+60} = 20\,\Omega$.

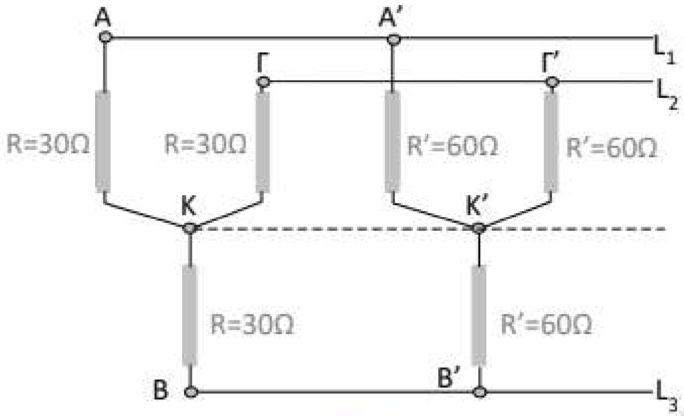
Το ρεύμα γραμμής είναι:

$$I_\pi = \sqrt{3} \cdot I_\phi = \sqrt{3}\frac{V}{R} = \sqrt{3}\frac{230}{20} = 11{,}5\sqrt{3} \approx 20\ A\ .$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.13

Τριφασικό συμμετρικό σύστημα αντιστάσεων αποτελείται από δύο ομάδες συμμετρικών αντιστάσεων συνδεδεμένες σε αστέρα, όπως απεικονίζεται στο σχήμα. Η πρώτη ομάδα αντιστάσεων αποτελείται από τις $R_1=R_2=R_3=30\ \Omega$ και η

δεύτερη από τις $R'_1=R'_2=R'_3=60\ \Omega$. Το σύστημα τροφοδοτείται από πηγή εναλλασσόμενης τάσης 400V. Να βρείτε το ρεύμα γραμμής (πολικό ρεύμα).



Σχήμα 5. 39

Απάντηση

Η ολική αντίσταση είναι $R = \dfrac{30 \cdot 60}{30+60} = 20\,\Omega$.

Το ρεύμα γραμμής είναι $I = \dfrac{V_\phi}{R} = \dfrac{\frac{400}{\sqrt{3}}}{20} = \dfrac{400}{20\sqrt{3}} = 11{,}5\ A$.

ΑΣΚΗΣΗ 5.14

Δύο συμμετρικοί καταναλωτές, τροφοδοτούνται από δίκτυο πολικής τάσης 400V, και σε βρίσκονται σε σύνδεση αστέρα παράλληλης διάταξης δύο καταναλωτών (ο κάθε καταναλωτής περιέχει «ομάδα» από τρείς συμμετρικές ωμικές αντιστάσεις). Στον πρώτο συμμετρικό σε σύνδεση αστέρα καταναλωτή, έχουμε αντιστάσεις 20 Ω η κάθε μία εξ' αυτών και στον δεύτερο αστέρα οι αντιστάσεις των καταναλωτών είναι 10 Ω η κάθε μία. Ζητούνται:

1. Να γίνει το αντίστοιχα διάγραμμα διάταξης της σύνδεσης σε αστέρα.

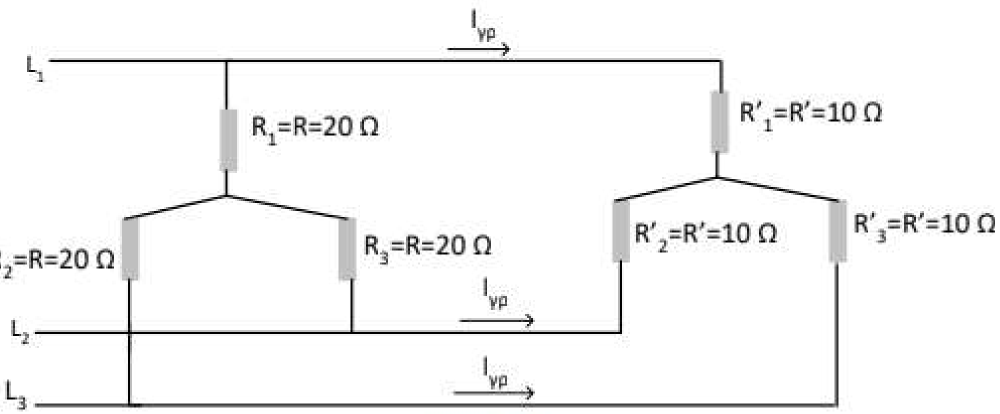
2. Να βρεθεί η συνολική ισοδύναμη αντίσταση της διάταξης.

3. Να βρεθεί το ρεύμα γραμμής.

4. Να επαναλάβετε τα ερωτήματα 1, 2 και 3 για σύνδεση τριγώνου (αντί αστέρα).

Απάντηση

1. Η παράλληλη διάταξη δύο καταναλωτών (με τις ωμικές αντιστάσεις τους) συνδεδεμένων σε αστέρα, φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 5. 40

2.

Η ολική αντίσταση για την παράλληλη σύνδεση είναι

$$R_{ολ} = \frac{R \cdot R'}{R + R'} = \frac{20 \cdot 10}{20 + 10} = \frac{200}{30} = 6{,}67\ \Omega .$$

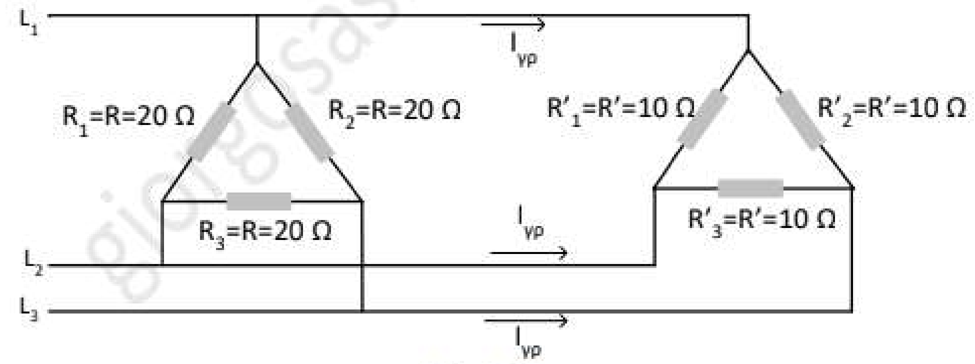
3.

Το ρεύμα γραμμής (στην σύνδεση αστέρα) είναι

$$I = \frac{V_\phi}{R_{ολ}} = \frac{\frac{V_\pi}{\sqrt{3}}}{R_{ολ}} = \frac{\frac{400}{\sqrt{3}}}{6{,}67} = \frac{400}{6{,}67 \cdot \sqrt{3}} = \frac{60\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3}\ \text{A} \ \text{ ή } \ I = 34{,}62\,\text{A} .$$

4.

Η παράλληλη διάταξη δύο καταναλωτών (με τις ωμικές αντιστάσεις τους) συνδεδεμένων σε τρίγωνο, φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 5.41

Η ολική αντίσταση για την παράλληλη σύνδεση είναι

$$R_{ολ} = \frac{R \cdot R'}{R + R'} = \frac{20 \cdot 10}{20 + 10} = \frac{200}{30} = 6{,}67\ \Omega .$$

Το φασικό ρεύμα (στην σύνδεση τριγώνου) είναι

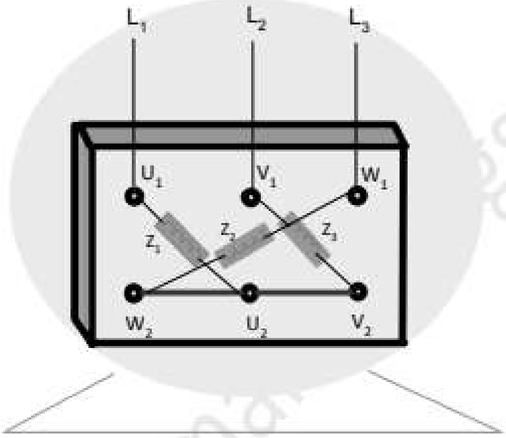
$$I_\phi = \frac{V_\phi}{R_{ολ}} = \frac{V_\pi}{R_{ολ}} = \frac{400}{6{,}67} = \frac{400}{6{,}67} = 11{,}5\,\text{A} .$$

Οπότε το ρεύμα γραμμής είναι $I = \sqrt{3} I_\phi = 11{,}5\sqrt{3} = 20\ \text{A}$.

◊ Επαληθεύουμε από τα αποτελέσματα ότι όταν έχουμε καταναλωτές σε σύνδεση τριγώνου, το ρεύμα γραμμής είναι 3 φορές μεγαλύτερο από το ρεύμα γραμμής κατά την σύνδεση των καταναλωτών σε αστέρα (δηλαδή $I_Y = \frac{1}{3} I_\Delta$).

ΑΣΚΗΣΗ 5.15

Α.Τ.Κ.Β.Δ. (ασύγχρονος τριφασικός κινητήρας βραχυκυκλωμένου δρομέα) έχει ονομαστικά μεγέθη: 230/400 V (φασική/πολική), 50 Hz. Ο συντελεστής ισχύος είναι συνφ=0,7. Κάθε ένας εκ των αγωγών σύνδεσης (τα τυλίγματά του), κατά την σύνδεση των τριών φάσεων (L_1, L_2, L_3) του κινητήρα, διαρρέεται από ρεύμα έντασης 10 Α. Ο κινητήρας είναι συνδεδεμένος σε αστέρα (όπως στο σχήμα).



Σχήμα 5. 42

Ζητούνται τα εξής:

1. Να βρεθεί η ονομαστική ισχύς (Ρ) του κινητήρα, που απορροφά από το δίκτυο.

2. Να βρεθεί η φαινόμενη και η άεργος ισχύς, του κινητήρα.

3. Να βρείτε τον βαθμό απόδοσης του κινητήρα εάν οι απώλειές του στην έξοδο του κινητήρα κατά την σύνδεσή του άξονα του με ωφέλιμο φορτίο (μηχανική ισχύς εξόδου) είναι της τάξης των 1KW.

4. Βλάβη στο σύστημα τροφοδοσίας, διακόπτει μία εκ των τριών φάσεων τροφοδοσίας του κινητήρα, οπότε έχουμε δύο αντιστάσεις λειτουργίας από την σύνδεση σε αστέρα. Να βρείτε την πραγματική ισχύ κατανάλωσής τους.

5. Επιδιορθώνεται η βλάβη και στη συνέχεια πραγματοποιούμε αντιστάθμιση, ώστε ο κινητήρας να βελτιώσει τον συντελεστή ισχύος του και ο νέος να γίνει συνφ'=0,8. Να βρεθεί η χωρητικότητα του πυκνωτή αντιστάθμισης.

6. Να βρείτε την μείωση του ρεύματος που απορροφά από το δίκτυο ο κινητήρας, μετά την αντιστάθμιση

Απάντηση

1.

Η ονομαστική ισχύς του κινητήρα είναι

$$P = \sqrt{3} \cdot V \cdot I \cdot συνφ = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 10 \cdot 0{,}7 = 2800\sqrt{3} = 4844\,W.$$

2.

Η άεργος ισχύς του κινητήρα (με $συνφ = 0,7 \Rightarrow φ = συν^{-1} 0,7 = 45,5^o$), είναι

$$Q = \sqrt{3} \cdot V \cdot I \cdot ημφ = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 10 \cdot ημ\,45,5^o = \sqrt{3} \cdot 4000 \cdot 0,71 = 2853\sqrt{3} = 4946,7\,VAr.$$

Η φαινόμενη ισχύς είναι

$$S = \sqrt{3} \cdot V \cdot I = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 10 = 4000\sqrt{3} = 4000 \cdot 1,732 = 6928,2\,VA.$$

3.

Ο κινητήρας έχει απώλειες ισχύος στην έξοδό του (απώλειες ισχύος λόγω τριβών και θερμότητας στον άξονά του κινητήρα, δηλαδή μειωμένη μηχανική ισχύ εξόδου σε σχέση με την ηλεκτρική ισχύ εισόδου), κατά 1 KW σε σχέση με την πραγματική ηλεκτρική ισχύ εισόδου από το δίκτυο. Δηλαδή με ισχύ εισόδου P=4844 W, ο κινητήρας έχει ισχύ εξόδου P=3844 KW. Επομένως ο βαθμός απόδοσής του είναι

$$α = \frac{P_{εξόδου}}{P_{εισόδου}} = \frac{P_{ΜΗΧΑΝΙΚΗ}}{P_{ΗΕΚΤΡΙΚΗΗ}} = \frac{3844}{4946,7} \Rightarrow α = 0,77 \text{ ή } 77\%.$$

4.

Κάθε αντίσταση είναι συνδεδεμένη σε αστέρα, και έχει τιμή $R = \frac{V}{I} = \frac{230}{10} = 23\,Ω$ (θεωρούμε τις αντιστάσεις όμοιες μεταξύ τους). Η νέα ισχύς των δύο αντιστάσεων λειτουργίας εξ' αιτίας της βλάβης μιας εκ των τριών , για σύνδεση σε αστέρα (με $R_{ολ}=R_1+R_2+R_3=R+R+0=2R$) είναι

$$P_{ολ} = V \cdot I = V \cdot \frac{V}{R_{ολ}} = = \frac{(V)^2}{2R} = \frac{(400)^2}{2 \cdot 23} = \frac{160000}{46} = 3478,2\,W.$$

5.

Το ρεύμα μετά την αντιστάθμιση είναι

$$P = \sqrt{3} \cdot V \cdot I \cdot συνφ' \Rightarrow I = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot V \cdot συνφ'} = \frac{4946,7}{1,732 \cdot 400 \cdot 0,8} = \frac{4946,7}{554,24} = 8,9\ A.$$

Επίσης η νέα γωνία είναι $συνφ' = 0,8 \Rightarrow φ' = συν^{-1}\,0,8 = 36,8^o$.

Η άεργος ισχύς πριν την διόρθωση του συντελεστή ισχύος υπολογίστηκε $Q = 4946,7\,VAr$. Μετά την διόρθωση του συντελεστή ισχύος η άεργος ισχύς είναι

$$Q' = \sqrt{3} \cdot V \cdot I \cdot ημφ' = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 8,73 \cdot ημ\,36,8^o = 1,732 \cdot 400 \cdot 8,73 \cdot 0,59 = 3622,9\,VAr.$$

Οπότε, ο πυκνωτής αντιστάθμισης είναι

$$C = \frac{Q_c}{V_c^{\,2} \cdot ω} = \frac{Q - Q'}{V_c^{\,2} \cdot ω} = \frac{4946,7 - 3622,9}{230^2 \cdot 314} = \frac{1323,7}{16610600} = 79,6\,μF.$$

6.

Η μείωση του ρεύματος λόγω αντιστάθμισης είναι $ΔI = I_{πριν} - I_{μετά} = 10 - 8,9 = 1,1\,A$.

ΑΣΚΗΣΗ 5.16

Ασύγχρονος τριφασικός κινητήρας συνδέεται σε δίκτυο πολικής τάσης 400V. Κάθε αγωγός για την τροφοδοσία του (L_1, L_2, L_3) διαρρέεται από ρεύμα έντασης 10A. Ο συντελεστής ισχύος του κινητήρα είναι συνφ=0,9. Ο κινητήρας αποδίδει σε φορτίο μηχανική ισχύ 4KW. Ζητούνται:

1. Η ηλεκτρική ισχύς που απορροφά ο κινητήρας.

2. Ο βαθμός απόδοσης του κινητήρα.

Απάντηση

1.

Η ισχύς που απορροφά ο κινητήρας (ηλεκτρική ισχύς εισόδου) είναι:

$$P=\sqrt{3}\,VI\cdot \text{συνφ}=\sqrt{3}\cdot 400\cdot 10\cdot 0{,}9=3600\sqrt{3}\Rightarrow P=6235{,}2\,W.$$

2.

Η απόδοση μιας μηχανής καθορίζεται από την ισχύ εξόδου σε σχέση με αυτή που έχει στην είσοδό της (δηλαδή $P_{εξόδου}=P_{εισόδου}-P_{απωλειών}$).

Ο βαθμός απόδοσης του κινητήρα, αποδίδεται με την σχέση

$$α=\frac{P_{εξόδου}}{P_{εισόδου}}=\frac{P_{ΜΗΧΑΝΙΚΗ}}{P_{ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ}}=\frac{4000}{6235{,}2}\Rightarrow α=0{,}641 \text{ ή } 64{,}1\ \%.$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.17

Ασύγχρονος τριφασικός κινητήρας συνδέεται σε δίκτυο πολικής τάσης 400V και αποδίδει στον άξονά του μηχανική ισχύ 5KW. Κάθε αγωγός για την τροφοδοσία του (L_1, L_2, L_3) διαρρέεται από ρεύμα έντασης 10A. Εάν γνωρίζουμε ότι ο βαθμός απόδοσης του κινητήρα είναι 80%, να βρείτε:

1. Την πραγματική ισχύ που απορροφά ο κινητήρας.

2. Τον συντελεστή ισχύος.

3. Την άεργο ισχύ.

Απάντηση

1.

Ο βαθμός απόδοσης του κινητήρα είναι 80% ή α=0,85 και δίνεται από την σχέση $α=\frac{P_{ΕΞΟΔΟΥ}}{P_{ΕΙΣΟΔΟΥ}}=\frac{P_{ΜΗΧΑΝΙΚΗ}}{P_{ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ}}$. Επομένως επειδή η μηχανική ισχύ (εξόδου) είναι 5KW, τότε η ισχύς εισόδου ($P_{εισόδου}$) δηλαδή η πραγματική ισχύ που απορροφά ο κινητήρας, είναι ισοδύναμα:

$$α=\frac{5000}{P_{εισόδου}}\Rightarrow 0{,}8=\frac{5000}{P_{εισόδου}}\Rightarrow P_{εισόδου}=\frac{5000}{0{,}8}=6250W \text{ ή } 6{,}25\text{ KW}.$$

Οπότε η πραγματική ισχύς εισόδου που απορροφά ο κινητήρας από το δίκτυο είναι 6,25 KW.

2.

Ο συντελεστής ισχύος είναι $\text{συνφ} = \frac{P}{S} \overset{S=\sqrt{3}VI}{=} \frac{P}{\sqrt{3}VI} = \frac{6250}{\sqrt{3}\cdot 400\cdot 10} = 0{,}9$.

3.

Η άεργος ισχύς είναι

$$Q = \sqrt{3}\,VI\cdot \text{ημφ} \overset{\varphi=\text{συν}^{-1}0{,}9=25{,}5^{o}}{=} \sqrt{3}\cdot 400\cdot 10\cdot \text{ημ}\,25{,}25^{o} = 4000\sqrt{3}\cdot 0{,}43 = 1725\sqrt{3} = 2989\ \text{VAr}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.18

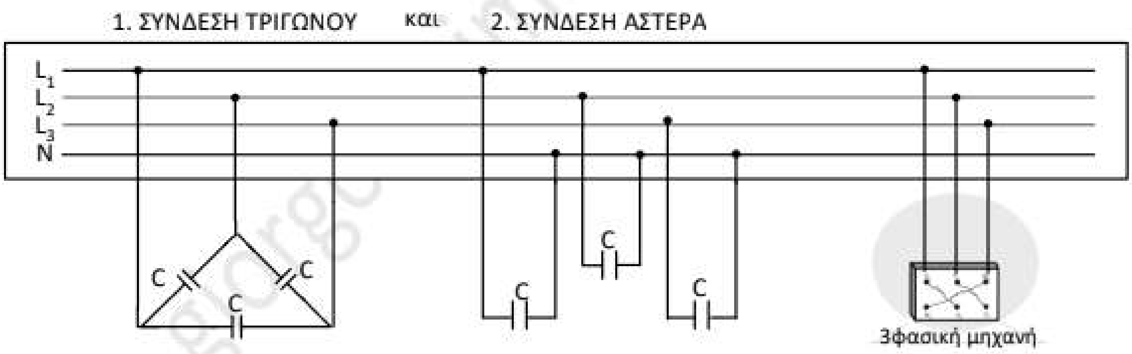
Σε τριφασικό σύστημα εγκατάστασης κινητήρων Α.Τ.Κ.Δ.Δ. (ασύγχρονων τριφασικών κινητήρων δακτυλιοφόρου δρομέα), γίνεται αντιστάθμιση με χρήση τριών πυκνωτών αντιστάθμισης. Η τροφοδότηση του δικτύου είναι 230/400 V (φασική/πολική τάση), συχνότητας 50 Hz. Η αντιστάθμιση δίνει άεργη ισχύ Q=30 KVAr.

1. Να βρεθεί η χωρητικότητα κάθε πυκνωτή αντιστάθμισης για σύνδεση τριγώνου.

2. Να βρεθεί η χωρητικότητα κάθε πυκνωτή αντιστάθμισης για σύνδεση σε αστέρα.

Απάντηση

Η αντιστάθμιση σε τριφασικά συστήματα γίνεται με χρήση τριών όμοιων πυκνωτών αντιστοιχίζοντας, σε κάθε μία φάση ένα πυκνωτή και πραγματοποιείται με σύνδεση πυκνωτών σε αστέρα και σε τρίγωνο, όπως στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 5. 43

Η χωρητικότητα του πυκνωτή αντιστάθμισης δίνεται από την σχέση: $C = \frac{Q_C}{\omega V^2} = \frac{Q_C}{2\pi f V^2}$.

Κάθε πυκνωτής απορροφά άεργο ισχύ $Q_C = \frac{Q}{3} = \frac{30}{3} = 10\,\text{KVAr}$.

1.

Για σύνδεση τριγώνου (με πολική τάση V_π=400 V), είναι:

$$C = \frac{Q_C}{\omega V^2} = \frac{Q_C}{2\pi f V^2} = \frac{10}{2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 400^2} = \frac{10}{314\cdot 160000} = \frac{10}{50240000} = 199\,\text{nF}.$$

2.

Για σύνδεση αστέρα (με φασική τάση V_φ=230 V), είναι:

$$C=\frac{Q_C}{\omega V^2}=\frac{Q_C}{2\pi f V^2}=\frac{10}{2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 230^2}=\frac{10}{314\cdot 52900}=\frac{10}{16610600}=602\,\text{nF}.$$

◊ Παρατηρούμε, πως η χωρητικότητα των πυκνωτών σε σύνδεση τριγώνου είναι ίση με το 1/3 της σύνδεσης σε αστέρα δηλαδή $C_\Delta=\frac{1}{3}C_Y$ ή $C_Y=3C_\Delta$ (οικονομικότερη επιλογή για αντιστάθμιση τριφασικών συστημάτων είναι η σύνδεση πυκνωτών σε τρίγωνο).

ΑΣΚΗΣΗ 5.19

Ασύγχρονος τριφασικός κινητήρας βραχυκυκλωμένου δρομέα (Α.Τ.Κ.Β.Δ.), είναι συνδεδεμένος στο ακροκιβώτιο του, σε σύνδεση αστέρα. Η πραγματική ισχύς του (ονομαστική) είναι 40 KW, ο συντελεστής ισχύος είναι 0,8, και η τάση τροφοδοσίας 400 V. Για την λειτουργία (ονομαστική) του κινητήρα ζητούνται τα εξής:

1. Το πολικό ρεύμα.

2. Η φαινόμενη ισχύς.

3. Η άεργος ισχύς.

Απάντηση

1.

Είναι $P=\sqrt{3}\cdot V\cdot I\cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$, οπότε $I=\frac{P}{\sqrt{3}\cdot V\cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}=\frac{40.000}{\sqrt{3}\cdot 400\cdot 0{,}7}=82{,}4\,\text{A}$.

2.

Είναι $S=\sqrt{3}\cdot V\cdot I=\sqrt{3}\cdot 400\cdot 82{,}4=57142{,}8$ VA ή 57,1428 KVA.

3.

Η άεργος ισχύς δίνεται από την $Q=\sqrt{3}\cdot V\cdot I\cdot \eta\mu\varphi$, οπότε αντικαθιστώντας προκύπτει ότι

$$Q\overset{\eta\mu^2\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi=1\Rightarrow\eta\mu\varphi=\sqrt{(1-\sigma\upsilon\nu^2\varphi)}}{=}\sqrt{3}\,VI\cdot\sqrt{(1-\sigma\upsilon\nu^2\varphi)}=\sqrt{3}\cdot 400\cdot 82{,}4\cdot\sqrt{1-0{,}8^2}=\sqrt{3}\cdot 32960\cdot 0{,}6\Rightarrow$$

$$Q=34252\,\text{VAr} \quad ή \quad Q=34{,}252\,\text{KVAr}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.20 *(εξετάσεις 2009)*

Σε τριφασικό δίκτυο πολικής τάσης 240V συνδέονται σε τρίγωνο τρείς (3) όμοιες αντιστάσεις R=60Ω. Να υπολογίσετε:

1. Το ρεύμα I_R σε κάθε αντίσταση R.

2. Το ρεύμα γραμμής $I_{\gamma\rho}$.

3. Την πραγματική ισχύ που απορροφά από το δίκτυο ο τριφασικός καταναλωτής.

Απάντηση

1.

Η ένταση του ρεύματος είναι: $I=\frac{V_\pi}{R}=\frac{240}{60}=4\,\text{A}$.

2.

Το ρεύμα γραμμής είναι: $I_{γρ} = \sqrt{3} I = 4\sqrt{3}\,A$.

3.

Η πραγματική ισχύς είναι: $P = \sqrt{3} V I_{γρ} = \sqrt{3} \cdot 240 \cdot 4\sqrt{3} = 240 \cdot 4 \cdot 3 = 2880\,W$.

ΑΣΚΗΣΗ 5.21 *(εξετάσεις 2011)*

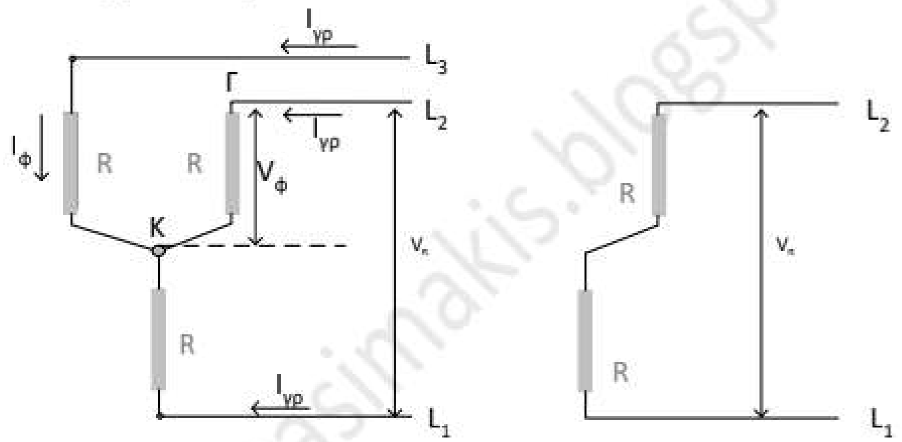
Τρείς όμοιες ωμικές αντιστάσεις R=20 Ω είναι συνδεδεμένες κατ' αστέρα σε δίκτυο πολικής τάσης $V_π$=400V τριών αγωγών χωρίς ουδέτερο (εικόνα 1). Να υπολογίσετε:

1. Την τάση στα άκρα κάθε αντίστασης ($V_φ$).

2. Την ένταση του ρεύματος ($I_φ$) που διαρρέει κάθε αντίσταση.

3. Την ισχύ P που καταναλώνεται σε κάθε αντίσταση R.

4.Την ολική ισχύ του κυκλώματος ($P_{ολ}$) που προκύπτει αν διακοπεί η μία από τις τρείς αντιστάσεις (εικόνα 2).



Εικ. 1 Εικ. 2

Σχήμα 5.44

Απάντηση

1.

Για σύνδεση σε αστέρα $V_φ = \frac{V_π}{\sqrt{3}} = \frac{400}{\sqrt{3}} = 133{,}4\sqrt{3}\,V = 231V$ ή $V_φ \approx 230V$.

2.

Το φασικό ρεύμα είναι $I_φ = \frac{V_φ}{R} = \frac{113{,}3\sqrt{3}}{20} = \frac{231}{20} = 11{,}55A$.

3.

Η ισχύς κάθε αντίστασης είναι $P_R = V_φ \cdot I_φ = 231 \cdot 11{,}55 = 2668\,W$.

4.

Όταν διακοπεί η μία από τις τρείς αντιστάσεις τότε ισοδύναμα για την εικόνα 2, το ρεύμα που διαρρέει τις δύο αντιστάσεις είναι

$$I = \frac{V_π}{R+R+0} = \frac{400}{20+20} = \frac{400}{40} \Rightarrow I = 10A \cdot$$

Η ολική ισχύς είναι $P_{ολ} = V_π \cdot I = 400 \cdot 10 = 4000\,W$.

ΑΣΚΗΣΗ 5.22 *(εξετάσεις 2012)*

Τρείς (3) όμοιες καταναλώσεις σύνθετης αντίστασης Z=100 Ω η κάθε μια, συνδέονται σε τρίγωνο και τροφοδοτούνται από δίκτυο πολικής τάσης $V_π$=400V και συχνότητας $f = \frac{100}{π} Hz$.

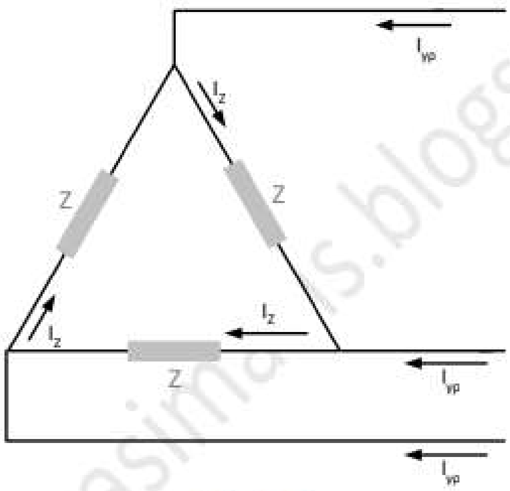
Να υπολογίσετε:

1. Το ρεύμα I_z που διαρρέει κάθε καταναλωτή.

2. Το ρεύμα της γραμμής τροφοδοσίας $I_{γρ}$.

3. Το συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου L, αν ο καταναλωτής Z αποτελείται από ωμική αντίσταση R=60Ω και πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L σε σειρά.

4. Τη συνολική φαινόμενη ισχύς S.



Σχήμα 5.45

Απάντηση

1.

Σε σύνδεση τριγώνου το ρεύμα που διαρρέει κάθε καταναλωτή, είναι

$$I = \frac{V_π}{Z} = \frac{400}{100} = 4\,A.$$

2.

Το ρεύμα γραμμής είναι $I_{γρ} = \sqrt{3} I = 4\sqrt{3}\,A$.

3.

Η σύνθετη αντίσταση είναι

$$Z^2 = R^2 + X_L^2 \Rightarrow X_L^2 = Z^2 - R^2 = 100^2 - 60^2 \Rightarrow X_L = \sqrt{10000 - 3600} \Rightarrow X_L = \sqrt{6400} = 80\,Ω.$$

Ο συντελεστής αυτεπαγωγής είναι

$$X_L = Lω \Rightarrow 80 = L 2π \frac{100}{π} \Rightarrow L = \frac{80}{200} \Rightarrow L = 0{,}4\,H.$$

4.

Η φαινόμενη ισχύς είναι $S = \sqrt{3} VI = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 4\sqrt{3} = 4600\,VA$.

ΑΣΚΗΣΗ 5.23 *(εξετάσεις 2013)*

Τρεις ίσες ωμικές αντιστάσεις R=30Ω είναι συνδεδεμένες κατά τρίγωνο σε δίκτυο πολικής τάσης V_{π}=660V (εικόνα 1)

Να υπολογίσετε:

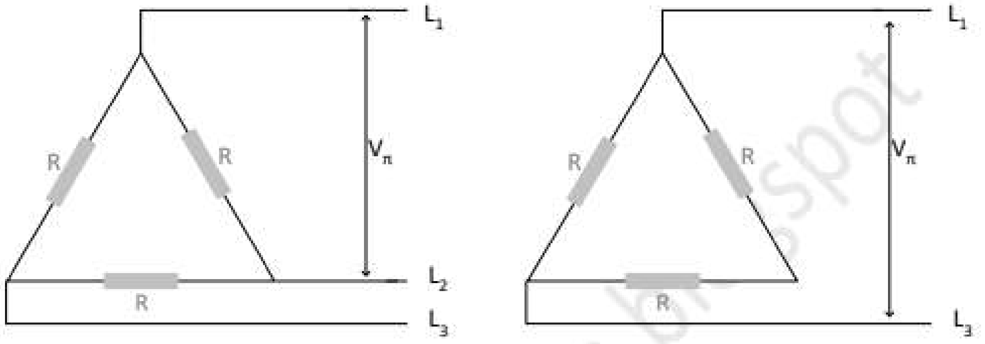
1. Την τάση V_{ϕ} στα άκρα κάθε αντίστασης.

2. Την ένταση I_{ϕ} του ρεύματος που διαρρέει κάθε αντίσταση.

3. Το ρεύμα της γραμμής ($I_{\gamma\rho}$).

4. Την ολική ισχύ $P_{ο\lambda}$ του κυκλώματος.

5. Την ολική ισχύ $P'_{ο\lambda}$ του κυκλώματος, που προκύπτει αν διακοπεί η φάση L_2 (εικόνα 2).



Εικόνα 1 Εικόνα 2

Σχήμα 5.46

Απάντηση

1.

Η τάση στα άκρα κάθε αντίστασης είναι V_{ϕ}=660 V (σε σύνδεση τριγώνου $V_{\pi}=V_{\phi}$) .

2.

Η ένταση που διαρρέει κάθε αντίσταση είναι

$$I_{\phi}=\frac{V_{\phi}}{R}=\frac{660}{30}=22\,A.$$

3.

Το ρεύμα γραμμής είναι $I_{\gamma\rho}=\sqrt{3}I_{\phi}=22\sqrt{3}\,A$ (σε σύνδεση τριγώνου $I_{\pi}=\sqrt{3}I_{\phi}$).

4.

Η ολική ισχύ του κυκλώματος είναι

$$P_{ο\lambda}=3V_{\phi}I_{\phi}\sigma\upsilon\nu\phi=3\cdot660\cdot22\cdot=43560\,W.$$

5.

Διακόπτοντας μια φάση (την L_2), όπως στην εικόνα 2, τότε η ολική ισχύ του κυκλώματος είναι

$$P_{ο\lambda}'=V_{\pi}I'=V_{\pi}\frac{V'_{\pi}}{R_{ο\lambda}}=V_{\pi}\frac{V'_{\pi}}{\frac{R\cdot2R}{R+2R}}=V_{\pi}\frac{V'_{\pi}}{\frac{2R}{3}}=\frac{660\cdot33\cdot3}{2\cdot30}=21780\,W.$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.24 *(εξετάσεις 2015)*

Δύο συμμετρικοί τριφασικοί ωμικοί καταναλωτές είναι συνδεδεμένοι ο καθένας σε αστέρα και τροφοδοτούνται από δίκτυο τριφασικής πολικής τάσης $220\sqrt{3}$ Volt, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα α.

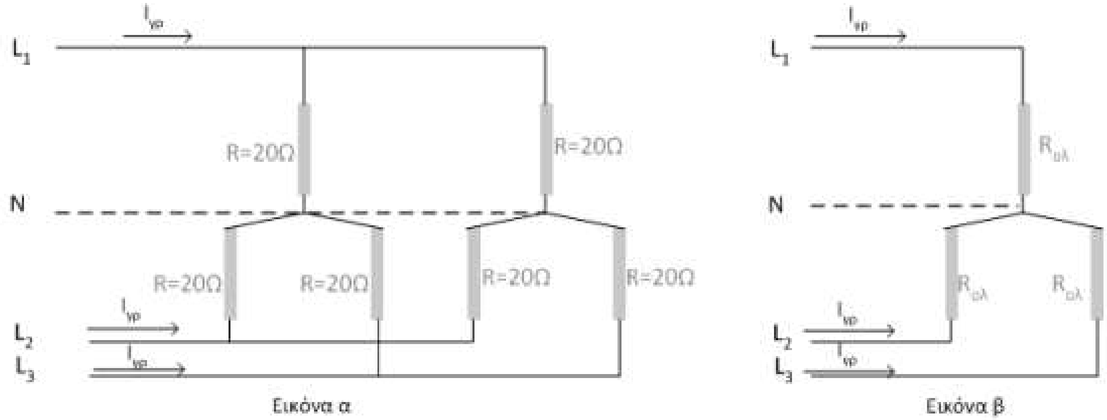
Για το ισοδύναμο κύκλωμα που φαίνεται στην εικόνα β, να υπολογίσετε:

1. Την ολική αντίσταση κάθε φάσης $R_{ολ}$

2. Το ρεύμα γραμμής $I_{γρ}$.

3. Το φασικό ρεύμα $I_{φ}$.

4. Τη συνολική πραγματική ισχύ που απορροφάται από το δίκτυο.



Σχήμα 5.47

Απάντηση

1.

Η ολική αντίσταση είναι $R_{ολ}=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\dfrac{20\cdot 20}{20+20}=10\ \Omega$

2.

Η φασική τάση (για σύνδεση αστέρα) είναι $V_{\pi}=\sqrt{3}V_{\varphi}\Rightarrow V_{\varphi}=220\,V$. Το ρεύμα γραμμής είναι

$$I=I_{\varphi}=\frac{V_{\varphi}}{R_{ολ}}=\frac{220}{10}=22A$$

3.

Το φασικό ρεύμα (σε σύνδεση αστέρα, $I_{φ}=I_{Π}$) είναι $I_{γρ}=I_{\varphi}=\dfrac{V_{\varphi}}{R_{ολ}}=\dfrac{220}{10}=22A$

4.

Η πραγματική απορροφούμενη ισχύς είναι $P=\sqrt{3}V_{\pi}I_{γρ}=\sqrt{3}\cdot 220\cdot\sqrt{3}\cdot 22=14520\,W$

ΑΣΚΗΣΗ 5.25 *(εξετάσεις 2016)*

Σε τριφασικό δίκτυο πολικής τάσης $U_π$ συνδέονται τρεις (3) όμοιες σύνθετες αντιστάσεις Z σε αστέρα. Η αντίσταση Z αποτελείται από ωμική αντίσταση R=30Ω , επαγωγική αντίσταση X_L=50Ω και χωρητική αντίσταση X_C=10Ω σε σειρά. Αν το ρεύμα γραμμής είναι $I_{γρ}$=4,6A να υπολογίσετε:

1. Την τιμή της σύνθετης αντίστασης Z.

2. Το συντελεστή ισχύος συνφ.

3. Την πολική τάση $U_π$.

4. Την πραγματική ισχύ P που απορροφά από το δίκτυο ο τριφασικός καταναλωτής.

Απάντηση

1.

Η επαγωγική αντίσταση είναι $X_L = Lω = 50Ω$. Η χωρητική είναι $X_C = \frac{1}{Cω} = 10Ω$.

Η σύνθετη αντίσταση είναι

$$Z^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2 \Rightarrow Z = \sqrt{30^2 + (50-10)^2} = \sqrt{2500} = 50\,Ω.$$

2.

Επειδή X_c<X_L θα έχουμε επαγωγική. Τότε ο συντελεστής ισχύος είναι

$$συνφ = \frac{R}{Z} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0,6\,.$$

3.

Το ρεύμα γραμμής είναι I=4,6 A. Η πολική τάση είναι

$$V_π = \sqrt{3}\,V_φ = \sqrt{3} I_{γρ} \cdot Z = \sqrt{3} \cdot 4,6 \cdot 50 = 230\sqrt{3}\ \text{V}\ \ (\text{ή} \approx 400\text{V}).$$

4.

Η πραγματική ισχύς είναι $P = \sqrt{3}\,V_π I_{γρ} συνφ = \sqrt{3} \cdot 230 \cdot 4,6 \cdot 0,6 = 1099,5\ \text{W}$.

ΑΣΚΗΣΗ 5.26 *(εξετάσεις 2017)*

Συμμετρικός τριφασικός καταναλωτής σε συνδεσμολογία τριγώνου τροφοδοτείται από τριφασικό δίκτυο πολικής τάσης Vπ = 400 V και κυκλικής συχνότητας ω = 2000 rad/sec. Ο καταναλωτής παρουσιάζει σε κάθε φάση σύνθετη αντίσταση Z = 100 Ω, η οποία αποτελείται από ωμική αντίσταση R = 80 Ω σε σειρά με πηνίο αυτεπαγωγής L. Να υπολογίσετε:

Να υπολογίσετε:

1. Το ρεύμα γραμμής $I_{γρ}$.

2. Το συντελεστή αυτεπαγωγής L.

3. Το συντελεστή ισχύος συνφ.

4. Τη φαινόμενη ισχύ S του τριφασικού καταναλωτή.

Απάντηση

1.

Το ρεύμα γραμμής είναι $I_{γρ} = I_{Δ}\sqrt{3} \overset{I_{Δ}=\frac{V_π}{Z}}{=} \sqrt{3}\frac{V_π}{Z} = \sqrt{3}\frac{400}{100} = 4\sqrt{3}\ \text{A}$.

2.

Η επαγωγική αντίσταση είναι

$$Z^2 = R^2 + X_L^2 \Rightarrow X_L^2 = Z^2 - R^2 = 10000 - 6400 = 3600 \Rightarrow X_L = \sqrt{3600} = 60\,\Omega$$

Οπότε το πηνίο θα έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $X_L = L\omega \Rightarrow L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{60}{2000} = 0{,}03\ \text{H}$.

3.

Ο συντελεστής ισχύος είναι $συνφ = \frac{R}{Z} = \frac{80}{100} = 0{,}8$.

4.

Η φαινόμενη ισχύς είναι $S = \sqrt{3}\cdot V_π \cdot I_{γρ} = \sqrt{3}\cdot 400 \cdot 4\sqrt{3} = 3\cdot 1600 = 4800\ \text{VA}$.

ΑΣΚΗΣΗ 5.27 *(εξετάσεις 2018)*

Τρεις ίδιες σύνθετες αντιστάσεις Z, συνδεόμενες σε τρίγωνο, αποτελούν συμμετρικό τριφασικό καταναλωτή. Ο καταναλωτής τροφοδοτείται από δίκτυο πολικής τάσης $V_Π$= 400V. Το ρεύμα γραμμής του δικτύου είναι $I_{γρ}$= 5 $\sqrt{3}$ A.

Αν ο συντελεστής ισχύος είναι συνφ=0,8 να υπολογίσετε:

1. Την πραγματική ισχύ P του τριφασικού καταναλωτή.

2. Τη φαινόμενη ισχύ S του τριφασικού καταναλωτή.

3. Την ένταση του ρεύματος $I_{τργ}$ που διαρρέει την κάθε σύνθετη αντίσταση Z .

4. Τη σύνθετη αντίσταση Z .

Απάντηση

1.

Η πραγματική ισχύς είναι $P = \sqrt{3}\cdot V_π \cdot I_{γρ} συνφ = \sqrt{3}\cdot 400 \cdot 5\sqrt{3}\cdot 0{,}8 = 4800\ \text{W}$.

2.

Η φαινόμενη ισχύς είναι $S = \sqrt{3}\cdot V_π \cdot I_{γρ} = \sqrt{3}\cdot 400 \cdot 5\sqrt{3} = 6000\ \text{VA}$

3.

Η ένταση του ρεύματος $I_{τργ}$ που διαρρέει κάθε αντίσταση είναι

$$I_{γρ} = I_{τργ}\sqrt{3} \overset{I_{Δ}=\frac{V_π}{Z}}{\Rightarrow} I_{τργ} = \frac{I_{γρ}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 5\ \text{A}.$$

4.

Η σύνθετη αντίσταση είναι $Z = \frac{V_π}{I_{τργ}} = \frac{400}{5} = 80\ \Omega$.

ΑΣΚΗΣΗ 5.28 *(εξετάσεις 2019)*

Τριφασικό δίκτυο πολικής τάσης V_π=20$\sqrt{3}$ V τροφοδοτεί συμμετρικό τριφασικό καταναλωτή συνδεδεμένο σε αστέρα. Σε κάθε φάση ο καταναλωτής εμφανίζει σύνθετη αντίσταση Z που αποτελείται από ωμική αντίσταση R=6 Ω και πηνίο επαγωγικής αντίστασης X_L=8 Ω σε σύνδεση σειράς.

Να υπολογίσετε:

1. Τη σύνθετη αντίσταση Z.

2. Το ρεύμα γραμμής του δικτύου $I_{γρ}$.

3. Την άεργο ισχύ Q που απορροφά ο τριφασικός καταναλωτής.

Για την αντιστάθμιση του 50% της άεργου ισχύος που απορροφά από το δίκτυο ο παραπάνω τριφασικός καταναλωτής, εγκαθίσταται τριφασική συστοιχία τριών πυκνωτών ίδιας χωρητικότητας, συνδεδεμένων σε αστέρα.

Να υπολογίσετε:

4. Την άεργο ισχύ Q_C του κάθε πυκνωτή.

5. Τη χωρητική αντίδραση X_C του κάθε πυκνωτή.

Απάντηση

1.

Η σύνθετη αντίσταση είναι $Z=\sqrt{R^2+(X_L)^2}=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}=10\ \Omega$

2.

Η σύνδεση είναι σε αστέρα, οπότε $V_\pi=\sqrt{3}V_\phi \Rightarrow V_\phi=\dfrac{V_\pi}{\sqrt{3}}=20$ Volt

Το ρεύμα γραμμής ($I_{φάσης}$=$I_{γραμμής}$=$I_{πολικό}$) είναι $I_\phi=\dfrac{V_\phi}{Z}=\dfrac{20}{10}=2\ \text{A}$.

3.

Από το τρίγωνο αντιστάθμισης είναι $ημφ=\dfrac{X_L}{Z}$. Οπότε η άεργος ισχύς είναι

$$Q=\sqrt{3}\cdot V_\pi\cdot I_\pi\cdot ημφ=\sqrt{3}V_\pi\cdot I_\pi\cdot\frac{X_L}{Z}=\sqrt{3}\cdot 20\sqrt{3}\cdot 2\cdot 0{,}8=96\text{VAr}$$

4.

Η άεργος ισχύς μετά την αντιστάθμιση είναι $Q_C=\dfrac{Q'}{3}=\dfrac{\frac{50}{100}Q}{3}=\dfrac{0{,}5\cdot 96}{3}=16\ \text{VAr}$.

5.

Η χωρητική αντίδραση (αντίσταση) είναι $X_C=\dfrac{{V_C}^2}{Q_C}=\dfrac{{V_\phi}^2}{16}=\dfrac{400}{16}=25\Omega$.

Κεφάλαιο 6^{ο}

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ - ΑΝΟΡΘΩΣΗ

6.1 ΑΝΟΡΘΩΤΕΣ

Η παραγωγή της ηλεκτρικής ενέργειας (από την ΔΕΗ) είναι εναλλασσόμενη. Οι ηλεκτρικές συσκευές χρειάζονται το εναλλασσόμενο ρεύμα για την τροφοδοσία τους. Υπάρχουν όμως πολλές ηλεκτρικές εφαρμογές που λειτουργούν με συνεχές και όχι εναλλασσόμενο ρεύμα (όπως ηλεκτρικά στοιχεία, ολοκληρωμένα, συσσωρευτές, κινητά τηλέφωνα και τόσα άλλα ηλεκτρονικά εξαρτήματα). Η τροφοδοσία των ηλεκτρικών συσκευών με συνεχές ρεύμα είναι μια εύκολη διαδικασία που λαμβάνει χώρα με τους ανορθωτές, δηλαδή διατάξεις που έχουν τα ανορθωτικά συστήματα και που μετατρέπουν το εναλλασσόμενο ρεύμα σε συνεχές, όπως θα μελετήσουμε στην συνέχεια. Τα ανορθωτικά συστήματα εκτός από τους ανορθωτές περιλαμβάνουν τον μετασχηματιστή (για τον μετασχηματισμό της τάσης του δικτύου σε άλλη, επιθυμητή), τον εξομαλυντή, τον σταθεροποιητή, τα φίλτρα και τις ασφαλιστικές διατάξεις.

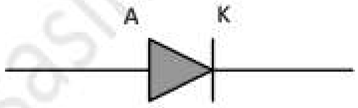
Οι Ανορθωτές είναι διατάξεις που μετατρέπουν το εναλλασσόμενο ρεύμα σε συνεχές. Αυτό επιτυγχάνεται επειδή επιτρέπουν την ροή (δίοδο) του ρεύματος προς μια κατεύθυνση και δεν την επιτρέπουν προς την αντίθετη.

Η **δίοδος ημιαγωγών** είναι ο συνηθισμένος και αντιπροσωπευτικός τύπος ανορθωτή. Υπάρχουν δύο τύποι ανόρθωσης, οι ανορθωτές ξηρού τύπου και οι ανορθωτές υδραργύρου (Hg). Για εκπαιδευτικούς σκοπούς θα εξετάσουμε την δίοδο ημιαγωγών (ξηρού τύπου) από υλικό κατασκευής το γερμάνιο (Ge) ή το πυρίτιο (Si).

Η αγωγιμότητα των ημιαγωγών οφείλεται στα ελεύθερα ηλεκτρόνια και στις θετικές οπές (δηλαδή κατά κάποιο τρόπο σε φορείς ηλεκτρικού ρεύματος που καταλαμβάνουν θέσεις κρυσταλλικού πλέγματος εξαιτίας της απουσίας ηλεκτρονίων). Σε κάθε υλικό που αξιοποιείται από την ηλεκτρονική τεχνολογία, τα ηλεκτρόνια κατανέμονται σε ενεργειακές ζώνες οι οποίες διαχωρίζονται από τα ενεργειακά χάσματα. Η αγωγιμότητα κάθε υλικού επηρεάζεται από το εύρος του ενεργειακού χάσματος μεταξύ της ζώνης σθένους και της ζώνης αγωγιμότητας. Με την βοήθεια των ενεργειακών ζωνών μπορούμε να διαχωρίσουμε τα υλικά σε αγωγούς, ημιαγωγούς και μονωτές.

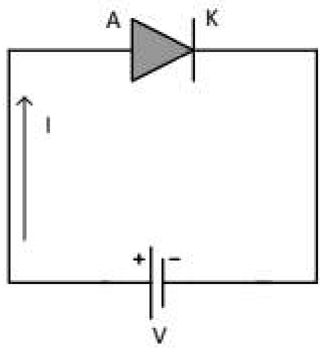
Η δίοδος μπορεί να είναι ιδανική ή μη ιδανική (με εσωτερική αντίσταση και τάση αντίστασης).Σε πρώτη προσέγγιση μπορούμε να χαρακτηρίσουμε **την δίοδο ιδανική** (χωρίς εσωτερική αντίσταση), σαν ένα διακόπτη που όταν η δίοδος πολωθεί ορθά ισοδυναμεί με κλειστό διακόπτη ενώ όταν πολωθεί ανάστροφα ισοδυναμεί με ανοικτό διακόπτη. Στην πραγματικότητα εμφανίζει σταθερή αντίσταση περίπου πάνω από κάποια τιμή ορθής πόλωσης και άπειρη αντίσταση στην ανάστροφη πόλωση μέχρι όμως κάποια τιμή όπου μπορεί να συμβεί διάσπαση και να έχουμε διέλευση ρεύματος (φαινόμενο Zener και φαινόμενο χιονοστιβάδας). Οι δίοδοι πλεονεκτούν για τον καλό βαθμό απόδοσής του και την αξιοπιστία τους.

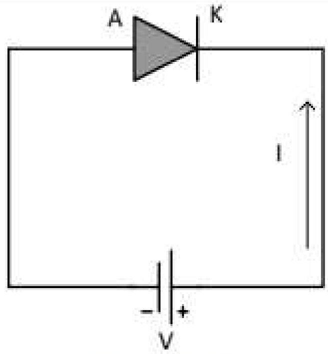
Η δίοδος έχει μια Άνοδο και μια Κάθοδο και ο σχεδιαστικός της συμβολισμός είναι ο εξής:



Σχήμα 6. 1

Ανάλογα με την φορά διέλευσης του ηλεκτρικού ρεύματος, η δίοδος τροποποιεί και την συμπεριφορά της.

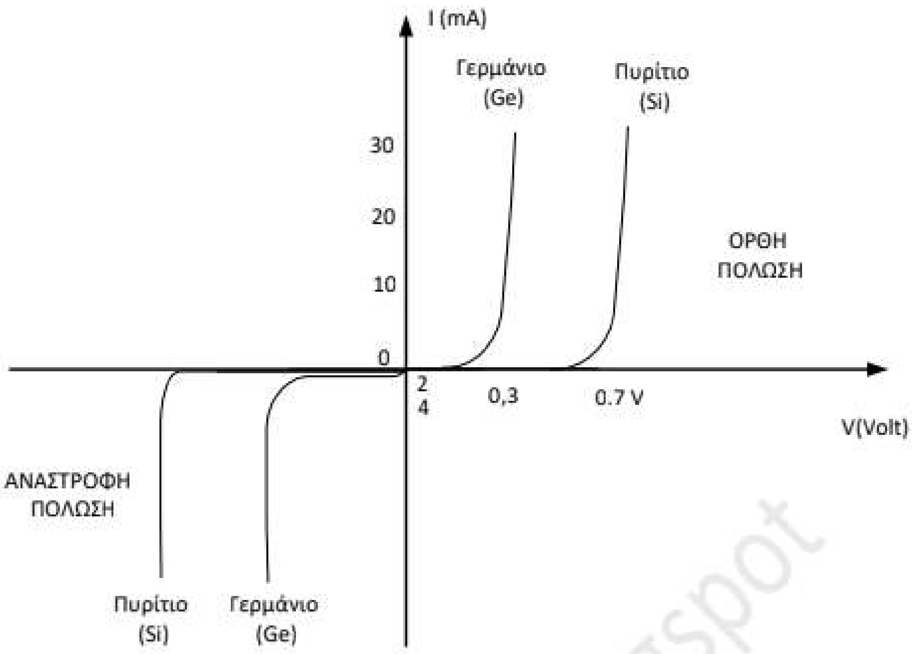
Πόλωση Διόδου		Λειτουργία κυκλώματος
Ορθή πόλωση	**Η δίοδος άγει** (επιτρέπει την ροή ηλεκτρικού ρεύματος από το εσωτερικό της) Η τάση ανόδου V_A είναι μεγαλύτερη από την τάση καθόδου Vκ ($V_A>V_K$) .	 Σχήμα 6. 2

Ανάστροφη πόλωση	**Η δίοδος δεν άγει** (δεν επιτρέπει την ροή ηλεκτρικού ρεύματος από το εσωτερικό της) Η τάση της ανόδου V_A είναι μικρότερη από την τάση της καθόδου Vκ (V_A<V_K) .	 Σχήμα 6. 3

Η δίοδος καλείται και Κρυσταλλίοδος Επαφής και Επαφή PN (P=positive και N=negative), δηλαδή τμήμα ημιαγωγού P τύπου (φορέων πλειονότητας οπών, κενών θέσεων στο κρυσταλλικό πλέγμα) και τμήμα ημιαγωγού N τύπου (φορέων πλειονότητας ηλεκτρονίων), που λόγω της συνεχούς και άτακτης κίνησης των οπών και των ηλεκτρονίων, οι φορείς θα μετακινηθούν από το ένα τμήμα στο άλλο. Η κίνηση αυτή λέγεται διάχυση**.** Οι φορείς επανασυνδέονται μεταξύ τους στην συνοριακή επιφάνεια της διόδου. Μια (μικρή) περιοχή γύρω από την συνοριακή επιφάνεια χάνει τους φορείς της. Αυτή η περιοχή καλείται περιοχή απογύμνωσης και αν δεν ξεπεραστεί αυτή η έλλειψη, δεν μπορεί πλέον να διέλθει ηλεκτρικό ρεύμα από την δίοδο.

Στην ορθή πόλωση εξαφανίζεται η περιοχή απογύμνωσης επιτρέποντας έτσι την διέλευση ρεύματος μέσα από την κρυσταλλοδίοδο. Στην ανάστροφη πόλωση επίσης, ενισχύεται το δυναμικό φραγμού (δηλαδή μεγαλώνει η περιοχή απογύμνωσης μεταξύ των δύο τμημάτων P και N του ημιαγωγού) εμποδίζοντας την ροή και διέλευση του ρεύματος μέσα από την κρυσταλλοδίοδο.

Ανάλογα με το υλικό κατσσκευής της διόδου εμφανίζεται και η αντίστοιχη (τιμών) χαρακτηριστική της διόδου (για υλικά κατασκευής διόδου από γερμάνιο-Ge και πυρίτιο-Si). Η μορφή της μας αποτυπώνει σε ποιες τιμές τάσεως η δίοδος άγει κατά την ορθή και την ανάστροφη τάση. Το ρεύμα αυξάνει εκθετικά μετά τα 0,3 V για το Ge και 0,7V για το Si. Η γενική της μορφή της χαρακτηριστικής της διόδου είναι:



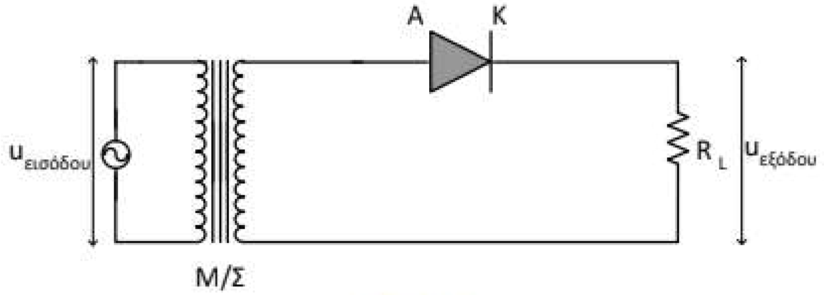
Σχήμα 6. 4

6.2 ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΑΝΟΡΘΩΣΗΣ

Τα κυκλώματα ανόρθωσης διακρίνονται σε μονοφασικά κυκλώματα και τριφασικά κυκλώματα ανόρθωσης. Τα μονοφασικά και τριφασικά κυκλώματα ανόρθωσης διακρίνονται σε κυκλώματα απλής ανόρθωσης και σε κυκλώματα πλήρους ανόρθωσης.

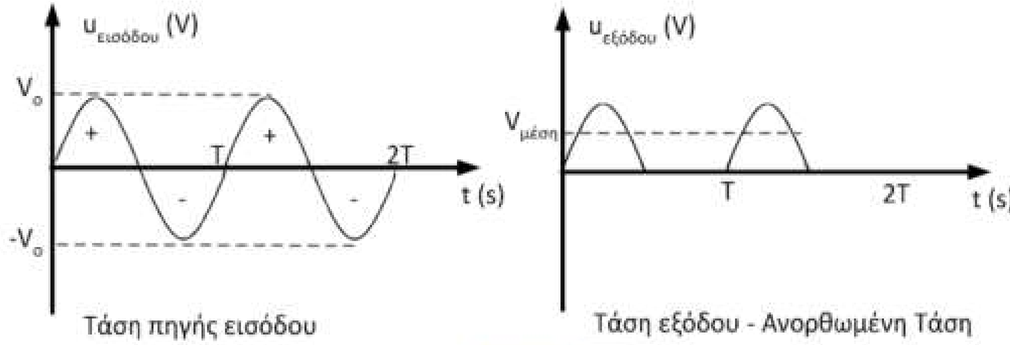
Α) Μονοφασικό κύκλωμα απλής ανόρθωσης με κρυσταλλοδίοδο:

Το κύκλωμα απλής ανόρθωσης αποτελείται από μία δίοδο, ένα φορτίο (καταναλωτή R_L), εναλλασσόμενη πηγή τάσης και μετασχηματιστή (Μ/Σ) για τυχόν μετασχηματισμό από την εναλλασσόμενη τάση του πρωτεύοντος σε άλλη τιμή εναλλασσόμενη στο δευτερεύον τύλιγμά του. Απλή ανόρθωση καλούμε την ανόρθωση του εναλλασσόμενου ρεύματος (στην διάταξη διόδου της απλής ανόρθωσης, αποκόπτεται κατά την έξοδο η αρνητική ημιπερίοδος του εναλλασσόμενου ρεύματος). Η δίοδος επιτρέπει στο ηλεκτρικό ρεύμα να διέλθει από το κύκλωμα και το εσωτερικό της (δηλαδή άγει) μόνο κατά την θετική ημιπερίοδο (κατά την αρνητική ημιπερίοδο δεν άγει, καθώς η πηγή δίνει ανάστροφη τάση και η δίοδος είναι πολωμένη ανάστροφα).



Σχήμα 6. 5

Η μορφή της εναλλασσόμενης τάσης στην έξοδο από το κύκλωμα ανόρθωσης, εισόδου θα έχει αποκόψει τις αρνητικές ημιπεριόδους της τάσης εισόδου.



Σχήμα 6. 6

Παρατηρούμε πως το ανορθωμένο ρεύμα (και η ανορθωμένη τάση) δεν είναι σε συνεχή μορφή στην απλή ανόρθωση. Θα γίνει μετά την εξομάλυνση και σταθεροποίηση.

Η ενεργός τιμή (rms) της ανορθωμένης τάσης, είναι $V_{rms} = \frac{1}{2}V_o$ (τα όργανα μέτρησης μετράνε ενεργές τιμές). Η μέση τιμή της ανορθωμένης τάσης (δηλαδή η συνεχή τιμή της συνιστώσας του ημιανορθωμένου ρεύματος) είναι :

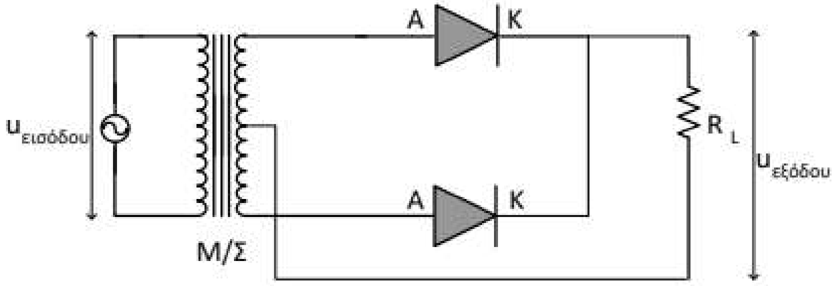
$$V_{μεση} = V_{dc} = 0{,}45 \cdot V_{εν} = 0{,}45\frac{V_O}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}45}{1{,}414}V_O = 0{,}318 \cdot V_O = \frac{1}{\pi}V_O = \frac{1}{\pi}\frac{I_o}{R_L}.$$

Ομοίως και για την τιμή του ανορθωμένου ρεύματος είναι

$$I_{rms} = \frac{1}{2}I_o \text{ και } I_{μεση} = 0{,}45 I_{rms} = \frac{1}{\pi}I_O.$$

Β) Μονοφασικό κύκλωμα διπλής ανόρθωσης με δύο κρυσταλλοδιόδους:

Αυτή η μέθοδος ανόρθωσης αξιοποιεί, ότι και η απλή ανόρθωση, αλλά κάνοντας χρήση μιας επιπλέον διόδου κατά τον ίδιο προσανατολισμό σύνδεσης ώστε να ανορθώνει τιμές τάσης και ρεύματος που δεν άγει η πρώτη δίοδος. Η ανόρθωση στην τάση εξόδου, έχει αποκόψει πλήρως τις μορφές των αρνητικών ημιπεριόδων τάσης και ρεύματος εισόδου στο κύκλωμα.

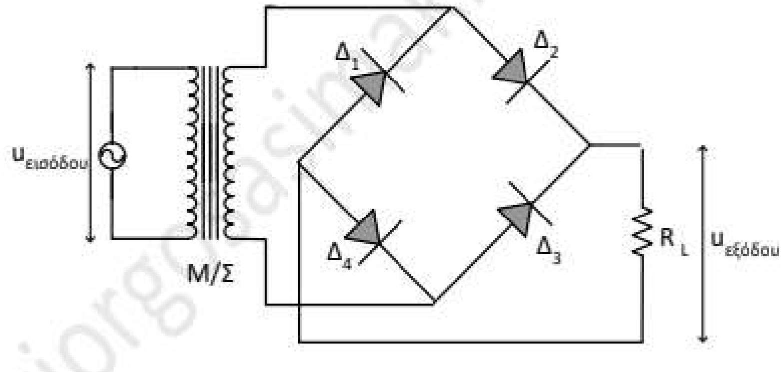


Σχήμα 6. 7

Η συγκεκριμένη διπλή ανόρθωση (καλείται και πλήρη ανόρθωση με δύο κρυσταλλοδιόδους), χρησιμοποιείται για τιμές τάσεως αρκετά μονοσήμαντες. Η συνηθέστερη μέθοδος πλήρους ανόρθωσης είναι με την χρήση γέφυρας (δηλαδή πλήρη ανόρθωση με 4 κρυσταλλοδιόδους).

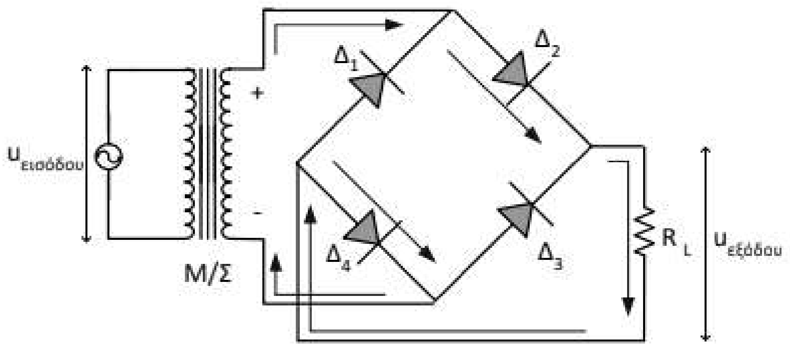
Γ) Μονοφασικό κύκλωμα πλήρους ανόρθωσης με τέσσερις κρυσταλλοδιόδους. Συνδεσμολογία Γέφυρας:

Το κύκλωμα γέφυρας περιλαμβάνει 4 διόδους τοποθετημένους συμμετρικά ανά δύο, όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα. Με χρήση αυτής της συνδεσμολογίας έχουμε ροή ηλεκτρικού ρεύματος στο φορτίο ίδιας φοράς και κατά τις δύο ημιπεριόδους της εναλλασσόμενης τάσης της πηγής.



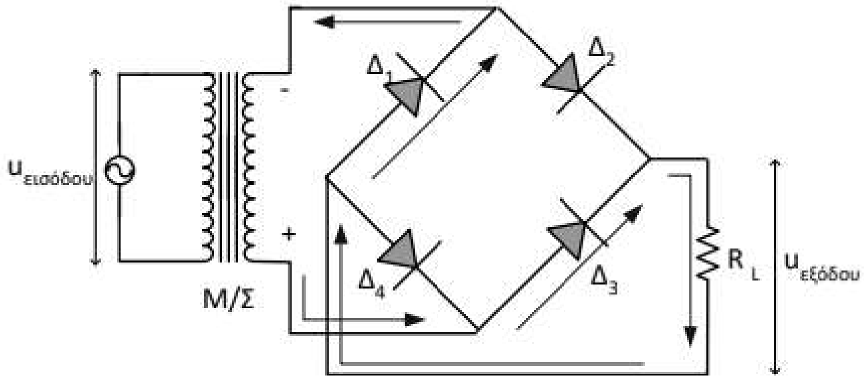
Σχήμα 6. 8

Στο κυκλώματα ανόρθωσης, κατά την διάρκεια της θετικής ημιπεριόδου άγουν οι δίοδοι $Δ_2$ και $Δ_4$ και δεν άγουν οι $Δ_1$ και $Δ_3$, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



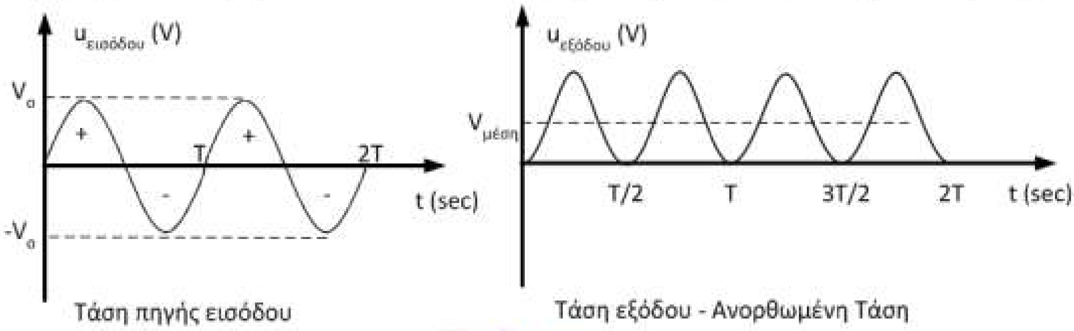
Σχήμα 6. 9

Κατά την διάρκεια της αρνητικής ημιπεριόδου άγουν οι δίοδοι $Δ_1$ και $Δ_3$ και δεν άγουν οι $Δ_2$ και $Δ_4$.



Σχήμα 6. 10

Η μορφή της τάσεως εξόδου του κυκλώματος της πλήρους ανόρθωσης, είναι η εξής:



Σχήμα 6. 11

Παρατηρούμε την πλήρη αρνητική αποκοπή των ρευμάτων ή τάσεων που εφαρμόζονται στο κύκλωμα .

Η ενεργός τιμή (rms) της ανορθωμένης τάσης, είναι $V_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_o$ (τα όργανα μέτρησης μετράνε ενεργές τιμές).

Η μέση τιμή (δηλαδή η συνεχής συνιστώσα) της πλήρως ανορθωμένης τάσης είναι

$$V_{μεση} = V_{dc} = 0{,}9 \cdot V_{εν} = 0{,}636 \cdot V_O = \frac{2}{π} V_O = \frac{2}{π}\frac{I_o}{R_L} .$$

Η ενεργός τιμή (rms) του ανορθωμένου ρεύματος είναι $I_{rms} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_o$.

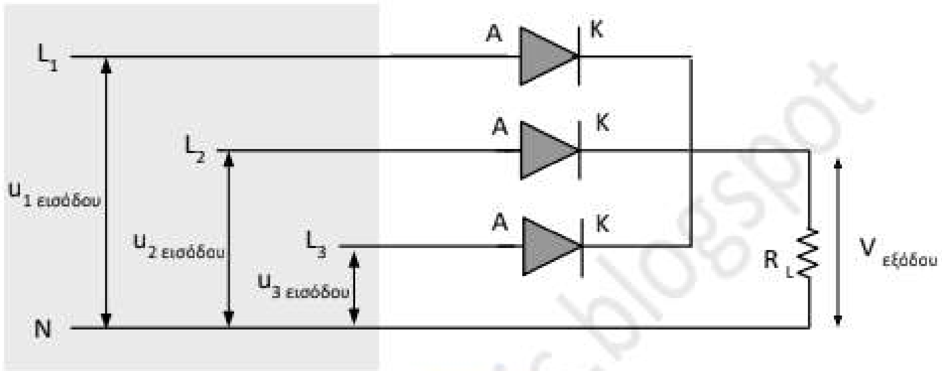
Η μέση τιμή του πλήρως ανορθωμένου ρεύματος είναι $I_{μεση} = 0{,}9 \cdot I_{εν} = 0{,}9 \frac{\sqrt{2}}{2} I_o = \frac{2}{π} I_O$.

Η μέση τιμή της τάσης και του ρεύματος στην πλήρη ανόρθωση είναι διπλάσια από ότι στην ημιανόρθωση.

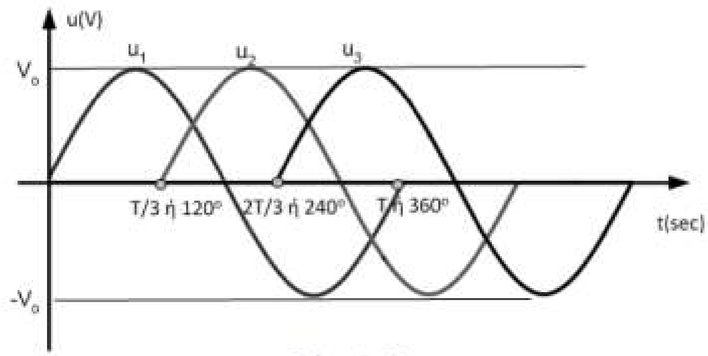
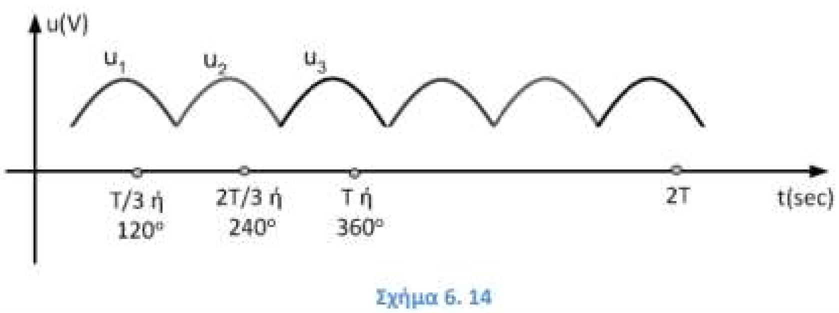
Δ) Τριφασικό κύκλωμα απλής ανόρθωσης

Η τροφοδότηση του τριφασικού κυκλώματος γίνεται από δίκτυο τριών φάσεων L_1,L_2,L_3 και του ουδετέρου Ν. Το κύκλωμα απλής ανόρθωσης περιλαμβάνει τρεις διόδους (μια για κάθε φάση). Η τάση εξόδου του κυκλώματος που παίρνουμε από τα άκρα του φορτίου R_L, προκύπτει από τις θετικές ημιπεριόδους της τάσης εισόδου για κάθε μία από τις τρείς φάσεις και είναι ανορθωμένη σε χρόνο μιας περιόδου με τρεις κυματώσεις.

Το κύκλωμα της απλής τριφασικής ανόρθωσης και η κυματομορφή της ανορθωμένης τάσης είναι τα ακόλουθα.



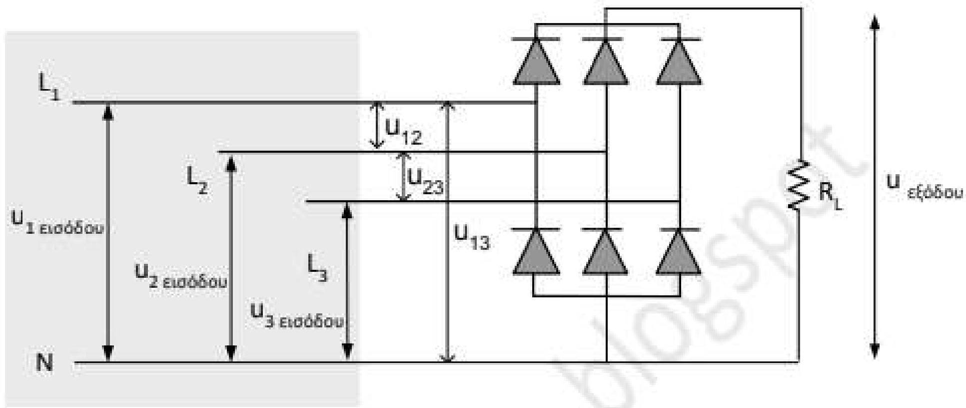
Σχήμα 6. 12

Κυματομορφή πηγής τριφασικού συστήματος εισόδου	 Σχήμα 6. 13
Κυματομορφή ανορθωμένης τάσης εξόδου με τρείς κυματώσεις ανά περίοδο Τ	 Σχήμα 6. 14

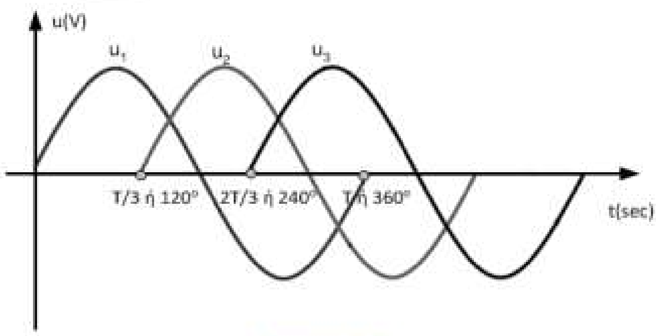
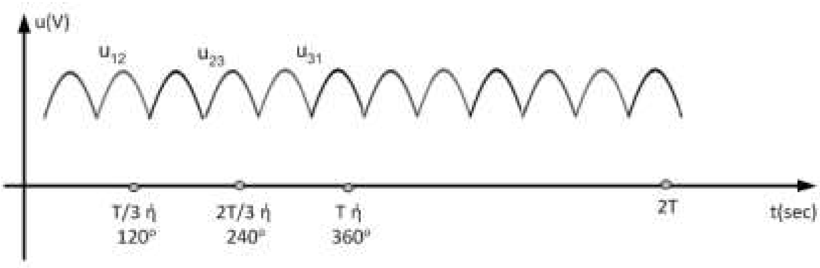
Ε) Τριφασικό κύκλωμα πλήρους ανόρθωσης (ή τριφασική γέφυρα)

Η πλήρης ανόρθωση τριφασικού κυκλώματος, περιλαμβάνει έξι διόδους (δύο για κάθε φάση). Στην περίπτωση της πλήρους τριφασικής ανόρθωσης οι αρνητικές ημιπερίοδοι της τριφασικής τάσης εισόδου (δηλαδή συμμετέχουν στην ανόρθωση οι τρείς πολικές τάσεις εισόδου των τριών φάσεων), είναι ανορθωμένες παρουσιάζοντας στην έξοδο τάσης του φορτίου, έξι κυματώσεις ανά περίοδο Τ.

Το κύκλωμα της πλήρους τριφασικής ανόρθωσης και η κυματομορφή της ανορθωμένης τάσης είναι τα ακόλουθα.



Σχήμα 6. 15

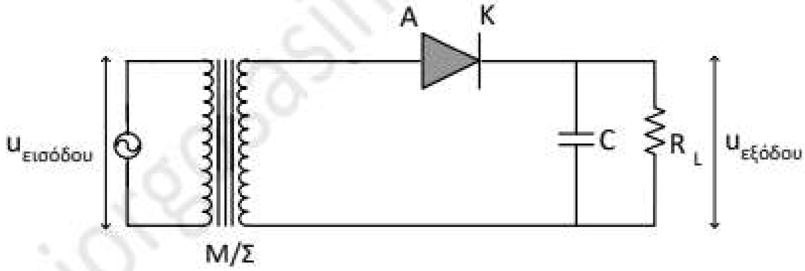
Κυματομορφή πηγής τριφασικού συστήματος εισόδου	 Σχήμα 6. 16
Κυματομορφή ανορθωμένης τάσης εξόδου με έξι κυματώσεις ανά περίοδο Τ	 Σχήμα 6. 17

6.3 ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗ ΑΝΟΡΘΩΜΕΝΗΣ ΤΑΣΗΣ

Το ανορθωμένο ρεύμα (και η τάση) που προκύπτει από τις ανορθωτικές διατάξεις δεν είναι σε συνεχή μορφή καθώς έχει κυματώσεις στην μορφή του, κατά την έξοδο των ανορθωτικών διατάξεων. Η αποφυγή των κυματώσεων επιτυγχάνεται με την εξομάλυνση και κατόπιν την σταθεροποίηση της τάσης εξόδου. Η εξομάλυνση είναι μια διαδικασία με χρήση κατάλληλων φίλτρων, η οποία εξομαλύνει την τάση εξόδου προκειμένου αυτή να είναι συνεχούς μορφής. Τα φίλτρα είναι συνδυασμοί στοιχείων όπως πυκνωτών και πηνίων τοποθετημένα κατάλληλα στο φορτίο του ωμικού καταναλωτή στην τάση της εξόδου (μετά την ανορθωτική διάταξη). Το ρεύμα και η τάση εξόδου θα εξομαλυνθεί δηλαδή θα γίνει συνεχούς τιμής και μορφής, σύμφωνα με τις εξής συνδεσμολογίες:

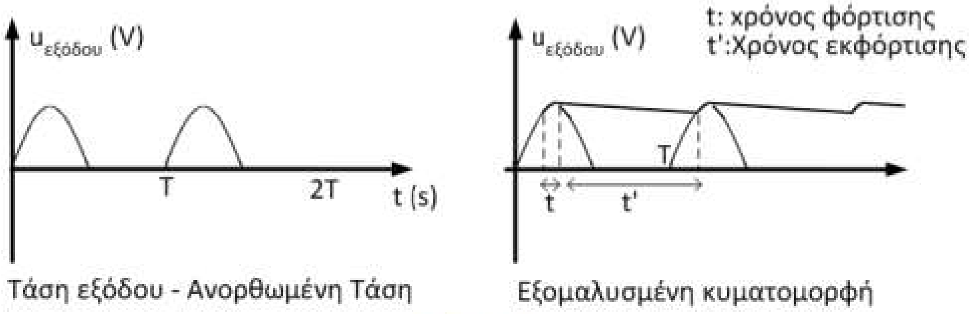
Α. Φίλτρο πυκνωτή στην απλή μονοφασική ανόρθωση, συνδεδεμένο παράλληλα στο φορτίο R_L .

Ο πυκνωτής μετά την ανορθωτική διάταξη συνδέεται παράλληλα στο φορτίο. Όταν η τάση ανόρθωσης παίρνει τις τιμές κορυφής (μέγιστες τιμές) ο πυκνωτής φορτίζεται. Αντιθέτως όταν η τάση ανόρθωσης στην έξοδο, μηδενίζεται ο πυκνωτής λόγω της προγενέστερης φόρτισής του, εκφορτίζεται και τροφοδοτεί το φορτίο στην έξοδο του. Αυτό δημιουργεί τετελεσμένη τάση στα άκρα του φορτίου που καλείται εξομάλυνση, η αποτελεσματική δράση της οποίας καθορίζεται από την σταθερά χρόνου του κυκλώματος: $\tau = R_L.C$.



Σχήμα 6. 18

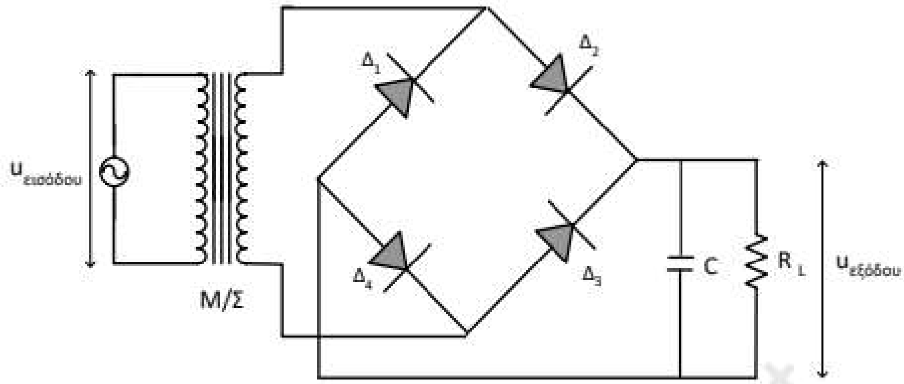
Η εξομαλυσμένη μορφή της τάσης εξόδου καθορίζεται από τον χρόνο φόρτισης και τον χρόνο εκφόρτισης του πυκνωτή.



Σχήμα 6. 19

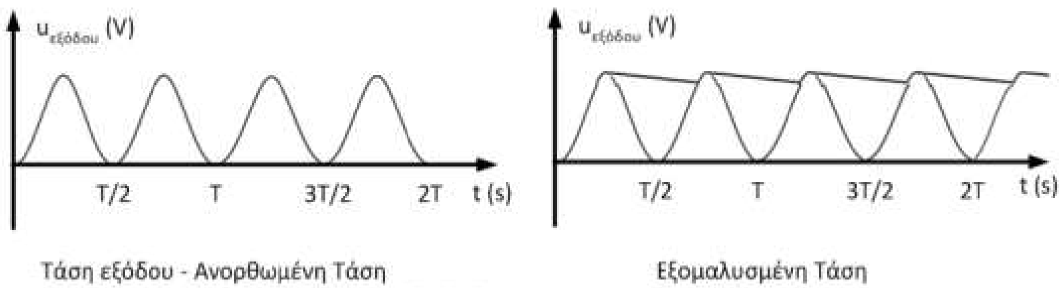
Β. Φίλτρο πυκνωτή στην πλήρη μονοφασική ανόρθωση παράλληλα στο φορτίο R_L.

Η χρήση του κυκλώματος πλήρους ανόρθωσης είναι αποτελεσματικότερη καθώς η κυματομορφή εξόδου παρουσιάζει περισσότερο συνεχή μορφή.



Σχήμα 6. 20

Η τάση εξόδου πλήρους ανορθωτή με φίλτρο πυκνωτή είναι η:

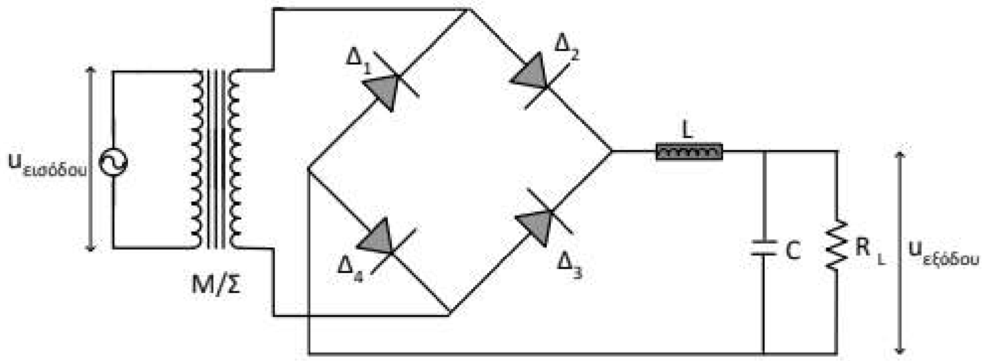


Σχήμα 6. 21

Αποδεικνύεται ότι $V_{μεση} = V_{dc} = \frac{I_{μέση}}{2fC}$ (f συχνότητα, C χωρητικότητα πυκνωτή).

Γ. Φίλτρο πηνίου - πυκνωτή στην πλήρη μονοφασική ανόρθωση.

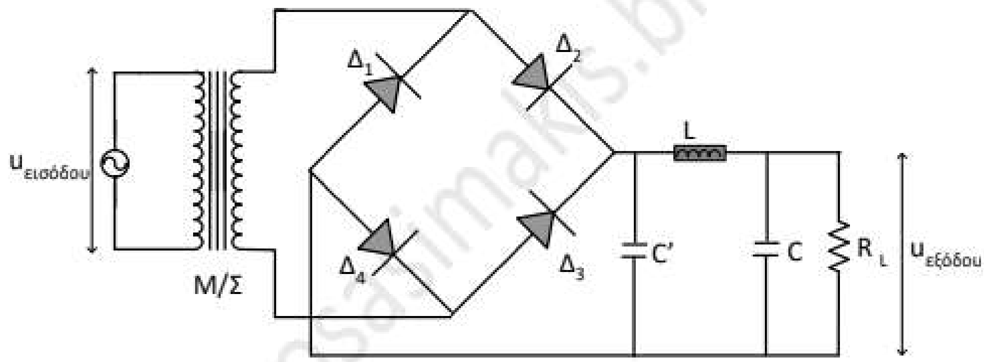
Υπάρχουν και άλλα φίλτρα που τοποθετούνται μετά την ανορθωτική διάταξη πλήρους ανόρθωσης που περιλαμβάνουν κατάλληλα πηνία τοποθετημένα στον πυκνωτή και την αντίσταση για μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα στην εξομάλυνση της ανορθωμένης τάσης. Μπορεί να γίνει και συνδυασμός πηνίων και πυκνωτών. Βασική αιτία χρήσης του πηνίου είναι η αυτεπαγωγή που παρουσιάζει λόγω των μαγνητικών στοιχείων του, με αποτέλεσμα να δημιουργείται μια συνοδευόμενη χρονική καθυστέρηση στην μεταβολή του ρεύματος μαζί με την χρήση του πυκνωτή.



Σχήμα 6. 22

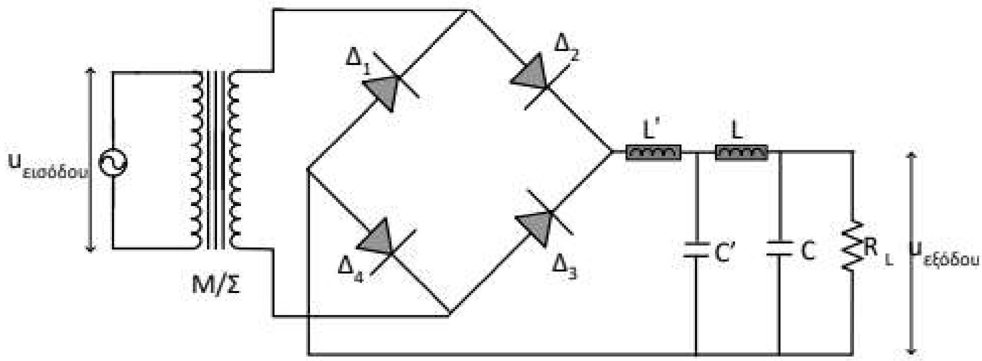
Δ. Φίλτρο πηνίου – πυκνωτή τύπου Π, στην πλήρη μονοφασική ανόρθωση.

Με χρήση περισσοτέρων φίλτρων πηνίων, πυκνωτών και αντιστάσεων, μπορεί να εξομαλυνθεί πλήρος το ρεύμα σε συνεχές. Οι διατάξεις φίλτρων τύπου Π, που τοποθετούνται μετά την ανορθωτική διάταξη είναι οι εξής:



Σχήμα 6. 23

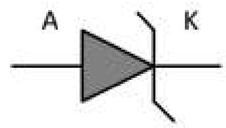
Όπως, επίσης και με δύο πηνία και πυκνωτές



Σχήμα 6. 24

6.4 ΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΣΗ ΑΝΟΡΘΩΜΕΝΗΣ ΤΑΣΗΣ

Μετά την ανορθωτική διάταξη και την εξομάλυνση, για να έχουμε εντελώς σταθερή και συνεχή μορφή τάσης και ρεύματος εξόδου, πρέπει να υλοποιηθεί και η σταθεροποίηση. Η χρήση της διόδου Zener και μιας αντίστασης είναι βασικά στοιχεία προκειμένου να υλοποιηθεί η σταθεροποίηση. Η δίοδος Zener είναι μια ειδική δίοδος που όταν εφαρμοστεί ανάστροφη τάση (τάση Zener) έχει την ιδιότητα να διασπάται. Όταν η δίοδος Zener πολωθεί ορθά τότε άγει (όπως η δίοδος PN). Όταν όμως πολωθεί ανάστροφα τότε παίρνει απότομα μεγάλη τιμή προκειμένου να διατηρηθεί σταθερή η τάση στα άκρα της διόδου Zener. Συμβολίζεται (ιδανική δίοδος Zener) ως εξής:

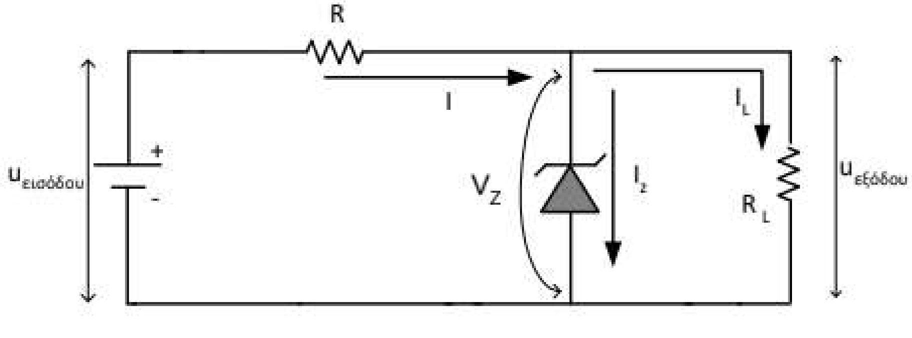


Σχήμα 6. 25

Η δίοδος Zener λειτουργεί στην περιοχή διάσπασης, πολώνεται ανάστροφα και χαρακτηρίζεται από την απότομη αύξηση του ανάστροφου ρεύματος όταν η τάση της φθάσει μια ορισμένη τιμή τάσης Zener (όπως φαίνεται στην χαρακτηριστική της διόδου του σχήματος 6.27). Η δίοδος Zener διατηρεί σταθερή την τάση στα άκρα της. Κατασκευάζεται ώστε να λειτουργεί στην περιοχή της απότομης αύξησης ανάστροφου ρεύματος.

Κατά την **ορθή πόλωση** συμπεριφέρεται όπως μία δίοδος ενώ στην ανάστροφη πόλωση παίρνει απότομα μεγάλη τιμή. Η δίοδος Zener λειτουργεί πάντα σε ανάστροφη πόλωση. Έχει την ιδιότητα να διατηρεί σταθερή στα άκρα της αυτή την τάση -τάση Zener-. Το ρεύμα που την διαρρέει μπορεί να μεταβάλλεται μέσα σε μια ευρεία περιοχή τιμών. Όταν αυξηθεί η ανάστροφη τάση (πέραν της τιμής της τάσης Zener), προκαλείται μεγάλη αύξηση ρεύματος. Η περιοχή τάσεων και ρευμάτων όπου συμβαίνει το φαινόμενο Zener, λέγεται περιοχή διάσπασης.

Το κύκλωμα της σταθεροποίησης της τάσης με χρήση διόδου Zener, είναι το εξής:



Σχήμα 6. 26

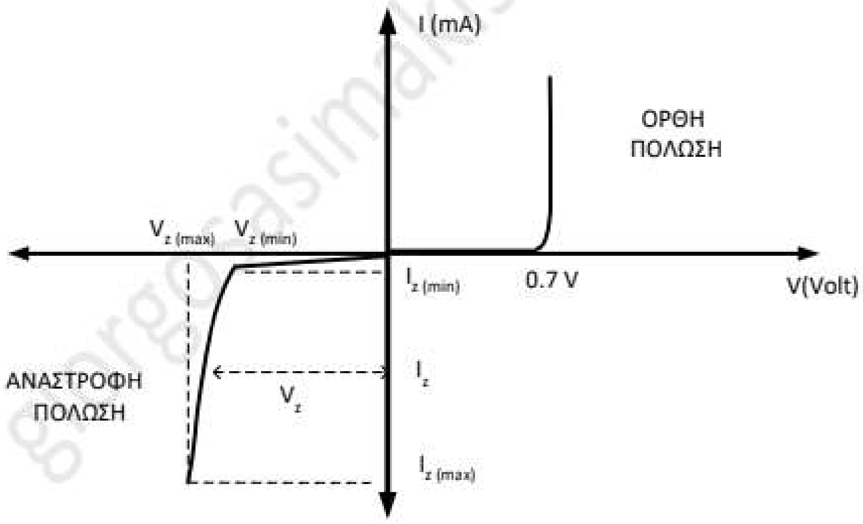
Η μελέτη του κυκλώματος εφαρμόζοντας τους κανόνες Kirchhoff δημιουργεί τις μαθηματικές σχέσεις:

$$I = I_z + I_L,$$
$$V_{εισόδου} = V_{εξόδου} + I \cdot R$$
$$V_{εξόδου} = V_z = I_L \cdot R_L$$

Η αντίσταση R, στο κύκλωμα εμποδίζει το Iz, να ξεπεράσει την μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή. Η αντίσταση R_L, είναι η αντίσταση του φορτίου του καταναλωτή.
Όλα τα μεγέθη μπορεί να μεταβάλλονται. Η αντίσταση φόρτου R_L ή το ρεύμα φόρτου I_L παραμένει σταθερό και μεταβάλλεται η τάση εισόδου $V_{εισόδου}$ καθώς και το ρεύμα της διόδου I_Z.
Μπορεί να υπολογιστεί και η αντίσταση R . Αντικαθιστώντας στην $V_{εισόδου}=V_Z+(I_Z+I_L)\cdot R$,

προκύπτει $V_{εισόδου} = V_Z + \left(I_Z + \frac{V_Z}{R_L}\right)R \Rightarrow R = \frac{V_{εισόδου} - V_Z}{I_Z + \frac{V_Z}{R_L}}$.

Η αντίσταση μπορεί να πάρει μέγιστη και ελάχιστη τιμή ανάλογα με την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της τάσης εισόδου του κυκλώματος.
Η χαρακτηριστική καμπύλη της διόδου Zener είναι η εξής:

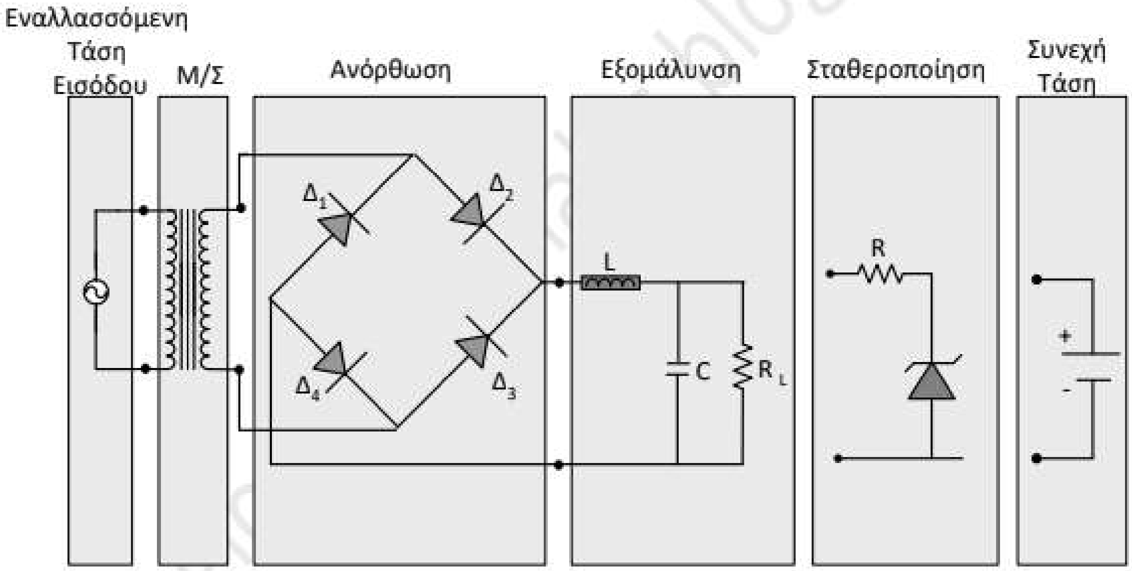


Σχήμα 6. 27

Το ρεύμα της διόδου Zener μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση $I_Z = \frac{I_{Z(max)} - I_{Z(min)}}{2}$.
Η αντίσταση της διόδου Zener (μη ιδανική δίοδος) παίρνει τιμές από 0 έως 500 Ω και μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση: $R_Z = \frac{V_{Z(mzx)} - V_{Z(min)}}{I_{Z(max)} - I_{Z(min)}}$.

6.5 ΤΡΟΦΟΔΟΤΙΚΟ

Για την μετατροπή του εναλλασσόμενου ρεύματος σε συνεχές χρησιμοποιούμε το τροφοδοτικό. Μια συσκευή, που έχει αλλάξει τις καθημερινές συνήθειες του σύγχρονου ανθρώπου. Το τροφοδοτικό είναι μια διάταξη που αποτελείται από συστοιχίες ηλεκτρονικών στοιχείων. Περιλαμβάνει έναν μετασχηματιστή (Μ/Σ), μια ανορθωτική διάταξη, ένα φίλτρο εξομάλυνσης και έναν σταθεροποιητή. Ο Μ/Σ χρησιμοποιείται για την αλλαγή (ανύψωση ή υποβιβασμό) της εναλλασσόμενης τάσης της πηγής εισόδου. Η ανορθωτική διάταξη (συνδεσμολογία γέφυρας) ανορθώνει το εναλλασσόμενο ρεύμα και την τάση. Τα φίλτρα χρησιμοποιούνται μετά την ανορθωτική διάταξη για την εξομάλυνση (ελάττωση) της κυμάτωσης που παρουσιάζει η ανορθωτική μορφή της τάσης. Ο σταθεροποιητής (με την χρήση της διόδου Zener) διατηρεί σταθερή και συνεχή την τάση εξόδου, προκειμένου να τροφοδοτηθεί κάθε ηλεκτρική συσκευή που χρειάζεται συνεχή ρεύμα τροφοδοσίας για την λειτουργία της.



Σχήμα 6. 28

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ 6^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Ορθή πόλωση- Η δίοδος άγει.	Τάση ανόδου V_A μεγαλύτερη από τάση καθόδου V_K $(V_A>V_K)$
Ανάστροφη πόλωση- Η δίοδος δεν άγει.	Τάση της ανόδου V_A μικρότερη από τάση καθόδου V_K $(V_A<V_K)$
Απλή Ανόρθωση	$V_{rms}=\frac{1}{2}V_o$ $V_{μεση}=V_{dc}=0{,}45\cdot V_{εν}=0{,}45\frac{V_O}{\sqrt{2}}=0{,}318\cdot V_O=\frac{1}{\pi}V_O=\frac{1}{\pi}\frac{I_o}{R_L}$ $I_{rms}=\frac{1}{2}I_o$ $I_{μεση}=0{,}45I_{rms}=\frac{1}{\pi}I_O$
Πλήρης Ανόρθωση	$V_{rms}=\frac{1}{\sqrt{2}}V_o$ $V_{μεση}=V_{dc}=0{,}9\cdot V_{εν}=0{,}636\cdot V_O=\frac{2}{\pi}V_O=\frac{2}{\pi}\frac{I_o}{R_L}$ $I_{rms}=\frac{1}{\sqrt{2}}I_o$ $I_{μεση}=0{,}9\cdot I_{εν}=0{,}9\frac{\sqrt{2}}{2}I_o=\frac{2}{\pi}I_O$
Κύκλωμα σταθεροποίησης τάσης με χρήση διόδου Zener	$I=I_Z+I_L$ $V_{εισόδου}=V_{εξόδου}+I\cdot R$ $V_{εξόδου}=V_Z=I_L\cdot R_L$ $R=\dfrac{V_{εισόδου}-V_Z}{I_Z+\dfrac{V_Z}{R_L}}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΕΡΩΤΗΣΗ 6.1

Τι καλείται ορθή και τι ανάστροφη τάση στα άκρα μιας διόδου PN;

Απάντηση

Ορθή τάση ονομάζουμε την τάση κατά την οποία η δίοδος άγει (επιτρέπει τη ροή του ρεύματος και η τάση ανόδου είναι μεγαλύτερη της τάσης καθόδου). Ανάστροφη τάση ονομάζουμε την τάση κατά την οποία η δίοδος δεν άγει (δεν επιτρέπει τη ροή του ηλεκτρικού ρεύματος από το σώμα της και η τάση ανόδου είναι μικρότερη της τάσης καθόδου).

ΕΡΩΤΗΣΗ 6.2

1. Τι καλούμε απλή και τι πλήρη ανόρθωση;

2. Να σχεδιάσετε ένα κύκλωμα απλής μονοφασικής ανόρθωσης και τη μορφή της ανορθωμένης τάσης.

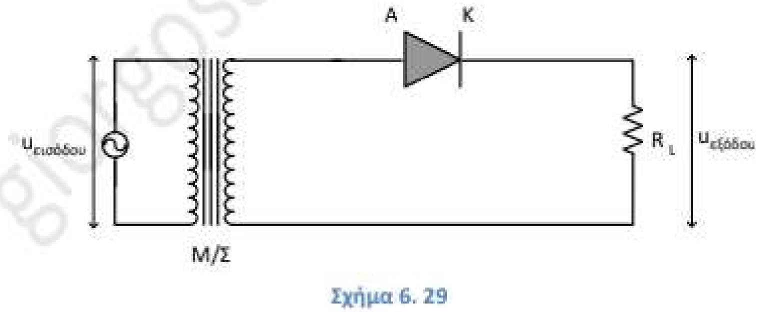
Απάντηση

1.

Απλή ανόρθωση ονομάζουμε την ανόρθωση του εναλλασσόμενου ρεύματος μέσω ανορθωτικής διάταξης που περιλαμβάνει εκτός των άλλων μία δίοδο επαφής PN. Η απλή ανόρθωση δίνει τάση εξόδου αποκομμένη των αρνητικών ημιπεριόδων της εναλλασσόμενης τάσης της πηγής εισόδου.

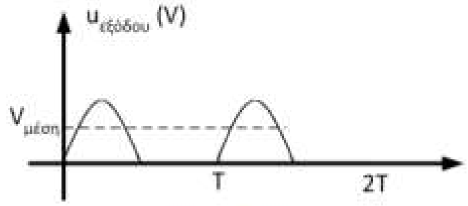
2.

Το κύκλωμα απλής ανόρθωσης περιλαμβάνει όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα, μία δίοδο που συνδέεται σε σειρά με ένα φορτίο αντίστασης R_L :



Σχήμα 6. 29

Η μορφή της εναλλασσόμενης τάσης στην έξοδο από το κύκλωμα ανόρθωσης (ανορθωμένη τάση) είναι η εξής (έχει αποκομμένες τις αρνητικές ημιπεριόδους από την εναλλασσόμενη τάση εισόδου):



Σχήμα 6. 30

ΕΡΩΤΗΣΗ 6.3

1. Τι καλούμε πλήρη ανόρθωση;

2. Να σχεδιάσετε ένα κύκλωμα πλήρους μονοφασικής ανόρθωσης και την μορφή της ανορθωμένης τάσης.

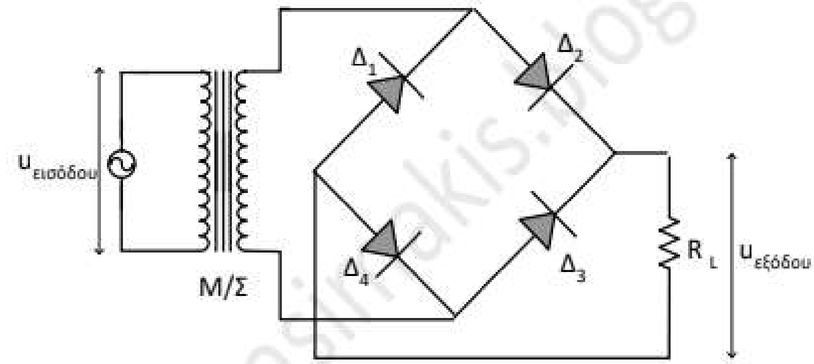
Απάντηση

1.

Πλήρη ανόρθωση ονομάζουμε την ανόρθωση του εναλλασσόμενου ρεύματος η οποία χρησιμοποιεί μεταξύ των άλλων δύο ή συνδυασμό 4 διόδων (σε διάταξη γέφυρας). Στην ανορθωμένη τάση έχουμε μετατροπή των αρνητικών ημιπεριόδων σε θετική ανορθωμένη τάση. Η πλήρης ανόρθωση σε διάταξη γέφυρας υπερέχει γιατί δίνει πλήρως ανορθωμένες περιόδους τάσεων συμπεριλαμβανομένων και των αρνητικών ημιπεριόδων της εναλλασσόμενης τάσης εισόδου, με αποτέλεσμα να παρουσιάζει και καλύτερο βαθμό απόδοσης.

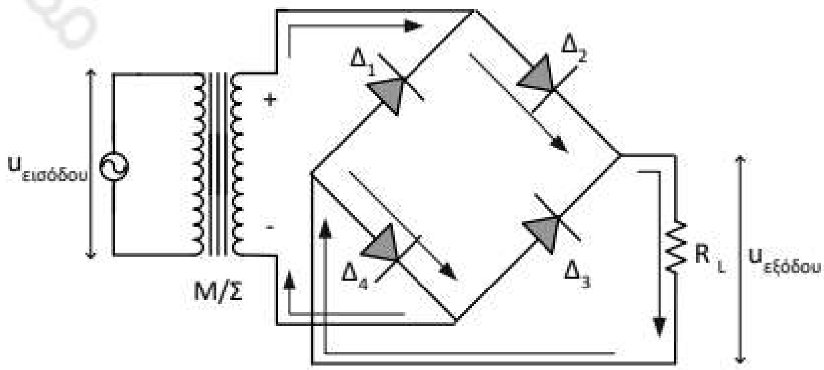
2.

Το κύκλωμα πλήρους μονοφασικής ανόρθωσης, φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



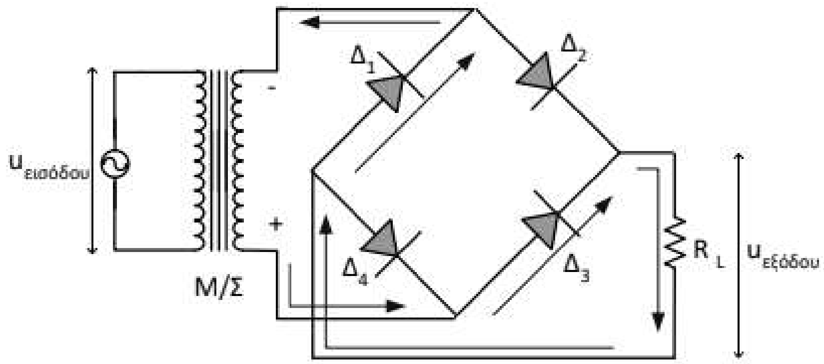
Σχήμα 6. 31

Στο κυκλώματα ανόρθωσης, κατά την διάρκεια της θετικής ημιπεριόδου άγουν οι δίοδοι $Δ_2$ και $Δ_4$ και δεν άγουν οι $Δ_1$ και $Δ_3$, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



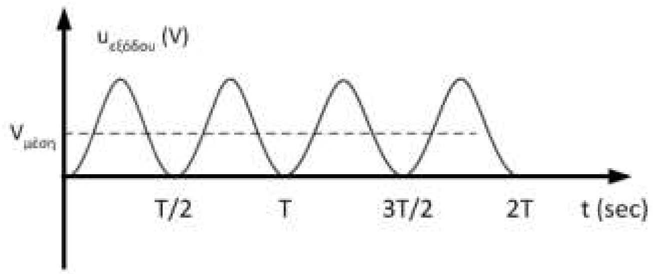
Σχήμα 6. 32

Κατά την διάρκεια της αρνητικής ημιπεριόδου άγουν οι δίοδοι Δ_1 και Δ_3 και δεν άγουν οι Δ_2 και Δ_4.



Σχήμα 6. 33

Η μορφή της τάσεως εξόδου του κυκλώματος πλήρης ανόρθωσης, είναι η εξής:



Σχήμα 6. 34

ΕΡΩΤΗΣΗ 6.4

Τι γνωρίζετε για την μέση τιμή της ανορθωμένης τάσης;

Απάντηση

Μέση τιμή της ανορθωμένης τάσης είναι η τάση που παίρνουμε στην έξοδο από τα όργανα μέτρησης, τα οποία χρησιμοποιούμε προκειμένου να πάρουμε ένδειξη που προέρχεται από τον μηχανισμό απόσβεσης ταλαντώσεων που διαθέτουν και ισορροπούν σε μια θέση που είναι η μέση τιμή της ένδειξής τους.

Γα την απλή μονοφασική ανόρθωση η μέση τιμή τάσης είναι $V_{μεση} = \frac{1}{\pi} V_O = 0{,}45 \cdot V_{εν}$.

Για την πλήρη μονοφασική ανόρθωση είναι η μέση τάση είναι $V_{μεση} = \frac{2}{\pi} V_O = 0{,}9 \cdot V_{εν}$.

ΕΡΩΤΗΣΗ 6.5

Να περιγράψετε την λειτουργία του πυκνωτή που αξιοποιούμε ως φίλτρο για την εξομάλυνση της ανορθωμένης τάσης.

Απάντηση

Οι συσκευές για να λειτουργήσουν χωρίς προβλήματα όταν τροφοδοτούνται με ανορθωμένο ρεύμα, απαιτείται το ρεύμα ή η τάση της ανόρθωσης κατά την έξοδο να είναι εξομαλυσμένη ώστε να είναι όμοια με την μορφή του συνεχούς ρεύματος. Αυτή η εξομάλυνση γίνεται με φίλτρα που συνδέονται στην ανορθωτική διάταξη και περιλαμβάνουν έναν πυκνωτή συνδεδεμένο παράλληλα με το φορτίο R_L του κυκλώματος ανόρθωσης. Το γινόμενό τους δίνει την σταθερά χρόνου $τ=R\cdot C$, η οποία θα επηρεάσει και την εξομάλυνση κατά την έξοδο της ανορθωμένης μορφής. Όταν η ανορθωμένη τάση παίρνει μεγάλη τιμή ο πυκνωτής φορτίζεται. Όταν η τάση μειώνεται ο πυκνωτής σταδιακά εκφορτίζεται. Με αυτόν τον τρόπο η ένταση στα άκρα της R_L διατηρείται. Επιλέγουμε σταθερά χρόνου $τ=R\cdot C$, τέτοια ώστε να εκφορτίζεται ο πυκνωτής το λιγότερο δυνατό, για να τείνει η μορφή της εξομάλυνσης, ευθεία γραμμή.

ΕΡΩΤΗΣΗ 6.6

Από τι αποτελείται ένα τροφοδοτικό παροχής συνεχούς ρεύματος;

Απάντηση

Το τροφοδοτικό παροχής συνεχούς ρεύματος αποτελείται από α) έναν μετασχηματιστή (ο οποίος υποβιβάζει ή ανυψώνει την εναλλασσόμενη τάση), β) έναν ανορθωτή (για την δημιουργία ανορθωμένης τάσης χωρίς τιμές αρνητικών ημιπεριόδων), γ) ένα φίλτρο (για να εξομαλύνεται η κυμάτωση της ανορθωμένης τάσης) και δ) έναν σταθεροποιητή (για να διατηρείται σταθερή η συνεχή τάση εξόδου, ανεξαρτήτως μεταβολών στο ρεύμα φορτίου).

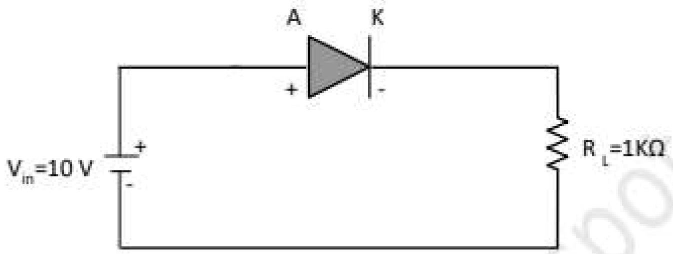
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 6.1

Ιδανική δίοδος γερμανίου (Ge) συνδέεται σε ορθή πόλωση με πηγή τάσης V_{in}=10 V και αντίσταση φορτίου R_L=1000 Ω. Να υπολογιστεί το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα.

Απάντηση

Το κύκλωμα της άσκησης περιλαμβάνει μια δίοδο και μια αντίσταση φορτίου.



Σχήμα 6. 37

Η δίοδος είναι ιδανική (χωρίς εσωτερική αντίσταση). Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι

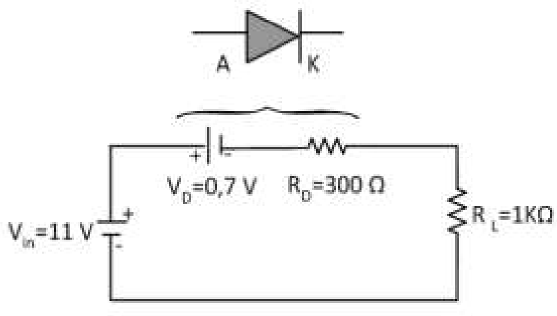
$$I = \frac{V}{R_L} = \frac{10}{1000} = 0{,}01\,\text{A} \text{ ή } 10 \text{ mA}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 6.2

Δίοδος πυριτίου (Si), συνδέεται σε ορθή πόλωση με πηγή τάσης V_{in}=11 V και αντίσταση φορτίου R_L=1000 Ω. Η δίοδος παρουσιάζει εσωτερική αντίσταση 300 Ω και εσωτερική τάση 0,7 V. Να υπολογιστεί το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα.

Απάντηση

Το κύκλωμα της άσκησης περιλαμβάνει μια μη ιδανική δίοδο και μια αντίσταση φορτίου.



Σχήμα 6. 38

Η δίοδος είναι μη ιδανική (με εσωτερική αντίσταση 300 Ω και τάση διόδου 0,7 V καθώς είναι κατασκευασμένη από πυρίτιο). Το ρεύμα που διαρρέει τον βρόγχο του κυκλώματος είναι

$$I=\frac{V_{εν}-V_D}{R_L+R_D}=\frac{11-0{,}7}{1000+300}=\frac{10{,}3}{1300}=0{,}0792\,A \text{ ή } 7{,}92\text{ mA}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 6.3

Για το κύκλωμα της απλής μονοφασικής ανόρθωσης με τάση εισόδου (μετά το δευτερεύον του μετασχηματιστή) $u=20\cdot ημ(314\,t)$ **και αντίσταση φορτίου R_L=100 Ω να υπολογίσετε τα εξής:**

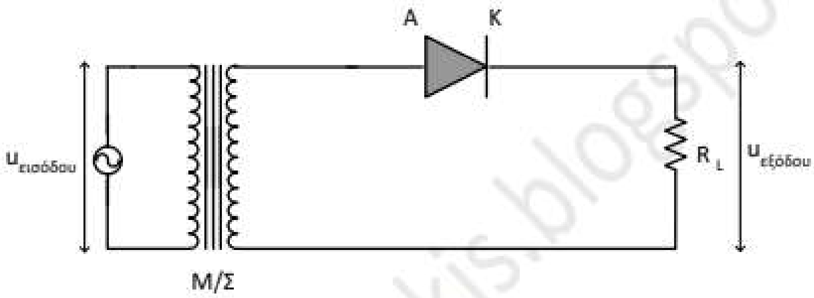
1. Την ανορθωμένη τάση εξόδου

2. Το ρεύμα που περνάει στην έξοδο του κυκλώματος από το φορτίο R_L

3. Την ισχύ του φορτίου RL.

Απάντηση

Το κύκλωμα της απλής μονοφασικής ανόρθωσης της άσκησης είναι το εξής:



Σχήμα 6. 39

1.

Η ανορθωμένη τάση εξόδου (δηλαδή η συνεχή τάση που παίρνουμε στην έξοδο, παράλληλα στο φορτίο R_L), είναι: $V=\frac{1}{\pi}V_o=0{,}318\cdot V_O=0{,}318\cdot 20=6{,}36V$.

2.

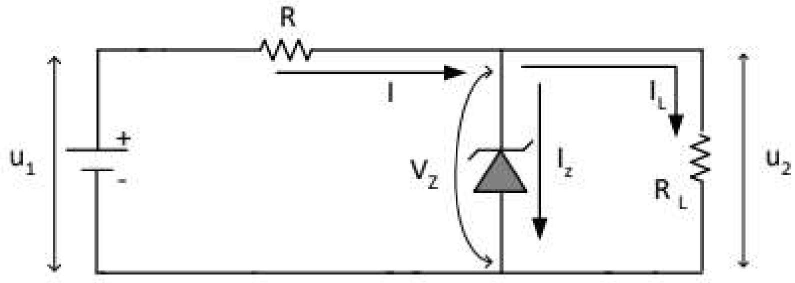
Το συνεχές ρεύμα του φορτίου είναι: $I=\frac{V}{R_L}=\frac{6{,}36}{100}=0{,}0636\,A$ ή 36,6 mA .

3.

Η ισχύς (συνεχή τιμή ισχύος φορτίου R_L) είναι: $P=I^2\cdot R_L=0{,}0636^2\cdot 100=0{,}405$ Watt **.**

ΑΣΚΗΣΗ 6.4

Δίνεται το κύκλωμα σταθεροποίησης τάσης.



Σχήμα 6. 40

Με γνωστά την τάση εισόδου u_1=15 V, την τάση εξόδου u_2=6 V, την αντίσταση R=200 Ω και την αντίσταση φορτίου R_L=1 KΩ, να βρείτε:

1. Το ρεύμα της εξόδου που διαρρέει το φορτίο R_L .

2. Το ρεύμα της διόδου Zener.

Απάντηση

1.

Το ρεύμα που διαρρέει το φορτίο στην έξοδο του κυκλώματος είναι:

$$I_L = \frac{V_2}{R_L} = \frac{6}{1000} = 6mA.$$

2.

Το ρεύμα της διόδου Zener είναι: $I = I_z + I_L \Rightarrow I_Z = I - I_L$. Όμως το ρεύμα I είναι,

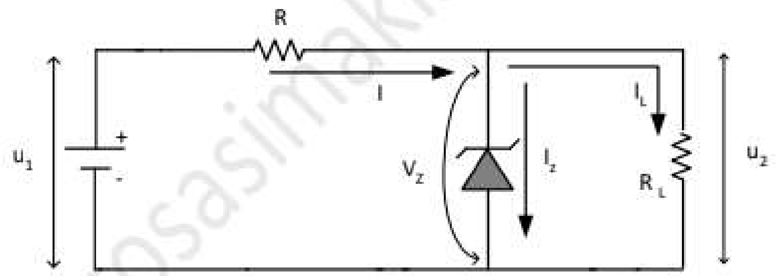
$$I = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{15-6}{200} = 0{,}045A = 45\,mA.$$

Οπότε αντικαθιστώντας, προκύπτει:

$$I_Z = I - I_L = 45 - 6 = 39 \text{ mA}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 6.5

Δίνεται το κύκλωμα σταθεροποίησης τάσης.



Σχήμα 6. 41

Η τάση της εισόδου μεταβάλλεται από $V_{1(min)}$=15 V έως και $V_{1(max)}$=30 V. Η αντίσταση φορτίου είναι R_L=30 KΩ, η τάση στα άκρα της ιδανικής διόδου Zener είναι V_Z=15 V και η δίοδος Zener διαρρέεται από ρεύμα I_Z=1mA.

Να βρείτε την μέγιστη τιμή της αντίστασης R.

Απάντηση

Η τάση της πηγής από την εκφώνηση γνωρίζουμε ότι παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέγιστη τιμής της προκειμένου να υπολογίσουμε την μέγιστη τιμή της αντίστασης R του κυκλώματος. Για το κύκλωμα ισχύουν ότι, $I = I_z + I_L$ και $V_{εισόδου} = V_{εξόδου} + I \cdot R$, με $V_{εξόδου} = V_z = I_L \cdot R_L$. Οπότε, αντικαθιστώντας προκύπτει

$$V_1 = V_Z + \left(I_Z + \frac{V_Z}{R_L}\right)R \Rightarrow \quad R = \frac{V_1 - V_Z}{I_Z + \frac{V_Z}{R_L}}.$$

Τελικά είναι,

$$R = \frac{V_1 - V_Z}{I_Z + \frac{V_Z}{R_L}} = \frac{30 - 15}{1 \cdot 10^{-3} + \frac{15}{30 \cdot 10^{3}}} = \frac{15}{10^{-3} + 0{,}5 \cdot 10^{-3}} = \frac{15}{1{,}5} \cdot 1000 = 10000\,\Omega$$

ή R=10 KΩ .

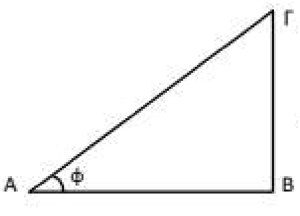
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

— Πίνακας τιμών γωνιών

	0°	30° ή $\frac{\pi}{6}$	45° ή $\frac{\pi}{4}$	60° ή $\frac{\pi}{3}$	90° ή $\frac{\pi}{2}$	120° ή $\frac{2\pi}{3}$	180° ή π
ημφ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
συνφ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1
εφφ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	0

— Πολλαπλάσια μεγέθη		— Υποπολλαπλάσια μεγέθη	
Πρόθεμα	Μαθηματικό Σύμβολο	Πρόθεμα	Μαθηματικό σύμβολο
Κ (Κίλο)	$K = 10^3 = 1000$	Σέντι	$c = 10^{-2} = \frac{1}{100}$
Μ (Μέγκα)	$M = 10^6 = 1000000$	Μίλλι	$m = 10^{-3} = \frac{1}{1000}$
Γ (Γίγα)	$G = 10^9 = 1000000000$	Μίκρο	$\mu = 10^{-6} = \frac{1}{1000000}$
Τ (Τέρα)	$T = 10^{12} = 1000000000$	Νάνο	$n = 10^{-9} = \frac{1}{1000000000}$

— Για το τρίγωνο του σχήματος ισχύουν:

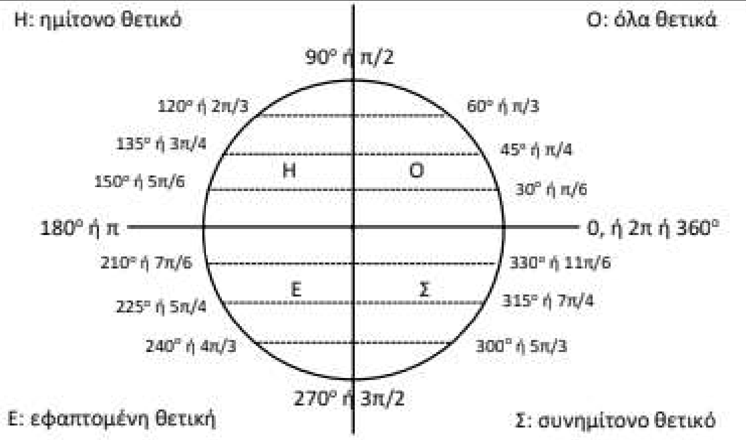


Πυθαγόρειο θεώρημα: $(A\Gamma)^2 = (AB)^2 + (B\Gamma)^2$

$$\eta\mu\varphi = \frac{\text{Απέναντι κάθετος}}{\text{Υποτείνουσα}} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\text{Προσκείμενη κάθετος}}{\text{Υποτείνουσα}} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\text{Απέναντι κάθετος}}{\text{Προσκείμενη κάθετος}} = \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

— Τριγωνομετρικός κύκλος	
— Τριγωνομετρικές ταυτότητες	▪ $ημ(-θ) = -ημθ$ ▪ $συν(-θ) = συνθ$ ▪ $ημφ = συν(90^\circ - φ) = συν(\frac{π}{2} - φ)$ ▪ $συνφ = ημ(90^\circ - φ) = ημ(\frac{π}{2} - φ)$ ▪ $ημ(180^\circ + φ) = ημ(π + φ) = -ημφ$ ▪ $συν(180^\circ + φ) = συν(π + φ) = -συνφ$ ▪ $ημωt = ημθ^\circ \rightarrow \begin{cases} ωt = θ + 2κπ \\ ωt = 2κπ + π - θ \end{cases} \quad κ = 0,1,2,...$ ▪ $συνωt = συνθ^\circ \rightarrow \{ωt = 2κκ \pm θ$ ▪ $εφωt = εφθ^\circ \rightarrow \{ωt = κπ + θ$ ▪ $ημ^2φ + συν^2φ = 1$ ▪ $ημ2θ = 2 \cdot ημθσυνθ$ ▪ $ημα \cdot ημβ = \frac{1}{2}(συν(α-β) - συν(α+β))$ ▪ $ημ(α+β) = ημασυνβ + συναημβ$ ▪ $ημ(α-β) = ημασυνβ - ημβσυνα$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

— **ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ**
Εκδόσεις ΟΕΔΒ, τομέας Ηλεκτρολογικός - Βουρνάς –Δαφέρμος- Πάγκαλος-Χατζαράκης- ΕΠΑΛ - ISBN:960-06-1100-9, έκδοση 2007

— **ΑΝΑΛΥΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ**
Εκδόσεις ΟΕΔΒ, τομέας Ηλεκτρολογικός -Ιωαννίδου- Μικρώνης- Τσίλης-ΕΠΑΛ-ISBN:960-06-0904-7, έκδοση Ε 2004

— **ΓΕΝΙΚΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ** μέρος Α θεωρία
Εκδόσεις ΟΕΔΒ, τομέας Ηλεκτρονικών - Παπαιωάννου, Παπαδάκης, Μπρακατσούλας-ΕΠΑΛ-ISBN:960-06-1427-Χ, έκδοση Ζ 2008

— **ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΙΑ**
Εκδόσεις ΟΕΔΒ, κύκλου τεχνολογίας παραγωγής - Βιδιαδάκης-Μπινιάρης-Κανελλόπουλος Χατζαράκης- Γ Λυκείου Τεχνολογικής Κατεύθυνσης-ISBN:960-06-0710-9, έκδοση Ε 2003

— **ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ**
Εκδόσεις ΟΕΔΒ, τομέας Ηλεκτρολογικός - Βαρζάκης-Πάσχος-Τσελέκας- ΕΠΑΛ-ISBN:960-06-0830-Χ, έκδοση 2007

— **ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ**
Γιώργος Ασημάκης- εκδόσεις ΑΡΝΟΣ-ISBN:978-960-7225-29-0

— **ELECTROLOGY-EPALEPAS.BLOGSPOT.GR**
Διδακτικό υλικό ηλεκτρολογίας – εκπαιδευτικός ιστότοπος

— **ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΚΑΙ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ – ΜΕΡΟΣ Α ΘΕΩΡΙΑ**
Εκδόσεις ΟΕΔΒ, τομέας Ηλεκτρονικός - Κανελλόπουλος-Παληός-Χατζαράκης-ISBN:960-06-1246-4, έκδοση 2008

— **ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ ΙΙ**
Εκδόσεις ΟΕΔΒ – Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ-Σ.Τ.Ε.Φ. –Μελάς Π.- Αθήνα 1996 (έκδοση 1980)

— ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ - ΤΟΜΟΣ 2 , ΤΟ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ
Εκδόσεις ΙΩΝ- Στεργίου- Τουλόγλου- ISBN:978-960-411-624-9

— ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΙΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ (ΓΕΛ)
Εκδόσεις Σαββάλα- Κουμαριανός Γιώργος - Γ Λυκείου Τεχνολογικής Κατεύθυνσης- ISBN: 978-960-449-759-1

— ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ ΙΙ
Εκδόσεις ίδρυμα Ευγενίδου- Κοκκινάκη, Καρύδη, Αθήνα 1995 (έκδοση 1979)

— ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ
Εκδόσεις ΟΕΔΒ, τομέας Ηλεκτρολογικός – Νικολόπουλος-Τουλόγλου- ISBN-960-06-0869-5, έκδοση Α 1999

Περιέχει:

- Αναλυτική Θεωρία
- Σύνοψη Τύπων
- Απαντήσεις Ερωτήσεων
- Λυμένες Ασκήσεις
- Θέματα Εξετάσεων

Το βιβλίο απευθύνεται σε καθηγητές τεχνικής εκπαίδευσης, σε μαθητές – σπουδαστές επαγγελματικών λυκείων και σχολών ειδικότητας ηλεκτρολόγων και σε υποψηφίους πανελληνίων εξετάσεων του τομέα ηλεκτρολογίας για την εισαγωγή τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

ISBN: 978-618-86471-4-5