

**Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ)
Γεωμετρία Β΄ Λυκείου ΕΠΑΛ**

Εκφωνήσεις - Λύσεις



2024-2025

Ασκησόπολις

Στέλιος Μιχαήλογλου / Δημήτρης Πατσιμάς / Νίκος Τούντας

www.Askisopolis.gr



Τα θέματα προέρχονται από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

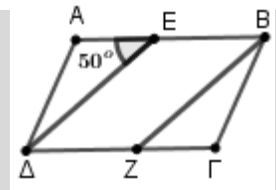
Παραλληλόγραμμα - Τραπεζία

Παραλληλόγραμμα

2^ο Θέμα

14501. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία E, Z των πλευρών $AB, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα, ώστε $BE = \Delta Z$ και $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = 50^\circ$.

- α)** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BZ\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}\hat{E}\hat{\Delta}$ και $\hat{B}\hat{Z}\hat{\Delta}$.



Λύση

α) Είναι $BE \parallel \Delta Z$, γιατί οι απέναντι πλευρές $AB, \Gamma\Delta$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. Επιπλέον, από τα δεδομένα έχουμε ότι $BE = \Delta Z$. Το τετράπλευρο $BZ\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του $BE, \Delta Z$ είναι ίσες και παράλληλες.

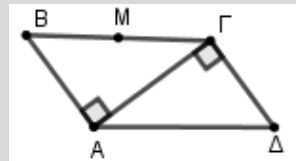
β) Οι γωνίες $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta}, \hat{B}\hat{E}\hat{\Delta}$ είναι παραπληρωματικές, οπότε

$$\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} + \hat{B}\hat{E}\hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + \hat{B}\hat{E}\hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}\hat{E}\hat{\Delta} = 130^\circ.$$

Είναι $\hat{B}\hat{E}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{Z}\hat{\Delta} = 130^\circ$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου $BZ\Delta E$.

14503. Τα δύο ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος έχουν κοινή πλευρά την $A\Gamma$ και $AB = \Gamma\Delta$.

- α)** Να αιτιολογήσετε γιατί οι AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και $A\Delta = 8$, να βρείτε το μήκος του BM .



Λύση

α) Οι AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες, γιατί είναι κάθετες στην $A\Gamma$ στα σημεία της A, Γ αντίστοιχα.

β) Από τα δεδομένα έχουμε ότι $AB = \Gamma\Delta$ και από το ερώτημα α έχουμε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του $AB, \Gamma\Delta$ είναι ίσες και παράλληλες.

γ) Είναι $B\Gamma = A\Delta$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Από τα δεδομένα έχουμε ότι $A\Delta = 8$, άρα $B\Gamma = 8$. Αφού το M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, ισχύει ότι $BM = \frac{B\Gamma}{2} = 4$.

14504. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο και Bx προέκταση της πλευράς του AB προς το B .

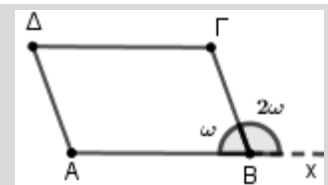
α) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας συμπληρωμένη την ακόλουθη πρόταση:

Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος παράλληλες είναι οι πλευρές και απέναντι γωνίες είναι οι

β) Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος να δείξετε ότι $\hat{\omega} = 60^\circ$.

γ) Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών $\hat{A}, \hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma}$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

Να τεκμηριώσετε με επιχειρήματα την απάντησή σας.



Λύση

α) Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος παράλληλες είναι οι πλευρές $AB, \Delta\Gamma$ και οι πλευρές $A\Delta, B\Gamma$ και απέναντι γωνίες είναι οι $\hat{A}, \hat{\Gamma}$ και $\hat{\Delta}, \hat{\omega}$.

β) Οι γωνίες ω και 2ω του σχήματος είναι παραπληρωματικές, οπότε
 $\omega + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow 3\omega = 180^\circ \Leftrightarrow \omega = 60^\circ$

γ) Αφού το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οι γωνίες $\hat{\omega}, \hat{A}$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ με τέμνουσα την ΑΒ, οπότε

$$\hat{\omega} + \hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

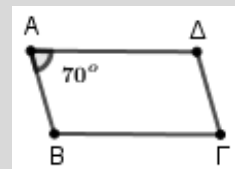
Αφού το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή
 $\hat{\Delta} = \hat{\omega} = 60^\circ$ και $\hat{\Gamma} = \hat{A} = 120^\circ$.

14515. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = 70^\circ$, $AB = 5$ και $B\Gamma = 2AB$.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = 110^\circ$.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\Gamma}, \hat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.



Λύση

α) Είναι ΑΔ//ΒΓ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Οι γωνίες $\hat{A}, \hat{B}$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ με τέμνουσα την ΑΒ, άρα

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

β) Οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ίσες, άρα $\hat{\Gamma} = \hat{A} = 70^\circ$ και $\hat{\Delta} = \hat{B} = 110^\circ$.

γ) Από τα δεδομένα έχουμε ότι $AB = 5$ και $B\Gamma = 2AB = 2 \cdot 5 = 10$. Οι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου είναι ίσες, οπότε $\Gamma\Delta = AB = 5$ και $A\Delta = B\Gamma = 10$. Η περίμετρος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι $AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A = 5 + 10 + 5 + 10 = 30$.

14516. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο και Βx η προέκταση της πλευράς του ΑΒ προς το Β.

α) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας συμπληρωμένη την ακόλουθη πρόταση:

«Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος παράλληλες μεταξύ τους είναι οι πλευρές όπως και οι πλευρές, απέναντι δε γωνίες είναι οι και οι».

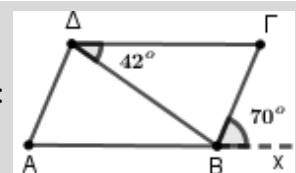
β) Λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου και τις γωνίες που σημειώνονται πάνω στο σχήμα, να υπολογίσετε με τη σειρά που ζητούνται:

i. Το μέτρο της γωνίας $\hat{A}$.

ii. Το μέτρο της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

iii. Το μέτρο της γωνίας $\hat{\Delta B A}$.

Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



Λύση

α) «Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος παράλληλες μεταξύ τους είναι οι πλευρές **ΑΒ, ΔΓ** όπως και οι πλευρές **ΑΔ, ΒΓ**, απέναντι γωνίες είναι οι $\hat{A}, \hat{\Gamma}$ και $\hat{A\Delta\Gamma}, \hat{\Gamma B A}$ ».

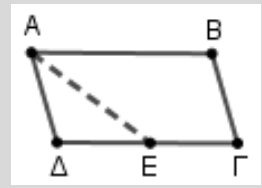
β) i. Η γωνία $\hat{A}$ είναι ίση τη γωνία $\hat{\Gamma B x}$ ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παράλληλων πλευρών ΑΔ και ΒΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ με τέμνουσα την ΑΒ, άρα $\hat{A} = 70^\circ$.

ii. Η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, άρα $\hat{\Gamma} = 70^\circ$.

iii. Η γωνία ΔBA είναι ίση με τη γωνία $B\Delta\Gamma$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παράλληλων πλευρών $\Delta\Gamma$ και AB του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ με τέμνουσα την ΔB , άρα $\Delta BA = 42^\circ$.

14580. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με $A\Delta < AB$. Η διχοτόμος της γωνίας του $\hat{A}$ τέμνει την πλευρά $\Delta\Gamma$ σε σημείο E .

- α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $B\hat{A}E$ και $A\hat{E}\Delta$ είναι ίσες και στη συνέχεια να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.
β) Αν είναι $AB = 2A\Delta$, να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = 2\Delta E$.



Λύση

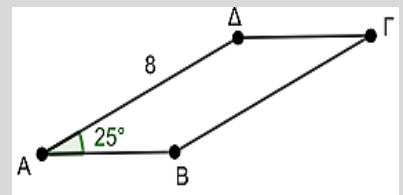
α) Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, τότε οι απέναντι πλευρές του AB και $\Delta\Gamma$ είναι παράλληλες, οπότε $BAE = A\Delta E$ (1) ως γωνίες εντός εναλλάξ των παράλληλων πλευρών AB και $\Delta\Gamma$ με τέμνουσα τη AE . Η AE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ οπότε $\Delta AE = BAE$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $A\Delta E = \Delta AE$, οπότε το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές με $A\Delta = \Delta E$ (3).

β) Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, τότε οι απέναντι πλευρές του AB και $\Delta\Gamma$ είναι ίσες, δηλαδή $AB = \Delta\Gamma$. Από υπόθεση είναι $AB = 2A\Delta$ και αφού $AB = \Delta\Gamma$, τότε θα είναι $\Delta\Gamma = 2A\Delta$. Όμως $A\Delta = \Delta E$ λόγω της σχέσης (3) του α) ερωτήματος, άρα $\Delta\Gamma = 2\Delta E$.

18199. Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{A} = 25^\circ$ και $A\Delta = 8$.
Να υπολογίσετε:

- α) Το μέτρο της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.
β) Το μήκος της πλευράς $B\Gamma$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.
γ) Τα μέτρα των υπόλοιπων γωνιών του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.



Λύση

α) Οι απέναντι γωνίες κάθε παραλληλογράμμου είναι ίσες, άρα $\hat{\Gamma} = \hat{A} = 25^\circ$.

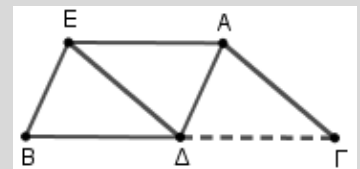
β) Οι απέναντι πλευρές κάθε παραλληλογράμμου ανά δύο είναι ίσες. Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ οι πλευρές $B\Gamma$ και $A\Delta$ είναι απέναντι, οπότε προκύπτει ότι $B\Gamma = A\Delta = 8$.

γ) Το άθροισμα των γωνιών κάθε παραλληλογράμμου είναι 360° , άρα

$$A + B + \Gamma + \Delta = 360^\circ \Leftrightarrow 25^\circ + B + 25^\circ + B = 360^\circ \Leftrightarrow 2B = 360^\circ - 50^\circ \Leftrightarrow 2B = 310^\circ \Leftrightarrow B = 155^\circ = \Delta.$$

19819. Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο $BEA\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. Η παράλληλη από το A προς την $E\Delta$ (δηλαδή η $A\Gamma$), τέμνει την προέκταση της $B\Delta$ προς το Δ σε σημείο Γ .

- α) Να εξηγήσετε γιατί το τμήμα EA είναι παράλληλο στο τμήμα $\Delta\Gamma$.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta EA\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Αν $A\hat{\Gamma}\Delta = 30^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{E}\Delta$.



Λύση

α) Αφού το τετράπλευρο $BEA\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο θα είναι $EA \parallel B\Delta$, ως απέναντι πλευρές του, οπότε η EA θα είναι παράλληλη στην ευθεία $B\Gamma$, άρα το τμήμα EA θα είναι παράλληλο στο τμήμα $\Delta\Gamma$.

β) Αφού EA είναι παράλληλο στο τμήμα $\Delta\Gamma$ (από το α) ερώτημα) και $A\Gamma$ είναι παράλληλη στην $E\Delta$ από τα δεδομένα, το τετράπλευρο $\Delta EA\Gamma$ θα είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του EA , $\Delta\Gamma$ και $A\Gamma$, $E\Delta$ ανά δύο παράλληλες.

- γ) Η γωνία $\angle A\Gamma\Delta = 30^\circ$ είναι ίση με τη γωνία $\angle A\epsilon\Delta$ ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου $\Delta\epsilon\Lambda\Gamma$ του β) ερωτήματος, οπότε $\angle A\epsilon\Delta = 30^\circ$.

19824. Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο $AB\Gamma\epsilon$ είναι παραλληλόγραμμο με $B\Gamma = 5$ και $AB = 8$.

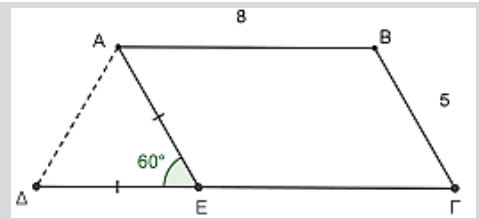
Στην προέκταση της $\Gamma\epsilon$ προς το ϵ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $AE = \epsilon\Delta$ και $\angle A\epsilon\Delta = 60^\circ$.

α) Να δείξετε ότι:

i. $AE = 5$ και $\epsilon\Gamma = 8$.

ii. $\Delta\epsilon = \Lambda\Delta = 5$.

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο Π του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.



Λύση

α) i. Από τα δεδομένα έχουμε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\epsilon$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε θα έχει τις απέναντι πλευρές ίσες, δηλαδή είναι $AB = \epsilon\Gamma$ και $B\Gamma = AE$. Οπότε, αφού είναι $AB = 8$ και $B\Gamma = 5$, τότε θα είναι $\epsilon\Gamma = 8$ και $AE = 5$.

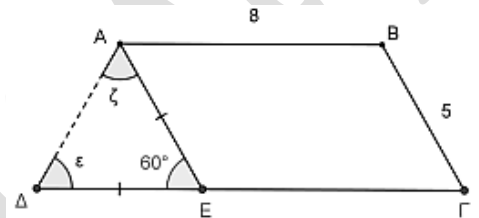
ii. Αφού είναι $AE = \epsilon\Delta$ από τα δεδομένα, το τρίγωνο $A\epsilon\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά $\Lambda\Delta$ και με γωνία κορυφής

$\angle A\epsilon\Delta = 60^\circ$ οπότε οι γωνίες της βάσης του θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\epsilon} = \hat{\zeta}$.

Για τις γωνίες του τριγώνου $A\epsilon\Delta$ έχουμε:

$$60^\circ + \hat{\epsilon} + \hat{\zeta} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\epsilon} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Leftrightarrow \hat{\epsilon} = 60^\circ = \hat{\zeta}$$

Επομένως το τρίγωνο $A\epsilon\Delta$ είναι ισόπλευρο αφού έχει όλες του τις γωνίες ίσες με 60° , οπότε $AE = \Delta\epsilon = \Lambda\Delta = 5$.



β) Η περίμετρος Π του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ είναι $\Pi = AB + B\Gamma + \Delta\Gamma + \Lambda\Delta$.

• Από τα δεδομένα έχουμε ότι $AB = 8$ και $B\Gamma = 5$.

• $\Delta\Gamma = \Delta\epsilon + \epsilon\Gamma$, με $\epsilon\Gamma = 8$ (από το α)i. ερώτημα) και $\Delta\epsilon = 5$ (από το α)ii. ερώτημα), οπότε $\Delta\Gamma = 5 + 8 = 13$.

• $\Lambda\Delta = 5$ (από το α)ii. ερώτημα)

Άρα $\Pi = 8 + 5 + 13 + 5 = 31$.

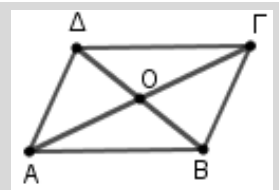
19832. Το τετράπλευρο του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με παράλληλες πλευρές τις AB , $\Delta\Gamma$ και $\Lambda\Delta$, $B\Gamma$ και διαγωνίους $\Lambda\Gamma$ και $\Delta\Lambda$, οι οποίες τέμνονται σε σημείο O . Αν επιπλέον είναι $\Lambda\Gamma = 5$, $OA = 2,1$ και $AB = 4,2$, να απαντήσετε στις ερωτήσεις που ακολουθούν, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς $\Delta\Gamma$.

β) Να βρείτε

i. το μήκος της διαγωνίου $\Delta\Lambda$,

ii. το μήκος του τμήματος OG .



Λύση

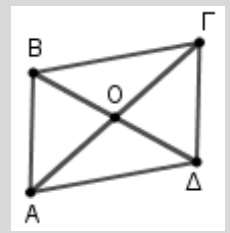
α) Είναι $\Delta\Gamma = AB$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 4,2$. Άρα $\Delta\Gamma = 4,2$.

β) Οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομούνται και το σημείο τομής τους είναι το κοινό τους μέσο, δηλαδή στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ για τις διαγωνίους του $B\Delta$ και $\Lambda\Gamma$, που τέμνονται στο O , θα ισχύει ότι το O είναι το κοινό τους μέσο. Δηλαδή, θα ισχύει ότι: $OB = O\Delta$ και $OA = OG$.

i. Αφού είναι $OA = OG$ και $OA = 2,1$ τότε $\Delta\Lambda = 2 \cdot OA = 2 \cdot 2,1 = 4,2$.

ii. Είναι $\Lambda\Gamma = OA + OG$ με $\Lambda\Gamma = 5$ και $OA = OG$. Άρα $5 = 2 \cdot OG$ ή $OG = 2,5$.

19833. Το τετράπλευρο του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με παράλληλες πλευρές τις AB , $\Delta\Gamma$ και $A\Delta$, $B\Gamma$, το σημείο O είναι το κέντρο του, και $A\Delta = \Delta\Gamma = 5$. Να απαντήσετε στα ερωτήματα που ακολουθούν, αιτιολογώντας την απάντησή σας.



α) Να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ και να υπολογίσετε την περίμετρό του.

β) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $A\hat{O}\Delta$.

γ) Αν είναι $OD = 3$ και $A\Gamma = 8$, να βρείτε τα μήκη των τμημάτων ΔB και $O\Gamma$.

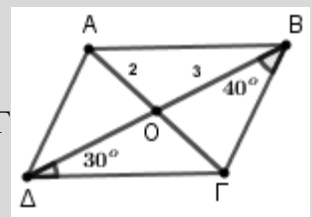
Λύση

α) Αφού το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και έχει δυο διαδοχικές πλευρές ίσες, τις $A\Delta$ και $\Delta\Gamma$ από τα δεδομένα, τότε θα είναι ρόμβος. Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος θα έχει όλες του τις πλευρές ίσες, δηλαδή $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A = 5$. Οπότε η περίμετρό του Π θα είναι $\Pi = 4 \cdot AB = 4 \cdot 5 = 20$.

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι, το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, οπότε οι διαγωνιοί του θα τέμνονται κάθετα, άρα η γωνία $A\hat{O}\Delta = 90^\circ$.

γ) Γνωρίζουμε ότι, οι διαγωνιοί παραλληλογράμμου διχοτομούνται και το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το κοινό τους μέσο. Οπότε στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ για τις διαγωνίους του $B\Delta$ και $A\Gamma$, που τέμνονται στο O , θα ισχύει ότι το O είναι το κοινό τους μέσο. Δηλαδή $OB = OD$ και $OA = O\Gamma$. Αφού είναι $OD = OB$ και $OD = 3$ τότε $\Delta B = 2 \cdot OD = 2 \cdot 3 = 6$. Είναι $A\Gamma = OA + O\Gamma \Leftrightarrow 8 = 2 \cdot O\Gamma \Leftrightarrow O\Gamma = 4$.

20946. Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος ισχύουν $AB = \Gamma\Delta$ και $AB \parallel \Gamma\Delta$. Παίρνοντας υπόψιν και τα υπόλοιπα δεδομένα όπως αυτά φαίνονται στο σχήμα, να υπολογίσετε:



α) Τα μήκη των τμημάτων $O\Gamma$, OD , όπου O είναι το σημείο τομής των $A\Gamma$
β) Τα μέτρα των γωνιών A , B , Γ , Δ του τετραπλεύρου.

Λύση

α) Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ έχει τις απέναντι πλευρές του AB και $\Gamma\Delta$ ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως οι διαγωνίες του $A\Gamma$ και $B\Delta$ θα διχοτομούνται στο O . Άρα $O\Gamma = OA = 2$ και $OD = OB = 3$.

β) Στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ ισχύει: $B\Gamma\Delta + \Gamma B\Delta + \Gamma\Delta B = 180^\circ \Leftrightarrow B\Gamma\Delta + 40^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B\Gamma\Delta = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

Όμως στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες είναι ίσες, άρα $A = \Gamma = 110^\circ$.

Ακόμη $A + B = 180^\circ$ (ως εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $A\Delta$, $B\Gamma$ που τέμνονται από την AB). Άρα $110^\circ + B = 180^\circ \Leftrightarrow B = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$, οπότε $\Delta = B = 70^\circ$.

4^ο Θέμα

14554. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A\Delta < AB$, τη διχοτόμο της γωνίας του $\hat{A}$ η οποία τέμνει την πλευρά του $\Delta\Gamma$ σε σημείο E και τους ισχυρισμούς:

Ισχυρισμός 1: «Το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία A , Δ και E είναι ισοσκελές».

Ισχυρισμός 2: «Το τμήμα ΔE είναι ίσο με την πλευρά $B\Gamma$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε κάθε έναν από τους παραπάνω ισχυρισμούς ως αληθή ή ψευδή, αιτιολογώντας την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

β) Ποιο θα είναι το μέτρο των γωνιών του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ ώστε το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία A , Δ και E να είναι ισόπλευρο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Η AE είναι διχοτόμος της γωνίας A οπότε $A_1 = A_2$ (1).

Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, τότε οι απέναντι πλευρές του AB και $\Delta\Gamma$ είναι παράλληλες, οπότε $A_1 = E_1$ (2) ως γωνίες εντός εναλλάξ των παράλληλων πλευρών AB και $\Delta\Gamma$ με τέμνουσα τη AE . Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$E_1 = A_2$, οπότε το τρίγωνο ΔDE είναι ισοσκελές με $A\Delta = \Delta E$ (3).

Συνεπώς, ο ισχυρισμός 1 είναι αληθής.

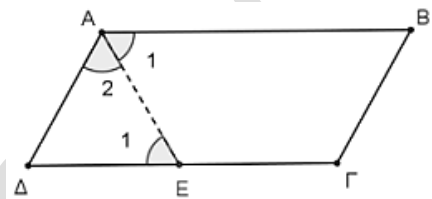
Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, τότε οι απέναντι πλευρές του $A\Delta$ και $B\Gamma$ είναι ίσες, δηλαδή $A\Delta = B\Gamma$ (4). Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι $\Delta E = B\Gamma$.

Συνεπώς, ο ισχυρισμός 2 είναι αληθής.

β) Αν το τρίγωνο ΔDE είναι ισόπλευρο, τότε όλες οι γωνίες του θα είναι 60° , οπότε $\Delta = 60^\circ$.

Όμως $B = \Delta = 60^\circ$ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

Οι γωνίες A, B είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παράλληλων πλευρών $A\Delta$ και $B\Gamma$ με τέμνουσα την AB , οπότε: $A + B = 180^\circ \Leftrightarrow A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Όμως $A = \Gamma$ ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου, οπότε $\Gamma = 120^\circ$.



Ορθογώνιο

4^ο Θέμα

21394. Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος οι ΔA και $B\Gamma$ είναι κάθετες στην ΔB και επίσης είναι $A\Delta = B\Gamma = 3$.

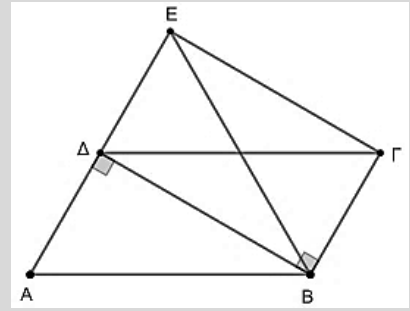
α) Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Προεκτείνουμε την $A\Delta$ κατά τμήμα $\Delta E = 3$.

Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $\Delta B\Gamma E$ είναι ορθογώνιο.

ii. Το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές.



Λύση

α) Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ οι πλευρές $A\Delta$ και $B\Gamma$ είναι κάθετες στην $B\Delta$, άρα είναι μεταξύ τους παράλληλες. Επειδή $A\Delta = B\Gamma$, το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο αφού δυο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

β) i) Οι ΔE και $B\Gamma$ είναι παράλληλες, αφού οι $A\Delta$ και $B\Gamma$ είναι παράλληλες. Επίσης είναι $\Delta E = B\Gamma = 3$, οπότε το $\Delta B\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο αφού δυο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες. Είναι $\Delta B\Gamma = 90^\circ$, οπότε το $\Delta B\Gamma E$ είναι ορθογώνιο.

ii) Επειδή το $\Delta B\Gamma E$ είναι ορθογώνιο, οι διαγώνιοι του είναι ίσες άρα $BE = \Gamma\Delta$. Επίσης είναι $BA = \Gamma\Delta$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Επομένως $BA = BE$, οπότε το BAE είναι ισοσκελές.

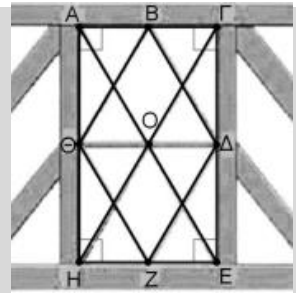
Ρόμβος 2^ο Θέμα

14505. Στην εικόνα που ακολουθεί, υπάρχει το σχέδιο ενός παραθύρου με $ΒΔ = ΔΖ = ΖΘ = ΘΒ$ και τις γωνίες $\hat{ΑΓΕ}$, $\hat{ΓΕΗ}$, $\hat{ΕΗΑ}$, $\hat{ΗΑΓ}$ ορθές.

α) Τι είδους τετράπλευρα είναι τα $ΒΔΖΘ$ και $ΑΓΕΗ$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Ένας μαθητής λέει «τα τμήματα $ΑΕ$ και $ΓΗ$ είναι ίσα μεταξύ τους» και μια μαθήτρια, όταν το άκουσε, συμπλήρωσε «και τα $ΑΟ$, $ΟΕ$, $ΓΟ$ και $ΟΗ$ είναι ίσα μεταξύ τους». Συμφωνείτε με τους ισχυρισμούς που διατύπωσαν ο μαθητής και η μαθήτρια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) Το τετράπλευρο $ΒΔΖΘ$ έχει όλες τις πλευρές του $ΒΔ$, $ΔΖ$, $ΖΘ$ και $ΘΒ$ ίσες από τα δεδομένα, οπότε είναι ρόμβος. Το τετράπλευρο $ΑΓΕΗ$ έχει τέσσερις γωνίες ορθές οπότε είναι ορθογώνιο.

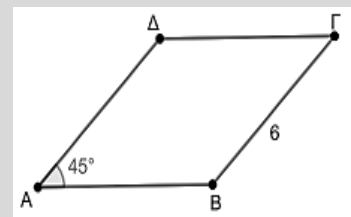
β) Τα τμήματα $ΑΕ$ και $ΓΗ$ είναι διαγώνιοι του ορθογωνίου $ΑΓΕΗ$, οπότε θα είναι ίσες, δηλαδή $ΑΕ = ΓΗ$. Επειδή το τετράπλευρο $ΑΓΕΗ$ ως ορθογώνιο είναι και παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιοι του $ΑΕ$ και $ΓΗ$ τεμνόμενες σε εσωτερικό τους σημείο $Ο$ διχοτομούνται, δηλαδή είναι $ΑΟ = ΟΕ = ΓΟ = ΟΗ$. Συνεπώς, οι ισχυρισμοί των δυο μαθητών είναι αληθείς.

18200. Στον ρόμβο $ΑΒΓΔ$ είναι $\hat{Α} = 45^\circ$ και $ΒΓ = 6$.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{Γ}$ του ρόμβου.

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των υπόλοιπων πλευρών του ρόμβου.

γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών $Β$ και $Δ$ είναι ίσο με τρεις ορθές.



Λύση

α) Οι απέναντι γωνίες κάθε παραλληλογράμμου, άρα και κάθε ρόμβου ανά δύο είναι ίσες, άρα $\hat{Γ} = \hat{Α} = 45^\circ$.

β) Όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες. Εφόσον $ΒΓ = 6$ είναι $ΑΒ = ΓΔ = ΑΔ = ΒΓ = 6$.

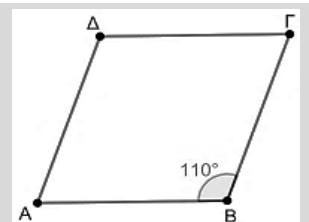
γ) Το άθροισμα των γωνιών του ρόμβου είναι 360° , οπότε $\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} + \hat{Δ} = 360^\circ \Leftrightarrow 45^\circ + \hat{Β} + 45^\circ + \hat{Δ} = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{Β} + \hat{Δ} = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ = 3 \cdot 90^\circ$.

18201. Στον ρόμβο $ΑΒΓΔ$ είναι $\hat{Β} = 110^\circ$.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{Δ}$ του ρόμβου.

β) Να σχεδιάσετε τη διαγώνιο του ρόμβου από την κορυφή $Δ$.

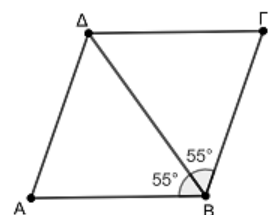
γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{ΑΒΔ}$.



Λύση

α) Οι απέναντι γωνίες κάθε παραλληλογράμμου, άρα και του ρόμβου είναι ίσες, άρα $\hat{Δ} = \hat{Β} = 110^\circ$.

β) Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα $ΒΔ$, το οποίο είναι η διαγώνιος του ρόμβου $ΑΒΓΔ$ από την κορυφή $Δ$.



γ) Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.

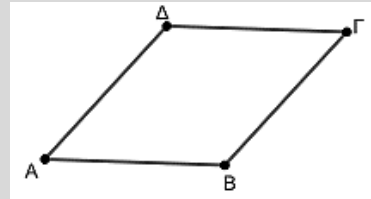
Επομένως η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β του ρόμβου. Άρα $\angle ABD = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$.

18202. Ο ρόμβος ΑΒΓΔ έχει περίμετρο 48.

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του ρόμβου.

β) Να σχεδιάσετε τις διαγώνιους του ρόμβου.

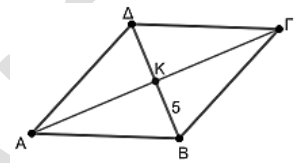
γ) Αν Κ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του ρόμβου και το ευθύγραμμο τμήμα ΒΚ έχει μήκος 5, να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου ΒΔ του ρόμβου.



Λύση

α) Όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες. Άρα το μήκος κάθε μιας πλευράς του ρόμβου ΑΒΓΔ είναι $48 : 4 = 12$. Επομένως $AB = BC = CD = DA = 12$.

β) Σχεδιάζουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ που είναι οι διαγώνιοι του ρόμβου.



γ) Οι διαγώνιοι κάθε ρόμβου διχοτομούνται. Άρα το σημείο Κ είναι το μέσο και των δύο διαγωνίων, επομένως και της ΒΔ. Άρα $BD = 2 \cdot BK = 2 \cdot 5 = 10$.

20082. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ η πλευρά ΑΒ είναι διπλάσια της πλευράς του ΒΓ. Αν Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα,

α) Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα ΑΕΖΔ και ΒΕΖΓ είναι ρόμβοι.

β) Τι είδους τετράπλευρο είναι το ΑΕΓΖ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

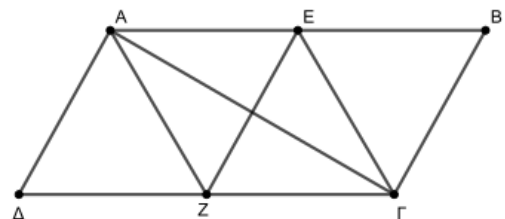
Λύση

α) Τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι ίσα ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών τους αντίστοιχα, επομένως $AE = EB = \Gamma Z = ZD$. Επίσης $AD = BC$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και επειδή

$$AB = 2BG \Leftrightarrow BG = \frac{AB}{2} \text{ ισχύει τελικά ότι:}$$

$$AE = EB = BG = \Gamma Z = ZD = AD \quad (1).$$

Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ έχει τις απέναντι πλευρές του ΑΕ και ΖΔ ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον λόγω της σχέσης (1) δύο διαδοχικές πλευρές του ΑΕ και ΑΔ είναι ίσες, επομένως είναι ρόμβος. Ομοίως το τετράπλευρο ΒΕΖΓ έχει τις απέναντι πλευρές του ΒΕ και ΖΓ ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον λόγω της σχέσης (1) δύο διαδοχικές πλευρές του ΒΕ και ΒΓ είναι ίσες, επομένως είναι ρόμβος.



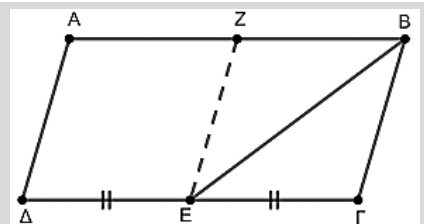
β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ έχει τις απέναντι πλευρές του ΑΕ και ΖΓ ίσες λόγω της σχέσης (1) και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

20087. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $AB = 2BG$ και Ε είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ.

α) Να αποδείξετε ότι το τμήμα ΒΕ διχοτομεί τη γωνία Β του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

β) Αν το σημείο Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, τι είδους τετράπλευρο είναι το ΖΒΓΕ;

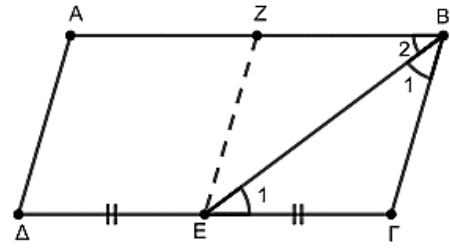
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) Οι πλευρές AB και ΓΔ είναι ίσες ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Επειδή το E είναι το μέσο της ΓΔ, έχουμε $GE = ED = \frac{GD}{2} = \frac{AB}{2} = BG$. Άρα το τρίγωνο BGE είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά BE. Οπότε οι γωνίες της βάσης του θα είναι ίσες, δηλαδή $B_1 = E_1$.

Όμως $E_1 = B_2$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB και ΓΔ όταν τέμνονται από τη BE. Συνεπώς $B_1 = B_2$, δηλαδή η BE διχοτομεί τη γωνία B του παραλληλογράμμου.



β) Το σημείο Z είναι το μέσο της πλευράς AB, άρα $ZB = \frac{AB}{2} = BG = GE$. Επιπλέον $ZB \parallel EG$ ως τμήματα στις απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ABGD. Άρα το τετράπλευρο ZBGE έχει τις απέναντι πλευρές του ZB και GE ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Όμως η διαγώνιος BE διχοτομεί τη γωνία του B, οπότε είναι τελικά ρόμβος.

4^ο Θέμα

19839. Τα τρίγωνα ABK και ΓΔΛ του σχήματος είναι ίσα και ισοσκελή με $AB = AK$ και $ΓΔ = ΓΛ$ αντίστοιχα.

Τα σημεία Λ και K είναι τα μέσα των BK και ΔΛ αντίστοιχα.

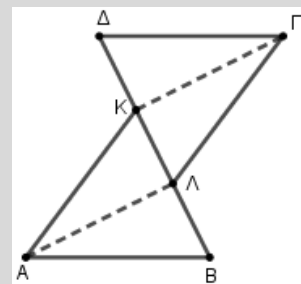
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AK = ΓΛ$.

ii. $AK = ΓK$.

iii. Το τετράπλευρο AKΓΛ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Θα μπορούσε το παραλληλόγραμμο AKΓΛ να είναι ρόμβος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



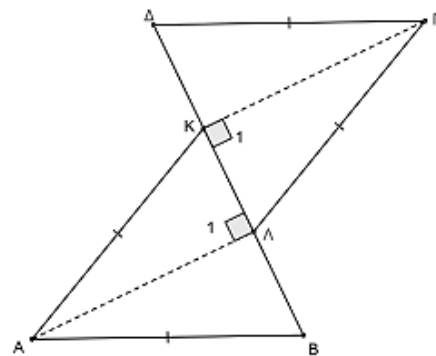
Λύση

α) i. Από τα δεδομένα έχουμε ότι τα τρίγωνα ABK και ΓΔΛ είναι ισοσκελή με $AB = AK$ και $ΓΔ = ΓΛ$ αντίστοιχα και ότι είναι ίσα, οπότε θα έχουν τις ίσες πλευρές τους ίσες, δηλαδή $AB = AK = ΓΔ = ΓΛ$, άρα $AK = ΓΛ$ (1).

ii. Τα σημεία Λ και K είναι τα μέσα των πλευρών KB και ΔΛ των ισοσκελών τριγώνων AKB και ΓΔΛ, οπότε τα ΑΛ και ΓΚ είναι ύψη στις πλευρές KB και ΔΛ αντίστοιχα. Άρα τα τρίγωνα ΑΛΚ και ΓΚΛ είναι ορθογώνια με $\Lambda_1 = K_1 = 90^\circ$, τα οποία έχουν την πλευρά ΚΛ κοινή και τις πλευρές τους ΑΚ, ΓΛ ίσες (από σχέση (1)). Επομένως τα τρίγωνα ΑΛΚ και ΓΚΛ είναι ίσα, γιατί έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, οπότε θα έχουν και τις άλλες κάθετες πλευρές του ίσες, δηλαδή $ΑΛ = ΓΚ$ (2).

iii. Το τετράπλευρο AKΓΛ θα είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του ΑΚ, ΓΛ και ΑΛ, ΓΚ ίσες (σχέσεις (1) και (2)).

β) Έστω ότι το παραλληλόγραμμο AKΓΛ είναι ρόμβος, τότε όλες οι πλευρές του είναι ίσες, άρα και $AK = ΑΛ$. Όμως $AK > ΑΛ$, γιατί το ΑΚ είναι η υποτείνουσα και το ΑΛ είναι κάθετη πλευρά στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΛΚ. Επομένως, οι πλευρές ΑΚ και ΑΛ του παραλληλογράμμου AKΓΛ δεν μπορεί να είναι ίσες, οπότε το παραλληλόγραμμο AKΓΛ δεν μπορεί να είναι ρόμβος.



20088. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ η πλευρά AB είναι διπλάσια της πλευράς του $B\Gamma$.
Αν E, Z τα μέσα των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα,

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τετράπλευρα $AEZ\Delta$ και $BEZ\Gamma$ είναι ρόμβοι.

ii. Το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Πόσων μοιρών πρέπει να είναι η γωνία $\hat{B}$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, ώστε το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι ρόμβος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) i. Τα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ είναι ίσα ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών τους αντίστοιχα, επομένως
 $AE=EB=\Gamma Z=Z\Delta$.

Επίσης $A\Delta=B\Gamma$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου

$AB\Gamma\Delta$ και επειδή $AB=2B\Gamma \Leftrightarrow B\Gamma=\frac{AB}{2}$ ισχύει τελικά ότι

$AE=EB=B\Gamma=\Gamma Z=Z\Delta=A\Delta$ (1).

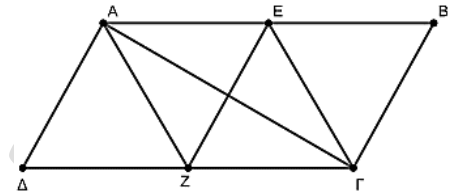
Το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ έχει τις απέναντι πλευρές του AE και $Z\Delta$ ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον λόγω της σχέσης (1) δύο διαδοχικές πλευρές του AE και $A\Delta$ είναι ίσες, επομένως είναι ρόμβος. Ομοίως το τετράπλευρο $BEZ\Gamma$ έχει τις απέναντι πλευρές του BE και $Z\Gamma$ ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον λόγω της σχέσης (1) δύο διαδοχικές πλευρές του BE και $B\Gamma$ είναι ίσες, επομένως είναι ρόμβος.

ii. Το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ έχει τις απέναντι πλευρές του AE και $Z\Gamma$ ίσες λόγω της σχέσης (1) και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Στο α) ii. ερώτημα το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο. Αν επιπλέον είναι ρόμβος, τότε όλες οι πλευρές του είναι ίσες. Δηλαδή $AE = \Gamma Z = Z\Delta = \Delta A$. Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι

$AE = \frac{AB}{2} = EB = B\Gamma$, από το α) i. ερώτημα ότι $B\Gamma = \Gamma Z$ και $\Gamma Z = \Gamma E$, δηλαδή το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι

ισόπλευρο. Επομένως οι γωνιές του είναι όλες 60° , άρα $B = 60^\circ$.



21404. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΓA κατά τμήμα $A\Delta = AB$. Από τα B και Δ φέρνουμε παράλληλες, αντίστοιχα προς τις $A\Delta$ και AB , οι οποίες τέμνονται στο E .

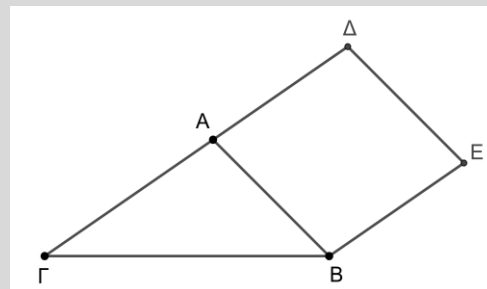
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι ρόμβος.

β) Έστω ότι $AB=4$, $A\Gamma=5$ και $B\Gamma=7$.

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ και ο ρόμβος $ABE\Delta$ έχουν ίσες περιμέτρους.

γ) Έστω ότι $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$, $B\Gamma = \alpha$ και ότι το τρίγωνο

$AB\Gamma$ και ο ρόμβος $ABE\Delta$ έχουν ίσες περιμέτρους. Να αποδείξετε ότι $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{3}$.



Λύση

α) Από τα δεδομένα, οι πλευρές BE και $A\Delta$ είναι παράλληλες και οι πλευρές ΔE και AB είναι παράλληλες. Άρα το τετράπλευρο $ABE\Delta$ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον το παραλληλόγραμμο $ABE\Delta$ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες αφού $A\Delta = AB$, επομένως είναι ρόμβος.

β) Οι περίμετροι του τριγώνου $AB\Gamma$ και του ρόμβου $ABE\Delta$ είναι αντίστοιχα

$AB + A\Gamma + B\Gamma = 4 + 5 + 7 = 16$ και $4AB = 16$, οπότε είναι ίσες.

γ) Οι περιμέτροι του τριγώνου ABΓ και του ρόμβου ABEΔ είναι αντίστοιχα $AB + ΑΓ + ΒΓ = \gamma + \beta + \alpha$ και $4AB = 4\gamma$. Επειδή είναι ίσες έχουμε $4\gamma = \alpha + \beta + \gamma \Leftrightarrow 3\gamma = \alpha + \beta \Leftrightarrow \gamma = \frac{\alpha + \beta}{3}$.

Τετράγωνο

2° Θέμα

14502. Δίνεται ορθογώνιο ABΓΔ με $AB = 2ΑΔ$ και τα μέσα E, Z των πλευρών AB, ΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α)** το τετράπλευρο AEGZ είναι παραλληλόγραμμο,
β) το τετράπλευρο AEZΔ είναι τετράγωνο.

Λύση

α) Είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ABΓΔ, άρα θα είναι $AE \parallel \Gamma Z$. Αφού τα σημεία E, Z είναι τα μέσα των AB, ΓΔ, είναι

$$\Gamma Z = \frac{\Gamma\Delta}{2} \text{ και } AE = \frac{AB}{2}. \text{ Όμως } AB = \Gamma\Delta \text{ ως απέναντι πλευρές του}$$

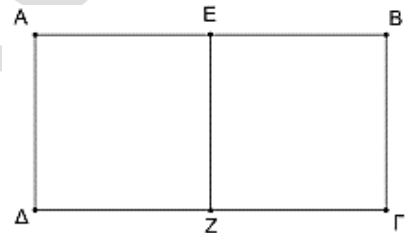
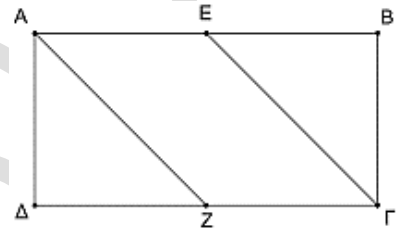
ορθογωνίου ABΓΔ, άρα θα είναι $AE = \Gamma Z$. Το τετράπλευρο AEGZ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του AE, ΓZ είναι ίσες και παράλληλες.

β) Είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ABΓΔ, άρα θα είναι $AE \parallel \Delta Z$. Αφού τα σημεία E, Z είναι τα μέσα των AB, ΓΔ, είναι $AE = \frac{AB}{2}$ και $\Delta Z = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Όμως $AB = \Gamma\Delta$ ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ABΓΔ, άρα $AE = \Delta Z$. Το τετράπλευρο AEZΔ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του AE, ΔZ είναι ίσες και παράλληλες.

Η γωνία A του παραλληλογράμμου AEZΔ είναι ορθή, γιατί το ABΓΔ είναι ορθογώνιο. Από τα δεδομένα έχουμε ότι $AB = 2ΑΔ$,

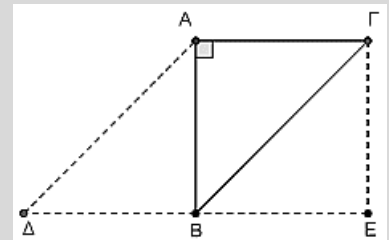
άρα $ΑΔ = \frac{AB}{2} = AE$. Το τετράπλευρο AEZΔ είναι τετράγωνο, γιατί είναι παραλληλόγραμμο που έχει μια γωνία ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.



19831. Στο σχήμα που ακολουθεί, το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$ και $AB = ΑΓ = 12$. Έστω ότι η παράλληλη από το σημείο Γ στην AB και η παράλληλη από το σημείο B στην ΑΓ τέμνονται στο σημείο E.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι τετράγωνο και να υπολογίσετε την περιμέτρό του.

β) Αν η παράλληλη από το A στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ABΓ τέμνει την ευθεία BE (προς το μέρος του B) σε σημείο Δ, να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) Αφού είναι $AB \parallel \Gamma E$ και $ΑΓ \parallel BE$, το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες. Το παραλληλόγραμμο ΑΓΕΒ έχει δυο διαδοχικές πλευρές ίσες, τις AB και ΑΓ από τα δεδομένα, και μια γωνία ορθή, την A επίσης από τα δεδομένα, άρα είναι τετράγωνο. Αφού το ΑΓΕΒ είναι τετράγωνο θα έχει όλες τις πλευρές του ίσες, δηλαδή $ΑΓ = \Gamma E = EB = BA = 12$. Επομένως η περίμετρος Π του ΑΓΕΒ θα είναι $\Pi = 4 \cdot AB = 4 \cdot 12 = 48$.

β) Έχουμε ότι $ΑΓ \parallel BE$ (από τα δεδομένα), άρα $ΑΓ \parallel \Delta B$. Επίσης είναι $ΑΔ \parallel ΒΓ$ από την υπόθεση του β) ερωτήματος, άρα το τετράπλευρο ΑΓΒΔ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

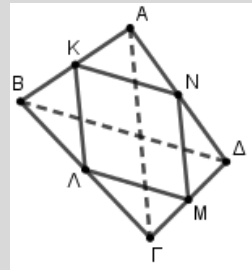
4^ο Θέμα

21843. Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος Π του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ είναι $\Pi = \text{ΑΓ} + \text{ΒΔ}$.

β) i. Αν το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ είναι κάθετες μεταξύ τους.

ii. Ποια επιπλέον ιδιότητα πρέπει να έχουν οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ ώστε το ΚΛΜΝ να είναι τετράγωνο;



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΔ το ευθύγραμμο τμήμα ΚΝ ενώνει τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΔ, άρα $\text{ΚΝ} \parallel \text{ΒΔ}$ και $\text{ΚΝ} = \frac{\text{ΒΔ}}{2}$. Ομοίως στο τρίγωνο ΒΓΔ το ΑΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών του ΒΓ και ΓΔ,

άρα $\text{ΑΜ} \parallel \text{ΒΔ}$ και $\text{ΑΜ} = \frac{\text{ΒΔ}}{2}$. Για τον ίδιο λόγο στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ

θα είναι $\text{ΚΛ} \parallel \text{ΑΓ}$ και $\text{ΚΛ} = \frac{\text{ΑΓ}}{2}$ όπως και $\text{ΝΜ} \parallel \text{ΑΓ}$ και $\text{ΝΜ} = \frac{\text{ΑΓ}}{2}$.

Επομένως η περίμετρος του ΚΛΜΝ είναι

$$\Pi = \text{ΚΝ} + \text{ΑΜ} + \text{ΚΛ} + \text{ΝΜ} = \frac{\text{ΒΔ}}{2} + \frac{\text{ΒΔ}}{2} + \frac{\text{ΑΓ}}{2} + \frac{\text{ΑΓ}}{2} = \text{ΒΔ} + \text{ΑΓ}.$$

β) i. Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ, Ε το σημείο τομής των ΑΓ και ΚΝ και Ζ το σημείο τομής των ΒΔ και ΚΛ. Αφού το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο, τότε όλες οι γωνίες του είναι ορθές, άρα

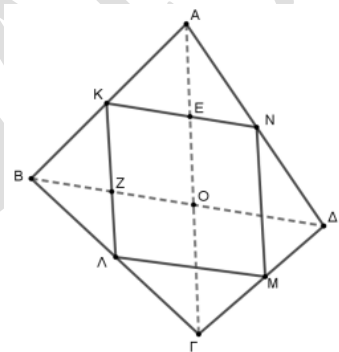
$\angle \text{ΚΝ} = 90^\circ$. Όμως $\text{ΚΝ} \parallel \text{ΒΔ}$ και $\text{ΚΛ} \parallel \text{ΑΓ}$ οπότε το τετράπλευρο ΚΕΟΖ έχοντας τις απέναντι πλευρές

παράλληλες είναι παραλληλόγραμμο. Εφόσον $\angle \text{ΚΝ} = 90^\circ$ το ΚΕΟΖ είναι ορθογώνιο και

επομένως όλες του οι γωνίες είναι ορθές, άρα $\angle \text{ΕΟΖ} = 90^\circ$, οπότε πρέπει το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να έχει κάθετες διαγωνίους.

ii. Εφόσον το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο τότε θα είναι ορθογώνιο και ρόμβος. Εφόσον το ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο, τότε όπως δείξαμε στο ερώτημα β) i το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει κάθετες διαγωνίους. Εφόσον το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος θα έχει ίσες πλευρές και άρα $\text{ΚΝ} = \text{ΚΛ}$. Όμως από το α) ερώτημα είναι $\text{ΚΝ} = \frac{\text{ΒΔ}}{2}$

και $\text{ΚΛ} = \frac{\text{ΑΓ}}{2}$, άρα $\text{ΒΔ} = \text{ΑΓ}$ δηλαδή θα πρέπει το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να έχει και ίσες διαγωνίους. Τελικά για να είναι το ΚΛΜΝ τετράγωνο θα πρέπει το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να έχει ίσες και κάθετες διαγωνίους.



22563. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\text{ΑΒ} \parallel \text{ΔΓ}$, $\hat{\text{Α}} = \hat{\text{Δ}} = 90^\circ$, $\text{ΓΔ} = 2\text{ΑΒ}$ και $\text{ΒΓΔ} = 45^\circ$.

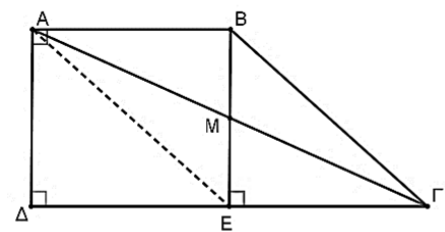
Έστω ΒΕ κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Μ.

Να αποδείξετε ότι :

α) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

β) i. Το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές.

ii. Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι τετράγωνο.



Λύση

α) Είναι $\text{ΓΔ} = 2\text{ΑΒ}$ και $\text{ΔΕ} = \text{ΑΒ}$, άρα και $\text{ΓΕ} = \text{ΑΒ}$. Επειδή $\text{ΓΕ} \parallel \text{ΑΒ}$, το ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

β) i. Επειδή $\text{ΒΓΔ} = 45^\circ$ το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές, οπότε $\text{ΒΕ} = \text{ΕΓ}$.

ii. Στο ορθογώνιο ΑΒΕΔ είναι $\text{ΒΕ} = \text{ΕΔ}$, οπότε είναι τετράγωνο.

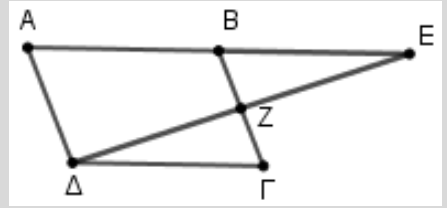
Εφαρμογές παραλληλογράμμου**2^ο Θέμα**

14560. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο E στην προέκταση της πλευράς AB προς το B , ώστε $AB = BE$.

Έστω Z το σημείο τομής των $B\Gamma$, ΔE .

α) Να αποδείξετε ότι το Z είναι το μέσο του ΔE .

β) Αν $B\Gamma = 10$, να βρείτε το μήκος του BZ .

**Λύση**

α) Το B είναι το μέσο της AE , αφού από τα δεδομένα έχουμε ότι $AB = BE$. Επιπλέον, η BZ είναι παράλληλη στην AD , γιατί οι απέναντι πλευρές AD , $B\Gamma$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. Στο τρίγωνο ADE η BZ διέρχεται από το μέσο B της AE , είναι παράλληλη στην AD και τέμνει τη DE στο σημείο Z , άρα το Z είναι το μέσο του ΔE .

β) Ισχύει $AD = B\Gamma$, γιατί είναι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, άρα $AD = 10$. Εφόσον η BZ ενώνει τα μέσα B και Z των πλευρών AE και DE του τριγώνου ADE , αντίστοιχα, το μήκος της BZ

είναι ίσο με το μισό του μήκους της πλευράς AD του τριγώνου ADE . Άρα είναι $BZ = \frac{AD}{2} = 5$.

20840. Οι πλευρές AB , AG και $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουν μήκη 6, 8 και 12 αντίστοιχα. Τα σημεία K , Λ και M είναι τα μέσα των πλευρών AB , AG και $B\Gamma$ με τη σειρά που δίνονται.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $K\Lambda\Gamma M$ είναι παραλληλόγραμμο.

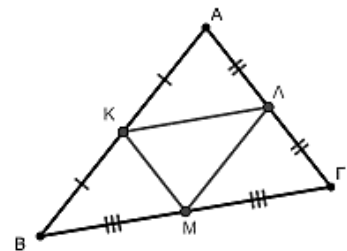
β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του παραλληλογράμμου $K\Lambda\Gamma M$.

Λύση

α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα σημεία K , Λ είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, οπότε το τμήμα $K\Lambda$ είναι παράλληλο στη $B\Gamma$ και ίσο με

$$\frac{B\Gamma}{2}. \text{ Άρα } K\Lambda \parallel M\Gamma \text{ και } K\Lambda = \frac{12}{2} = 6.$$

Επιπλέον το σημείο M είναι το μέσο της $B\Gamma$, οπότε $M\Gamma = 6$. Το τετράπλευρο $K\Lambda\Gamma M$ έχει τις δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



β) Οι απέναντι πλευρές KM και $\Lambda\Gamma$ του παραλληλογράμμου $K\Lambda\Gamma M$ είναι ίσες, οπότε

$$KM = \Lambda\Gamma = \frac{AG}{2} = 4.$$

Από α) ερώτημα $K\Lambda = M\Gamma = 6$. Οπότε η περίμετρος του παραλληλογράμμου $K\Lambda\Gamma M$ είναι ίση με : $K\Lambda + \Lambda\Gamma + \Gamma M + MK = 6 + 4 + 6 + 4 = 20$.

20843. Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει περίμετρο 28. Τα σημεία K , Λ και M είναι τα μέσα των πλευρών AB , AG και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $K\Lambda\Gamma M$ είναι παραλληλόγραμμο.

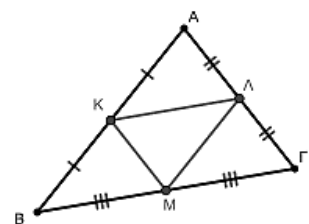
β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $K\Lambda M$.

Λύση

α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα σημεία K , Λ είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG

αντίστοιχα, οπότε $K\Lambda \parallel B\Gamma$ και $K\Lambda = \frac{B\Gamma}{2}$ (1).

Επιπλέον το σημείο M είναι το μέσο της $B\Gamma$, οπότε $M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$.



Το τετράπλευρο ΚΛΓΜ έχει τις πλευρές του ΚΛ και ΜΓ ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Κ και Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, οπότε $KM \parallel AG$ και $KM = \frac{AG}{2}$ (2).

Αντίστοιχα, τα σημεία Λ και Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ, οπότε

$LM \parallel AB$ και $LM = \frac{AB}{2}$ (3).

Η περίμετρος του τριγώνου ΚΛΜ είναι ίση με $\Pi = ΚΛ + ΛΜ + ΜΚ$ και από τις σχέσεις (1), (2) και (3)

$$\Pi = \frac{BG}{2} + \frac{AB}{2} + \frac{AG}{2} = \frac{BG + AB + AG}{2} = \frac{28}{2} = 14.$$

4^ο Θέμα

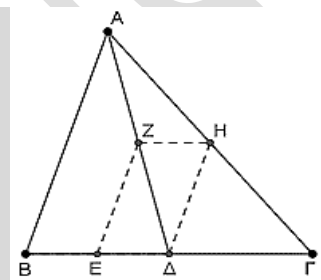
19275. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ.

Τα σημεία Ε, Ζ και Η είναι τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να δικαιολογήστε γιατί:

i. $\Delta H = \parallel \frac{AB}{2}$

ii. $ZE = \parallel \frac{AB}{2}$.



β) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΗΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση των ΑΒ και ΒΓ, ώστε το ΖΗΔΕ να είναι ρόμβος;

Λύση

α) i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το Δ είναι μέσο της ΒΓ και το Η είναι μέσο της ΑΓ, οπότε το τμήμα ΔΗ θα είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά ΑΒ και ίσο με το μισό της, δηλαδή: $\Delta H = \parallel \frac{AB}{2}$ (1).

ii. Στο τρίγωνο ΑΒΔ, το Ζ είναι μέσο της ΑΔ και το Ε είναι μέσο της ΒΔ, οπότε το τμήμα ΖΕ θα είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά ΑΒ και ίσο με το μισό της, δηλαδή: $ZE = \parallel \frac{AB}{2}$ (2).

β) Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι $\Delta H = \parallel ZE$, επομένως το τετράπλευρο ΖΗΔΕ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες.

γ) Για να είναι το παραλληλόγραμμο ΖΗΔΕ ρόμβος, αρκεί δύο διαδοχικές του πλευρές να είναι ίσες, έστω $ZH = ZE$. Στο τρίγωνο ΑΔΓ, το Ζ είναι μέσο της ΑΔ και το Η μέσο της ΑΓ, οπότε το τμήμα ΖΗ θα είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά ΑΓ και ίσο με το μισό της, δηλαδή: $ZH = \parallel \frac{\Delta\Gamma}{2}$.

$$\text{Είναι } ZH = ZE \Leftrightarrow \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow \Delta\Gamma = AB. \text{ Όμως } \Delta\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}, \text{ οπότε } \frac{B\Gamma}{2} = AB \Leftrightarrow B\Gamma = 2AB.$$

19840. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος που ακολουθεί τα Κ, Λ και Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

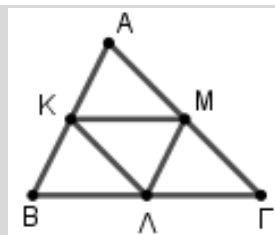
α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την επιλογή σας:

i. Αν είναι $ΚΛ = 6$, τότε το ΒΓ είναι ίσο με:

Α: 6 Β: 12 Γ: 3 Δ: 16

ii. Αν είναι $ΚΛ + ΛΜ + ΚΜ = 12$, τότε το άθροισμα $ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ$ είναι ίσο με:

Α: 12 Β: 6 Γ: 24 Δ: 16



β) Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση ως αληθή ή ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Πρόταση :
«Αν το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο, τότε το τετράπλευρο ΚΛΜΒ είναι ρόμβος».

Λύση

α) i. Σωστή απάντηση είναι το Β. Αφού τα Κ, Λ είναι μέσα πλευρών του τριγώνου ABΓ, το ΚΛ ως τμήμα που ενώνει τα μέσα τους είναι $ΚΛ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΒΓ = 2ΚΛ = 12$.

ii. Σωστή απάντηση είναι το Γ.

• Τα Κ, Λ είναι μέσα των πλευρών AB, ΑΓ του τριγώνου ABΓ, οπότε το ΚΛ ως τμήμα που ενώνει τα μέσα τους είναι $ΚΛ = \frac{ΒΓ}{2}$.

• Τα Λ, Μ είναι μέσα των πλευρών ΑΓ, ΒΓ του τριγώνου ABΓ, οπότε το ΛΜ ως τμήμα που ενώνει τα μέσα τους είναι $ΛΜ = \frac{ΑΒ}{2}$.

• Τα Κ, Μ είναι μέσα των πλευρών AB, ΒΓ του τριγώνου ABΓ, οπότε το ΚΜ ως τμήμα που ενώνει τα μέσα τους είναι $ΚΜ = \frac{ΑΓ}{2}$.

$$\text{Οπότε } ΚΛ + ΛΜ + ΚΜ = \frac{ΒΓ}{2} + \frac{ΑΒ}{2} + \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ}{2} \Leftrightarrow$$

$$12 = \frac{ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ}{2} \Leftrightarrow ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ = 24.$$

β) Αφού τα Κ, Λ είναι μέσα πλευρών του τριγώνου ABΓ, το ΚΛ ως τμήμα που ενώνει τα μέσα τους θα είναι παράλληλο προς την πλευρά ΒΓ και ίσο με το μισό της, δηλαδή $ΚΛ = \frac{ΒΓ}{2}$ και αφού το Μ είναι

μέσο του ΒΓ, τότε $ΚΛ = \frac{2ΒΜ}{2} = ΒΜ$.

Επειδή είναι ΚΛ παράλληλο την πλευρά ΒΓ, το ΚΛ θα είναι παράλληλο και στο τμήμα ΒΜ, δηλαδή $ΚΛ \parallel ΒΜ$. Αφού είναι $ΚΛ \parallel ΒΜ$ και $ΚΛ = ΒΜ$, τότε το τετράπλευρο ΚΛΜΒ θα είναι παραλληλόγραμμο. Από υπόθεση το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο, οπότε $ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ$ και $ΚΒ = ΒΜ$ ως μισά των ίσων πλευρών του AB και ΒΓ και Κ, Μ τα αντίστοιχα μέσα τους. Επομένως, το τετράπλευρο ΚΛΜΒ είναι ρόμβος γιατί είναι παραλληλόγραμμο που έχει δυο διαδοχικές πλευρές ίσες. Συνεπώς, η Πρόταση είναι αληθής.

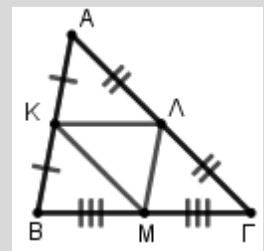
20844. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και τα μέσα Κ, Λ και Μ των πλευρών του AB, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να γράψετε όλα τα παραλληλόγραμμο που σχηματίζονται με κορυφές 4 από τα σημεία Α, Β, Γ, Κ, Λ και Μ.

γ) Αν επιπλέον δίνεται ότι το τετράπλευρο ΑΚΜΛ είναι ρόμβος να βρείτε το είδος του τριγώνου ABΓ ως προς τις πλευρές του.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) Στο τρίγωνο ABΓ τα σημεία Κ, Λ είναι τα μέσα των πλευρών AB και ΑΓ αντίστοιχα, οπότε το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο στη ΒΓ και ίσο με $\frac{ΒΓ}{2}$. Επιπλέον το σημείο Μ είναι το μέσο της ΒΓ, οπότε

$$ΜΓ = \frac{ΒΓ}{2}.$$

β) Από το ερώτημα α) έχουμε ότι το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι παραλληλόγραμμο. Σχηματίζονται επίσης τα παραλληλόγραμμα ΑΚΜΛ και ΚΛΜΒ.

γ) Αν το τετράπλευρο ΑΚΜΛ είναι ρόμβος τότε όλες οι πλευρές του είναι ίσες. Δηλαδή $AK = KM = LM = AL$.

Ισχύει ότι $AK = \frac{AB}{2}$ και $AL = \frac{AG}{2}$ και επειδή $AK = AL$, είναι $AB = AG$, επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

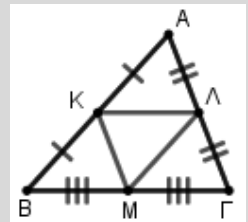
20846. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Κ, Λ και Μ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΚΛΜΒ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να γράψετε όλα τα παραλληλόγραμμα που σχηματίζονται με κορυφές τέσσερα από τα σημεία Α, Β, Γ, Κ, Λ και Μ.

γ) Αν επιπλέον δίνεται ότι το τετράπλευρο ΑΚΜΛ είναι ορθογώνιο να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Κ, Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, οπότε το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο στη ΒΓ και ίσο με $\frac{BG}{2}$. Επιπλέον το σημείο Μ είναι το μέσο της ΒΓ, οπότε

$MB = \frac{BG}{2}$. Άρα $KL \parallel MB$ και $KL = MB$. Το τετράπλευρο ΚΛΜΒ έχει τις δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Από το ερώτημα α) έχουμε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΒ είναι παραλληλόγραμμο. Σχηματίζονται επίσης τα παραλληλόγραμμα ΑΚΜΛ και ΚΛΓΜ.

γ) Αν το τετράπλευρο ΑΚΜΛ είναι ορθογώνιο, τότε όλες οι γωνίες του είναι ορθές. Οπότε $\angle A = 90^\circ$ και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

20848. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Κ, Λ και Μ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

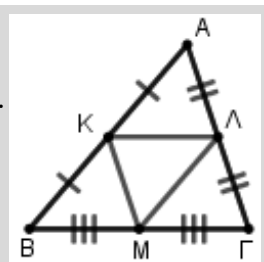
α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΑΚΜΛ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG$:

i. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΜΛ είναι ρόμβος.

ii. Ποιο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ ώστε το τετράπλευρο ΑΚΜΛ να είναι τετράγωνο;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Μ, Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, οπότε το τμήμα ΜΛ είναι παράλληλο στη ΑΒ και ίσο με $\frac{AB}{2}$. Επιπλέον επειδή το σημείο Κ είναι το μέσο της ΑΒ, οπότε

$AK = \frac{AB}{2}$. Άρα $ML \parallel AK$ και $ML = AK$. Το τετράπλευρο ΑΚΜΛ έχει τις δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG$, τότε :

i. $ML = \frac{AB}{2} = \frac{AG}{2} = AL$ αφού το Λ είναι το μέσο της ΑΓ. Το παραλληλόγραμμο ΑΚΜΛ έχει δυο

διαδοχικές πλευρές του ίσες, άρα είναι ρόμβος.

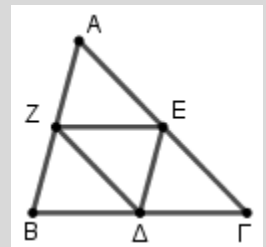
ii. Όπως αποδείξαμε στο βi) το τετράπλευρο ΑΚΜΛ είναι ρόμβος. Για να είναι το ΑΚΜΛ τετράγωνο, θα πρέπει να είναι και ορθογώνιο, δηλαδή να έχει τις γωνίες του ορθές. Άρα θέλουμε να ισχύει $\angle A = 90^\circ$. Οπότε για να είναι το τετράπλευρο ΑΚΜΛ τετράγωνο πρέπει το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\angle A = 90^\circ$ και $AB = AG$.

20948. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος τα Δ, Ε, Ζ είναι μέσα των πλευρών του. Αν $B\Gamma = 10$, $\Delta Z = 4$ και $\Delta E = 2,5$:

α) να αποδείξετε ότι $ZE \parallel B\Gamma$.

β) να υπολογίσετε το μήκος της ΖΕ.

γ) να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών ΑΒ, ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση

α) Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Ζ, Ε είναι μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Επομένως $ZE \parallel B\Gamma$.

β) Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Ζ, Ε είναι μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.

$$\text{Επομένως } ZE = \frac{B\Gamma}{2} = 5.$$

γ) Για τον ίδιο λόγο που αναφέρθηκε στο ερώτημα β) είναι:

$$\Delta E = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 2\Delta E = 5 \text{ και } \Delta Z = \frac{AG}{2} \Leftrightarrow AG = 2\Delta Z = 8$$

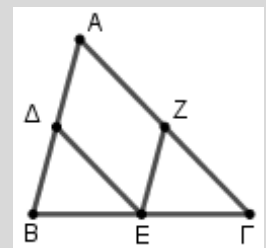
21402. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$ και έστω Δ, Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΕΖ είναι ρόμβος.

β) Αν $\hat{B} = 75^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του ρόμβου ΑΔΕΖ.

γ) Ποιο θα πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας $\hat{B}$ ώστε το τετράπλευρο ΑΔΕΖ να είναι τετράγωνο;

Τι τρίγωνο είναι τότε το ΑΒΓ;



Λύση

α) Το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ οπότε είναι παράλληλο προς την πλευρά ΑΓ και ίσο με το μισό της. Επομένως οι ΔΕ και ΑΖ είναι παράλληλες και $\Delta E = \frac{AG}{2} = AZ$. Επομένως το τετράπλευρο ΑΔΕΖ είναι παραλληλόγραμμο αφού δυο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

Επίσης είναι $A\Delta = \frac{AB}{2} = \frac{AG}{2} = AZ$, επομένως το τετράπλευρο ΑΔΕΖ είναι ρόμβος αφού έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

β) Αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG$ είναι $\angle B = \angle \Gamma = 75^\circ$, οπότε

$$\angle A = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ.$$

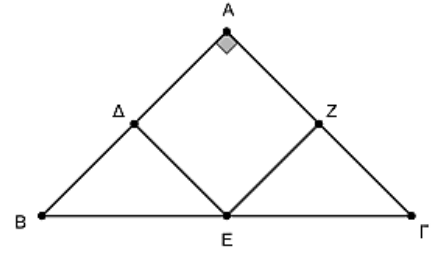
Οι απέναντι γωνίες του ρόμβου ανά δυο είναι ίσες, άρα $\angle DEZ = \angle A = 30^\circ$ και $\angle A\Delta E = \angle AZE$. Όμως

$$\angle A\Delta E + \angle AZE = 360^\circ - \angle DEZ - \angle A = 300^\circ, \text{ άρα } \angle A\Delta E = \angle AZE = 150^\circ.$$

γ) Το ΑΔΕΖ είναι ρόμβος, οπότε θα είναι τετράγωνο, αν επιπλέον είναι ορθογώνιο. Τότε $A = 90^\circ$, οπότε

$$B = \Gamma = \frac{180^\circ - A}{2} = 45^\circ. \text{ Στην περίπτωση αυτή, το τρίγωνο } AB\Gamma$$

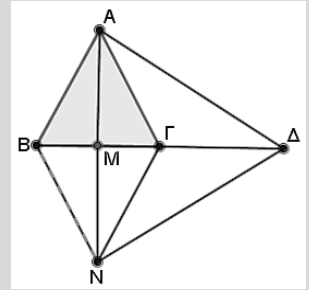
είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.



21844. Δίνεται οξυγώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το ύψος του AM . Προεκτείνουμε το AM κατά τμήμα $MN = AM$ και τη $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $ABN\Gamma$ είναι ρόμβος.
- β) Το τρίγωνο $A\Delta N$ είναι ισοσκελές.
- γ) Η προέκταση της $A\Gamma$ τέμνει τη ΔN στο μέσον της.

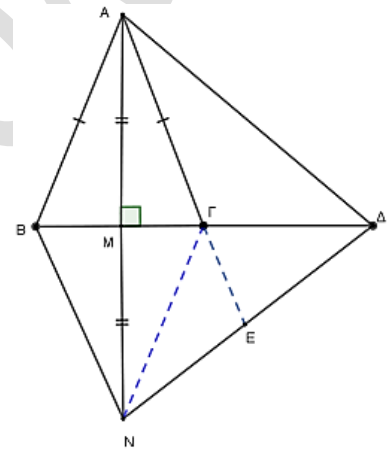


Λύση

α) Το AM είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και διάμεσος. Οι AN , $B\Gamma$ είναι διαγώνιες του τετραπλεύρου $ABN\Gamma$ και διχοτομούνται κάθετα, άρα είναι ρόμβος.

β) Στο τρίγωνο $A\Delta N$ η AM είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

γ) Εφόσον το τετράπλευρο $ABN\Gamma$ είναι ρόμβος, η ευθεία $A\Gamma$ είναι παράλληλη με τη BN . Έτσι στο τρίγωνο ΔBN έχουμε από το μέσον Γ της πλευράς του $B\Delta$ ευθεία παράλληλη με την πλευρά του BN , άρα η ΓE διέρχεται από το μέσον της πλευράς του ΔN .



Βαρύκεντρο τριγώνου**2ο Θέμα**

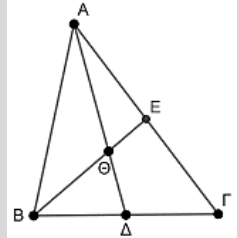
19514. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το Δ είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και το E είναι το μέσο της πλευράς $A\Gamma$.

Δίνονται τα μήκη $A\Delta = 12$ και $\Theta E = 3$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Theta\Delta = 4$.

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων BE και $B\Theta$.

γ) Να σχεδιάσετε τη διάμεσο ΓZ του τριγώνου $AB\Gamma$.

**Λύση**

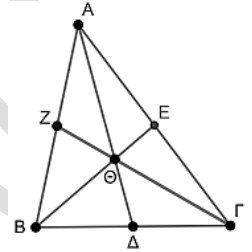
α) Το Θ είναι το σημείο τομής των διαμέσων $A\Delta$ και BE του τριγώνου $AB\Gamma$, δηλαδή είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου. Το βαρύκεντρο απέχει από κάθε κορυφή του τριγώνου απόσταση ίση τα $2/3$ της αντίστοιχης διαμέσου. Επομένως

$$A\Theta = \frac{2}{3} A\Delta \text{ και } \Theta\Delta = \frac{1}{3} A\Delta = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4.$$

β) Είναι $\Theta E = \frac{1}{3} BE \Leftrightarrow BE = 3\Theta E = 3 \cdot 3 = 9$

Επίσης $B\Theta = BE - \Theta E = 9 - 3 = 6$.

γ) Η διάμεσος ΓZ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή Γ με το μέσο Z της AB και διέρχεται από το βαρύκεντρο Θ του τριγώνου.



Μια ιδιότητα του ορθογωνίου τριγώνου

2^ο Θέμα

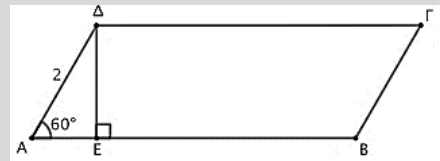
18304. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος με $A\Delta = 2$ και $\hat{A} = 60^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ και $\hat{A\Delta\Gamma}$.

β) Αν ΔE είναι ύψος του παραλληλογράμμου, τότε:

i. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A\Delta E}$.

ii. Να αποδείξετε ότι $AE = 1$.



Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες είναι ίσες. Επομένως: $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$ και $\hat{B} = \hat{A\Delta\Gamma}$.

Επίσης, σε κάθε παραλληλόγραμμο δύο διαδοχικές γωνίες είναι παραπληρωματικές, οπότε:

$$\hat{A} + \hat{A\Delta\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A\Delta\Gamma} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = \hat{B}$$

β) i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta E$ είναι: $\hat{A} + \hat{A\Delta E} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A\Delta E} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

ii. Στο τρίγωνο $A\Delta E$ είναι $\hat{A\Delta E} = 30^\circ$ οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά AE ισούται με το μισό της υποτείνουσας $A\Delta$, δηλαδή: $AE = \frac{A\Delta}{2} = 1$.

14552. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι

παραλληλόγραμμο με $A\Delta < AB$ και $\hat{A} = 60^\circ$.

Η AE είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ η οποία τέμνει την πλευρά $\Delta\Gamma$ σε σημείο E και η EZ είναι η κάθετη από το E στην πλευρά AB .

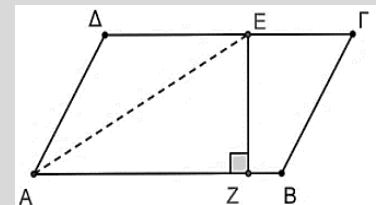
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε κάθε καθένα από τα ακόλουθα δύο ερωτήματα, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

α) Αν είναι $A\Delta = 6$, τότε το ΔE είναι ίσο με:

A: 6 B: 12 Γ: 3 Δ: 16

β) Αν η κάθετη που άγεται από το E προς την ευθεία AB τέμνει την πλευρά AB σε σημείο Z , τότε:

A: $AE = EZ$ B: $AE = \frac{1}{2}EZ$ Γ: $AE = 2EZ$ Δ: $AE = 3EZ$



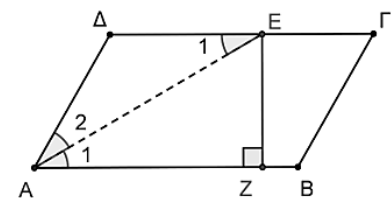
Λύση

α) Είναι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 30^\circ$ (1)

Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές του AB και $\Delta\Gamma$ είναι παράλληλες, οπότε θα ισχύει $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ (2) ως γωνίες εντός εναλλάξ των παράλληλων πλευρών AB και $\Delta\Gamma$ με τέμνουσα την AE .

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{E}_1 = \hat{A}_2$ οπότε το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές με $A\Delta = \Delta E$ και $A\Delta = 6$, άρα $\Delta E = 6$.

Επομένως, σωστή απάντηση είναι η Α.

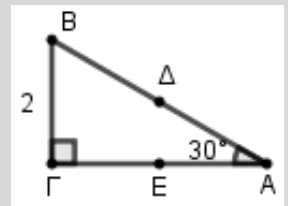


β) Επειδή η EZ είναι κάθετη στη AB , το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{Z}$ και με $\hat{A}_1 = 30^\circ$ οπότε η απέναντί της κάθετη πλευρά EZ θα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας AE , δηλαδή

$$EZ = \frac{1}{2}AE \Leftrightarrow AE = 2EZ. \text{ Επομένως, σωστή απάντηση είναι η Γ.}$$

20945. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος δίνονται $\hat{A} = 30^\circ$, $B\Gamma = 2$ και τα σημεία Δ , E μέσα των πλευρών AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

- α) το μήκος του ΔE .
 β) το μήκος της πλευράς AB .
 γ) το μήκος του $\Gamma\Delta$.



Λύση

α) Τα Δ , E είναι μέσα των δύο πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$ οπότε το ευθύγραμμο τμήμα ΔE ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς. Δηλαδή

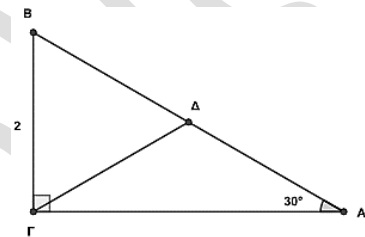
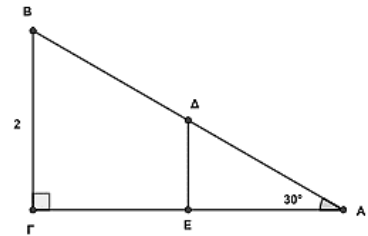
$$\Delta E = \frac{B\Gamma}{2} = 1$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η $\hat{A} = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Δηλαδή

$$B\Gamma = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 2B\Gamma = 4.$$

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η $\Gamma\Delta$ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Άρα θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

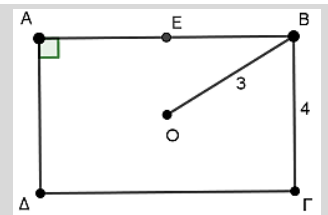
$$\text{Δηλαδή } \Gamma\Delta = \frac{AB}{2} = 2$$



20951. Δίνεται το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος, στο οποίο το O είναι το κέντρο του και το τμήμα $OB = 3$.

Αν E είναι το μέσο της AB και η $B\Gamma = 4$ τότε:

- α) να χαράξετε τις διαγώνιες $A\Gamma$, $B\Delta$ του ορθογωνίου και να υπολογίσετε τα μήκη τους.
 β) να υπολογίσετε το μήκος του OE .



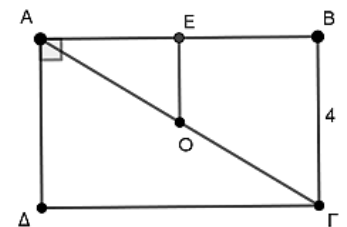
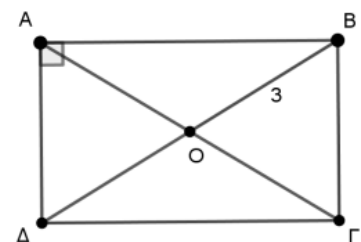
Λύση

α) Οι διαγώνιες του ορθογωνίου τέμνονται στο κέντρο του παραλληλογράμμου. Οπότε χαράσσουμε τις διαγώνιες $A\Gamma$ και $B\Delta$ του ορθογωνίου να διέρχονται από το O . Το O είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου, επομένως το μέσο της διαγωνίου $B\Delta$. Άρα η $B\Delta = 2 \cdot BO = 2 \cdot 3 = 6$.

Στο ορθογώνιο οι διαγώνιές του είναι ίσες. Επομένως η διαγώνιος $A\Gamma = B\Delta = 6$.

β) Το O είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου, άρα το μέσο της διαγωνίου $A\Gamma$. Επίσης από τα δεδομένα το E είναι το μέσον της AB . Έτσι στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το ευθύγραμμο τμήμα OE ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών του, επομένως θα ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς.

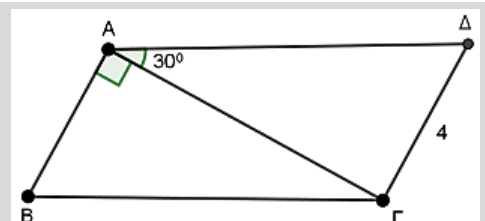
$$\text{Δηλαδή } OE = \frac{B\Gamma}{2} = 2.$$



21012. Στο διπλανό σχήμα, το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο στο οποίο η διαγώνιος $A\Gamma$ είναι κάθετη στην πλευρά του AB .

Επίσης η πλευρά του $\Gamma\Delta = 4$ και η γωνία $\Gamma\Delta\Delta$ ισούται με 30° .

- α) Να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία $B\Gamma\Delta$.
 β) Πόσο είναι το μήκος της πλευράς AB ;



Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ.

Λύση

α) Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, οπότε:

$$\text{ΒΓΔ} = \text{ΒΑΔ} = \text{ΒΑΓ} + \text{ΓΑΔ} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ.$$

β) Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, οπότε: $\text{AB} = \text{ΓΔ} = 4$.

γ) Λόγω του παραλληλογράμμου έχουμε $\text{ΑΓΒ} = \text{ΓΑΔ} = 30^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΓΒ και ΑΔ που τέμνονται από την ΓΑ. Οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία του ΑΓΒ ισούται με 30° . Επομένως η απέναντι κάθετη πλευρά θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Δηλαδή

$$\text{AB} = \frac{\text{ΒΓ}}{2} \Leftrightarrow \text{ΒΓ} = 2\text{AB} = 8.$$

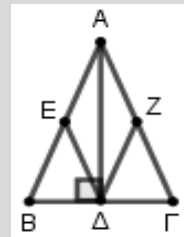
22095. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με

$\text{AB} = \text{ΑΓ} = 12$ και το ύψος του ΑΔ.

Έστω Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\text{ΔΕ} = 6$ και $\text{ΔΖ} = 6$.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΔΖ είναι ρόμβος.



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ η ΔΕ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα

$$\text{ΔΕ} = \frac{\text{AB}}{2} = 6.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ, το ΔΖ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, άρα $\text{ΔΖ} = \frac{\text{ΑΓ}}{2} = 6$.

β) Είναι $\text{AE} = \text{DE} = \text{ΔΖ} = \text{AZ} = 6$, στο τετράπλευρο ΑΕΔΖ οι πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

4^ο Θέμα

19842. Στο διπλανό σχήμα, το τετράπλευρο ΕΑΓΔ είναι

παραλληλόγραμμο με $\text{EA} = 2 \text{ ΑΔ}$.

Η παράλληλη από το Ε προς την ΑΔ τέμνει την προέκταση της ΓΔ προς το Δ σε σημείο Β.

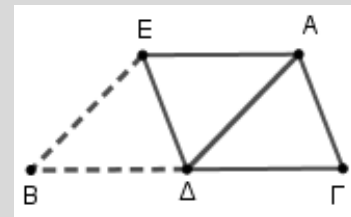
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τμήμα ΕΑ είναι παράλληλο στο τμήμα ΒΔ.

ii. Το τετράπλευρο ΕΑΔΒ είναι παραλληλόγραμμο.

iii. Το σημείο Δ είναι το μέσο του ΒΓ και ότι $\text{ΒΓ} = 4 \text{ ΑΔ}$.

β) Αν το παραλληλόγραμμο ΕΑΓΔ είναι ρόμβος, να βρείτε το είδος του τριγώνου ΒΕΓ ως προς τις γωνίες του.



Λύση

α) i. Το τετράπλευρο ΕΑΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε θα είναι $\text{EA} \parallel \text{ΔΓ}$ ως απέναντι πλευρές του, οπότε η ΕΑ θα είναι παράλληλη στη ΒΓ, άρα και το τμήμα ΕΑ θα είναι παράλληλο με το τμήμα ΒΔ.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι οι πλευρές ΕΑ και ΒΔ του τετραπλεύρου ΕΑΔΒ είναι παράλληλες. Από τα δεδομένα έχουμε ότι η ΕΒ είναι παράλληλη στη ΑΔ. Επομένως το τετράπλευρο ΕΑΔΒ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του ΕΑ, ΒΔ και ΑΔ, ΕΒ ανά δύο παράλληλες.

iii. Από το ερώτημα α)ii. έχουμε ότι το $ΕΑΔΒ$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε θα είναι $ΕΑ = ΒΔ$ ως απέναντι πλευρές του. Από τα δεδομένα έχουμε ότι το $ΕΑΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε θα είναι $ΕΑ = ΔΓ$ ως απέναντι πλευρές του. Επομένως θα έχουμε $ΕΑ = ΒΔ = ΔΓ$, οπότε και $ΒΔ = ΔΓ$. Άρα το $Δ$ είναι μέσο της $ΒΓ$. Οπότε $ΒΓ = 2ΔΓ = 2ΕΑ = 2(2ΑΔ) = 4ΑΔ$, όπου $ΕΑ = 2ΑΔ$ (από τα δεδομένα).

β) Αν το τετράπλευρο $ΕΑΓΔ$ είναι ρόμβος, τότε ως ρόμβος θα έχει όλες του τις πλευρές ίσες, δηλαδή $ΕΑ = ΕΔ = ΔΓ = ΑΓ$ (1). Αφού $Δ$ είναι το μέσο του $ΒΓ$ (από το β) ερώτημα), θα είναι $ΒΔ = ΔΓ$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) θα προκύπτει ότι $ΕΔ = ΔΓ = ΔΒ = \frac{ΒΓ}{2}$

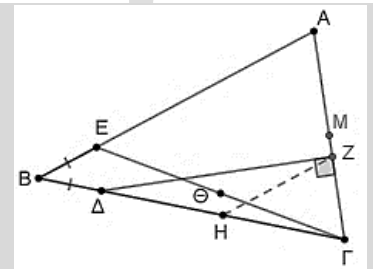
Οπότε, στο τρίγωνο $ΒΕΓ$ η $ΕΔ$ είναι διάμεσος στην πλευρά του $ΒΓ$ και ισούται με το μισό της πλευράς, άρα το τρίγωνο $ΒΕΓ$ θα είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά $ΒΓ$ και ορθή τη γωνία $ΒΕΓ$.

20557. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και σημεία $Δ$ και $Ε$ στις πλευρές $ΒΓ$ και $ΒΑ$ αντίστοιχα, ώστε $ΒΔ = ΒΕ$. Φέρνουμε την $ΔΖ$ κάθετη στην $ΑΓ$. Θεωρούμε τα μέσα $Η$, $Θ$, $Μ$ των $ΔΓ$, $ΕΓ$, $ΑΓ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $ZH = \frac{ΔΓ}{2}$.

β) $MΘ = \frac{ΑΕ}{2}$.

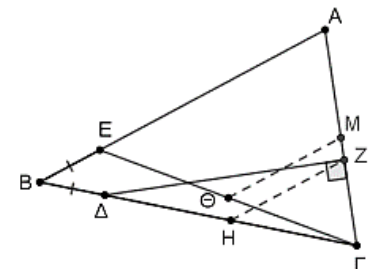
γ) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του τριγώνου $ΑΒΓ$ ως προς τις πλευρές του, ώστε $ZH = MΘ$;



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΖΔΓ$ η διάμεσος ZH που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα $ΔΓ$ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή: $ZH = \frac{ΔΓ}{2}$ (1).

β) Στο τρίγωνο $ΑΕΓ$, το σημείο $Μ$ είναι μέσο της πλευράς $ΑΓ$ και το σημείο $Θ$ είναι μέσο της πλευράς $ΕΓ$, οπότε το τμήμα $ΜΘ$ που τα ενώνει θα είναι ίσο μισό της τρίτης πλευράς $ΑΕ$, δηλαδή: $MΘ = \frac{ΑΕ}{2}$ (2)



γ) Θέλουμε $ZH = MΘ$. Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\frac{ΔΓ}{2} = \frac{ΑΕ}{2} \Leftrightarrow ΔΓ = ΑΕ.$$

Από υπόθεση έχουμε $ΒΔ = ΒΕ$. Προσθέτουμε αυτές τις σχέσεις κατά μέλη και έχουμε $ΔΓ + ΒΔ = ΑΕ + ΒΕ$, άρα $ΒΓ = ΑΒ$. Επομένως το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές, με βάση $ΑΒ$.

20558. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{A} = 90^\circ$).

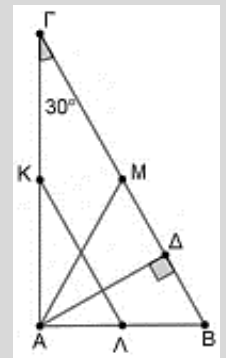
Έστω $Κ$, $Λ$, $Μ$ τα μέσα των πλευρών $ΑΓ$, $ΑΒ$, $ΒΓ$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΚΛ = ΑΜ$.

ii. Το $ΑΚΜΛ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

β) Έστω $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και $ΑΔ$ ύψος του τριγώνου. Προεκτείνουμε το $ΑΔ$ κατά ίσο τμήμα $ΔΖ$. Τι είδους τετράπλευρο είναι το $ΑΜΖΒ$;
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο η ΑΜ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα ισούται με το μισό της, δηλαδή: $AM = \frac{BG}{2}$ (1).

Το σημείο Κ είναι μέσο της πλευράς ΑΓ και το σημείο Λ μέσο της πλευράς ΑΒ, οπότε το τμήμα ΚΛ θα ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς ΒΓ, δηλαδή: $KL = \frac{BG}{2}$ (2).

Από (1) και (2) έχουμε ότι $KL = AM$.

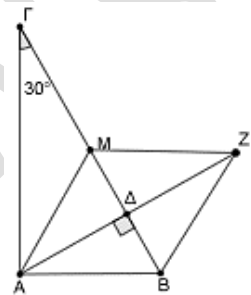
ii. Το σημείο Κ είναι μέσο της πλευράς ΑΓ και το σημείο Μ μέσο της πλευράς ΒΓ, οπότε το τμήμα ΚΜ θα ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς ΑΒ και θα είναι παράλληλο σε αυτήν, δηλαδή: $KM = \frac{AB}{2} = AL$.

Επομένως το τετράπλευρο ΑΚΜΛ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, $KM = // AL$. Στο ερώτημα α) αποδείξαμε ότι $KL = AM$. Επομένως το παραλληλόγραμμο ΑΚΜΛ είναι ορθογώνιο γιατί έχει τις διαγωνιές του ίσες.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\Gamma = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά ΑΒ θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΓ, δηλαδή:

$$AB = \frac{BG}{2} \quad (3).$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε ότι $AM = AB = BM$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο, οπότε το ύψος του ΑΔ θα είναι και διάμεσος, δηλαδή $M\Delta = \Delta B$. Από υπόθεση έχουμε ότι $A\Delta = \Delta Z$. Επομένως, το τετράπλευρο ΑΜΖΒ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγωνιές του ΜΒ και ΑΖ διχοτομούνται. Επειδή όπως αναφέραμε, $AM = AB$, το παραλληλόγραμμο ΑΜΖΒ είναι ρόμβος γιατί δύο διαδοχικές του πλευρές είναι ίσες.

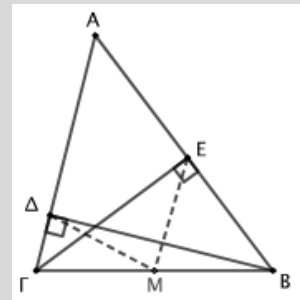


21003. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta M = \frac{BG}{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta M = EM$.

γ) Να εξετάσετε αν τα σημεία Δ, Ε, Β και Γ ανήκουν στον ίδιο κύκλο.



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ η ΔΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του, οπότε $\Delta M = \frac{BG}{2}$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΓ η ΕΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του, οπότε $EM = \frac{BG}{2} = \Delta M$.

γ) Είναι $EM = \frac{BG}{2} = \Delta M$ και $MG = \frac{BG}{2} = MB$, άρα $M\Delta = ME = MG = MB$, οπότε ο κύκλος με κέντρο το Μ και ακτίνα $\frac{BG}{2}$, διέρχεται από τα σημεία Δ, Ε, Β, Γ, άρα τα σημεία είναι ομοκυκλικά.

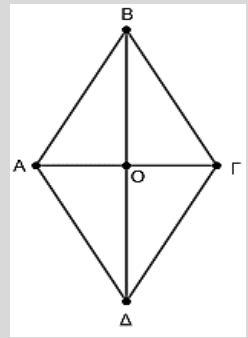
21392. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος με κέντρο O , $AB = 4$ και $OA = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $ABO = 30^\circ$.

β) Να βρείτε τρεις γωνίες στο διπλανό σχήμα, εκτός της $\hat{A}BO$, που έχουν μέτρο 30° . Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να βρείτε τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα στο παρακάτω σχήμα, εκτός του AB , που έχουν μήκος 4.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα, άρα το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο με $\angle AOB = 90^\circ$. Επειδή στο τρίγωνο AOB είναι

$AB = 4$ και $OA = 2 = \frac{AB}{2}$ η απέναντι γωνία της OA , η $\angle ABO = 30^\circ$.

β) Οι απέναντι γωνίες του ρόμβου είναι ίσες, άρα $\angle AB\Gamma = \angle \Gamma\Delta A$. Επίσης οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του, άρα η διαγώνιος BD διχοτομεί τις γωνίες $\angle AB\Gamma$ και $\angle \Gamma\Delta A$. Επομένως $\angle ABO = \angle GBO = \angle \Gamma\Delta O = \angle A\Delta O = 30^\circ$.

γ) Όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες, άρα $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A = 4$. Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούνται, άρα το O είναι το μέσο της AG και επειδή $OA = 2$, είναι $AG = 2OA = 4$.

3^ο Θέμα

21060. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ , E , Z των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

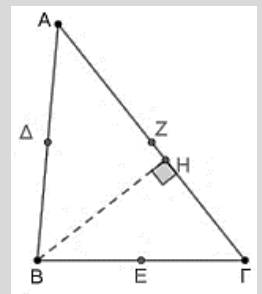
Φέρνουμε το ύψος BH . Να αποδείξετε ότι:

α) i. $Z\Delta = E\Gamma$

ii. $HE = E\Gamma$.

β) Η ΔE είναι παράλληλη στην $A\Gamma$.

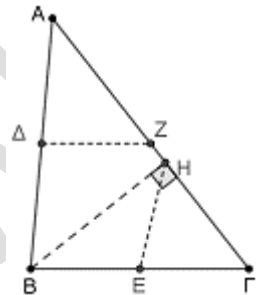
γ) $\Delta H = ZE$.



Λύση

α) i. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα σημεία Δ και Z είναι μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Επομένως, το τμήμα ΔZ θα είναι ίσο και παράλληλο με το μισό της $B\Gamma$, δηλαδή: $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{2} = E\Gamma$.

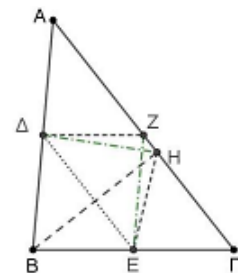
ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $BH\Gamma$ η HE είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα $B\Gamma$. Επομένως, η HE θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας $B\Gamma$, δηλαδή: $HE = \frac{B\Gamma}{2} = E\Gamma$



β) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα σημεία Δ και E είναι μέσα των πλευρών AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Επομένως, το τμήμα ΔE θα είναι ίσο και παράλληλο με το μισό της $A\Gamma$, δηλαδή $\Delta E \parallel A\Gamma$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο BHA η $H\Delta$ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα BA . Επομένως, η $H\Delta$ θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας BA , δηλαδή: $H\Delta = \frac{AB}{2}$. (1)

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα σημεία E και Z είναι μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Επομένως, το τμήμα EZ θα είναι ίσο και παράλληλο με το μισό της AB , δηλαδή: $ZE = \frac{AB}{2}$. (2). Από (1) και (2) ZE και ΔH θα είναι ίσες.



Τραπεζίο 2^ο Θέμα

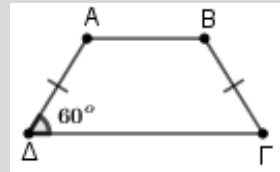
14517. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις ΑΒ και ΔΓ με $\Delta\Gamma = 2AB$ και ίσες πλευρές ΑΔ και ΒΓ.

Αν είναι $AB = AD = BG = 12$ και $\hat{A} = 60^\circ$, να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τραπέζιου.

β) την περίμετρο του τραπέζιου.

Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



Λύση

α) Αφού το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές, οι προσκείμενες γωνίες σε βάση του είναι ίσες.

Οπότε $\Delta = \Gamma = 60^\circ$ και $A = B$.

Οι γωνίες Α και Δ είναι παραπληρωματικές, ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ με τέμνουσα την ΑΔ, δηλαδή $A + \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow A + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A = 120^\circ$, οπότε και $B = 120^\circ$.

β) Από τα δεδομένα έχουμε $\Delta\Gamma = 2AB$ με $AB = 12$, άρα $\Delta\Gamma = 2 \cdot 12 = 24$.

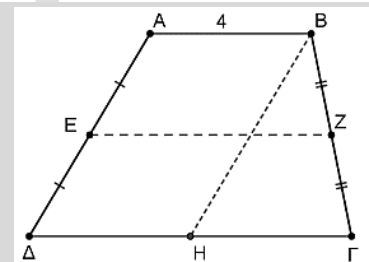
Η περίμετρος του τραπέζιου ΑΒΓΔ είναι $AB + BG + \Delta\Gamma + AD = 12 + 12 + 24 + 12 = 60$.

18158. Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος ΑΒΓΔ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), έχουμε $AB = 4$ και $\Delta\Gamma = 8$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου του ΕΖ.

β) Από το Β φέρουμε ΒΗ παράλληλη στην ΑΔ.

Να αποδείξετε ότι $\Gamma H = AB$.



Λύση

α) Η διάμεσος του τραπέζιου ισούται με το ημίθροισμα των βάσεων του, επομένως

$$EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{4 + 8}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

β) Φέρουμε $BH \parallel AD$. $AB \parallel \Delta H$ σαν βάσεις τραπέζιου και $BH \parallel AD$ από υπόθεση, οπότε το ΑΒΗΔ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Επομένως οι απέναντι πλευρές του θα είναι ίσες, δηλαδή $\Delta H = AB = 4$. $\Gamma H = \Delta\Gamma - \Delta H = 8 - 4 = 4 = AB$.

19821. Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις τις πλευρές ΑΒ, ΔΓ και ίσες πλευρές τις ΑΔ και ΒΓ.

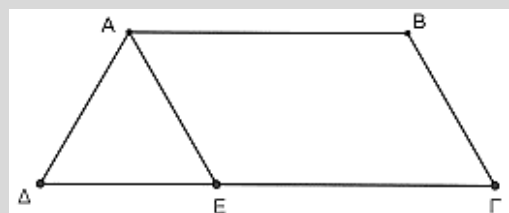
Η παράλληλη από το Α στην ΒΓ, δηλαδή η ΑΕ, τέμνει την πλευρά ΔΓ σε σημείο Ε.

α) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας συμπληρωμένη την ακόλουθη πρόταση:

«Στο ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ του σχήματος παράλληλες μεταξύ τους είναι η πλευρά με την πλευρά, οι προκείμενες γωνίες στη βάση του ΑΒ είναι η γωνία και η γωνία και οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του ΔΓ είναι η γωνία και η γωνία».

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Αν είναι $B\Gamma = 5$, να δείξετε ότι $A\Delta = AE = 5$.



Λύση

α) «Στο ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος παράλληλες μεταξύ τους είναι η πλευρά AB με την πλευρά $\Delta\Gamma$, οι προκείμενες γωνίες στη βάση του AB είναι η γωνία ΔAB και η γωνία B και οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του $\Delta\Gamma$ είναι η γωνία Δ και η γωνία Γ ».

β) Οι AB και $\Delta\Gamma$ είναι παράλληλες ως βάσεις του τραπεζίου, οπότε και το τμήμα AB θα είναι παράλληλο και με το τμήμα $E\Gamma$. Επίσης από τα δεδομένα έχουμε ότι, η AE είναι παράλληλη στη $B\Gamma$. Άρα το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, δηλαδή την AB με την $E\Gamma$ παράλληλες και την AE με την $B\Gamma$ παράλληλες.

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε ότι, το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε θα έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, άρα θα είναι $B\Gamma = AE$ και αφού $B\Gamma = 5$ τότε $AE = 5$ (1). Από τα δεδομένα έχουμε ότι, το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με ίσες πλευρές τις $A\Delta$ και $B\Gamma$, δηλαδή $A\Delta = B\Gamma$ και αφού $B\Gamma = 5$, τότε $A\Delta = 5$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $A\Delta = AE = 5$.

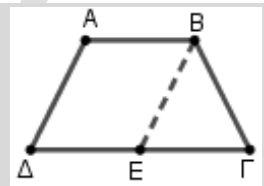
19826. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις AB και $\Delta\Gamma$, $A\Delta = B\Gamma$ και η BE είναι παράλληλη στην $A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Αν είναι $AB = A\Delta = 12$ και $\Delta\Gamma = 2AB$,

i. να υπολογίσετε την περίμετρο του τετραπλεύρου $ABE\Delta$.

ii. να δείξετε ότι το σημείο E είναι το μέσο του τμήματος $\Delta\Gamma$.



Λύση

α) Αφού το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις AB και $\Delta\Gamma$, τότε η AB είναι παράλληλη στην $\Delta\Gamma$, άρα AB παράλληλη και στην ΔE . Από τα δεδομένα έχουμε ότι και οι BE , $A\Delta$ είναι παράλληλες. Άρα το τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

β) i. Αφού το $ABE\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, θα έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, δηλαδή $AB = \Delta E$ και $A\Delta = BE$, και επειδή από τα δεδομένα έχουμε ότι $AB = A\Delta = 12$, προκύπτει ότι $AB = BE = \Delta E = A\Delta = 12$ (1).

Οπότε η περίμετρος Π του $ABE\Delta$ είναι : $\Pi = AB + BE + \Delta E + A\Delta = 12 + 12 + 12 + 12 = 4 \cdot 12 = 48$.

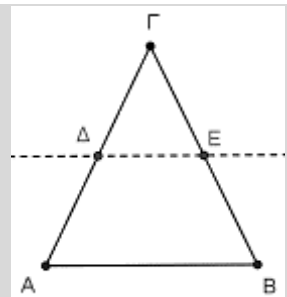
ii. Είναι $\Delta\Gamma = 2AB$ με $AB = 12$, άρα $\Delta\Gamma = 2 \cdot 12 = 24$. Έχουμε ότι $\Delta\Gamma = \Delta E + E\Gamma$ με $\Delta\Gamma = 24$ και $\Delta E = 12$ από τη σχέση (1), οπότε $E\Gamma = 24 - 12 = 12$. Συνεπώς, $\Delta E = E\Gamma = 12$ άρα το E είναι μέσο του $\Delta\Gamma$.

19834. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ του σχήματος είναι ισοσκελές με $\Gamma A = \Gamma B = 8$, το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς του $A\Gamma$ και η ευθεία ΔE είναι παράλληλη στην πλευρά του AB , όπου $AB = 6$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο E είναι το μέσο της πλευράς ΓB του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να βρείτε τα μήκη των τμημάτων ΔE , ΔA και EB , αιτιολογώντας την απάντησή σας.

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $A\Delta E B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και να υπολογίσετε την περίμετρό του.



Λύση

α) Από τα δεδομένα έχουμε ότι, το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΓA του τριγώνου $AB\Gamma$ και η ΔE είναι παράλληλη στην πλευρά του AB , οπότε η ΔE θα περνάει από το μέσο της τρίτης πλευράς ΓB του τριγώνου, δηλαδή το σημείο E θα είναι το μέσο του ΓB .

β) Από τα δεδομένα και το α) ερώτημα έχουμε ότι τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των ίσων πλευρών ΓA και ΓB του τριγώνου AB , οπότε: $\Delta A = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{8}{2} = 4$ και $EB = \frac{B\Gamma}{2} = 4$.

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, το ευθύγραμμο τμήμα ΔE ενώνει τα μέσα Δ και E των πλευρών του ΓA και ΓB αντίστοιχα, οπότε θα είναι παράλληλο στην πλευρά AB και ίσο με το μισό της, δηλαδή είναι $\Delta E \parallel AB$ και

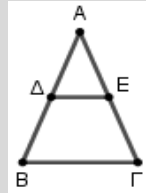
$$\Delta E = \frac{AB}{2} = 3.$$

γ) Το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο γιατί έχει μόνο ένα ζεύγος απέναντι πλευρών παράλληλες, τις ΔΕ και ΑΒ από το β) ερώτημα, και οι άλλες δύο, οι ΑΔ και ΒΕ, δεν είναι παράλληλες καθώς ως πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο σημείο Γ. Επίσης από το β) ερώτημα έχουμε ότι ΔΑ = ΕΒ = 4. Επομένως το τραπέζιο ΑΔΕΒ είναι ισοσκελές. Η περίμετρος του Π θα είναι : Π = ΑΒ + ΔΑ + ΔΕ + ΕΒ = 6 + 4 + 3 + 4 = 17.

35259. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Από το μέσο Δ της πλευράς ΑΓ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε.

α) Να αιτιολογήσετε ότι ΓΔ = ΒΕ.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΓΒΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Λύση

α) Είναι $\Gamma\Delta = \frac{AG}{2} = \frac{AB}{2} = BE.$

β) Είναι ΔΕ//ΒΓ και οι πλευρές ΔΓ, ΕΒ τέμνονται στο Α άρα το τετράπλευρο ΓΒΕΔ είναι τραπέζιο. Από α) ΓΔ = ΒΕ οπότε το τραπέζιο ΓΒΕΔ είναι ισοσκελές.

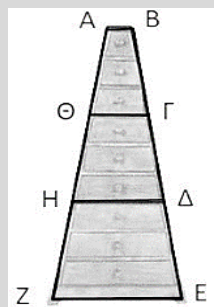
4ο Θέμα

14581. Στην εικόνα που ακολουθεί παρουσιάζεται το σχέδιο μιας κατασκευής τριών μερών με συρτάρια. Τόσο η κατασκευή όσο και τα επιμέρους τμήματά της είναι σχήματος τραpezίου. Συγκεκριμένα, το τετράπλευρο ΑΒΕΖ του σχεδίου της κατασκευής είναι τραπέζιο με βάσεις ΑΒ και ΖΕ, το τετράπλευρο ΑΒΓΘ είναι τραπέζιο με βάσεις ΑΒ και ΘΓ, το τετράπλευρο ΘΓΔΗ είναι τραπέζιο με βάσεις ΘΓ και ΗΔ καθώς και το τετράπλευρο ΗΔΕΖ είναι τραπέζιο με βάσεις ΗΔ και ΖΕ. Επιπλέον, τα Θ, Η και Γ, Δ είναι σημεία των μη παράλληλων πλευρών ΑΖ, ΒΕ αντίστοιχα του τραpezίου ΑΒΕΖ.

α) Να εξηγήσετε γιατί οι βάσεις ΑΒ, ΘΓ, ΗΔ και ΖΕ των επιμέρους τραpezίων είναι παράλληλες.

β) Έστω ότι τα σημεία Θ και Γ είναι τα μέσα των ΑΗ και ΒΔ αντίστοιχα, ενώ τα σημεία Η και Δ είναι τα μέσα των ΘΖ και ΓΕ αντίστοιχα. Αν είναι ΑΒ = 13,5 cm και ΗΔ = 50,5 cm, να βρείτε τα μήκη των τμημάτων:

i. ΘΓ ii. ΖΕ



Λύση

α) Από τα δεδομένα έχουμε:

- Το ΑΒΕΖ είναι τραπέζιο με βάσεις ΑΒ και ΖΕ, οπότε ΑΒ και ΖΕ είναι παράλληλες (ΑΒ // ΖΕ) (1)
- Το ΑΒΓΘ είναι τραπέζιο με βάσεις ΑΒ και ΘΓ, οπότε ΑΒ και ΘΓ είναι παράλληλες (ΑΒ // ΘΓ) (2)
- Το ΘΓΔΗ είναι τραπέζιο με βάσεις ΘΓ και ΗΔ, οπότε ΘΓ και ΗΔ είναι παράλληλες (ΘΓ // ΗΔ) (3)
- Το ΗΔΕΖ είναι τραπέζιο με βάσεις ΗΔ και ΖΕ, οπότε ΗΔ και ΖΕ είναι παράλληλες (ΗΔ // ΖΕ) (4)

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) και (4) προκύπτει ότι ανά δύο διαφορετικές βάσεις είναι παράλληλες προς μία τρίτη, συνεπώς όλες οι βάσεις θα είναι παράλληλες, δηλαδή ΑΒ // ΘΓ // ΗΔ // ΖΕ (5).

β) i. Από τη σχέση (5) προκύπτει ότι ΑΒ // ΗΔ και επειδή ΑΗ, ΒΔ δεν είναι παράλληλες, γιατί τα σημεία Α, Η και Β, Δ είναι σημεία των μη παράλληλων πλευρών ΑΖ και ΒΕ του τραpezίου ΑΒΕΖ αντίστοιχα (από δεδομένα), οπότε το τετράπλευρο ΑΒΔΗ είναι τραπέζιο και η ΘΓ είναι η διάμεσός του, αφού τα σημεία Θ και Γ είναι τα μέσα των ΑΗ και ΒΔ αντίστοιχα από τα δεδομένα.

$$\text{Άρα } \Theta\Gamma = \frac{AB + H\Delta}{2} = \frac{13,5 + 50,5}{2} = \frac{64}{2} = 32\text{cm}.$$

ii. Από τη σχέση (5) προκύπτει ότι $\Theta\Gamma \parallel ZE$ και επειδή $\Theta Z, \Gamma E$ δεν είναι παράλληλες, γιατί τα σημεία Θ, Z και B, Δ είναι σημεία των μη παράλληλων πλευρών AZ και BE του τραπέζιου $ABEZ$ αντίστοιχα (από δεδομένα), οπότε το τετράπλευρο $\Theta\Gamma EZ$ είναι τραπέζιο και η $H\Delta$ είναι η διάμεσός του, αφού τα σημεία H και Δ είναι τα μέσα των ΘZ και ΓE αντίστοιχα από τα δεδομένα.

$$\text{Άρα } H\Delta = \frac{\Theta\Gamma + ZE}{2} \Leftrightarrow 50,5 = \frac{32 + ZE}{2} \Leftrightarrow 101 = 32 + ZE \Leftrightarrow ZE = 69\text{cm}$$

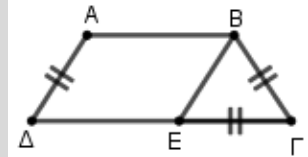
16767. Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος με $A\Delta \parallel B\Gamma$ και $B\Gamma > \Delta\Gamma$. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε σημείο E , τέτοιο ώστε $\Gamma E = \Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι γωνίες $\hat{A}\hat{\Delta}E$ και $\hat{\Gamma}\hat{E}\Delta$ είναι ίσες.

ii. η ΔE είναι διχοτόμος της $A\Delta\Gamma$.

β) Πόσες μοίρες πρέπει να είναι η γωνία A ώστε το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ να είναι ισόπλευρο;



Λύση

α) i. $\Delta_1 = E_1$ (1), γιατί είναι γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Delta$ και $B\Gamma$ με τέμνουσα την ΔE .

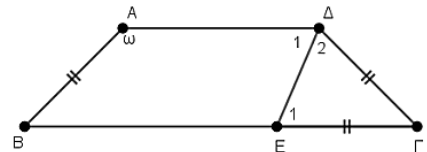
ii. $\Delta_2 = E_1$ (2), γιατί είναι γωνίες προσκείμενες στη βάση ΔE του ισοσκελούς τριγώνου $\Delta\Gamma E$.

Από (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $\Delta_1 = \Delta_2$ άρα η ΔE είναι διχοτόμος της $A\Delta\Gamma$.

β) Για να είναι το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ ισόπλευρο, πρέπει οι γωνίες του να είναι 60° , οπότε και $\Delta_2 = 60^\circ$.

Αποδείξαμε στο α)ii) ότι η ΔE είναι διχοτόμος της $A\Delta\Gamma$, οπότε $\hat{A}\Delta\Gamma = 120^\circ$.

Επειδή το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές είναι και $A = 120^\circ$.



21399. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις $AB = 4$ και $\Gamma\Delta = 8$, $B\Gamma = A\Delta = 4$ και τα ύψη του $A\Delta$ και $B\Gamma$.

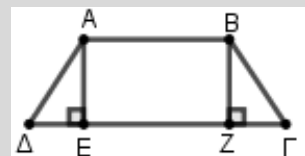
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $EZ = 4$

ii. $\Delta E = \Gamma Z = 2$

iii. $\hat{\Delta}\hat{A}E = 30^\circ$.

β) Να βρείτε τα μέτρα των προσκείμενων γωνιών σε κάθε βάση του τραπέζιου.



Λύση

α) i) Το $ABZE$ έχει παράλληλες τις AB και $\Gamma\Delta$ ως βάσεις του τραπέζιου, καθώς και τις AE και BZ ως ύψη του τραπέζιου, άρα είναι παραλληλόγραμμο. Επίσης το $ABZE$ έχει $E = 90^\circ$ άρα είναι ορθογώνιο. Επομένως οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, άρα $EZ = AB = 4$.

ii) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα αφού έχουν ίσες υποτείνουσες $A\Delta = B\Gamma = 4$ και μία κάθετη πλευρά $AE = BZ$ ως ύψη του τραπέζιου. Επομένως $\Delta E = \Gamma Z$. Είναι $\Delta E + \Gamma Z = \Gamma\Delta - EZ = 8 - 4 = 4$, άρα $\Delta E = \Gamma Z = 2$.

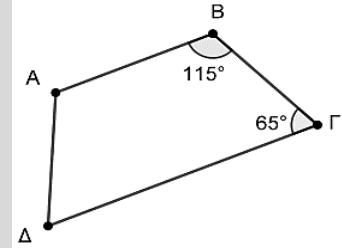
iii) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta E$ η κάθετη πλευρά ΔE είναι το μισό της υποτείνουσας $A\Delta$ αφού $\Delta E = 2$ και $A\Delta = 4$, άρα $\hat{\Delta}\hat{A}E = 30^\circ$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta E$ είναι $\hat{\Delta}\hat{A}E = 30^\circ$, οπότε $\hat{A}\hat{\Delta}E = 90^\circ - \hat{\Delta}\hat{A}E = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Ακόμη

$\widehat{B\Gamma Z} = \widehat{A\Delta E} = 60^\circ$, ως προσκείμενες στη βάση $\Gamma\Delta$, αφού στο ισοσκελές τραπέζιο οι γωνίες που πρόσκεινται σε κάθε βάση είναι ίσες.

Στο ορθογώνιο $ABZE$ είναι $\widehat{EAB} = 90^\circ$, επομένως $\widehat{\Delta AB} = \widehat{\Delta AE} + \widehat{EAB} = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$. Ακόμη $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta AB} = 120^\circ$, ως προσκείμενες στη βάση AB , αφού στο ισοσκελές τραπέζιο οι γωνίες που πρόσκεινται σε κάθε βάση είναι ίσες.

35394. Το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ του παρακάτω σχήματος έχει γωνίες $\widehat{B} = 115^\circ$ και $\widehat{\Gamma} = 65^\circ$. Αν οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, τότε να αποδείξετε ότι:



α) i. $\widehat{A} = 115^\circ$ και $\widehat{\Delta} = 65^\circ$,

ii. το $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο με βάσεις τις πλευρές του AB και $\Delta\Gamma$.

β) Το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

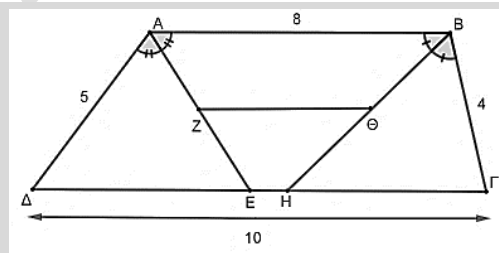
α) i. Είναι $\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} + 65^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} = 115^\circ$ και $\widehat{B} + \widehat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 115^\circ + \widehat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Delta} = 65^\circ$.

ii. Είναι $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 115^\circ + 65^\circ = 180^\circ$, οι γωνίες $\widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ είναι εντός και επί τα αυτά των ευθειών AB και $\Delta\Gamma$ που τέμνονται από την $B\Gamma$ άρα οι $AB, \Delta\Gamma$ είναι παράλληλες.

Επίσης $\widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 130^\circ < 180^\circ$ άρα οι $A\Delta, B\Gamma$ τέμνονται. Επομένως το $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο με βάσεις τις $AB, \Delta\Gamma$.

β) Όμως $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta} = 65^\circ$ άρα το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

21846. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB=8$, $B\Gamma=4$, $\Gamma\Delta=10$ και $A\Delta=5$. Οι διχοτόμοι των γωνιών A και B τέμνουν την $\Gamma\Delta$ στα σημεία E και H αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma H$ είναι ισοσκελή με βάσεις τις AE και BH αντίστοιχα.

β) Να υπολογίσετε το EH .

γ) Αν Z και Θ είναι τα μέσα των AE και BH αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $Z\Theta = \frac{9}{2}$.

Λύση

α) Είναι $\angle A_2 = \angle AED$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την AE . Εφόσον η AE είναι διχοτόμος της γωνίας A άρα $\angle A_1 = \angle A_2$, οπότε $\angle A_1 = \angle AED$, άρα το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές με βάση την AE . Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι το τρίγωνο $B\Gamma H$ είναι επίσης ισοσκελές με βάση τη BH .

β) Από το α) ερώτημα προκύπτει ότι $DE=5$ και $\Gamma H=4$. Έτσι $EH = \Gamma\Delta - DE - \Gamma H = 10 - 5 - 4 = 1$.

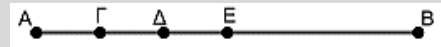
γ) Οι AB και EH είναι παράλληλες αλλά δεν είναι ίσες, οπότε το $ABHE$ είναι τραπέζιο και εφόσον τα σημεία Z και Θ είναι μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του το $Z\Theta$ είναι διάμεσος του τραπεζίου, άρα

$$Z\Theta = \frac{AB + EH}{2} = \frac{9}{2}.$$

Αναλογίες

Διαίρεση τμημάτων εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δοσμένο λόγο 2^ο Θέμα

19516. Το E είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $AB = 12$ και ισχύει ότι $AG = \Gamma\Delta = \Delta E$.



α) Ποια είναι τα μήκη των τμημάτων AE , EB , AG , $\Gamma\Delta$ και ΔE ;

β) Να βρείτε το λόγο $\frac{AE}{EB}$.

γ) Να βρείτε το λόγο $\frac{AG}{\Gamma B}$.

Λύση

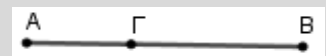
α) $AE = EB = \frac{AB}{2} = 6, AG = \Gamma\Delta = \Delta E = \frac{AE}{3} = \frac{6}{3} = 2.$

β) $\frac{AE}{EB} = \frac{6}{6} = 1.$

γ) $\frac{AG}{\Gamma B} = \frac{AG}{\Gamma\Delta + \Delta E + EB} = \frac{2}{2+2+6} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$

22112. Στο παρακάτω σχήμα, το σημείο Γ είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος AB .

Έστω ότι είναι $AB = 12\kappa$ και $AG = 4\kappa$, όπου κ θετικός αριθμός.



α) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{AG}{AB}$.

β) Να υπολογίσετε

i. το τμήμα ΓB συναρτήσει του κ ,

ii. το λόγο του τμήματος ΓB προς το τμήμα AB .

γ) Να αποδείξετε ότι το τμήμα ΓB είναι διπλάσιο του τμήματος AG και να βρείτε το λόγο λ στον οποίο το σημείο Γ διαιρεί εσωτερικά το τμήμα AB .

Λύση

α) Είναι $\frac{AG}{AB} = \frac{4\kappa}{12\kappa} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$

β) Είναι :

i. $\Gamma B = AB - AG = 12\kappa - 4\kappa = 8\kappa$ συναρτήσει του κ ,

ii. $\frac{\Gamma B}{AB} = \frac{8\kappa}{12\kappa} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

γ) Είναι $\Gamma B = 8\kappa = 2 \cdot 4\kappa = 2AG$ και $\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Gamma A}{2\Gamma A} = \frac{1}{2}.$

22113. Στο παρακάτω σχήμα, το σημείο Γ είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος AB .

Αν είναι $AB = 16\kappa$ και $\Gamma B = 4\kappa$, όπου κ θετικός αριθμός, τότε να υπολογίσετε:



α) το λόγο $\frac{\Gamma B}{AB},$

- β) το τμήμα ΑΓ συναρτήσει του κ και το λόγο του τμήματος ΑΓ προς το τμήμα ΑΒ,
 γ) το λόγο λ στον οποίο το σημείο Γ διαιρεί εσωτερικά το τμήμα ΑΒ.

Λύση

$$\alpha) \frac{GB}{AB} = \frac{4\kappa}{16\kappa} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4},$$

$$\beta) AG = AB - GB = 16\kappa - 4\kappa = 12\kappa, \quad \frac{AG}{AB} = \frac{12\kappa}{16\kappa} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \text{ και}$$

$$\gamma) \lambda = \frac{GA}{GB} = \frac{12\kappa}{4\kappa} = \frac{12}{4} = 3.$$

22115. Θεωρούμε τμήμα ΑΒ και σημείο Γ το οποίο το διαιρεί εσωτερικά σε δυο τμήματα ΑΓ και ΓΒ σε λόγο $\frac{AG}{GB} = \frac{1}{3}$.

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθένα από το ακόλουθα δύο ερωτήματα, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

i. Το τμήμα ΓΒ είναι

A: ίσο με το τμήμα ΑΓ.

B: διπλάσιο από το τμήμα ΑΓ.

Γ: τριπλάσιο από το τμήμα ΑΓ.

ii. Το σημείο Γ

A: είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

B: βρίσκεται πιο κοντά στο άκρο Α του τμήματος ΑΒ.

Γ: βρίσκεται πιο κοντά στο άκρο Β του τμήματος ΑΒ.

β) Να δείξετε ότι το τμήμα ΑΒ είναι τετραπλάσιο του τμήματος ΑΓ.

γ) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{GB}{AB}$.

Λύση

α) i. Είναι $\frac{AG}{GB} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow GB = 3AG$ οπότε σωστή απάντηση είναι το Γ.

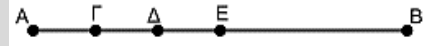
ii. Το σημείο Γ απέχει τριπλάσια απόσταση από το Β από ότι απέχει από το Α άρα είναι πιο κοντά στο Α. Επομένως σωστή απάντηση είναι το Β.

β) Είναι $AB = AG + GB = AG + 3AG = 4AG$ άρα το τμήμα ΑΒ είναι τετραπλάσιο του τμήματος ΑΓ.

4^ο Θέμα

19523. Τα σημεία Γ, Δ και Ε είναι σημεία του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, ώστε το Ε να είναι μέσο του ΑΒ και $ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ$.

α) Αν $ΑΒ = 12$, ποια είναι τα μήκη των τμημάτων ΕΑ και ΑΓ;



β) Να βρείτε το λόγο $\lambda_1 = \frac{ΕΑ}{ΕΒ}$ που το σημείο Ε διαιρεί το τμήμα ΑΒ.

γ) Να βρείτε το λόγο $\lambda_2 = \frac{ΓΑ}{ΓΒ}$ που το σημείο Γ διαιρεί το τμήμα ΑΒ.

Λύση

α) $ΕΑ = ΕΒ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{12}{2} = 6.$

β) $\lambda_1 = \frac{ΕΑ}{ΕΒ} = \frac{6}{6} = 1$

γ) $ΓΑ = \frac{1}{3} ΑΕ = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$ οπότε $\lambda_2 = \frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{ΓΑ}{ΑΒ - ΑΓ} = \frac{2}{12 - 2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$

Θεώρημα Θαλή

2^ο Θέμα

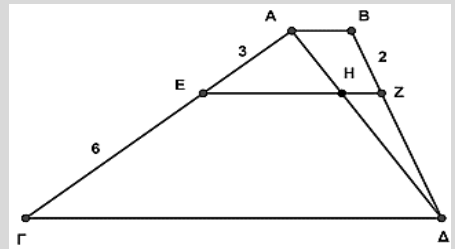
19643. Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα AB, EZ και ΓΔ είναι παράλληλα.

Αν έχουμε ότι $AE = 3$,

$ΕΓ = 6$ και $BZ = 2$, τότε:

α) να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΖ.

β) να αποδείξετε ότι $HΔ = 2 \cdot AH$.



Λύση

α) Εφόσον AB, EZ, ΓΔ είναι παράλληλες που τέμνουν τις ΑΓ, ΒΔ θα ισχύει το Θεώρημα του Θαλή

οπότε: $\frac{AE}{EG} = \frac{BZ}{ZΔ} \Leftrightarrow \frac{3}{6} = \frac{2}{ZΔ} \Leftrightarrow 3ZΔ = 12 \Leftrightarrow ZΔ = 4$.

β) Όμοια για τις ίδιες παράλληλες που τέμνουν τις ΑΓ, ΑΔ από το Θεώρημα του Θαλή ισχύει:

$$\frac{AE}{EG} = \frac{AH}{HΔ} \Leftrightarrow \frac{3}{6} = \frac{AH}{HΔ} \Leftrightarrow 3HΔ = 6AH \Leftrightarrow HΔ = 2AH$$

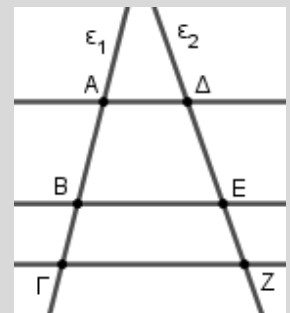
19828. Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι παράλληλες, οι οποίες τέμνουν τις ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 .

Αν είναι $AB = 12$, $\Delta E = 15$ και $EZ = 10$,

α) να υπολογίσετε το λόγο $\frac{EZ}{\Delta E}$.

β) να δείξετε ότι $\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{2}{3}$.

γ) να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.



Λύση

α) $\frac{EZ}{\Delta E} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

β) Οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 τέμνονται από τις παράλληλες ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ, οπότε τα τμήματα που ορίζουν οι παράλληλες στις ϵ_1 και ϵ_2 είναι ανάλογα (Θεώρημα Θαλή), δηλαδή:

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} \Rightarrow \frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} \Leftrightarrow \frac{EZ}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{AB} \Leftrightarrow \frac{B\Gamma}{AB} = \frac{2}{3}.$$

γ) Από τη σχέση (1) του β) ερωτήματος έχουμε ότι $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} \Leftrightarrow \frac{12}{15} = \frac{A\Gamma}{25} \Leftrightarrow 15A\Gamma = 300 \Leftrightarrow A\Gamma = 20$

γιατί $\Delta Z = \Delta E + EZ = 15 + 10 = 25$.

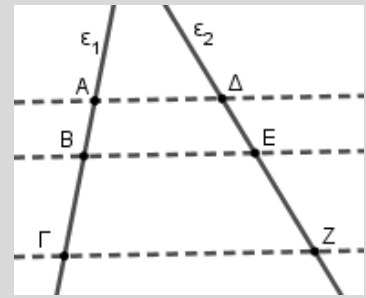
19835. Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι παράλληλες, οι οποίες τέμνουν τις ευθείες ε_1 και ε_2 στα σημεία Α, Β, Γ και Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα.

Αν είναι $AB=4$, $B\Gamma=8$ και $\Delta Z=18$, τότε

α) να υπολογίσετε το λόγο $\frac{AB}{A\Gamma}$,

β) να αιτιολογήσετε γιατί είναι $\frac{\Delta E}{\Delta Z} = \frac{1}{3}$,

γ) να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΔΕ και ΕΖ.



Λύση

α) Αφού $AB=4$ και $B\Gamma=8$, τότε $A\Gamma=AB+B\Gamma=4+8=12$. Οπότε $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

β) Οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται από τις παράλληλες ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ, οπότε τα τμήματα που ορίζουν οι παράλληλες στις ε_1 και ε_2 θα είναι ανάλογα (Θεώρημα Θαλή), δηλαδή θα ισχύει:

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} \Rightarrow \frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} \Leftrightarrow \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\Delta E}{\Delta Z} \Leftrightarrow \frac{\Delta E}{\Delta Z} = \frac{1}{3}.$$

$$\gamma) \frac{\Delta E}{\Delta Z} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\Delta E}{18} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3\Delta E = 18 \Leftrightarrow \Delta E = 6.$$

Αφού $\Delta Z=18$ και $\Delta E=6$, άρα $EZ=18-6=12$.

22108. Οι ΔΖ και ΕΗ είναι παράλληλες με την πλευρά ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ και τέμνουν την πλευρά ΓΑ στα σημεία Δ, Ε και την πλευρά ΓΒ στα σημεία Ζ, Η. ΔΕ=6 και ΖΗ=4.

α) i. Να συμπληρώσετε τα κενά στην παρακάτω αναλογία, εφαρμόζοντας το θεώρημα Θαλή στο τρίγωνο ΓΕΗ, στο οποίο η ΔΖ είναι παράλληλη στην πλευρά ΓΗ.

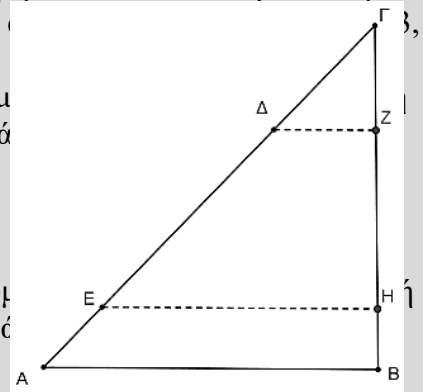
$$\frac{\Gamma Z}{\dots} = \frac{\dots}{\Delta E}$$

ii. Να αποδείξετε ότι $\Gamma Z=2$.

β) i. Να συμπληρώσετε τα κενά στην παρακάτω αναλογία, εφαρμόζοντας το θεώρημα Θαλή στο τρίγωνο ΓΑΒ, στο οποίο η ΕΗ είναι παράλληλη στην πλευρά ΑΒ.

$$\frac{\dots}{\Gamma H} = \frac{EA}{\dots}$$

ii. Αν επιπλέον είναι $HB=1$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΕΑ.



Λύση

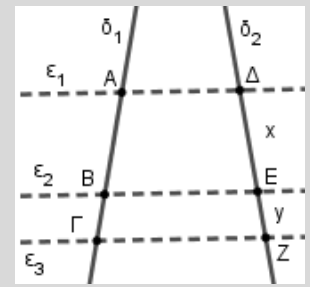
$$\alpha) i. \frac{\Gamma Z}{ZH} = \frac{\Gamma \Delta}{\Delta E},$$

$$ii. \frac{\Gamma Z}{ZH} = \frac{\Gamma \Delta}{\Delta E} \Leftrightarrow \frac{\Gamma Z}{4} = \frac{3}{6} \Leftrightarrow 6\Gamma Z = 12 \Leftrightarrow \Gamma Z = 2.$$

$$\beta) \text{ Είναι : } i. \frac{HB}{\Gamma H} = \frac{EA}{E\Gamma},$$

$$ii. \frac{HB}{\Gamma H} = \frac{EA}{E\Gamma} \Leftrightarrow \frac{HB}{\Gamma Z + ZH} = \frac{EA}{\Gamma \Delta + \Delta E} \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{EA}{9} \Leftrightarrow 6EA = 9 \Leftrightarrow EA = \frac{9}{6} = 1,5.$$

22116. Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ευθείες $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ είναι παράλληλες και τέμνουν τις ευθείες δ_1, δ_2 στα σημεία A, B, Γ και Δ, E, Z αντίστοιχα. Έστω ότι είναι $AB = 10$ και $B\Gamma = 3$.



α) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{B\Gamma}{AB}$.

β) i. Να συμπληρώσετε τα κενά στην αναλογία που ακολουθεί,

αιτιολογώντας την απάντησή σας: $\frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\dots}$

ii. Να δείξετε ότι $\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{y}{x}$, όπου $x = \Delta E$ και $y = EZ$.

γ) Αν είναι $y = 4$, να υπολογίσετε το x .

Λύση

α) $\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{3}{10} = 0,3$

β) i. Επειδή οι ευθείες $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ είναι παράλληλες και τέμνουν τις ευθείες δ_1 και δ_2 , από το θεώρημα του Θαλή θα προκύπτει η αναλογία $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$ (1).

ii. Από τη σχέση (1) έχουμε ότι: $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} \Leftrightarrow \frac{EZ}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{AB} \Leftrightarrow \frac{B\Gamma}{AB} = \frac{y}{x}$.

γ) Είναι $\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{3}{10} \Leftrightarrow \frac{4}{x} = \frac{3}{10} \Leftrightarrow 3x = 40 \Leftrightarrow x = \frac{40}{3}$.

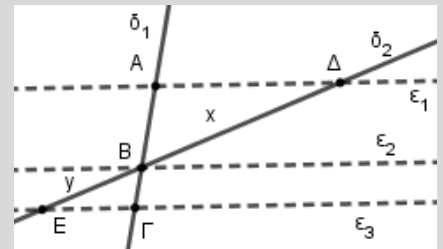
22117. Στο σχήμα που ακολουθεί, οι ευθείες $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ είναι παράλληλες και τέμνουν τις ευθείες δ_1, δ_2 στα σημεία A, B, Γ και Δ, B, E αντίστοιχα.

Έστω ότι είναι $AB = 14$ και $B\Gamma = 4$.

α) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{AB}{B\Gamma}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{x}{y}$, όπου $x = B\Delta$ και $y = BE$.

γ) Αν είναι $x = 16$, να υπολογίσετε το y .



Λύση

α) $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$.

β) Επειδή οι ευθείες $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ είναι παράλληλες και τέμνουν τις ευθείες δ_1 και δ_2 , από το θεώρημα του

Θαλή θα προκύπτει η αναλογία $\frac{AB}{\Delta B} = \frac{B\Gamma}{BE} = \frac{A\Gamma}{\Delta E} \Rightarrow \frac{AB}{\Delta B} = \frac{B\Gamma}{BE} \Rightarrow \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta B}{BE} = \frac{x}{y}$

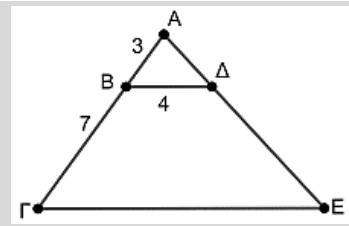
γ) Είναι $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{16}{y} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 7y = 32 \Leftrightarrow y = \frac{32}{7}$

4^ο Θέμα

19520. Δίνεται το τραπέζιο ΒΓΕΔ του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές ΓΒ και ΕΔ όταν προεκταθούν τέμνονται στο σημείο Α. Επιπλέον δίνεται ότι $AB = 3$, $BΓ = 7$ και $BD = 4$.

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών ΑΓ και ΓΕ του τριγώνου ΑΓΕ.

β) Αν επιπλέον το ΑΒΔ είναι ισοσκελές να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΕ του τριγώνου ΑΓΕ.



Λύση

α) Το μήκος της πλευράς ΑΓ είναι $ΑΓ = AB + BΓ = 3 + 7 = 10$.

Οι ΒΔ και ΓΕ είναι παράλληλες ως βάσεις του τραpezίου ΒΓΕΔ. Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΑΒΔ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΓ και ΑΕ του τριγώνου ΑΓΕ και την παράλληλη ΒΔ στην πλευρά ΓΕ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΓΕ οπότε:

$$\frac{AB}{AG} = \frac{BD}{GE} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \frac{AB}{AG} = \frac{BD}{GE} \Leftrightarrow \frac{3}{10} = \frac{4}{GE} \Leftrightarrow 3GE = 40 \Leftrightarrow GE = \frac{40}{3}$$

β) Είναι $\frac{AB}{AG} = \frac{AD}{AE}$

Διακρίνουμε τις δύο παρακάτω περιπτώσεις για το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΔ.

1η περίπτωση: το ΑΒΔ είναι ισοσκελές με $AD = AB = 3$, τότε $\frac{3}{10} = \frac{3}{AE} \Leftrightarrow AE = 10$

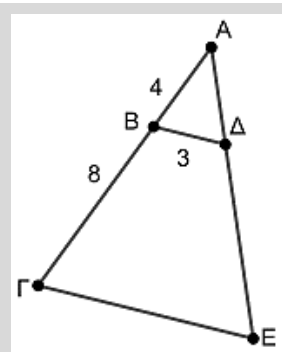
2η περίπτωση: το ΑΒΔ είναι ισοσκελές με $AD = AB = 4$, τότε $\frac{3}{10} = \frac{4}{AE} \Leftrightarrow AE = \frac{40}{3}$.

19521. Δίνεται το τραπέζιο ΒΓΕΔ του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές ΓΒ και ΕΔ όταν προεκταθούν τέμνονται στο σημείο Α, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.

Επιπλέον δίνεται ότι $AB = 4$, $BΓ = 8$ και $BD = 3$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓΕ.

β) Αν επιπλέον το ΑΒΔ είναι ισοσκελές με $AB = AD$, να βρείτε την περίμετρο του τραpezίου.



Λύση

α) Το μήκος της πλευράς ΑΓ είναι $ΑΓ = AB + BΓ = 4 + 8 = 12$. Οι ΒΔ και ΓΕ είναι παράλληλες ως βάσεις του τραpezίου ΒΓΕΔ. Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΑΒΔ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΓ και ΑΕ του τριγώνου ΑΓΕ και την παράλληλη ΒΔ στην πλευρά ΓΕ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΓΕ οπότε θα είναι:

$$\frac{AB}{AG} = \frac{BD}{GE} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \frac{AB}{AG} = \frac{BD}{GE} \Leftrightarrow \frac{4}{12} = \frac{3}{GE} \Leftrightarrow 4GE = 36 \Leftrightarrow GE = 9.$$

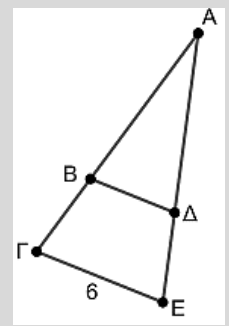
β) Εφόσον το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με $AB = AD$ θα είναι $AD = AB = 4$. Από πόρισμα του θεωρήματος του Θαλή, κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα (και αντίστροφα). Η ΒΔ είναι παράλληλη με την πλευρά ΓΕ του τριγώνου ΑΓΕ. Άρα χωρίζει τις πλευρές ΑΓ και ΑΕ του τριγώνου ΑΓΕ σε μέρη ανάλογα.

Επομένως: $\frac{BΓ}{ΔΕ} = \frac{AB}{AD} = \frac{4}{4} = 1 \Leftrightarrow BΓ = ΔΕ = 8$

Οπότε η περίμετρος του τραpezίου είναι $BD + BΓ + ΓΕ + ΔΕ = 3 + 8 + 9 + 8 = 28$.

19522. Δίνεται το τραπέζιο ΒΓΕΔ του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές ΓΒ και ΕΔ όταν προεκταθούν τέμνονται στο σημείο Α, όπως φαίνεται στο

παρακάτω σχήμα. Επιπλέον δίνεται ότι $\frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{2}{3}$ και ΓΕ = 6.



α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΔ.

β) Αν επιπλέον το ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και ΑΕ = 12:

i. να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

ii. να υπολογίσετε τα μήκη των υπόλοιπων πλευρών του τριγώνου ΑΒΔ.

Λύση

α) Οι ΒΔ και ΓΕ είναι παράλληλες ως βάσεις του τραpezίου ΒΓΕΔ. Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή, το τρίγωνο ΑΒΔ που ορίζεται από τις ευθείες των πλευρών ΑΓ και ΑΕ του τριγώνου ΑΓΕ και την παράλληλη ΒΔ στην πλευρά ΓΕ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΑΓΕ οπότε :

$$\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΒΔ}{ΓΕ} = \frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{ΒΔ}{6} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3ΒΔ = 12 \Leftrightarrow ΒΔ = 4$$

β) i. Από πόρισμα του θεωρήματος του Θαλή, κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα (και αντίστροφα). Η ΒΔ είναι παράλληλη με την πλευρά ΓΕ του τριγώνου ΑΓΕ. Άρα χωρίζει τις πλευρές ΑΓ και ΑΕ του ΑΓΕ σε μέρη ανάλογα.

$$\text{Επομένως: } \frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΒΓ}{ΔΕ}.$$

Εφόσον το ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οι πλευρές του ΒΓ και ΔΕ είναι ίσες.

$$\text{Επομένως: } \frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΒΓ}{ΔΕ} = \frac{ΒΓ}{ΒΓ} = 1 \Leftrightarrow ΑΒ = ΑΔ$$

Δηλαδή οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ του τριγώνου ΑΒΔ είναι ίσες. Επομένως το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

$$\text{ii. Είναι } \frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{ΑΔ}{12} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3ΑΔ = 24 \Leftrightarrow ΑΔ = 8$$

Εφόσον, από το β) i., το ΑΒΔ είναι ισοσκελές είναι ΑΒ = ΑΔ = 8.

Ομοιότητα

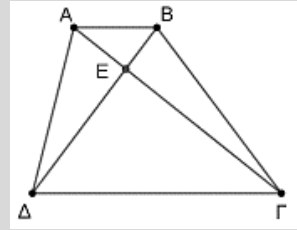
Κριτήρια ομοιότητας

2^ο Θέμα

19274. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και ΓΔ = 3ΑΒ. Οι διαγωνίες του ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ είναι όμοια.

β) Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{ΕΓ}{ΕΑ}$.



Λύση

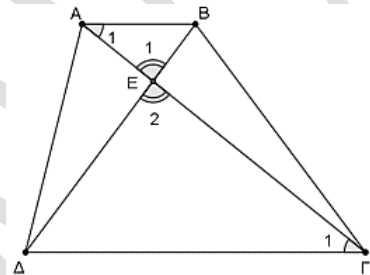
α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ έχουν:

$\hat{A}_1 = \hat{G}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΑΓ και

$\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ ως κατακορυφήν γωνίες.

Επομένως είναι όμοια γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

β) Λόγω της ομοιότητας των τριγώνων οι ομόλογες πλευρές τους θα είναι ανάλογες.



	Ίσες γωνίες		
	$\hat{E}_1 = \hat{E}_2$	$\hat{A}_1 = \hat{G}_1$	
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΕ	ΑΒ	ΕΑ	ΒΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΓΔΕ	ΓΔ	ΕΓ	ΔΕ

Οπότε: $\frac{ΕΓ}{ΕΑ} = \frac{ΓΔ}{ΑΒ} = \frac{3ΑΒ}{ΑΒ} = 3.$

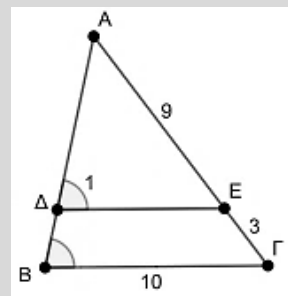
19517. Τα σημεία Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε ΑΕ = 9, ΕΓ = 3 και η γωνία $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}\hat{\Delta}Ε$ είναι ίση με τη γωνία Β του τριγώνου ΑΒΓ.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια με

λόγο ομοιότητας $\frac{3}{4}$.

γ) Αν επιπλέον ΒΓ = 10, να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΔΕ του τριγώνου ΑΔΕ.



Λύση

α) $ΑΓ = ΑΕ + ΕΓ = 9 + 3 = 12.$

β) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν κοινή την γωνία Α και $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$. Επομένως έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, άρα είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητάς τους είναι ίσος με το λόγο των ομόλογων πλευρών τους ΑΕ και ΑΓ, οι οποίες βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{\Delta}_1$ και Β, αντίστοιχα οπότε:

$$\lambda = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

γ) Οι πλευρές ΔΕ και ΒΓ είναι ομόλογες, εφόσον βρίσκονται απέναντι από την κοινή γωνία Α .

$$\text{Άρα } \frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{\Delta E}{10} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4\Delta E = 30 \Leftrightarrow \Delta E = \frac{30}{4} = 7,5 .$$

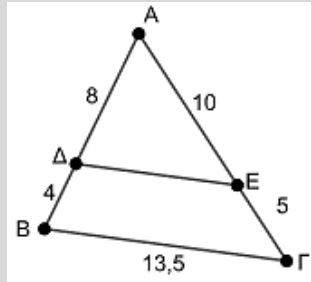
19518. Τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, ώστε ΑΔ = 8, ΒΔ = 4, ΑΕ = 10 και ΕΓ = 5.

Επίσης ΒΓ = 13,5.

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{2}{3}$.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΔΕ του τριγώνου ΑΔΕ.



Λύση

α) $AB = AD + DB = 8 + 4 = 12$ και $AG = AE + EG = 10 + 5 = 15$.

β) Έχουμε ότι $\frac{AD}{AB} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{AG} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$. Επίσης η Α είναι κοινή γωνία των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ. Άρα τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία σε αυτές τις πλευρές, κοινή. Επομένως είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{2}{3}$.

γ) Οι πλευρές ΔΕ και ΒΓ είναι ομόλογες πλευρές των όμοιων τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ, εφόσον βρίσκονται απέναντι από την κοινή γωνία τους Α .

$$\text{Άρα } \frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\Delta E}{13,5} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3\Delta E = 27 \Leftrightarrow \Delta E = 9 .$$

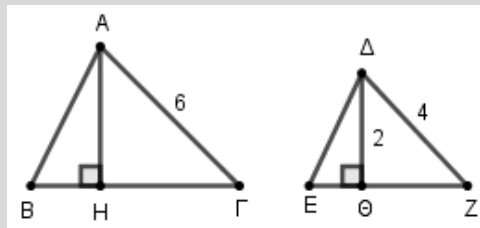
19644. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ του παρακάτω σχήματος έχουν $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$.

Αν γνωρίζουμε ότι ΑΓ = 6, ΔΖ = 4 και ΔΘ = 2, τότε:

α) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΗΓ και ΔΘΖ είναι όμοια.

β) να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΗ.

γ) να υπολογίσετε το λόγο $\frac{H\Gamma}{\Theta Z}$.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΗΓ και ΔΘΖ είναι όμοια γιατί είναι ορθογώνια και έχουν τη γωνία Γ ίση με τη γωνία Ζ (από υπόθεση).

β) Λόγω του ερωτήματος α) τα τρίγωνα ΑΗΓ και ΔΘΖ θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες άρα

$$\text{ισχύει: } \frac{AH}{\Theta\Delta} = \frac{AG}{\Delta Z} \Leftrightarrow \frac{AH}{2} = \frac{6}{4} \Leftrightarrow 4AH = 12 \Leftrightarrow AH = 3 .$$

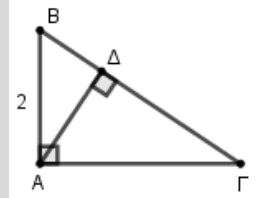
γ) Λόγω του ερωτήματος β) από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΗΓ και ΑΘΖ είναι:

$$\frac{H\Gamma}{\Theta Z} = \frac{AG}{\Delta Z} \Leftrightarrow \frac{H\Gamma}{\Theta Z} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

19645. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος, με την υποτείνουσα του $B\Gamma = 4$ και την κάθετη πλευρά του $AB = 2$.

Αν AD το ύψος του τριγώνου τότε:

- α)** να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι όμοια.
β) να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $B\Delta$.



Λύση

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι όμοια αφού έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία. Συγκεκριμένα είναι ορθογώνια και η γωνία B είναι κοινή. Άρα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔBA είναι όμοια.

β) Από το α) και τη ομοιότητα των τριγώνων $AB\Gamma$ και ΔBA ισχύει:

$$\frac{AB}{\Delta B} = \frac{B\Gamma}{AB} \Leftrightarrow \frac{2}{\Delta B} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow 4\Delta B = 4 \Leftrightarrow \Delta B = 1.$$

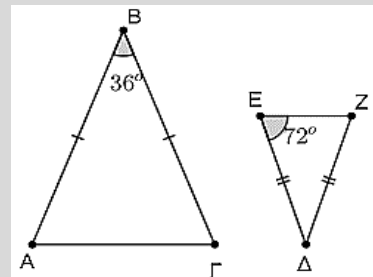
20956. Δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα $BA\Gamma$ με $BA = B\Gamma$ και ΔEZ με $\Delta E = \Delta Z$. Δίνεται επίσης ότι $\hat{B} = 36^\circ$, $\hat{E} = 72^\circ$ και $AB = 2\Delta E$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{A} = 36^\circ$.

ii. $B\Gamma = 2\Delta Z$.

β) Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα $BA\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια.



Λύση

α) i. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔEZ είναι $\Delta E = \Delta Z$, άρα $\hat{Z} = \hat{E} = 72^\circ$.

Για τις γωνίες του τριγώνου ΔEZ είναι: $\Delta + \hat{Z} + \hat{E} = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta + 72^\circ + 72^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$.

ii. Δίνεται ότι $AB = 2\Delta E$, $AB = B\Gamma$ και $\Delta E = \Delta Z$. Άρα, $B\Gamma = 2\Delta E = 2\Delta Z$.

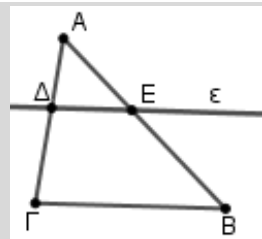
β) Τα τρίγωνα $BA\Gamma$ και ΔEZ έχουν: $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{2\Delta E}{\Delta E} = 2$, $\frac{B\Gamma}{\Delta Z} = \frac{2\Delta Z}{\Delta Z} = 2$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = 36^\circ$, άρα τα τρίγωνα

$BA\Gamma$ και ΔEZ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, θα είναι όμοια.

21002. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς $ΑΓ$ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AE\Delta$ είναι όμοια.

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔE , αν είναι $\Delta A = 2$, $\Delta \Gamma = 6$ και $B\Gamma = 4$.



Λύση

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AE\Delta$ έχουν $\hat{B} = \hat{AED}$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων $E\Delta$ και $B\Gamma$ που τέμνονται από την EB) και κοινή τη γωνία $\hat{A}$. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AE\Delta$ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A}$ κοινή	$\hat{A\hat{E}D} = \hat{B}$	$\hat{A\hat{D}E} = \hat{\Gamma}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΕΔ	ΔΕ	ΑΔ	ΑΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΓ	ΑΒ

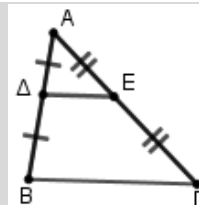
$$\text{Είναι } \frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{\Delta E}{4} = \frac{2}{8} \Leftrightarrow 8\Delta E = 8 \Leftrightarrow \Delta E = 1.$$

21005. Έστω Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα τριγώνου ΑΒΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ΔΕ // ΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.

γ) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ.



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, το τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Επομένως, το ΔΕ είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή ΔΕ // ΒΓ.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν $\hat{A\hat{D}E} = \hat{B}$ (ως εκτός εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΒΔ) και κοινή τη γωνία $\hat{A}$. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

γ) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

$$\text{Έτσι έχουμε: } \frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{A\Delta}{AB}.$$

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A}$ κοινή	$\hat{A\hat{D}E} = \hat{B}$	$\hat{A\hat{E}D} = \hat{\Gamma}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΕ	ΔΕ	ΑΕ	ΑΔ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΓ	ΑΒ

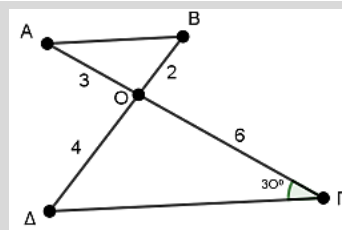
21270. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν ΟΑ = 3, ΟΒ = 2, ΟΓ = 6, ΟΔ = 4 και η γωνία ΟΓΔ ισούται με 30° τότε:

α) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι όμοια.

β) να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα των λόγων:

$$\frac{O\Delta}{\dots} = \frac{\dots}{O\Gamma} = \frac{O\Delta}{\dots}.$$

γ) να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΟΑΒ.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ έχουν: $\frac{O\Delta}{O\Gamma} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\frac{O\Delta}{O\Gamma} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, άρα $\frac{O\Delta}{O\Gamma} = \frac{O\Delta}{O\Gamma}$. Επειδή $\hat{A\hat{O}B} = \hat{G\hat{O}D}$ ως κατακορυφήν, τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια.

β) Λόγω του ερωτήματος (α) τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι όμοια, οπότε οι λόγοι των ομολόγων

$$\text{πλευρών τους θα είναι ίσοι. Δηλαδή: } \frac{O\Delta}{O\Gamma} = \frac{O\Delta}{O\Gamma} = \frac{O\Delta}{O\Gamma}.$$

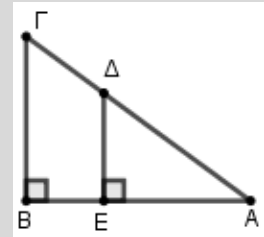
γ) Λόγω του ερωτήματος (α) τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι όμοια, οπότε οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ομόλογες πλευρές τους ΟΒ και ΟΔ θα είναι ίσες. Άρα $\angle ΟΑΒ = \angle ΟΓΔ = 30^\circ$.

21305. Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{A\hat{E}\Delta}$

είναι ορθές.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ είναι όμοια.

β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΔ και ΑΒΓ.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ έχουν $\angle B = \angle A\hat{E}\Delta = 90^\circ$ και κοινή τη γωνία $\hat{A}$.

Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα

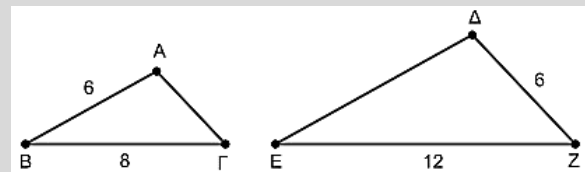
Έτσι έχουμε: $\frac{DE}{BG} = \frac{AD}{AG} = \frac{AE}{AB}$.

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A}$ κοινή	$\hat{A\hat{E}\Delta} = \hat{B}$	$\hat{A\hat{D}E} = \hat{A}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΕΔ	ΔΕ	ΑΔ	ΑΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΓ	ΑΒ

21390. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ στο παρακάτω σχήμα είναι όμοια και η ομόλογη πλευρά της ΒΓ είναι η ΕΖ. Δίνονται επίσης $AB = 6, BG = 8, \Delta Z = 6$ και $EZ = 12$.

α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος ομοιότητας των

τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι $\frac{2}{3}$.



β) Να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα των λόγων $\frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{EZ} = \frac{AG}{\dots}$.

γ) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών ΑΓ και ΔΕ.

Λύση

α) Επειδή οι πλευρές ΒΓ και ΕΖ είναι ομόλογες, ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι

$$\lambda = \frac{BG}{EZ} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

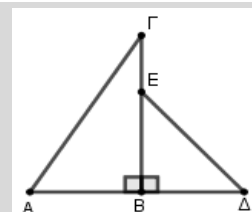
β) Είναι $\lambda = \frac{AB}{DE} = \frac{BG}{EZ} = \frac{AG}{\Delta Z}$.

γ) Είναι $\frac{AG}{\Delta Z} = \lambda \Leftrightarrow \frac{AG}{6} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3AG = 12 \Leftrightarrow AG = 4$, $\frac{AB}{DE} = \lambda \Leftrightarrow \frac{6}{DE} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2DE = 18 \Leftrightarrow DE = 9$

22241. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια.

β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΒΕ.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ABΓ και ΔBE έχουν:

- $\hat{A} = \hat{\Delta}$ (υπόθεση)

- $\hat{AB}\hat{\Gamma} = \hat{EB}\hat{\Delta} = 90^\circ$

Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα ABΓ και ΔBE είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

Άρα $\frac{B\hat{\Gamma}}{BE} = \frac{A\hat{\Gamma}}{E\Delta} = \frac{AB}{B\Delta}$.

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{\Delta}$	$\hat{AB}\hat{\Gamma} = \hat{EB}\hat{\Delta}$	$\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = \hat{E}\hat{\Delta}\hat{B}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΔBE	BΓ	AΓ	AB
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ABΓ	BE	EΔ	BΔ

35258. Οι χορδές AB και ΓΔ ενός κύκλου τέμνονται στο σημείο E και οι

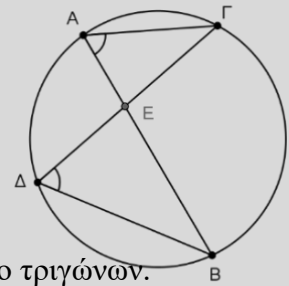
γωνίες με κορυφές τα σημεία A και Δ είναι ίσες, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα AΕΓ και ΔEB είναι όμοια.

β) i. Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.



Λύση

α) Τα τρίγωνα AΕΓ και ΔEB έχουν :

1) $\hat{A} = \hat{\Delta}$ και

2) $\hat{A}\hat{E}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{E}\hat{\Delta}$ σαν κατακορυφήν γωνίες άρα είναι όμοια αφού έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία.

β) i. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων είναι:

EΓ, EB (απέναντι από τις γωνίες $\hat{A}, \hat{\Delta}$),

AΓ, ΔB (απέναντι από τις γωνίες $\hat{A}\hat{E}\hat{\Gamma}, \hat{B}\hat{E}\hat{\Delta}$) και

AE, EΔ (απέναντι από τις γωνίες $\hat{\Gamma}, \hat{B}$).

ii. Οι λόγοι των ομόλογων πλευρών των

δυο τριγώνων είναι : $\frac{E\hat{\Gamma}}{EB} = \frac{A\hat{\Gamma}}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Delta}$.

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{\Delta}$	$\hat{A}\hat{E}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{E}\hat{\Delta}$	$\hat{B} = \hat{\Gamma}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο AΕΓ	EΓ	AΓ	AE
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΔEB	BE	ΔB	EΔ

35389. Θεωρούμε τετράπλευρο ABΓΔ με $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{B} = 130^\circ$, $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 110^\circ$ και τις απέναντι γωνίες τους παραπληρωματικές.

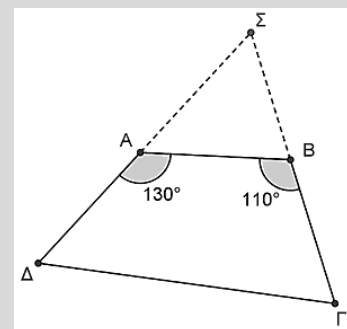
Έστω ότι οι απέναντι γωνίες του ABΓΔ είναι παραπληρωματικές και Σ το σημείο στο οποίο τέμνονται οι πλευρές του ΔA και ΓB προεκτείνόμενες προς τα σημεία A και B αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{\Gamma} = 50^\circ$ και $\hat{\Delta} = 70^\circ$.

β) i. Να αποδείξετε ότι $\hat{\Sigma}\hat{A}\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{\Sigma}\hat{B}\hat{A} = \hat{\Delta}$.

ii. Τα τρίγωνα ΣAB και ΣΔΓ είναι όμοια;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) Είναι $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 130^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 50^\circ$ και $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 110^\circ + \hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 70^\circ$.

β) i. Είναι $\hat{\Sigma}\hat{A}\hat{B} = 180^\circ - \hat{\Delta}\hat{A}\hat{B} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ = \hat{\Gamma}$ και

$$\hat{\Sigma}\hat{B}\hat{A} = 180^\circ - \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Sigma}\hat{B}\hat{A} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ = \hat{\Delta}.$$

ii. Τα τρίγωνα ΣAB και $\Sigma \Delta \Gamma$ έχουν :

1) $\hat{\Sigma}\hat{A}\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και

2) $\hat{\Sigma}\hat{B}\hat{A} = \hat{\Delta}$ από β) i. άρα

είναι όμοια αφού έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία.

4^ο Θέμα

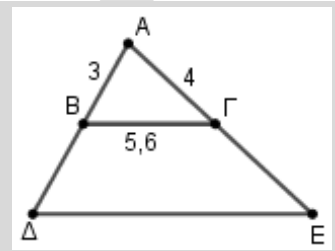
18208. Η πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι παράλληλη στην πλευρά ΔE του τριγώνου $A\Delta E$. Επίσης δίνονται $AB = 3$, $B\Gamma = 5,6$ και $A\Gamma = 4$.

α) Αν $A\Delta = 6$ να υπολογίσετε:

i. το μήκος της πλευράς $A\Delta E$ του τριγώνου $A\Delta E$.

ii. το μήκος της πλευράς ΔE του τριγώνου $A\Delta E$.

β) Αν $A\Delta = 9$ να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΔE του τριγώνου $A\Delta E$.



Λύση

α) i. Εφόσον $AB = 3$ και $A\Delta = 6$, το σημείο B είναι το μέσο της πλευράς $A\Delta$ του ΔDE .

Η $B\Gamma$ είναι παράλληλη στη ΔE , άρα το σημείο Γ είναι το μέσο της πλευράς $A\Delta E$ του τριγώνου $A\Delta E$.
Επομένως $A\Delta E = 2 \cdot A\Gamma = 2 \cdot 4 = 8$.

ii. Εφόσον το τμήμα $B\Gamma$ ενώνει τα B και Γ , μέσα των πλευρών $A\Delta$ και $A\Delta E$ του τριγώνου $A\Delta E$, είναι

$$B\Gamma = \frac{\Delta E}{2} \Leftrightarrow \Delta E = 2B\Gamma = 2 \cdot 5,6 = 11,2.$$

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια, οπότε $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{A\Delta E}{A\Gamma} = \frac{\Delta E}{B\Gamma} \Rightarrow \frac{9}{3} = \frac{\Delta E}{5,6} \Leftrightarrow 3 = \frac{\Delta E}{5,6} \Leftrightarrow \Delta E = 16,8$

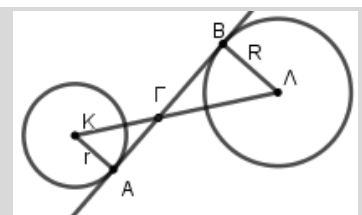
20880. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στους κύκλους (K, r) και (Λ, R) στα σημεία A και B αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Έστω Γ το σημείο τομής της διακέντρου $K\Lambda$ και της ευθείας (ε).

α) Να αιτιολογήσετε ότι οι γωνίες $\hat{K}\hat{A}\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Lambda}\hat{B}\hat{\Gamma}$ είναι ορθές.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $K\Lambda\Gamma$ και $\Lambda B\Gamma$ είναι όμοια

γ) Ποια είναι η θέση του σημείου Γ στη διάκεντρο $K\Lambda$ όταν η ακτίνα R είναι διπλάσια της ακτίνας r ;



Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής. Οπότε $KA \perp AB$ και $\Lambda B \perp AB$.

Άρα, οι γωνίες $\hat{K}\hat{A}\hat{\Gamma}$ και $\hat{\Lambda}\hat{B}\hat{\Gamma}$ είναι ορθές.

β) Τα τρίγωνα $K\Lambda\Gamma$ και $\Lambda B\Gamma$ έχουν $\hat{K}\hat{\Gamma}\hat{A} = \hat{\Lambda}\hat{\Gamma}\hat{B}$ (ως κατακορυφήν) και $\hat{K}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{\Lambda}\hat{B}\hat{\Gamma} = 90^\circ$.

Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

γ) Τα τρίγωνα $K\Lambda\Gamma$ και $\Lambda B\Gamma$ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\widehat{\Gamma A} = \widehat{\Gamma B}$	$\widehat{A\Gamma} = \widehat{B\Gamma}$	$\widehat{A\hat{K}\Gamma} = \widehat{B\hat{L}\Gamma}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΚΑΓ	ΚΑ	ΚΓ	ΑΓ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΛΒΓ	ΑΒ	ΛΓ	ΒΓ

Έτσι έχουμε: $\frac{KA}{AB} = \frac{KG}{LG} \Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{KG}{LG} \Leftrightarrow \frac{r}{2r} = \frac{KG}{LG} \Leftrightarrow \frac{KG}{LG} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow LG = 2KG.$

Επομένως, το σημείο Γ διαιρεί εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ σε λόγο $\frac{1}{2}$.

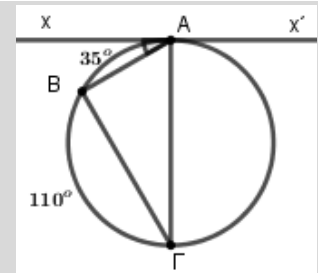
21015. Στο διπλανό σχήμα η xx' είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α και επιπλέον ισχύουν:

$\widehat{BAx} = 35^\circ$ και $\widehat{B\Gamma} = 110^\circ$.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας Γ.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Να αποδείξετε ότι η χορδή ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου.



Λύση

α) Η γωνία $\widehat{BAx}$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η γωνία Γ είναι η εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής, επομένως θα είναι ίσες, άρα $\widehat{BAx} = \widehat{\Gamma} = 35^\circ$.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ, η γωνία του Α είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο, που βαίνει στο τόξο ΒΓ. Άρα το μέτρο της θα ισούται με το μισό του του μέτρου του τόξου στο οποίο βαίνει. Δηλαδή

$$\widehat{A} = \frac{1}{2} \widehat{B\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot 110^\circ = 55^\circ.$$

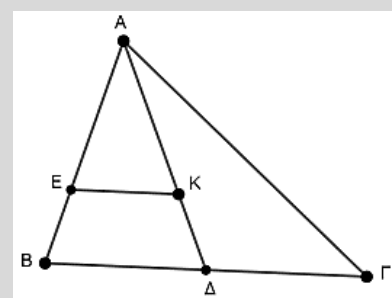
γ) Η χορδή ΑΓ θα είναι διάμετρος του κύκλου αν η εγγεγραμμένη γωνία ΑΒΓ είναι ορθή. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 55^\circ + 35^\circ = 90^\circ$ οπότε $\widehat{B} = 90^\circ$, επομένως η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου.

21021. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, η ΑΔ είναι διάμεσος και το σημείο Κ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου. Από το Κ φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Δίνεται ότι η $AB = 6$.

α) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{AK}{AD}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΚ και ΑΒΔ είναι όμοια.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του ΑΕ.



Λύση

α) Το βαρύκεντρο ενός τριγώνου απέχει από την κορυφή τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου, οπότε

$$AK = \frac{2}{3} AD \Leftrightarrow \frac{AK}{AD} = \frac{2}{3}.$$

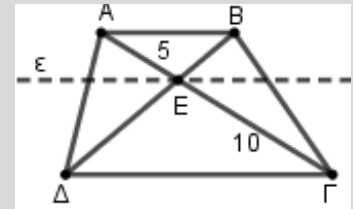
β) Από τα δεδομένα η $EK \parallel BD$ οπότε τα τρίγωνα ΑΕΚ και ΑΒΔ έχουν:

- $\widehat{AEK} = \widehat{ABD}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων EK, BD που τέμνονται από την ΑΒ.
- $\widehat{AKE} = \widehat{ADB}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων KE, DB που τέμνονται από την ΑΔ.

Δηλαδή τα δύο τρίγωνα έχουν από δύο γωνίες ίσες μία προς μία, επομένως είναι όμοια.

γ) Λόγω του ερωτήματος (β), τα τρίγωνα ΑΕΚ και ΑΒΔ είναι όμοια, άρα θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες οπότε θα ισχύει: $\frac{AE}{AB} = \frac{AK}{AD} \Leftrightarrow \frac{AE}{6} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3AE = 12 \Leftrightarrow AE = 4$.

21842. Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και Ε το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ. Αν ΑΕ=5 και ΕΓ=10 :



α) Να αποδείξετε ότι $\frac{BE}{ED} = \frac{1}{2}$.

β) Αν ΒΔ = 12 να βρείτε το μήκος των τμημάτων ΒΕ και ΔΕ.

γ) Να δικαιολογήσετε ότι $\frac{AB}{\Delta\Gamma} = \frac{1}{2}$.

Λύση

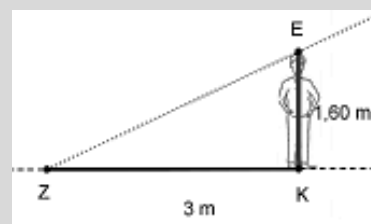
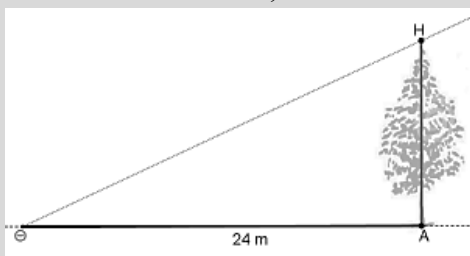
α) Οι παράλληλες ευθείες ΑΒ//Ε//ΔΓ τέμνονται από τις ευθείες ΑΓ και ΒΔ. Από το θεώρημα του Θαλή είναι $\frac{BE}{AE} = \frac{ED}{EG} \Leftrightarrow \frac{BE}{ED} = \frac{AE}{EG} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

β) Είναι $\frac{BE}{ED} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow ED = 2BE$ και $BD = 12 \Leftrightarrow BE + ED = 12 \Leftrightarrow BE + 2BE = 12 \Leftrightarrow 3BE = 12 \Leftrightarrow BE = 4$
 άρα $ED = 2 \cdot 4 = 8$.

γ) Σύμφωνα με το Θεώρημα του Θαλή είναι $\frac{AE}{BE} = \frac{EG}{ED} \Leftrightarrow \frac{AE}{EG} = \frac{BE}{ED}$. Ακόμη $\angle AEB = \angle GED$ ως κατακορυφήν, άρα τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, επομένως είναι όμοια. Άρα $\frac{AB}{\Delta\Gamma} = \frac{AE}{EG} = \frac{1}{2}$.

22246. Το φως όταν κινείται μέσα σε ομογενή υλικά, διαδίδεται ευθύγραμμα και για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε ευθείες γραμμές (φωτεινές ακτίνες) για να αναπαραστήσουμε το ίχνος της διαδρομής του. Όταν η πηγή του φωτός βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση, όπως ο ήλιος, οι φωτεινές ακτίνες θεωρούνται παράλληλες μεταξύ τους. Ένας άνθρωπος ύψους 1,6m ρίχνει κάποια στιγμή σκιά μήκους 3m. Την ίδια χρονική στιγμή και πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο ένα δέντρο ρίχνει σκιά μήκους 24m.

Τα σχέδια της εικόνας που ακολουθεί αναπαριστούν τις δυο περιπτώσεις. Να θεωρήσετε ότι οι ΖΕ και ΘΗ αναπαριστούν τις φωτεινές ακτίνες του ήλιου και είναι παράλληλες μεταξύ τους, τα τμήματα ΚΖ, ΑΘ αναπαριστούν τις σκιές του δέντρου και του ανθρώπου και είναι παράλληλα μεταξύ τους και, τα δε τμήματα ΚΕ, ΑΗ αναπαριστούν τα αντίστοιχα ύψη τους, τα οποία είναι κάθετα στα ΚΖ, ΑΘ.



α) i. Είναι όμοια τα τρίγωνα ΖΚΕ και ΘΑΗ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Να βρείτε το ύψος του δέντρου.

(Σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)

β) Η γραπτή λύση που έδωσε ένας μαθητής στο ερώτημα α)i. είναι η ακόλουθη: «Τα δύο τρίγωνα ΖΚΕ και ΑΘΗ είναι όμοια γιατί είναι ορθογώνια».

Ο καθηγητής του μαθητή του είπε ότι ο συλλογισμός του έχει λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή;

Λύση

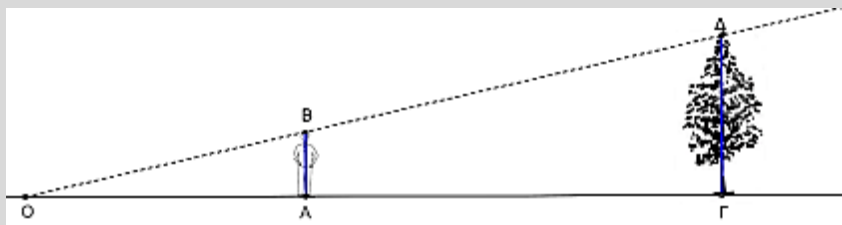
α) i. Από τα δεδομένα έχουμε ότι τα τμήματα ΚΕ και ΑΗ είναι κάθετα στα τμήματα ΚΖ και ΑΘ αντίστοιχα, άρα $K = A = 90^\circ$. Οπότε η ακτίνα ΖΕ του ήλιου, το ύψος ΚΕ και η σκιά ΚΖ του ανθρώπου σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο ΖΚΕ με $K = 90^\circ$, αλλά και η ακτίνα ΘΗ του ήλιου, το ύψος ΑΗ και η σκιά ΑΘ του δέντρου σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο ΘΑΗ με $A = 90^\circ$. Από τα δεδομένα έχουμε ότι οι ΖΕ και ΘΗ είναι παράλληλες μεταξύ τους, όπως και οι ΚΖ, ΑΘ είναι παράλληλες μεταξύ τους, οπότε θα είναι $Z = \Theta$, ως οξείες γωνίες με πλευρές παράλληλες. Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΚΕ και ΘΑΗ είναι όμοια, γιατί έχουν μια οξεία γωνία τους ίση.

ii. Αφού τα τρίγωνα ΖΚΕ και ΘΑΗ είναι όμοια, θα έχουν και τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή θα ισχύει: $\frac{AH}{KE} = \frac{AO}{KZ} = \frac{OH}{ZE} \Rightarrow \frac{AH}{1,6} = \frac{24}{3} \Leftrightarrow \frac{AH}{1,6} = 8 \Leftrightarrow AH = 8 \cdot 1,6 = 12,8$.

Άρα το ύψος του δέντρου είναι 12,8 m.

β) Ο μαθητής συμπεραίνει ότι τα τρίγωνα είναι όμοια με επιχειρήματα ότι είναι ορθογώνια χωρίς να τεκμηριώνει το γιατί είναι ορθογώνια καθώς και τα στοιχεία εκείνα που αποτελούν τις προϋποθέσεις κριτηρίου για την ομοιότητα δύο ορθογωνίων τριγώνων, όπως αυτό της ισότητας μιας οξείας γωνίας τους.

22247. Ένα δέντρο ρίχνει κάποια στιγμή σε οριζόντιο έδαφος σκιά ΓΟ μήκους 12 m. Την ίδια στιγμή, ένας μαθητής, ύψους 1,75 m, για να βρει το ύψος του δέντρου στέκεται σε ένα σημείο πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο έτσι ώστε, η σκιά του ΑΟ και η σκιά ΓΟ του δέντρου να βρίσκονται στην ίδια ευθεία και να έχουν το ίδιο άκρο Ο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ο μαθητής μετράει τη σκιά του εκείνης της χρονικής στιγμής και βρίσκει ότι έχει μήκος 2 m. Να θεωρήσετε ότι τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ του σχεδίου αναπαριστούν τα ύψη του μαθητή και του δέντρου αντίστοιχα και ότι είναι κάθετα στην ΟΓ.



α) i. Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι όμοια. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Να βρείτε το ύψος του δέντρου. (σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)

β) Η γραπτή λύση που έδωσε ένας μαθητής στο ερώτημα α)ii. είναι η παρακάτω.

$$\text{«α)ii. } \frac{AB}{OA} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\Lambda} \Leftrightarrow \frac{1,75}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{12-2} \Leftrightarrow 2\Gamma\Delta = 1,75 \cdot 10 \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \frac{17,5}{2} = 8,75 \text{ m} \text{»}$$

Είναι η λύση του μαθητή σωστή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) i. Από τα δεδομένα έχουμε ότι τα τμήματα ΑΒ, ΓΔ που αναπαριστούν τα ύψη του μαθητή και του δέντρου αντίστοιχα είναι κάθετα στην ΟΓ. Οπότε τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ορθογώνια με $\angle OAB = \angle O\Gamma\Delta = 90^\circ$ και έχουν την οξεία γωνία $\angle O$ κοινή, άρα θα είναι όμοια γιατί ως ορθογώνια έχουν μια οξεία γωνία τους ίση.

ii. Αφού τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή

$$\text{ισχύει: } \frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{OB}{OD} = \frac{OA}{O\Gamma} \Rightarrow \frac{1,75}{\Gamma\Delta} = \frac{2}{12} \Leftrightarrow 2\Gamma\Delta = 1,75 \cdot 12 = 21 \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 10,5$$

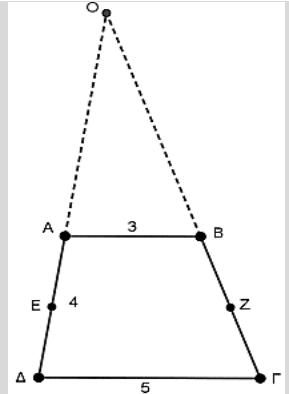
Άρα το ύψος του δέντρου είναι 10,5 m.

β) Στο ερώτημα α)ii στη γραπτή του λύση ο μαθητής χρησιμοποιεί λάθος αναλογία μεταξύ των πλευρών των όμοιων τριγώνων, και ως εκ τούτου η λύση του είναι «λάθος».

3^ο Θέμα

21014. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τραπέζιο ABΓΔ με AB // ΓΔ και E, Z τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα. Αν AB = 3, ΔΓ = 5, ΑΔ = 4 και οι μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ, ΒΓ τέμνονται στο Ο, τότε:

- α) να υπολογίσετε το μήκος του ΕΖ.
 β) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΕΖ είναι όμοια.
 γ) να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΟΑ.



Λύση

α) Στο τραπέζιο ABΓΔ τα E, Z είναι τα μέσα των δύο μη παραλλήλων πλευρών, οπότε η ΕΖ θα είναι η διάμεσός του. Άρα θα ισούται με το

$$\text{ημιάθροισμα των δύο βάσεων. Δηλαδή } EZ = \frac{AB + \Delta\Gamma}{2} = \frac{3 + 5}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

β) Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ενός τραpezίου είναι παράλληλη στις βάσεις του, άρα η AB // ΕΖ οπότε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΕΖ έχουν:

- ΟΑΒ = ΟΕΖ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΕΖ που τέμνονται από την ΟΕ.
- ΟΒΑ = ΟΖΕ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΒΑ, ΖΕ που τέμνονται από την ΟΖ.

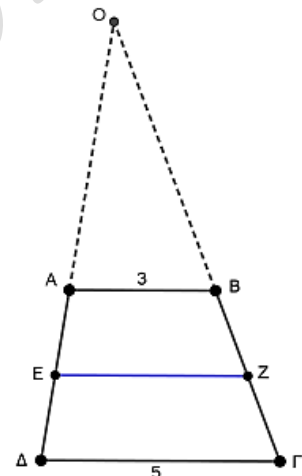
Δηλαδή τα δύο τρίγωνα έχουν από δύο γωνίες ίσες μία προς μία, επομένως είναι όμοια.

γ) Λόγω του ερωτήματος (β), τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΕΖ είναι όμοια, άρα θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες οπότε θα ισχύει:

$$\frac{OA}{OE} = \frac{AB}{EZ} \quad (1).$$

Από τα δεδομένα η AB = 3 και λόγω του ερωτήματος (α) η EZ = 4. Το E είναι μέσο της ΑΔ και η ΑΔ = 4, οπότε το AE = 2. Έτσι το OE = OA + AE = OA + 2.

$$\text{Επομένως η (1) γράφεται: } \frac{OA}{OA + 2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4OA = 3OA + 6 \Leftrightarrow 4OA - 3OA = 6 \Leftrightarrow OA = 6$$



Μετρικές σχέσεις Πυθαγόρειο Θεώρημα 2^ο Θέμα

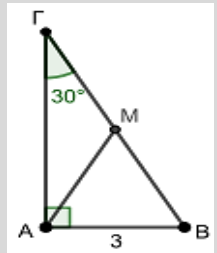
18203. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και $AB = 3$.

Το M είναι μέσο της υποτείνουσας του $AB\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 6$.

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AM .

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της κάθετης πλευράς $A\Gamma$ του $AB\Gamma$.



Λύση

α) Επειδή $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας Γ είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας του $AB\Gamma$. Άρα $AB = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2AB = 6$.

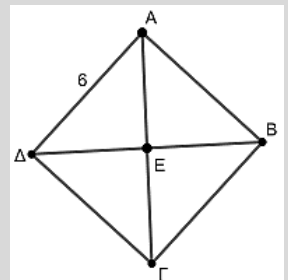
β) Το AM ενώνει την κορυφή A της ορθής γωνίας του $AB\Gamma$ με το μέσο M της υποτείνουσας. Άρα η AM είναι η διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Επομένως η AM ισούται με το μισό της $B\Gamma$. Άρα $AM = 3$.

γ) Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε: $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 \Leftrightarrow A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27 \Leftrightarrow A\Gamma = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

18207. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο με περίμετρο 24 και $A\Delta = 6$.

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$ και να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

β) Αν επιπλέον $A\Gamma = 6\sqrt{2}$ να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο.



Λύση

α) Σε κάθε παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές τους ανά δύο είναι ίσες. Επομένως στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $A\Delta = B\Gamma$ και $AB = \Gamma\Delta$. Άρα $B\Gamma = A\Delta = 6$. Η περίμετρος του $AB\Gamma\Delta$ είναι 24, άρα $AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + A\Delta = 24 \Leftrightarrow 12 + AB + \Gamma\Delta = 24$ ή $AB + \Gamma\Delta = 12$. Όμως $AB = \Gamma\Delta$, άρα $AB = \Gamma\Delta = 12 : 2 = 6$. Το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, γιατί $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = A\Delta = 6$, δηλαδή έχει όλες τις πλευρές του ίσες.

β) Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι $A\Gamma^2 = (6\sqrt{2})^2 = 72$ και $A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 = 6^2 + 6^2 = 36 + 36 = 72$, άρα $A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 = A\Gamma^2$. Σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος το $A\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με $\Delta = 90^\circ$. Άρα ο ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, εφόσον μια γωνία του είναι ορθή.

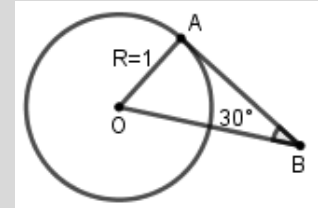
18306. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $R = 1$.

Θεωρούμε το εφαπτόμενο τμήμα BA ώστε $\widehat{OBA} = 30^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε ότι η γωνία $\widehat{OAB}$ είναι ορθή.

β) Να αποδείξετε ότι $OB = 2$.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος BA .



Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής, οπότε $BA \perp OA$. Άρα, η γωνία $\widehat{OAB}$ είναι ορθή.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB είναι $\widehat{OBA} = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά OA ισούται με το μισό της υποτείνουσας OB . Έτσι έχουμε $OA = \frac{OB}{2}$.

Οπότε: $OB = 2OA = 2 \cdot 1 = 2$.

γ) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο OAB έχουμε:

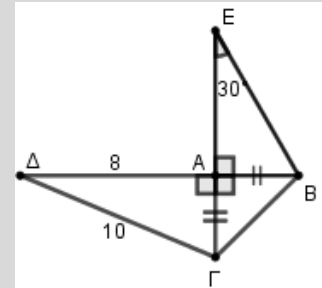
$$BA^2 = OB^2 - OA^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 \Leftrightarrow BA = \sqrt{3}.$$

18314. Στο σχήμα δίπλα είναι $AB = AG$,

$AD = 8$, $DG = 10$ και $\widehat{AEB} = 30^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $AG = 6$.

β) Να υπολογίσετε την υποτείνουσα BE του ορθογωνίου τριγώνου ABE .



Λύση

α) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ADG έχουμε:

$$AG^2 = DG^2 - AD^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Leftrightarrow AG = \sqrt{36} = 6.$$

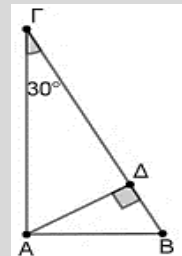
β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABE είναι $\widehat{AEB} = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά AB ισούται με το μισό της υποτείνουσας BE . Έτσι έχουμε: $AB = \frac{BE}{2} \Leftrightarrow BE = 2AB = 12$.

19272. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) με

$B\Gamma = 8$ και $\widehat{\Gamma} = 30^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $AB = 4$.

β) Φέρουμε το ύψος AD . Να υπολογίσετε το τμήμα BD .



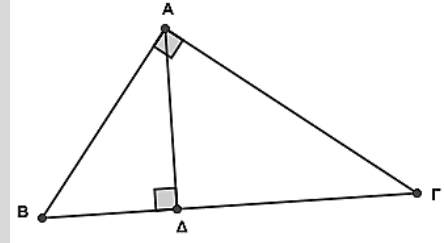
Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\widehat{\Gamma} = 30^\circ$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά AB ισούται με το μισό της υποτείνουσας $B\Gamma$, δηλαδή: $AB = \frac{B\Gamma}{2} = 4$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, το τετράγωνο της κάθετης πλευράς AB ισούται με το γινόμενο της

υποτείνουσας ΒΓ επί την προβολή της κάθετης πλευράς ΑΒ στην υποτείνουσα, δηλαδή την ΒΔ. Οπότε:
 $AB^2 = BG \cdot BD \Leftrightarrow 4^2 = 8 \cdot BD \Leftrightarrow 8BD = 16 \Leftrightarrow BD = 2$.

19646. Το τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$, $BG = 10$ και $AG = 8$.
 Αν ΑΔ είναι το ύψος του από την κορυφή Α να υπολογίσετε το μήκος:



- α) της πλευράς ΑΒ.
 β) του τμήματος ΔΓ.
 γ) του τμήματος ΔΒ.

Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$AB^2 = BG^2 - AG^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Leftrightarrow AB = \sqrt{36} = 6.$$

β) Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $AG^2 = BG \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow 8^2 = 10\Delta\Gamma \Leftrightarrow \Delta\Gamma = \frac{64}{10} = 6,4$.

γ) Λόγω του ερωτήματος β) είναι: $\Delta B = BG - \Delta\Gamma = 10 - 6,4 = 3,6$.

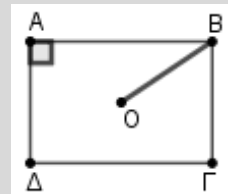
19647. Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος το σημείο Ο είναι το κέντρο του. Επίσης η ΟΒ = 5 και η ΑΔ = 6.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της ΒΔ.

β) Πόσο είναι το μήκος της διαγωνίου ΑΓ;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.



Λύση

α) Επειδή το Ο είναι το μέσο της διαγωνίου ΒΔ, ισχύει ότι $B\Delta = 2 \cdot OB = 2 \cdot 5 = 10$.

β) Σε κάθε ορθογώνιο οι διαγώνιες είναι ίσες μεταξύ τους, συνεπώς $AG = B\Delta = 10$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

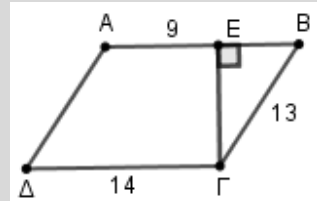
$$AB^2 = B\Delta^2 - A\Delta^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \Leftrightarrow AB = \sqrt{64} = 8.$$

20083. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $BG = 13$ και $\Gamma\Delta = 14$.

Αν ΓΕ είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο Γ στην πλευρά ΑΒ και το τμήμα ΑΕ έχει μήκος 9, να αποδείξετε ότι:

α) Το μήκος του τμήματος ΓΕ είναι 12.

β) Τα μήκη των πλευρών ΑΔ, ΔΓ και ΑΓ του τριγώνου ΑΔΓ είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί.



Λύση

α) $AB = \Gamma\Delta$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Για το μήκος ΒΕ έχουμε: $BE = AB - AE = 14 - 9 = 5$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΒ εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\Gamma E^2 = BG^2 - BE^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Leftrightarrow \Gamma E = \sqrt{144} = 12.$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΓ εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα για την υποτείνουσα του ΑΓ, έχουμε:

$$A\Gamma^2 = AE^2 + \Gamma E^2 = 9^2 + 12^2 \Leftrightarrow A\Gamma^2 = 81 + 144 = 225 \Leftrightarrow A\Gamma = \sqrt{225} = 15, \text{ άρα } A\Gamma = 15.$$

Η πλευρά ΑΔ του τριγώνου ΑΔΓ είναι ίση με την πλευρά ΒΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, οπότε ΑΔ=13.

Η πλευρά ΔΓ είναι ίση 14 από την υπόθεση και αποδείξαμε ότι ΑΓ=15. Επομένως, τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΔΓ είναι οι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί 13, 14 και 15.

20085. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος δίνεται ότι, ΑΓ=10 και ΒΓ=8.

Το τμήμα ΓΕ είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΑΒ με ΓΕ=6.

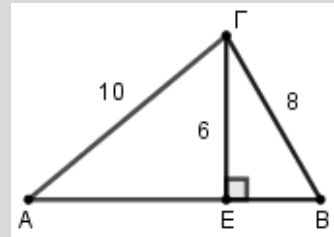
α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

Το τμήμα ΑΕ ονομάζεται προβολή της πλευράς στην πλευρά

Το τμήμα είναι η προβολή της πλευράς ΒΓ στην πλευρά

β) i. Να υπολογίσετε το τμήμα ΑΕ.

ii. Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΒ.



Λύση

α) Το τμήμα ΑΕ ονομάζεται προβολή της πλευράς ΑΓ στην πλευρά ΑΒ. Το τμήμα ΒΕ είναι η προβολή της πλευράς ΒΓ στην πλευρά ΑΒ.

β) i. Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΓΕ έχουμε:

$$ΑΕ^2 = ΑΓ^2 - ΓΕ^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \Leftrightarrow ΑΕ = \sqrt{64} = 8.$$

ii. Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΓΕΒ έχουμε:

$$ΒΕ^2 = ΒΓ^2 - ΓΕ^2 = 8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28 \Leftrightarrow ΒΕ = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

Για την πλευρά ΑΒ έχουμε: $ΑΒ = ΑΕ + ΕΒ = 8 + 2\sqrt{7}$.

20644. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι τραπέζιο με

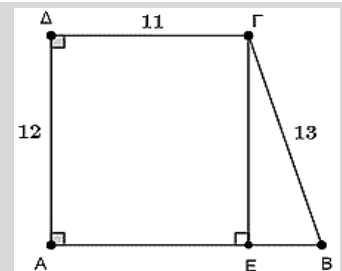
$\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, ΑΔ = 12, ΔΓ = 11,

ΒΓ = 13 και ΓΕ το ύψος του.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΓΕ είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι ΕΒ = 5.

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραpezίου.



Λύση

α) Το ΓΕ είναι ύψος του τραpezίου, άρα $\Gamma Ε Α = 90^\circ$. Το τετράπλευρο ΑΔΓΕ έχει τρεις γωνίες ορθές, συνεπώς είναι ορθογώνιο.

β) Επειδή το τετράπλευρο ΑΔΓΕ είναι ορθογώνιο έχουμε ότι $\Gamma Ε = ΑΔ = 12$, $ΑΕ = \Gamma Δ = 11$ και το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ορθογώνιο στο Ε, τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$ΕΒ^2 = ΒΓ^2 - ΓΕ^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 \Leftrightarrow ΕΒ = \sqrt{25} = 5.$$

γ) Η πλευρά ΑΒ του τραpezίου είναι $ΑΒ = ΑΕ + ΕΒ = 11 + 5 = 16$, άρα η περίμετρος του Τ θα είναι: $T = ΑΒ + ΒΓ + \Gamma Δ + ΔΑ = 16 + 13 + 11 + 12 = 52$.

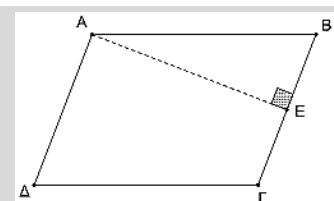
20662. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι

παραλληλόγραμμο, Ε είναι το μέσο της πλευράς του ΒΓ και η ΑΕ είναι κάθετη στην ΒΓ.

Αν ΑΒ = 13 και ΒΕ = 5, να βρείτε το μήκος:

α) της πλευράς ΑΔ του παραλληλογράμμου.

β) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΕ.



Λύση

α) Το σημείο E είναι το μέσο της πλευράς BΓ και $BE = 5$, επομένως $BΓ = 2BE = 2 \cdot 5 = 10$.
Οι απέναντι πλευρές ΑΔ, ΒΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι ίσες, άρα $ΑΔ = 10$.

β) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ. Είναι
 $AE^2 = AB^2 - BE^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Leftrightarrow AE = \sqrt{144} = 12$.

20841. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μία κάθετη πλευρά του είναι μεγαλύτερη από την άλλη κατά 3 cm. Αν οι δύο κάθετες πλευρές έχουν άθροισμα 21 cm, τότε :

α) Να δείξετε ότι οι κάθετες πλευρές έχουν μήκη 9 cm και 12 cm.

β) Να υπολογίσετε την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου.

Λύση

α) Το άθροισμα των κάθετων πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου είναι 21 cm και επειδή η μία κάθετη πλευρά του είναι 3 cm μεγαλύτερη από την άλλη, αν αφαιρέσω 3 από το άθροισμά τους και διαιρέσω με το 2 θα προκύψει το διπλάσιο της μικρής. Έτσι η μικρή κάθετη θα είναι ίση με $\frac{21-3}{2} = \frac{18}{2} = 9$ cm.

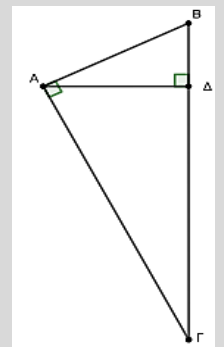
Οπότε η μεγαλύτερη κάθετη πλευρά είναι $9 + 3 = 12$ cm.

β) Αν x είναι το μήκος της υποτείνουσας του ορθογωνίου τριγώνου, τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουμε: $x^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \Leftrightarrow x = \sqrt{225} = 15$.

20842. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ οι προβολές ΔΒ και ΔΓ των κάθετων πλευρών ΑΒ και ΑΓ στην υποτείνουσα ΒΓ έχουν μήκη 3 cm και 12 cm αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος του ύψους ΑΔ προς την υποτείνουσα ΒΓ είναι 6.

β) Να υπολογίσετε τις κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου.



Λύση

α) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου προς την υποτείνουσα ΒΓ, τότε ΔΒ, ΔΓ είναι οι προβολές των κάθετων πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα προς την υποτείνουσα ΒΓ.

Ισχύει ότι $AD^2 = BD \cdot DC = 3 \cdot 12 = 36 \Leftrightarrow AD = 6$.

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45 \Leftrightarrow AB = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Όμοια από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$AG^2 = AD^2 + DC^2 = 6^2 + 12^2 = 36 + 144 = 180 \Leftrightarrow AG = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

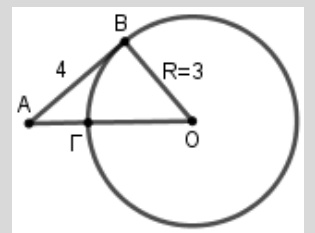
20871. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα

$R = 3$. Θεωρούμε το εφαπτόμενο τμήμα ΑΒ ώστε $AB = 4$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε ότι η γωνία ΟΒΑ είναι ορθή.

β) Να αποδείξετε ότι $OA = 5$.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΓ.



Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής, οπότε $AB \perp OB$. Άρα, η γωνία OBA είναι ορθή.

β) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο OBA έχουμε:

$$OA^2 = AB^2 + OB^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Leftrightarrow OA = 5.$$

γ) Από το σχήμα έχουμε: $AG = OA - OG = OA - R = 5 - 3 = 2$.

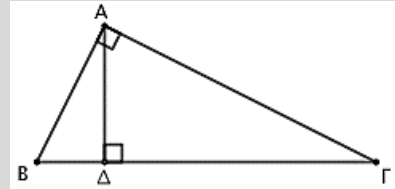
20873. Στο διπλανό σχήμα, το AD είναι το ύψος στην υποτείνουσα $B\Gamma$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$.

Αν είναι $B\Gamma = 10$ και $\Delta\Gamma = 8$, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος BD .

β) Να αποδείξετε ότι $AD = 4$.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς AB .



Λύση

α) Είναι: $BD = B\Gamma - \Delta\Gamma = 10 - 8 = 2$.

β) Για το ύψος AD στην υποτείνουσα $B\Gamma$ του ορθογωνίου τριγώνου ισχύει:

$$AD^2 = BD \cdot \Delta\Gamma = 2 \cdot 8 = 16 \Leftrightarrow AD = 4.$$

γ) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20 \Leftrightarrow AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

20876. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) του σχήματος,

το AD είναι ύψος και το AM διάμεσος.

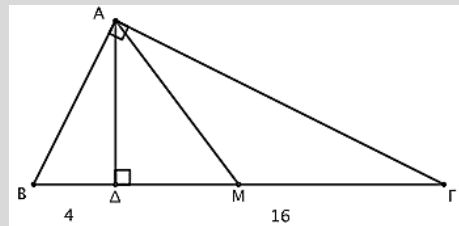
Αν $BD = 4$ και $\Delta\Gamma = 16$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AD = 8$

ii. $AB = 4\sqrt{5}$.

β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο AM .



Λύση

α) i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, το ύψος AD στην υποτείνουσα είναι:

$$AD^2 = BD \cdot \Delta\Gamma = 4 \cdot 16 = 64 \Leftrightarrow AD = 8.$$

ii. Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80 \Leftrightarrow AB = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

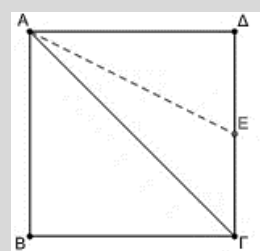
β) Η διάμεσος AM του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ισούται με το μισό της υποτείνουσας $B\Gamma$, δηλαδή

$$AM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{4 + 16}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

21064. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 2 και E είναι το μέσο της $\Delta\Gamma$.
Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Gamma = 2\sqrt{2}$.

β) $AE = \sqrt{5}$.



Λύση

α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ:

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8 \Leftrightarrow ΑΓ = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

β) Αφού το Ε είναι μέσο της ΔΓ θα είναι $ΔΕ = \frac{ΔΓ}{2} = 1$.

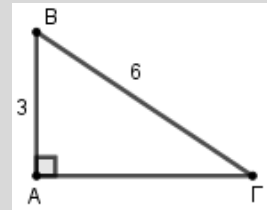
Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ:

$$ΑΕ^2 = ΑΔ^2 + ΔΕ^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5 \Leftrightarrow ΑΕ = \sqrt{5}.$$

21273. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος η ΑΒ = 3 και η ΒΓ = 6. Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της γωνίας Γ.

β) το μήκος της πλευράς ΑΓ.



Λύση

α) Από τα δεδομένα του σχήματος η κάθετη πλευρά ΑΒ είναι η μισή της υποτείνουσας ΒΓ, οπότε η απέναντι οξεία γωνία Γ θα ισούται με 30° .

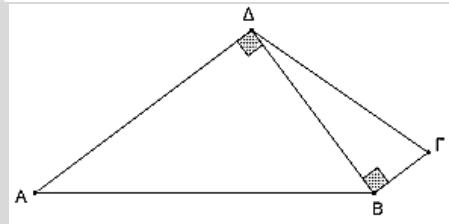
β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$ΑΓ^2 = ΒΓ^2 - ΑΒ^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27 \Leftrightarrow ΑΓ = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

22096. Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ορθογώνια με $\hat{A}\hat{B}\hat{D} = \hat{B}\hat{G}\hat{D} = 90^\circ$ και ΑΔ = 16, ΒΓ = 5 και ΓΔ = 13.

α) Να αποδείξετε ΒΔ = 12.

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΒ και την περίμετρο του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.



Λύση

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ έχουμε ότι

$$ΒΔ^2 = ΓΔ^2 - ΒΓ^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Leftrightarrow ΒΔ = 12.$$

β) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι

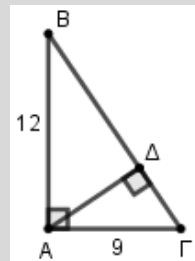
$$ΑΒ^2 = ΑΔ^2 + ΒΔ^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400 \Leftrightarrow ΑΒ = 20.$$

Η περίμετρος του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι $ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ = 20 + 5 + 13 + 16 = 54$.

20654. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές ΑΒ = 12 και ΑΓ = 9, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι ΒΓ = 15.

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΔΓ.



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225 \Leftrightarrow ΒΓ = 15.$$

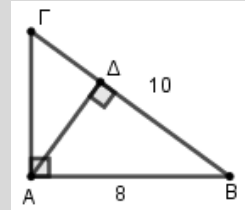
β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα, επομένως για την κάθετη πλευρά

$$ΑΓ \text{ έχουμε: } ΑΓ^2 = ΓΔ \cdot ΒΓ \Leftrightarrow 9^2 = 15 \cdot ΓΔ \Leftrightarrow ΓΔ = \frac{81}{15} = \frac{27}{5} = 5,4.$$

22240. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $ΑΒ = 8$ και $ΒΓ = 10$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της κάθετης πλευράς $ΑΓ$.

β) Έστω $ΑΔ$ το ύψος στην υποτείνουσα $ΒΓ$. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής $ΔΒ$ της κάθετης πλευράς $ΑΒ$ πάνω στη $ΒΓ$.



Λύση

α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Έχουμε διαδοχικά:

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 \Leftrightarrow ΑΓ^2 = ΒΓ^2 - ΑΒ^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 \Leftrightarrow ΑΓ = 6.$$

β) Για την προβολή $ΔΒ$ της κάθετης πλευράς $ΑΒ$ πάνω στην υποτείνουσα $ΒΓ$ έχουμε:

$$ΑΒ^2 = ΔΒ \cdot ΒΓ \Leftrightarrow 8^2 = ΔΒ \cdot 10 \Leftrightarrow ΔΒ = \frac{64}{10} = 6,4.$$

4^ο Θέμα

18352. Έστω O το κέντρο ρόμβου $ΑΒΓΔ$ με μήκη διαγωνίων $ΔΒ = 6$ και $ΑΓ = 8$.

α) Να υπολογίσετε την πλευρά του ρόμβου.

β) Θεωρούμε σημεία E και Z εσωτερικά των τμημάτων $ΟΑ$ και $ΟΓ$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $ΕΟ = ΟΖ$.

i. Πόσο πρέπει να είναι το μήκος καθενός από τα τμήματα $ΕΟ$ και $ΟΖ$ ώστε το τετράπλευρο $ΕΒΖΔ$ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου $ΕΒΖΔ$ του προηγούμενου ερωτήματος.

Λύση

α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΑΒ$.

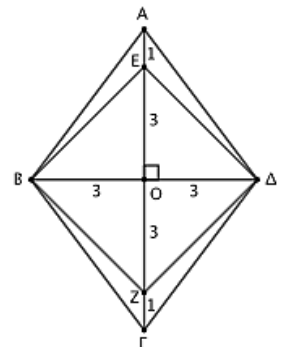
Έχουμε διαδοχικά:

$$ΑΒ^2 = ΟΑ^2 + ΟΒ^2 \Leftrightarrow ΑΒ^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Leftrightarrow ΑΒ = 5.$$

β) i. Για τα σημεία E και Z ισχύει $ΕΟ = ΟΖ$, οπότε οι διαγώνιοι $ΒΔ$ και $ΕΖ$ του τετράπλευρου $ΕΒΖΔ$ διχοτομούνται στο O και τέμνονται κάθετα. Συνεπώς, το $ΕΒΖΔ$ είναι τετράγωνο αν και μόνο αν $ΕΖ = ΒΔ = 6$, δηλαδή $ΕΟ = ΟΖ = 3$.

ii. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΕΒ$.

Έχουμε διαδοχικά: $ΕΒ^2 = ΟΕ^2 + ΟΒ^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18 \Leftrightarrow ΕΒ = \sqrt{18} = 2\sqrt{3}$.



18160. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΒΓ = 8\sqrt{3}$, το ύψος του $ΒΔ$ και το μέσο M της $ΒΓ$.

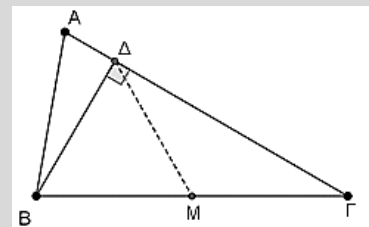
α) Να αποδείξετε ότι $ΔΜ = 4\sqrt{3}$.

β) Αν $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και $ΑΒ = 8$:

i. Να υπολογίσετε την $Μ\hat{Δ}Γ$.

ii. Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{ΒΔ}{ΒΓ}$.

iii. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος $ΑΔ$.



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΔΓ$, η $ΔΜ$ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε ισούται με το μισό

της, δηλαδή $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

β) i. Είναι $\Delta M = M\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $M\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές, άρα $\Gamma = M\Delta\Gamma = 30^\circ$.

ii. Το ορθογώνιο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ έχει τη γωνία $\Gamma = 30^\circ$ επομένως η απέναντι κάθετη πλευρά από την γωνία αυτή θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή: $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow \frac{B\Delta}{B\Gamma} = \frac{1}{2}$.

iii. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε: $AB^2 = B\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 \Leftrightarrow \Delta\Gamma^2 = AB^2 - B\Delta^2 = 8^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 64 - 48 = 16 \Leftrightarrow \Delta\Gamma = \sqrt{16} = 4$.

19519.α) Το Ε είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

Επιπλέον ισχύει ότι $EA = E\Gamma = E\Delta = EB = 6,5$.

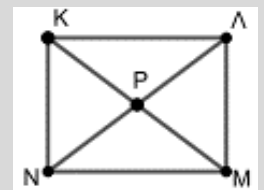
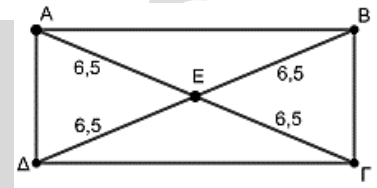
i. Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

ii. Αν επιπλέον δίνεται ότι η πλευρά $A\Delta = 5$, να βρείτε το μήκος της πλευράς AB του $AB\Gamma\Delta$.

β) Μια ταμπέλα έχει το σχήμα του τετραπλεύρου $K\Lambda MN$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Σας δίνεται ότι οι διαγώνιοι του KM και ΛN τέμνονται στο P και έχει $PK = P\Lambda = PM = 2,5$.

Ένας συμμαθητής σας, ο Κώστας γνωρίζει επιπλέον το μήκος του PN και βγάζει, σωστά, το συμπέρασμα ότι η ταμπέλα είναι σχήματος ορθογωνίου. Πόσο είναι το μήκος του PN ;



Λύση

α) i. Το Ε είναι το μέσο των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, εφόσον από την υπόθεση έχουμε ότι $AE = E\Gamma = 6,5$ και $BE = E\Delta = 6,5$. Άρα το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Επιπλέον $A\Gamma = AE + E\Gamma = 6,5 + 6,5 = 13$ και $B\Delta = BE + E\Delta = 6,5 + 6,5 = 13$. Άρα οι διαγώνιοι του $AB\Gamma\Delta$ είναι ίσες. Επομένως το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο με ίσες διαγωνίους, άρα είναι ορθογώνιο.

ii. Εφόσον το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο οι γωνίες του είναι ορθές. Άρα το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ορθογώνιο με Δ ορθή και υποτείνουσα $B\Delta$. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Delta$:

$$B\Delta^2 = \Delta\Gamma^2 + AB^2 \Leftrightarrow AB^2 = B\Delta^2 - \Delta\Gamma^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 \Leftrightarrow AB = \sqrt{144} = 12.$$

β) Το μήκος του PN είναι ίσο με 2,5. Ο Κώστας που το γνωρίζει εφαρμόζει αναλόγως το συμπέρασμα του α) i. Έτσι αποδεικνύει ότι το $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο, εφόσον $PK = P\Lambda = PM = PN$.

19843. Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο με διαγώνιο $ZE = 60$ και το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με πλευρά $AB = 16$.

Αν είναι $ZA = \Gamma E = 20$, τότε:

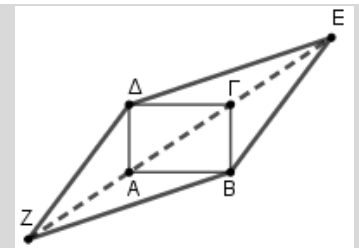
α) Να αποδείξετε ότι $ZA = A\Gamma = \Gamma E$.

β) Να υπολογίσετε:

i. το μήκος της πλευράς $B\Gamma$ και την περίμετρο του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$,

ii. τη διαγώνιο ΔB του παραλληλογράμμου ΔEBZ .

Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



Λύση

α) Είναι $ZE = ZA + AG + GE$ με $ZE = 60$ και $ZA = GE = 20$,
 οπότε έχουμε $60 = 20 + AG + 20 \Leftrightarrow AG = 60 - 40 = 20$.
 Άρα $ZA = AG = GE = 20$.

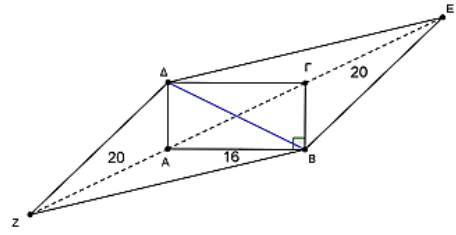
β) i. Αφού το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο θα έχει τις
 γωνίες του ορθές, οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με
 $\angle B = 90^\circ$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$AG^2 = AB^2 + BG^2 \Leftrightarrow BG^2 = AG^2 - AB^2 \Leftrightarrow BG^2 = 20^2 - 16^2 = 200 - 256 = 144 \Leftrightarrow BG = \sqrt{144} = 12.$$

Αφού το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, άρα είναι και παραλληλόγραμμο, θα έχει τις απέναντι
 πλευρές του ίσες δηλαδή $AD = BG = 12$ και $AG = AB = 16$. Επομένως η περίμετρος Π του $AB\Gamma\Delta$ είναι:
 $\Pi = 2AB + 2BG = 2 \cdot 16 + 2 \cdot 12$ ή $\Pi = 56$.

ii. Αφού το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, θα έχει ίσες τις διαγωνίους του, δηλαδή $AG = \Delta B$ με
 $AG = 20$ από το α) ερώτημα, άρα $\Delta B = 20$ η οποία είναι διαγώνιος και του παραλληλογράμμου ΔEBZ .



20849. Σε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά 12, AD είναι το ύψος του και E ,
 Z τα μέσα των πλευρών του AB και AG αντίστοιχα.

Αν το τμήμα EH είναι κάθετο στην πλευρά $B\Gamma$, με H σημείο της $B\Gamma$,
 τότε :

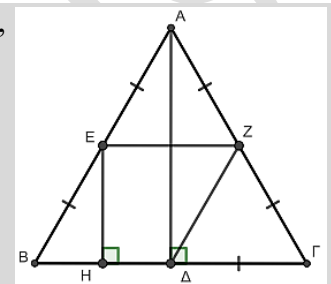
α) Να αποδείξετε ότι :

i. $EZ \parallel H\Delta$

ii. $EZ = 6$ και $H\Delta = 3$.

β) Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο $EZ\Delta H$ είναι παραλληλόγραμμο
 και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZ\Delta H$ είναι τραπέζιο, του οποίου η βάση του EZ είναι ίση
 με τη μία από τις μη παράλληλες πλευρές του τη ΔZ .



Λύση

α) i. Το τμήμα EZ ενώνει τα μέσα δυο πλευρών τριγώνου, άρα $EZ \parallel B\Gamma$, οπότε και $EZ \parallel H\Delta$.

ii. Το τμήμα EZ ενώνει τα μέσα δυο πλευρών τριγώνου, οπότε $EZ = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

Το AD είναι ύψος του ισόπλευρου τριγώνου προς την πλευρά $B\Gamma$, άρα είναι και διάμεσος.

Οπότε $BD = \Delta\Gamma = 6$. Επιπλέον, $EH \perp B\Gamma$ και $AD \perp B\Gamma$, άρα $EH \parallel AD$, ως κάθετες στη ίδια ευθεία $B\Gamma$ σε
 διαφορετικά σημεία της. Στο τρίγωνο $AB\Delta$ το E είναι το μέσο της πλευράς AB και $EH \parallel AD$, άρα το H

είναι το μέσο της πλευράς $B\Delta$. Οπότε $H\Delta = HB = \frac{B\Delta}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

β) Στο τετράπλευρο $EZ\Delta H$ οι δύο απέναντι πλευρές του, οι EZ και $H\Delta$, είναι παράλληλες. Θα εξετάσουμε
 αν είναι παράλληλες και οι πλευρές EH και ΔZ . Έχουμε $EH \parallel AD$ (από ερώτημα αii). Η ευθεία ΔZ που
 είναι διαφορετική από την AD δεν μπορεί να είναι παράλληλη στην EH , γιατί από το σημείο Δ μόνο μια
 ευθεία παράλληλη προς την EH μπορούμε να φέρουμε. Έχουμε ήδη $AD \parallel EH$, οπότε η ΔZ δεν είναι
 παράλληλη στην EH . Το τετράπλευρο $EZ\Delta H$ έχει μόνο ένα ζευγάρι παράλληλων πλευρών, άρα δεν είναι
 παραλληλόγραμμο. γ) Όπως αποδείχθηκε στο β) ερώτημα το τετράπλευρο $EZ\Delta H$ έχει ένα ζευγάρι
 απέναντι πλευρών του παράλληλες και ένα ζευγάρι μη παράλληλες, οπότε το τετράπλευρο $EZ\Delta H$ είναι
 τραπέζιο. Από το ερώτημα αii) έχουμε $EZ = \frac{B\Gamma}{2} = 6$.

Για το τμήμα ΔZ έχουμε ότι $\Delta Z = \frac{AG}{2} = 6$, ως διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου προς την υποτείνουσα.

Άρα στο τραπέζιο $EZ\Delta H$ ισχύει $EZ = \Delta Z = 6$.

20850. Στο διπλανό σχήμα το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές και η μεγάλη βάση του AB είναι διπλάσια από την πλευρά $A\Delta$.

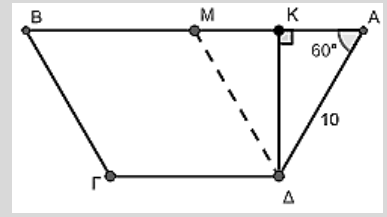
Επιπλέον η γωνία A είναι 60° και η πλευρά $A\Delta$ είναι 10 cm.

α) Να υπολογίσετε το ύψος ΔK του τραpezίου.

β) Αν M είναι το μέσο της AB να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΔMA είναι ισόπλευρο.

ii. Το τετράπλευρο $\Delta MB\Gamma$ είναι ρόμβος.



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔKA η μία οξεία γωνία του είναι 60° , άρα $\angle A\Delta K = 30^\circ$, οπότε η κάθετη πλευρά που είναι απέναντι από τη γωνία των 30° θα είναι μισή από την υποτείνουσα. Δηλαδή $KA = \frac{A\Delta}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΔKA έχουμε :

$$\Delta K^2 = A\Delta^2 - AK^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75 \Leftrightarrow \Delta K = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}.$$

β) i. Έστω M το μέσο της βάσης AB , τότε $AM = \frac{AB}{2} = \frac{2A\Delta}{2} = A\Delta = 10$.

Το τρίγωνο ΔMA είναι ισοσκελές με γωνία της κορυφής $A = 60^\circ$, άρα το τρίγωνο ΔMA είναι ισόπλευρο με $\Delta M = 10$ και $\angle DMA = 60^\circ$.

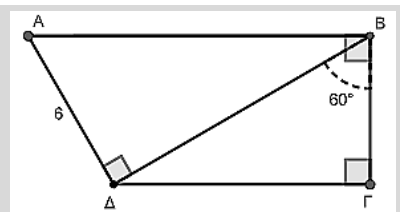
ii. Στο τετράπλευρο $\Delta MB\Gamma$ οι πλευρές ΔM και $B\Gamma$ είναι ίσες αφού $B\Gamma = A\Delta = 10$ (ισοσκελές τραπέζιο) και $\Delta M = 10$. Επιπλέον $B = A = 60^\circ$ (ως προσκείμενες στη βάση AB του ισοσκελούς τραpezίου) και $\angle DMA = 60^\circ$, οπότε $\Delta M // B\Gamma$ αφού σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες όταν τέμνονται από την BM . Δηλαδή $\Delta M // B\Gamma$ και $\Delta M = B\Gamma$ οπότε το τετράπλευρο $\Delta MB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον $\Delta M = MB = 10$, οπότε το παραλληλόγραμμο $\Delta MB\Gamma$ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, επομένως είναι ρόμβος.

20852. Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος με $AB // \Gamma\Delta$, είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$. Η πλευρά $A\Delta$ είναι 6 και η διαγώνιος $B\Delta$ είναι κάθετη στην πλευρά $A\Delta$ και σχηματίζει με την πλευρά $B\Gamma$ γωνία $\angle \hat{B}\Gamma\Delta = 60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι η βάση AB του τραpezίου είναι 12.

β) Να υπολογίσετε τη διαγώνιο $B\Delta$.

γ) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$ είναι $27 + 3\sqrt{3}$.



Λύση

α) Δίνεται ότι $B = 90^\circ$ και $\angle B\Gamma\Delta = 60^\circ$, άρα $\angle \Delta BA = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ η πλευρά $A\Delta$ βρίσκεται απέναντι από γωνία 30° , οπότε ισούται με το μισό της υποτείνουσας AB . Άρα $A\Delta = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 2A\Delta = 12$.

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $A\Delta B$ έχουμε

$$\Delta B^2 = AB^2 - A\Delta^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108 \Leftrightarrow \Delta B = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}.$$

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta \Gamma B$ δίνεται ότι $\angle B\Gamma\Delta = 60^\circ$, άρα η άλλη οξεία γωνία του τριγώνου ισούται με 30° , δηλαδή $\angle B\Delta\Gamma = 30^\circ$. Η πλευρά $B\Gamma$ βρίσκεται απέναντι από γωνία 30° στο ορθογώνιο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$,

$$\text{άρα } B\Gamma = \frac{B\Delta}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

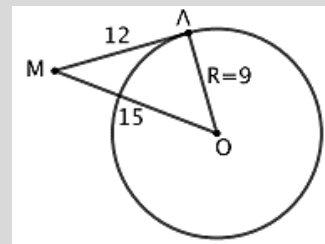
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ έχουμε

$$\Delta \Gamma^2 = \Delta B^2 - B\Gamma^2 = 108 - (3\sqrt{3})^2 = 108 - 27 = 81 \Leftrightarrow \Delta \Gamma = \sqrt{81} = 9.$$

γ) Η περίμετρος του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι ίση με $AB + ΒΓ + ΓΔ + ΑΔ = 12 + 3\sqrt{3} + 9 + 6 = 27 + 3\sqrt{3}$.

20877.α) Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $AB = 12$ και $ΒΓ = 15$. Να υπολογίσετε την κάθετη πλευρά ΑΓ.

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι στο σχήμα, «το ΜΛ είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (Ο, R) στο σημείο του Λ». Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του μαθητή είναι αληθής και να τεκμηριώσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$ΑΓ^2 = ΒΓ^2 - ΑΒ^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81 \Leftrightarrow ΑΓ = 9.$$

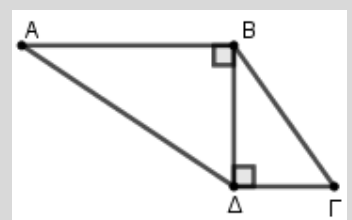
β) Το τρίγωνο ΜΛΟ έχει πλευρές $OM = 15$, $ΛΜ = 12$, $ΟΛ = 9$. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι το τρίγωνο με μήκη πλευρών 15, 12 και 9 είναι ορθογώνιο, δηλαδή οι αριθμοί 15, 12 και 9 αποτελούν πυθαγόρεια τριάδα. Επομένως, το τρίγωνο ΜΛΟ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά $OM = 15$ και $ΟΛΜ = 90^\circ$. Αφού το τμήμα ΜΛ είναι κάθετο στην ακτίνα ΟΛ στο σημείο του Λ, συμπεραίνουμε ότι το ΜΛ είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (Ο, R) στο σημείο του Λ. Συνεπώς, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι αληθής.

22097. Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ορθογώνια με $\hat{A}ΒΔ = \hat{B}ΔΓ = 90^\circ$ και $AB = 9$, $ΒΔ = 8$ και $ΓΔ = 6$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΓ.

β) Να αποδείξετε $ΑΔ = \sqrt{145}$.

γ) Να αποδείξετε $ΑΓ = 17$.



Λύση

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ έχουμε ότι

$$ΒΓ^2 = ΒΔ^2 + ΓΔ^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \Leftrightarrow ΒΓ = 10.$$

β) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε ότι

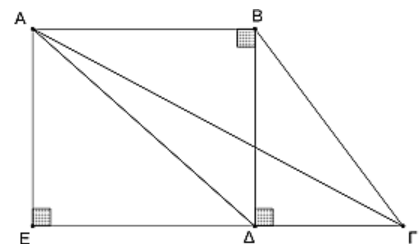
$$ΑΔ^2 = ΑΒ^2 + ΒΔ^2 = 9^2 + 8^2 = 81 + 64 = 145 \Leftrightarrow ΑΔ = \sqrt{145}.$$

γ) Φέρουμε την κάθετη από το σημείο Α προς τη ΓΔ, η οποία τέμνει την προέκταση της ΓΔ στο σημείο Ε.

Το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι ορθογώνιο, αφού έχει τρεις ορθές γωνίες. Επομένως $AB = ΔΕ = 9$ και $ΑΕ = ΒΔ = 8$ ως απέναντι πλευρές του ορθογωνίου ΑΒΔΕ.

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΕ έχουμε ότι $ΑΓ^2 = ΑΕ^2 + ΕΓ^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 \Leftrightarrow$

$$ΑΓ = \sqrt{289} = 17.$$

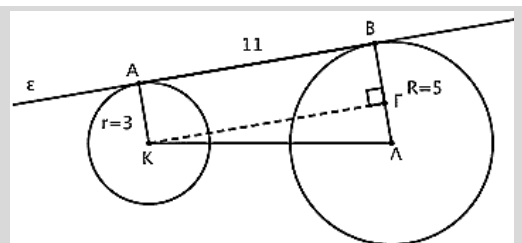


22203. Μια ευθεία ε εφάπτεται στους κύκλους (Κ, r) και (Λ, R) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Αν $r = 3$, $R = 5$, $AB = 11$ και $ΚΓ \perp ΒΛ$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΚ είναι ορθογώνιο.

β) Να υπολογίσετε:



- i. Τα μήκη των τμημάτων ΚΓ και ΓΛ.
 ii. Την απόσταση των κέντρων Κ και Λ.
 γ) Τι είδους τετράπλευρο θα είναι το ΑΒΛΚ όταν οι κύκλοι έχουν ίσες ακτίνες;

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής.

Οπότε, $AB \perp AK$ και $AB \perp BL$. Άρα, οι γωνίες KAB και LBA είναι ορθές.

Επίσης, από τα δεδομένα της άσκησης, δίνεται ότι $K\Gamma \perp BL$, οπότε η γωνία $K\Gamma B$ είναι ορθή. Επομένως, το τετράπλευρο $AB\Gamma K$ είναι ορθογώνιο, αφού έχει τρεις γωνίες ορθές.

β) i. Το τετράπλευρο $AB\Gamma K$ είναι ορθογώνιο, οπότε έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.

Άρα, $K\Gamma = AB = 11$ και $B\Gamma = AK = 3$.

Για το τμήμα $ΓΛ$ έχουμε: $ΓΛ = BL - B\Gamma = 5 - 3 = 2$.

ii. Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο $K\Gamma\Lambda$ έχουμε:

$$K\Lambda^2 = K\Gamma^2 + \Gamma\Lambda^2 = 11^2 + 2^2 = 121 + 4 = 125 \Leftrightarrow K\Lambda = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$$

γ) Όταν οι κύκλοι έχουν ίσες ακτίνες θα είναι $AK = BL$. Επίσης, είναι $AK \parallel BL$, αφού τα τμήματα AK και BL είναι κάθετα στην AB . Επομένως, το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ θα είναι ορθογώνιο, αφού είναι παραλληλόγραμμο και η γωνία του KAB είναι ορθή.

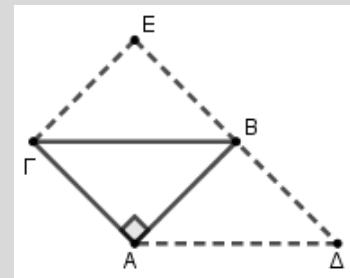
22245. Στο σχήμα που ακολουθεί, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$, $AB = A\Gamma = 14$ και B σημείο του τμήματος ΔE . Αν είναι $A\Delta \parallel \Gamma B$, $AB \parallel \Gamma E$ και $A\Gamma \parallel \Delta E$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι

i. το τετράπλευρο $A\Gamma B\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο,

ii. το τετράπλευρο $A\Gamma E B$ είναι τετράγωνο.

β) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τετραπλεύρου $A\Gamma B\Delta$ είναι ίση με $28(\sqrt{2} + 1)$.

**Λύση**

α) i. Έχουμε ότι $A\Gamma \parallel \Delta E$ (από τα δεδομένα), άρα $A\Gamma \parallel \Delta B$. Επίσης είναι $A\Delta \parallel B\Gamma$ από τα δεδομένα, άρα το τετράπλευρο $A\Gamma B\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

ii. Από τα δεδομένα έχουμε ότι $A\Gamma \parallel \Delta E$, άρα και $A\Gamma \parallel BE$ (1). Επίσης έχουμε ότι $AB \parallel \Gamma E$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $A\Gamma E B$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Το παραλληλόγραμμο $A\Gamma E B$ έχει δυο διαδοχικές πλευρές ίσες, τις AB και $A\Gamma$ από τα δεδομένα, και μια γωνία ορθή, την $\hat{A} = 90^\circ$ επίσης από τα δεδομένα. Άρα το $A\Gamma E B$ είναι τετράγωνο.

β) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές τις AB και $A\Gamma$ και υποτείνουσα τη $B\Gamma$. Οπότε, εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα, έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 14^2 + 14^2 = 2 \cdot 14^2 \Leftrightarrow B\Gamma = \sqrt{2 \cdot 14^2} = 14\sqrt{2}$$

Το τετράπλευρο $A\Gamma B\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι απέναντι πλευρές του θα είναι ίσες, δηλαδή $A\Gamma = \Delta B$ και $A\Delta = \Gamma B$. Η περίμετρος Π το τετραπλεύρου $A\Gamma B\Delta$ είναι:

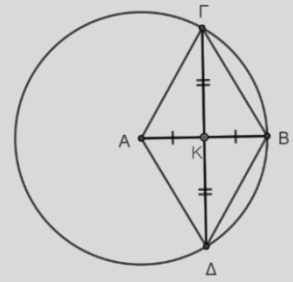
$$\Pi = A\Gamma + \Gamma B + B\Delta + \Delta A = 2A\Gamma + 2\Gamma B = 2 \cdot 14 + 2 \cdot 14\sqrt{2} = 28(\sqrt{2} + 1).$$

35390. Δίνεται κύκλος κέντρου Α και σημεία του Γ, Β και Δ έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Κ και είναι ΚΑ = ΚΒ και ΚΓ = ΚΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i.** $ΑΓ = ΑΒ = ΑΔ$,
- ii.** το τετράπλευρο ΑΓΒΔ είναι ρόμβος,
- iii.** $ΚΓΒ = 30^\circ$.

β) Αν είναι $ΓΒ = 4$, τότε να αποδείξετε ότι $ΓΔ = 4\sqrt{3}$.



Λύση

α) i. Είναι $ΑΓ = ΑΒ = ΑΔ$ σαν ακτίνες του ίδιου κύκλου,

ii. Οι διαγώνιες του τετραπλεύρου ΑΓΒΔ διχοτομούνται άρα το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

Επίσης $ΑΓ = ΑΔ$ από α) άρα είναι ρόμβος,

iii. Το ΑΓΒΔ είναι ρόμβος (από αii) ερώτημα) οπότε όλες οι πλευρές του είναι ίσες οπότε $ΑΓ = ΓΒ$. Όμως $ΑΓ = ΑΒ$ (από αi) ερώτημα), άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. Επομένως $ΑΓΒ = 60^\circ$, η διαγώνιος ΓΔ του ρόμβου διχοτομεί τη γωνία $ΑΓΒ$ οπότε $ΚΓΒ = 30^\circ$.

β) Έχουμε $ΚΒ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΓΒ}{2} = 2$.

Εφαρμόζουμε πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΚΒΓ και έχουμε

$$ΒΓ^2 = ΚΓ^2 + ΚΒ^2 \Leftrightarrow 16 = ΚΓ^2 + 4 \Leftrightarrow ΚΓ^2 = 12 \Leftrightarrow ΚΓ = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}. \text{ Άρα } ΓΔ = 2ΚΓ = 4\sqrt{3}.$$

35391. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος έχει τις κορυφές του Α, Β, Γ και Δ σε κύκλο με κέντρο το σημείο Ο, τη διαγώνιό του ΔΒ διάμετρο του κύκλου και τις γωνίες του $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$

ορθές. Έστω ότι είναι $Α\hat{B}\Delta = 30^\circ$ και $\Delta\hat{B}\Gamma = 45^\circ$.

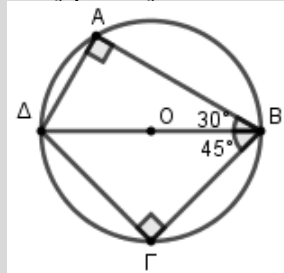
α) Να υπολογίσετε τη γωνία $Α\hat{\Delta}\Gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι $Β\hat{\Delta}\Gamma = \Delta\hat{B}\Gamma$.

γ) Αν είναι $ΒΔ = 2$, τότε να αποδείξετε ότι:

i. $ΑΔ = 1$

ii. $ΒΓ = \sqrt{2}$.



Λύση

α) Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχουμε : $\hat{A} + \hat{A}\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma} + \hat{A}\hat{\Delta}\Gamma = 360^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 75^\circ + 90^\circ + \hat{A}\hat{\Delta}\Gamma = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{\Delta}\Gamma = 360^\circ - 255^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{\Delta}\Gamma = 105^\circ$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΒ έχουμε :

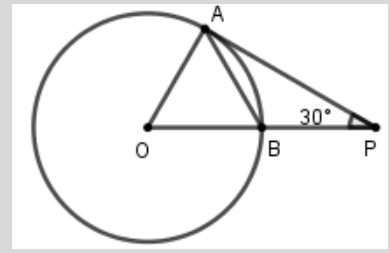
$$\Gamma\hat{\Delta}Β + \Gamma\hat{B}\Delta = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma\hat{\Delta}Β + 45^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma\hat{\Delta}Β = 45^\circ \text{ οπότε } Β\hat{\Delta}\Gamma = \Delta\hat{B}\Gamma.$$

γ) i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε $Α\hat{B}\Delta = 30^\circ$ οπότε $ΑΔ = \frac{ΒΔ}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε από το πυθαγόρειο θεώρημα:

$$\Delta Β^2 = \Delta \Gamma^2 + \Gamma Β^2 \Leftrightarrow 4 = 2Β\Gamma^2 \Leftrightarrow Β\Gamma^2 = 2 \Leftrightarrow ΒΓ = \sqrt{2}. \text{ (}\Delta \Gamma = \Delta Β \text{ από το ισοσκελές τρίγωνο } \Delta \Gamma Β\text{).}$$

35392. Από σημείο P εκτός κύκλου που έχει κέντρο O και ακτίνα ρ φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα PA και την PO που τέμνει τον κύκλο στο σημείο B. Έστω ότι είναι $\hat{A}PO = 30^\circ$.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. το σημείο B είναι το μέσο του OP,

ii. $\hat{B}AP = 30^\circ$.

β) Αν επιπλέον είναι $BP = 5$, να βρείτε την ακτίνα του κύκλου και το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος PA.

Λύση

α) i. Η PA είναι κάθετη στην OA στο A άρα το τρίγωνο OAP είναι ορθογώνιο.

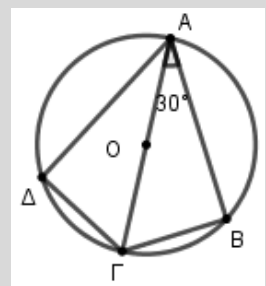
Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAP έχουμε $\hat{A}PO = 30^\circ$ οπότε $OA = \frac{OP}{2} \Leftrightarrow OP = 2OA \Leftrightarrow$

$OP = 2OB \Leftrightarrow OB + BP = 2OB \Leftrightarrow OB = BP$ άρα το B είναι το μέσο του OP.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAP η AB είναι διάμεσος στην υποτείνουσα άρα $AB = \frac{OP}{2} = BP$ οπότε το τρίγωνο ABP είναι ισοσκελές άρα $\hat{B}AP = \hat{A}PO = 30^\circ$.

β) Είναι $\rho = OA = OB = BP = 5$ οπότε $OP = 10$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο OAP έχουμε από το πυθαγόρειο θεώρημα $OP^2 = OA^2 + PA^2 \Leftrightarrow 100 = 25 + PA^2 \Leftrightarrow PA^2 = 75 \Leftrightarrow PA = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.

35393. Θεωρούμε τετράπλευρο ABΓΔ του οποίου οι κορυφές είναι σημεία κύκλου κέντρου O και ακτίνας ρ και οι πλευρές του BΓ και ΔΓ είναι ίσες. Η διαγώνιος ΑΓ του ABΓΔ είναι διάμετρος του κύκλου και να σχηματίζει με την πλευρά AB γωνία ίση με 30° , δηλαδή $\hat{B}AG = 30^\circ$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και AΔΓ είναι ορθογώνια.

β) Αν είναι $BΓ = ΔΓ = 4$,

i. να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 8$,

ii. να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΔ.

Λύση

α) Οι γωνίες $\hat{A}, \hat{B}$ είναι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλια άρα οι γωνίες είναι ορθές. Επομένως ότι τα τρίγωνα ABΓ και AΔΓ είναι ορθογώνια.

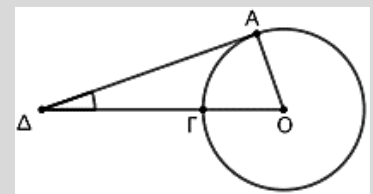
β) i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ έχουμε $\hat{B}AG = 30^\circ$ οπότε $BΓ = \frac{AG}{2} \Leftrightarrow AG = 2BΓ = 8$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο AΓΔ έχουμε από το πυθαγόρειο θεώρημα:

$$AG^2 = AD^2 + DG^2 \Leftrightarrow 64 = AD^2 + 16 \Leftrightarrow AD^2 = 48 \Leftrightarrow AD = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}.$$

35395. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και εξωτερικό σημείο του Δ. Φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΔΑ και τη διακεντρική ευθεία ΔΟ

η οποία τέμνει τον κύκλο στο σημείο Γ, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{Δ}AO$ είναι ορθή.

β) Αν $\hat{A}ΔO = 20^\circ$, τότε να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{A}OΔ$.

γ) Αν είναι $OA = 1$ και $OD = 2$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\hat{A}ΔO = 30^\circ$.

ii. Να υπολογίσετε το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΑΔ.

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής, οπότε $\Delta A \perp OA$. Άρα, η γωνία $\angle O\Delta A$ είναι ορθή.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $O\Delta A$ έχουμε $\angle A\hat{O} + \angle \hat{O}A = 90^\circ \Leftrightarrow 20^\circ + \angle \hat{O}A = 90^\circ \Leftrightarrow \angle \hat{O}A = 70^\circ$

γ) i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta O$ έχουμε ότι $OA = 1 = \frac{O\Delta}{2}$ άρα $\angle A\hat{O} = 30^\circ$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $O\Delta A$ έχουμε από το πυθαγόρειο θεώρημα:

$$O\Delta^2 = A\Delta^2 + OA^2 \Leftrightarrow 4 = A\Delta^2 + 1 \Leftrightarrow A\Delta^2 = 3 \Leftrightarrow A\Delta = \sqrt{3}.$$

3^ο Θέμα

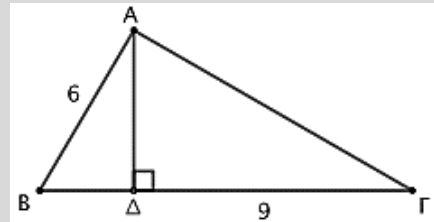
21151. Στο παρακάτω σχήμα, το $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$. Αν είναι $AB = 6$, $B\Gamma = 12$ και $\Delta\Gamma = 9$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $A\Delta = \sqrt{27}$.

ii. $A\Gamma = \sqrt{108}$.

β) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.



Λύση

α) i. Είναι: $B\Delta = B\Gamma - \Delta\Gamma = 12 - 9 = 3$

Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε:

$$A\Delta^2 = AB^2 - B\Delta^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27 \Leftrightarrow A\Delta = \sqrt{27}.$$

ii. Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ έχουμε:

$$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = (\sqrt{27})^2 + 9^2 = 27 + 81 = 108 \Leftrightarrow A\Gamma = \sqrt{108}.$$

β) Εξετάζουμε αν εφαρμόζεται το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο τρίγωνο $AB\Gamma$. Είναι:

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 6^2 + (\sqrt{108})^2 = 36 + 108 = 144 \text{ και } B\Gamma^2 = 12^2 = 144, \text{ άρα } AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2, \text{ οπότε το}$$

τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\angle A = 90^\circ$.

Γενίκευση πυθαγορείου θεωρήματος**2^ο Θέμα**

22110.Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 5, ΒΓ = 5 και ΑΓ = 7.

- α)** Να αποδείξετε ότι η γωνία ΒΑΓ του τριγώνου είναι οξεία.
β) Να απαντήσετε στα επόμενα ερωτήματα αιτιολογώντας την απάντησή σας.
i. Να χαρακτηρίσετε τις άλλες δύο γωνίες του τριγώνου ως οξεία ή αμβλεία.
ii. Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές και τις γωνίες του.

Λύση

α) Είναι $ΒΓ^2 = 5^2 = 25$ και $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$, άρα

$ΒΓ^2 < ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ επομένως η γωνία ΒΑΓ είναι οξεία.

β) i. Είναι $ΑΓ^2 = 7^2 = 49$ και $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$, άρα $ΑΓ^2 < ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ επομένως η γωνία ΑΒΓ είναι οξεία. Επειδή η πλευρά ΑΓ είναι η μεγαλύτερη, η γωνία ΑΒΓ είναι η μεγαλύτερη του τριγώνου, οπότε και η γωνία ΑΓΒ είναι οξεία.

ii. Από τα προηγούμενα ερωτήματα έχουμε ότι και οι τρεις γωνίες του τριγώνου είναι οξείες, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι οξυγώνιο. Όμως από τα δεδομένα έχουμε ότι $ΑΒ = ΒΓ = 5$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΑΓ. Συνεπώς το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο και ισοσκελές.

22111.Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 6, ΑΓ = 6 και ΒΓ = 9.

- α)** Να δείξετε ότι η γωνία ΑΒΓ του τριγώνου είναι οξεία.
β) Να απαντήσετε στα επόμενα ερωτήματα αιτιολογώντας την απάντησή σας.
i. Να χαρακτηρίσετε τη γωνία ΒΑΓ του τριγώνου, ως οξεία ή αμβλεία.
ii. Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές και τις γωνίες του.

Λύση

α) Είναι $ΑΓ^2 = 6^2 = 36$ και $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = 6^2 + 9^2 = 36 + 81 = 117$, άρα $ΑΓ^2 < ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ επομένως η γωνία ΑΒΓ είναι οξεία.

β) Είναι $ΒΓ^2 = 9^2 = 81$ και $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 6^2 + 6^2 = 36 + 36 = 72$, άρα $ΒΓ^2 > ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ επομένως η γωνία ΒΑΓ είναι αμβλεία.

γ) Από τα προηγούμενα ερωτήματα έχουμε ότι το τρίγωνο έχει μια αμβλεία γωνία, την ΒΑΓ άρα θα είναι αμβλυγώνιο. Όμως από τα δεδομένα έχουμε ότι $ΑΒ = ΑΓ = 6$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΒΓ. Συνεπώς το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο και ισοσκελές.

4^ο Θέμα

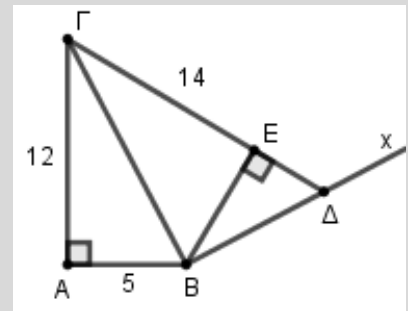
18172. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $AG = 12$ και $AB = 5$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 13$.

β) Φέρουμε ημιευθεία Bx κάθετη στην $B\Gamma$ στο σημείο B και παίρνουμε στην Bx σημείο Δ , τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = 14$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = 3\sqrt{3}$.

ii. Να υπολογίσετε την προβολή της $B\Delta$ στην $\Delta\Gamma$.



Λύση

α) Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Gamma$: $B\Gamma^2 = AB^2 + AG^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \Leftrightarrow B\Gamma = 13$.

β) i. Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$:

$$B\Delta^2 = \Delta\Gamma^2 - B\Gamma^2 = 14^2 - 13^2 = 196 - 169 = 27 \Leftrightarrow B\Delta = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

ii. Φέρνουμε BE κάθετη στην $\Delta\Gamma$, οπότε η προβολή του $B\Delta$ στην $\Delta\Gamma$ είναι η ΔE .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma B\Delta$ ισχύει ότι $B\Delta^2 = \Delta E \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow (3\sqrt{3})^2 = \Delta E \cdot 14 \Leftrightarrow \Delta E = \frac{27}{14}$.