

Οι πράξεις των πραγματικών αριθμών και οι ιδιότητες τους

Παράδειγμα

Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι:

$$\frac{\alpha}{4} = \frac{\beta}{8}$$

I. Να αποδείξετε ότι $2\alpha = \beta$

Λύση:

$$8 \frac{\alpha}{4} = 8 \frac{\beta}{8} \Rightarrow 2\alpha = \beta$$

ΕΚΠ(4, 8)=8
θα πολλαπλασιάσω
με το ΕΚΠ

II. Αν $\beta=2$ να βρείτε το α .

Λύση:

$$2\alpha = \beta \Rightarrow 2\alpha = 2 \Rightarrow \frac{2\alpha}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow \alpha = 1$$

III. Δίνεται η παράσταση $A = 4\alpha^2 - \beta^2$, όπου α, β είναι οι προηγούμενοι πραγματικοί αριθμοί.
Να αποδείξετε ότι $A = 0$

Λύση:

$$A = 4\alpha^2 - \beta^2 = 4\alpha^2 - (2\alpha)^2 = 4\alpha^2 - 4\alpha^2 = 0$$

Το ίδιο αποτέλεσμα θα προκύψει
αν αντικαταστήσω όπου $\alpha=1$ και
 $\beta=2$.

ΘΕΜΑ 1

Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$

I. Να αποδείξετε ότι $3x=2y$

II. Αν $y=6$ να βρείτε το x

ΘΕΜΑ 2

Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει ότι: $\frac{x}{15} = \frac{y}{5}$

I. Να αποδείξετε ότι $x = 3y$

II. Δίνεται η παράσταση $A = x^2 - 9y^2$, όπου x, y είναι οι προηγούμενοι πραγματικοί αριθμοί.

Να αποδείξετε ότι $A = 0$

**ΘΕΜΑ 3**

Θεωρούμε τον πραγματικό αριθμό x για τον οποίο ισχύει η ανισότητα $1 < x < 2$.

I. Να αποδείξετε ότι $3 < 3x < 6$

II. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή κάθε μίας από τις επόμενες παραστάσεις:

A) $3x + 2$

B) $3x - 3$

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τον πραγματικό αριθμό y για τον οποίο ισχύει η ανισότητα $3 < y < 4$.

I. Να αποδείξετε ότι $6 < 2y < 8$

II. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή κάθε μίας από τις επόμενες παραστάσεις:

A) $2y + 4$

B) $2y - 1$

ΘΕΜΑ 5

Θεωρούμε τον πραγματικό αριθμό x για τον οποίο ισχύει η ανισότητα $4 < x < 7$.

I. Να αποδείξετε ότι $12 < 3x < 21$

II. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή κάθε μίας από τις επόμενες παραστάσεις:

A) $-3x$

B) $-3x + 1$

Γ) $-3x - 2$

ΘΕΜΑ 6

Θεωρούμε τον πραγματικό αριθμό y για τον οποίο ισχύει η ανισότητα $1 < y < 3$.

I. Να αποδείξετε ότι $6 < 6y < 18$

II. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή κάθε μίας από τις επόμενες παραστάσεις:

A) $-6y$

B) $-6y + 2$

Γ) $-6y - 3$

Δ) $4 - 6y$

ΘΕΜΑ 7

Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύουν οι ανισότητες $1 < x < 4$ και $2 < y < 5$.

I. Να αποδείξετε ότι $3 < x + y < 9$

II. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή κάθε μίας από τις επόμενες παραστάσεις:

A) $-y + 2$

B) $x - y + 2$

Γ) $3x - y + 2$

Δ) $3x + 3y$

Απόλυτη τιμή

ΘΕΜΑ 8

Δίνονται οι παραστάσεις $A = |x - 2|$ και $B = |x + 2|$, όπου x πραγματικός αριθμός.

I. Να βρείτε την τιμή της παράστασης A στις επόμενες περιπτώσεις

A) $x=2$

B) $x=-2$

Γ) $x=3$

II. Να βρείτε την τιμή της παράστασης B στις επόμενες περιπτώσεις

A) $x=2$

B) $x=-2$

Γ) $x=-3$

III. Αν $x < -2$ να γράψετε τις παραστάσεις A και B χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

ΘΕΜΑ 9

I. Αν $x < 4$ να γράψετε την παράσταση $A = |x - 4|$

II. Αν $x > 2$ να γράψετε την παράσταση $B = |x - 2|$

III. Δίνεται η παράσταση $\Gamma = A + B$. Να αποδείξετε ότι $\Gamma = 2$.

ΘΕΜΑ 10

Για τον πραγματικό αριθμό α δίνεται $\alpha < 1$

I. Να αποδείξετε ότι $3\alpha - 4 < 0$

II. Να γράψετε την παράσταση $|3\alpha - 4| + 4$ χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.



Ρίζες

ΘΕΜΑ 11

I. Να υπολογίσετε τη δύναμη $3^{\frac{16}{4}}$

II. Να αιτιολογήσετε την ισότητα $(\sqrt{3})^8 = 81$

III. Να υπολογίσετε τη δύναμη $(\sqrt[4]{3})^8$

III. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $(\sqrt{3}\sqrt[4]{3})^8$

ΘΕΜΑ 12

I. Να υπολογίσετε τη δύναμη $2^{\frac{8}{2}}$

II. Να αιτιολογήσετε την ισότητα $(\sqrt{2})^8 = 16$

III. Να υπολογίσετε τη δύναμη $(\sqrt[3]{2})^{12}$

III. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $(\sqrt{2}\sqrt[4]{2})^8$

ΘΕΜΑ 13

I. Να υπολογίσετε τη δύναμη $7^{\frac{10}{5}}$

II. Να αιτιολογήσετε την ισότητα $(\sqrt{7})^4 = 49$

III. Να υπολογίσετε τη δύναμη $(\sqrt[4]{7})^{12}$

III. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $(\sqrt{7}(\sqrt[4]{7})^3)^4$

Εξισώσεις 1^{ου} βαθμού

Υπενθύμιση θεωρίας:

1. Αν $\theta > 0$, τότε:

$$|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta$$

2. $\alpha\beta=0$, τότε $\alpha=0$ ή $\beta=0$

Παράδειγμα

- $|x| = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$
- $|x| = 3 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -3$
- $|x + 1| = 2 \Leftrightarrow x + 1 = 2 \text{ ή } x + 1 = -2 \Leftrightarrow x = 2 - 1 = 1 \text{ ή } x = -2 - 1 = -3$
- $|x - 2| = 4 \Leftrightarrow x - 2 = 4 \text{ ή } x - 2 = -4$
- $|\text{παράσταση}| = 10 \Leftrightarrow \text{παράσταση} = 10 \text{ ή } \text{παράσταση} = -10$
- $x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$

ΘΕΜΑ 14

I. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $|x + 1| = 4$ επαληθεύεται για $x=3$, $x=-5$, $x=0$

II. Να λύσετε την εξίσωση $|x + 1| = 4$

ΘΕΜΑ 15

I. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $|x - 2| = 1$ επαληθεύεται για $x=3$, $x=-3$, $x=1$

II. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = 1$

ΘΕΜΑ 16

I. Να λύσετε την εξίσωση $2x - 6 = 0$

II. Να λύσετε την εξίσωση $x(2x - 6) = 0$

ΘΕΜΑ 17

I. Να λύσετε την εξίσωση $3x - 15 = 0$

II. Να λύσετε την εξίσωση $x(3x - 15) = 0$

ΘΕΜΑ 18

I. Να λύσετε την εξίσωση $3x - 9 = 0$

II. Να λύσετε την εξίσωση $2x - 8 = 0$

II. Να λύσετε την εξίσωση $(2x - 8)(3x - 9) = 0$

ΘΕΜΑ 19

I. Να λύσετε την εξίσωση $5x - 20 = 0$

II. Να λύσετε την εξίσωση $4x - 16 = 0$

II. Να λύσετε την εξίσωση $(5x - 20)(4x - 16) = 0$

ΘΕΜΑ 20

I. Να λύσετε την εξίσωση $3x - 18 = 3$

II. Να λύσετε την εξίσωση $|3x - 18| = 3$

ΘΕΜΑ 21

I. Να λύσετε την εξίσωση $|x| = 10$

II. Να λύσετε την εξίσωση $|x| + 2 = 12$

ΘΕΜΑ 22

I. Να λύσετε την εξίσωση $|x| = 5$

II. Να λύσετε την εξίσωση $|x| + 6 = 11$

III. Να λύσετε την εξίσωση $2|x| + 7 = 17$

ΘΕΜΑ 23

I. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 1| - 1 = 5$

II. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 1| + 6 = 12$

III. Να λύσετε την εξίσωση $2|x - 1| - 5 = 7$

ΘΕΜΑ 24

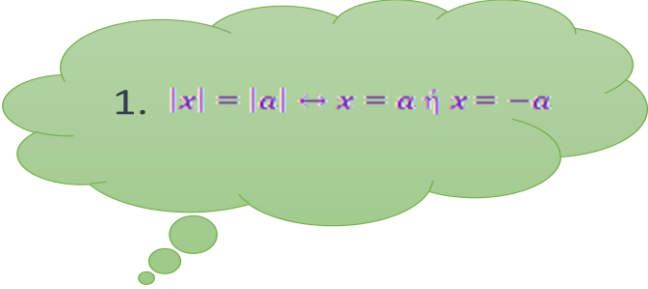
I. Να λύσετε την εξίσωση $2(\omega - 1) = \omega$

II. Να λύσετε την εξίσωση $2(|x - 2| - 1) = |x - 1|$

ΘΕΜΑ 25

I. Να λύσετε την εξίσωση $4(3\omega - 1) - 6 = 2\omega$

II. Να λύσετε την εξίσωση $4(3|x - 1| - 1) - 6 = 2|x - 1|$



1. $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a \text{ ή } x = -a$

Παράδειγμα



- $|x + 1| = |3| \Leftrightarrow x + 1 = 3 \text{ ή } x + 1 = -3 \Leftrightarrow x = 3 - 1 = 2 \text{ ή } x = -3 - 1 = -4$
- $|2x + 1| = |x - 1| \Leftrightarrow 2x + 1 = x - 1 \text{ ή } 2x + 1 = -(x - 1)$
 $\Leftrightarrow 2x - x = -1 - 1 \text{ ή } 2x + 1 = -x + 1 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } 3x = 2 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = \frac{2}{3}$

ΘΕΜΑ 26

I. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 1| = |x - 3|$

II. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό που έχει την ίδια απόσταση στον άξονα των πραγματικών αριθμών από τους αριθμούς 1 και 3.

ΘΕΜΑ 27

I. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 6| = |x - 10|$

II. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό που έχει την ίδια απόσταση στον άξονα των πραγματικών αριθμών από τους αριθμούς 6 και 10.

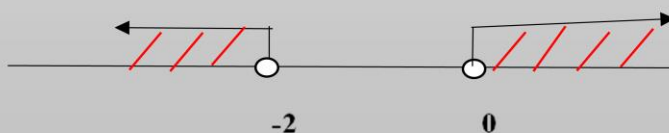
Ανισώσεις 1^{ου} βαθμού

1. Αν $\theta > 0$, τότε:

$$|x| \geq \theta \rightarrow x \geq \theta \text{ ή } x \leq -\theta$$

Παράδειγμα

- $|x+1| > 1 \Leftrightarrow x+1 > 1 \text{ ή } x+1 < -1 \Leftrightarrow x > 0 \text{ ή } x < -2$



- $|x-2| > 3 \Leftrightarrow x-2 > 3 \text{ ή } x-2 < -3 \Leftrightarrow x > 5 \text{ ή } x < -1$

Παρατήρηση:

$|x| = \text{αρνητικός}$, είναι αδύνατη

Παράδειγμα

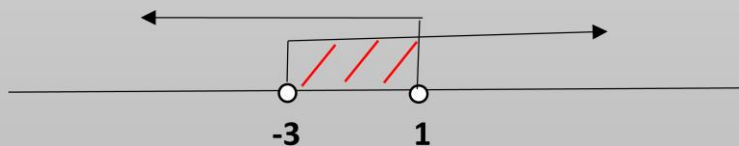
$|x| = -5$ αδύνατη, ένας μη αρνητικός δε γίνεται να είναι ίσος με αρνητικό

2. Αν $\theta > 0$, τότε:

$$|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$$

Παράδειγμα

- $|x+1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x+1 < 2 \Leftrightarrow -2-1 < x < 2-1 \Leftrightarrow -3 < x < 1$



Πως σχετίζεται η εξίσωση με την ανίσωση ως προς τη λύση

Εξίσωση	Ανίσωση	Ανίσωση με απόλυτο
$-2x - 3 = 3$	$-2x - 3 > 3$	$ -2x - 3 > 3$
$-2x = 3 + 3$	$-2x > 3 + 3$	$-2x - 3 > 3$ ή $-2x - 3 < -3$
$-2x = 6$	$-2x > 6$	$-2x > 6$ ή $-2x < 0$
$\frac{-2x}{-2} = \frac{6}{-2}$	$\frac{-2x}{-2} < \frac{6}{-2}$	$\frac{-2x}{-2} < \frac{6}{-2}$ ή $\frac{-2x}{-2} > 0$
$x = -3$	$x < -3$	$x < -3$ ή $x > 0$

όταν διαιρώ με αρνητικό αλλάζει η φορά

όταν διαιρώ με αρνητικό αλλάζει η φορά

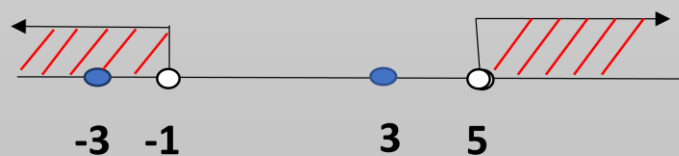
Εξίσωση	Ανίσωση	Ανίσωση με απόλυτο
$-x - 1 = 3$	$-x - 1 < 3$	$ -x - 1 < 3$
$-x = 3 + 1$	$-x < 3 + 1$	$-3 < -x - 1 < 3$
$-x = 4$	$-x < 4$	$1 - 3 < -x - 1 + 1 < 1 + 3$
$\frac{-1x}{-1} = \frac{4}{-1}$	$\frac{-1x}{-1} > \frac{4}{-1}$	$\frac{-2}{-1} > \frac{-1x}{-1} > \frac{4}{-2}$
$x = -4$	$x > -4$	$2 > x > -2$ ή $-2 < x < 2$

όταν διαιρώ με αρνητικό αλλάζει η φορά

όταν διαιρώ με αρνητικό αλλάζει η φορά

Πως βρίσκω τις κοινές λύσεις μιας εξίσωσης και μιας ανίσωσης;

- $|x| = 3 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -3$
- $|x - 2| > 3 \Leftrightarrow x - 2 > 3 \text{ ή } x - 2 < -3 \Leftrightarrow x > 5 \text{ ή } x < -1$



Το -3 αποτελεί κοινή λύση γιατί ανήκει στο ζωγραφισμένο διάστημα, ενώ το 3 δεν αποτελεί λύση, καθώς είναι εκτός αυτού του διαστήματος. Άρα η μόνη κοινή λύση είναι το -3.

ΘΕΜΑ 28

I. Να λύσετε την εξίσωση: $|x| = 2$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 2| > 1$

III. Υπάρχουν κοινές λύσεις της εξίσωσης και της ανίσωσης; Αν υπάρχουν, να βρείτε τις κοινές λύσεις.

ΘΕΜΑ 29

I. Να λύσετε την εξίσωση: $|x + 1| = 3$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $|x + 2| \geq 1$

III. Υπάρχουν κοινές λύσεις της εξίσωσης και της ανίσωσης; Αν υπάρχουν, να βρείτε τις κοινές λύσεις.

ΘΕΜΑ 30

I. Να λύσετε την εξίσωση: $|x - 4| = 8$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 2| \leq 4$

III. Υπάρχουν κοινές λύσεις της εξίσωσης και της ανίσωσης; Αν υπάρχουν, να βρείτε τις κοινές λύσεις.

ΘΕΜΑ 31

I. Να λύσετε την εξίσωση: $|3x - 1| = |x + 2|$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $|x + 1| > 1$

III. Υπάρχουν κοινές λύσεις της εξίσωσης και της ανίσωσης; Αν υπάρχουν, να βρείτε τις κοινές λύσεις.

ΘΕΜΑ 32

I. Να λύσετε την εξίσωση: $|x - 1| = |3x - 2|$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| > 3$

III. Υπάρχουν κοινές λύσεις της εξίσωσης και της ανίσωσης; Αν υπάρχουν, να βρείτε τις κοινές λύσεις.

Τι κάνω όταν η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού;

▷ $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$

Αρχικά βρίσκουμε την διακρίνουσα $\Delta = b^2 - 4a\gamma$

• Αν $\Delta > 0$, τότε έχω δύο ρίζες (λύσεις) άνισες τις: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

• Αν $\Delta = 0$, τότε έχω μια διπλή ρίζα (λύση): $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$

• Αν $\Delta < 0$, τότε δεν έχω λύση (αδύνατη στους πραγματικούς)

▷ Άθροισμα – Γινόμενο Ριζών

• άθροισμα: $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ • γινόμενο: $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$

$ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{\gamma}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$

ΘΕΜΑ 33

I. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 5x + 6 = 0$

II. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 4 = 0$

III. Να λύσετε την εξίσωση: $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 4) = 0$

ΘΕΜΑ 33

i) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 5x + 6 = 0$

$a=1$
 $b=-5$
 $\gamma=6$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 \Rightarrow \Delta = 25 - 24 \Rightarrow \Delta = 1$

$x_1 = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_1 = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{6}{2} \Rightarrow x_1 = 3$

$x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_2 = \frac{5 - 1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{4}{2} \Rightarrow x_2 = 2$

Παρατήρηση 1: $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = +25$, διότι $(-) \cdot (-) = +$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 4 = 0$

1ος τρόπος

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 0x - 4 = 0$

$a=1$
 $b=0$
 $\gamma=-4$

$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) \Rightarrow \Delta = 16$

$x_1 = \frac{-0 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_1 = \frac{\pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = 2$

$x_2 = \frac{-0 - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_2 = \frac{-4}{2} \Rightarrow x_2 = -2$

Παρατήρηση 2: Η μορφή είναι $ax^2 + bx + \gamma$
↓
δεν υπάρχει, βάζω 0x.

Παρατήρηση 3: Επειδή $\Delta = 16 > 0$ η εξίσωση έχει 2 ρίζες αληθινές που τις βρίσκουμε με τον τύπο:
 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

2ος Τρόπος

Παρατήρηση 4: Με παραγοντοποίηση καταργούμε την εξίσωση με τη μέθοδο διαφοράς τετραγώνων.

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$
 $x = -2$ ή $+2$

Παρατήρηση 5: $a \cdot b = 0$, τότε $a=0$ ή $b=0$

iii) Να λυθεί $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 4) = 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0$ ή $x^2 - 4 = 0$
 $x = 3$ ή 2 $x = 2$ ή -2

ΘΕΜΑ 34I. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 2x + 1 = 0$ II. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 9 = 0$ III. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 3x + 4 = 0$ IV. Να λύσετε την εξίσωση: $(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 9)(x^2 - 3x + 4) = 0$

ΘΕΜΑ 35

I. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 6x + 9 = 0$

II. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 16 = 0$

III. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 + 4 = 0$

III. Να λύσετε την εξίσωση: $(x^2 - 6x + 9)(x^2 - 16)(x^2 + 4) = 0$

ΘΕΜΑ 36

I. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1)

II. Να λύσετε την εξίσωση: $4x^2 - 4 = 0$ (2)

III. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο αριθμός που είναι λύση και των δύο εξισώσεων (1) και (2).

ΘΕΜΑ 37

I. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{6} = 0$ (1)

II. Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - 8 = 0$ (2)

III. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο αριθμός που είναι λύση και των δύο εξισώσεων (1) και (2).

ΘΕΜΑ 38

Μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού έχει δύο ρίζες άνισες $x_1 = 1$ και $x_2 = 4$

I. Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ των ριζών της εξίσωσης.

II. Να βρείτε το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της εξίσωσης.

III. Να γράψετε αυτή την εξίσωση που έχει ρίζες $x_1 = 1$ και $x_2 = 4$

ΘΕΜΑ 39

Μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού έχει δύο ρίζες άνισες $x_1 = -1$ και $x_2 = 3$

I. Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ των ριζών της εξίσωσης.

II. Να βρείτε το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της εξίσωσης.

III. Να γράψετε αυτή την εξίσωση που έχει ρίζες $x_1 = -1$ και $x_2 = 3$

ΘΕΜΑ 40

Μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού έχει δύο ρίζες άνισες $x_1 = -4$ και $x_2 = -2$

I. Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ των ριζών της εξίσωσης.

II. Να βρείτε το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της εξίσωσης.

III. Να γράψετε αυτή την εξίσωση που έχει ρίζες $x_1 = -4$ και $x_2 = -2$

ΘΕΜΑ 41

Δίνεται η εξίσωση 2^{ου} βαθμού $x^2 - 7x + 6 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

I. Να βρείτε τη διακρίνουσα.

II. Να εξηγήσετε γιατί η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, τις x_1 και x_2 .

III. Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ των ριζών της εξίσωσης.

IV. Να βρείτε το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της εξίσωσης.

ΘΕΜΑ 42

Δίνεται η εξίσωση 2^{ου} βαθμού $x^2 - x - 6 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

I. Να βρείτε τη διακρίνουσα.

II. Να εξηγήσετε γιατί η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, τις x_1 και x_2 .

III. Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ των ριζών της εξίσωσης.

IV. Να βρείτε το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της εξίσωσης.

ΘΕΜΑ 43

Δίνεται η εξίσωση 2^{ου} βαθμού $x^2 + 3x + 2 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

I. Να βρείτε τη διακρίνουσα.

II. Να εξηγήσετε γιατί η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, τις x_1 και x_2 .

III. Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ των ριζών της εξίσωσης.

IV. Να βρείτε το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της εξίσωσης.

Θέμα 43

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

i) Βρείτε: Δ

ii) Εξήγησε γιατί έχει 2 ρίζες άνισες, x_1 και x_2

iii) Βρείτε το $\rightarrow$ άθροισμα $S = x_1 + x_2$

iv) Βρείτε το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$

i) $a=1$
 $\beta=3$
 $\gamma=2$
 $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \Rightarrow \Delta = 9 - 8 \Rightarrow \Delta = 1 > 0$

Εκφρ: Η άσκηση γίνεται εφαρμόζοντας τον τ. $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$. Ειμάρνα ε το τύπο, $a=1$, $\beta=3$ και $\gamma=2$. Κάνοντας τις πράξεις παρατηρούμε ότι $\Delta=1$.

ii) Τι σημαίνει το ερώτημα; Κανονικά πρέπει να το λύσω με τους τύπους:
 $x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και να βρω 2 διαφορετικές λύσεις (ριζές)

* Δε ζητά να το λύσω, ζητά να εξηγήσω γιατί μπορώ να πάρω τους τύπους. Κλειδί είναι ότι $\Delta = 1 > 0$, άρα μπορώ να πάρω $\sqrt{\Delta}$.

⊖ νήματα: $\Delta > 0$: 2 ρίζες άνισες x_1, x_2
 $\Delta = 0$: 1 διπλή ρίζα $x_1 = x_2$
 $\Delta < 0$: αδύνατη (φανία)

Άρα επειδή $\Delta = 1 > 0$ έχω 2 ρίζες άνισες.

iii) Εκφρ 2: Για να βρω το S , αρκεί να θυμάμαι ότι $S = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $P = \frac{\gamma}{\alpha}$ (από τους τύπους)

Ομοίως:

iv) $S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{3}{1} = (-3)$
 $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2}{1} = (2)$
 2 άνισες ρίζες

ΘΕΜΑ 44

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 5x - 6 = 0$

I. Να λύσετε την εξίσωση.

II. Να αποδείξετε ότι $x^2 + 5x - 6 = (x - 1)(x + 6)$

III. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} = 0$

ΘΕΜΑ 45

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 9 = 0$

I. Να λύσετε την εξίσωση.

II. Να αποδείξετε ότι $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

III. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{3x^2 - 27}{x - 3} = 0$

ΘΕΜΑ 46

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 10x + 9 = 0$

I. Να λύσετε την εξίσωση.

II. Να αποδείξετε ότι $x^2 + 10x + 9 = (x + 9)(x + 1)$

III. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x^2 - 10x + 9}{x + 1} = 1, x \neq -1$

IV. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x^2 - 10x + 9}{x + 1} = -8, x \neq -1$

Συνδυαστικές ασκήσεις**ΘΕΜΑ 47**

I. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 5x + 6 = 0$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 4| \geq 2$

III. Υπάρχουν κοινές λύσεις της εξίσωσης και της ανίσωσης; Αν υπάρχουν, να βρείτε τις κοινές λύσεις.

ΘΕΜΑ 48

I. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 2x + 1 = 0$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| \leq 4$

III. Υπάρχουν κοινές λύσεις της εξίσωσης και της ανίσωσης; Αν υπάρχουν, να βρείτε τις κοινές λύσεις.

ΘΕΜΑ 49

I. Να λύσετε την εξίσωση: $4x^2 - 4x + 1 = 0$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 5| \geq 10$

III. Υπάρχουν κοινές λύσεις της εξίσωσης και της ανίσωσης; Αν υπάρχουν, να βρείτε τις κοινές λύσεις.

ΘΕΜΑ 50

I. Να λύσετε την εξίσωση: $4x^2 - x - 1 = 0$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| \leq 4$

III. Υπάρχουν κοινές λύσεις της εξίσωσης και της ανίσωσης; Αν υπάρχουν, να βρείτε τις κοινές λύσεις.

ΘΕΜΑ 51

I. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - x + 1 = 0$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 2| \leq 6$

III. Υπάρχουν κοινές λύσεις της εξίσωσης και της ανίσωσης; Αν υπάρχουν, να βρείτε τις κοινές λύσεις.

ΘΕΜΑ 52

I. Να λύσετε την εξίσωση: $|x^2 + 1| = |2x|$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| < 8$

III. Υπάρχουν κοινές λύσεις της εξίσωσης και της ανίσωσης; Αν υπάρχουν, να βρείτε τις κοινές λύσεις.

ΘΕΜΑ 53

I. Να λύσετε την εξίσωση: $|x^2 + 9| = |6x|$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $|x^2 - 10| < 6$

III. Υπάρχουν κοινές λύσεις της εξίσωσης και της ανίσωσης; Αν υπάρχουν, να βρείτε τις κοινές λύσεις.

ΘΕΜΑ 54

I. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| < 6$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $|x + 1| \geq 1$

III. Υπάρχουν κοινές λύσεις των ανισώσεων; Αν υπάρχουν, να τις παραστήσετε σε μορφή διαστήματος.

ΘΕΜΑ 55

I. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 4| \leq 3$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $|x + 2| > 3$

III. Υπάρχουν κοινές λύσεις των ανισώσεων; Αν υπάρχουν, να τις παραστήσετε σε μορφή διαστήματος.

ΘΕΜΑ 56

I. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| > 3$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $|x + 6| > 2$

III. Υπάρχουν κοινές λύσεις των ανισώσεων; Αν υπάρχουν, να τις παραστήσετε σε μορφή διαστήματος.

ΘΕΜΑ 57

I. Να λύσετε την ανίσωση: $|x + 4| > 2$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $|x + 6| \leq 9$

III. Υπάρχουν κοινές λύσεις των ανισώσεων; Αν υπάρχουν, να τις παραστήσετε σε μορφή διαστήματος.

ΘΕΜΑ 58

I. Να λύσετε την ανίσωση: $|2x - 1| > 3$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 7| \leq 2$

III. Υπάρχουν κοινές λύσεις των ανισώσεων; Αν υπάρχουν, να τις παραστήσετε σε μορφή διαστήματος.

ΘΕΜΑ 59

I. Να λύσετε την ανίσωση: $2|x-1| > |x-1| + 3$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $4|x-4| \leq 5 - |x-4|$

III. Υπάρχουν κοινές λύσεις των ανισώσεων; Αν υπάρχουν, να τις παραστήσετε σε μορφή διαστήματος.

ΘΕΜΑ 60

I. Να λύσετε την ανίσωση: $13|x+3| > 7|x+3| + 6$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $10|x-4| \leq 11 - |x-4|$

III. Υπάρχουν κοινές λύσεις των ανισώσεων; Αν υπάρχουν, να τις παραστήσετε σε μορφή διαστήματος.

ΘΕΜΑ 61

I. Να λύσετε την ανίσωση: $3(|x+3|-1) > 2|x+3| + 6$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $2(|x-4|-1) \leq 1 - |x-4|$

III. Υπάρχουν κοινές λύσεις των ανισώσεων; Αν υπάρχουν, να τις παραστήσετε σε μορφή διαστήματος.

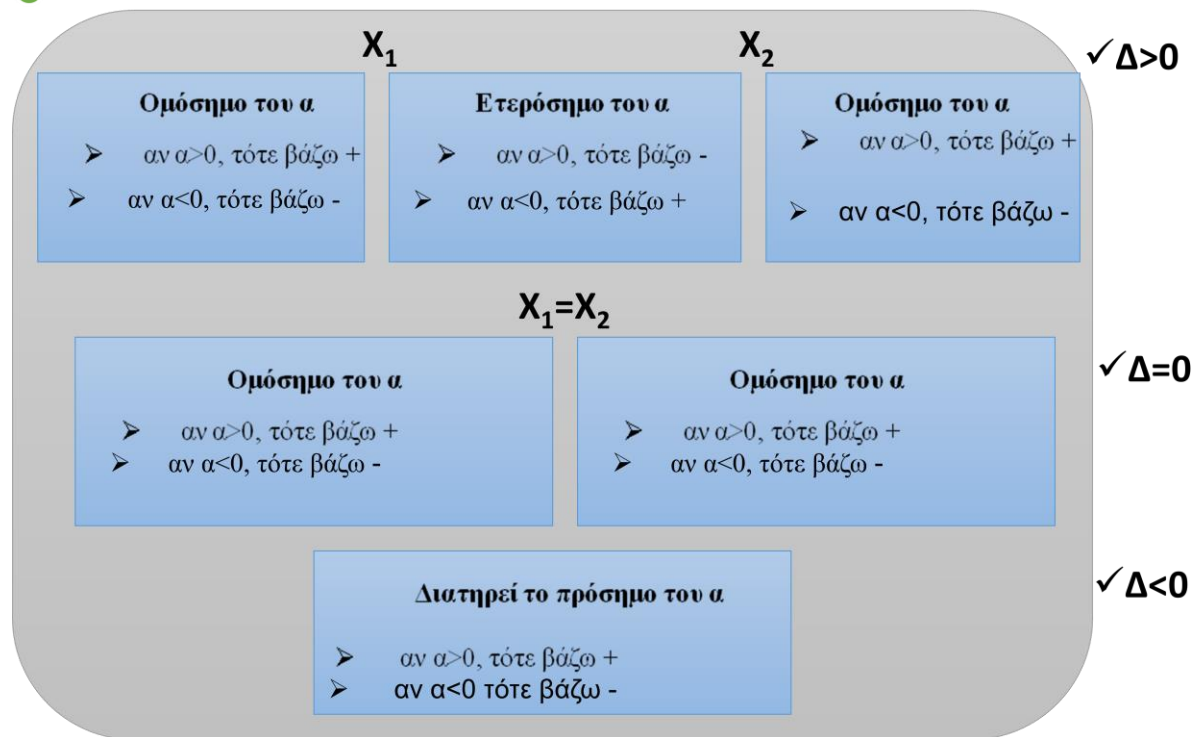
ΘΕΜΑ 62

I. Να λύσετε την ανίσωση: $2(\sqrt{(x+2)^2} - 1) > \frac{1}{2}\sqrt{(x+2)^2} + 4$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $2(\sqrt{(x+1)^2} + 2) < \sqrt{(x+2)^2} + 12$

III. Υπάρχουν κοινές λύσεις των ανισώσεων; Αν υπάρχουν, να τις παραστήσετε σε μορφή διαστήματος.

Τι κάνω όταν η ανίσωση είναι δευτέρου βαθμού;



ΘΕΜΑ 63

I. Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2 + 5x + 6$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + 5x + 6 \leq 0$

III. Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς που είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος (II).

ΘΕΜΑ 64

I. Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2 + x - 1$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + x - 1 \leq 0$

III. Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς που είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος (II).

ΘΕΜΑ 65

I. Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2 + 4x - \frac{9}{4}$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + 4x - \frac{9}{4} \leq 0$

III. Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς που είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος (II).

ΘΕΜΑ 66

I. Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2 + x - 2$

II. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + x - 2 \leq 0$

III. Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς που είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος (II).

ΘΕΜΑ 67

I. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + x - 2 \leq 0$

II. Να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης (I) σε μορφή διαστήματος και να τις παραστήσετε (σχεδιάζοντας) στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

III. Είναι ο αριθμός 0 λύση της ανίσωσης (I); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 68

I. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + 10x + 9 \geq 0$

II. Να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης (I) σε μορφή διαστήματος και να τις παραστήσετε (σχεδιάζοντας) στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

III. Είναι ο αριθμός -1 λύση της ανίσωσης (I); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 69

I. Να λύσετε την ανίσωση: $2x^2 + 11x + 10 \geq x^2 + x + 1$

II. Να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης (I) σε μορφή διαστήματος και να τις παραστήσετε (σχεδιάζοντας) στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

III. Είναι ο αριθμός -2 λύση της ανίσωσης (I); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 70

I. Να λύσετε την ανίσωση: $2(x^2 + 5x) + 10 < x^2 + 1$

II. Να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης (I) σε μορφή διαστήματος και να τις παραστήσετε (σχεδιάζοντας) στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

III. Είναι ο αριθμός -1 λύση της ανίσωσης (I); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 71

I. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + 5(2 - x) < \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}$

II. Να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης (I) σε μορφή διαστήματος και να τις παραστήσετε (σχεδιάζοντας) στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

III. Είναι ο αριθμός -1 λύση της ανίσωσης (I); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 72

I. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

II. Να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης (I) σε μορφή διαστήματος και να τις παραστήσετε (σχεδιάζοντας) στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

III. Να λύσετε την ανίσωση: $16x^2 + 8x + 1 \leq 0$

IV. Να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης (III) σε μορφή διαστήματος και να τις παραστήσετε (σχεδιάζοντας) στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

IV. Υπάρχουν κοινές ακέραιες λύσεις των ανισώσεων; Αν υπάρχουν, ποιες είναι αυτές;

ΘΕΜΑ 73

I. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 2x + 6 > 0$

II. Να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης (I) σε μορφή διαστήματος και να τις παραστήσετε (σχεδιάζοντας) στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

III. Να λύσετε την ανίσωση: $3x^2 + 4x + 1 < 0$

IV. Να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης (III) σε μορφή διαστήματος και να τις παραστήσετε (σχεδιάζοντας) στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

V. Υπάρχουν κοινές ακέραιες λύσεις των ανισώσεων; Αν υπάρχουν, ποιες είναι αυτές.

ΘΕΜΑ 74

I. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{1}{2}|x-2| - \frac{2}{3} > 0$

II. Να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης (I) σε μορφή διαστήματος και να τις παραστήσετε (σχεδιάζοντας) στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

III. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + 4x + 4 \leq 0$

IV. Να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης (III) σε μορφή διαστήματος και να τις παραστήσετε (σχεδιάζοντας) στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

V. Υπάρχουν κοινές ακέραιες λύσεις των ανισώσεων; Αν υπάρχουν, ποιες είναι αυτές;

ΘΕΜΑ 75

I. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{1}{3}|x-1| - \frac{1}{4} < -|x-1|$

II. Να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης (I) σε μορφή διαστήματος και να τις παραστήσετε (σχεδιάζοντας) στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

III. Να λύσετε την ανίσωση: $9x^2 + 5x + \frac{1}{4} \geq 0$

IV. Να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης (III) σε μορφή διαστήματος και να τις παραστήσετε (σχεδιάζοντας) στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

V. Υπάρχουν κοινές λύσεις των ανισώσεων; Αν υπάρχουν, να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.