

Περιεχόμενα

Άλγεβρα

Πραγματικοί αριθμοί

Πραγματικοί αριθμοί	3 - 4
Διάταξη πραγματικών αριθμών	4 - 5
Απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών	5 - 6
Ρίζες πραγματικών αριθμών	6

Εξισώσεις

Εξισώσεις 1ου Βαθμού	7 - 8
Εξισώσεις 2ου Βαθμού	9 - 11

Ανισώσεις

Ανισώσεις 1ου βαθμού	12 - 15
Ανισώσεις 2ου βαθμού	16 - 19

Πρόοδοι

Αριθμητική πρόοδος	20 - 23
Γεωμετρική πρόοδος	24 - 26

Συναρτήσεις

Η έννοια της συνάρτησης	27 - 29
Γραφική παράσταση συνάρτησης	29 - 32
Η συνάρτηση $f(x) = ax + b$	32 - 35

Γεωμετρία

Τρίγωνα

Κριτήρια ισότητας τριγώνων	36 - 44
Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων	45 - 46
Κύκλος – Μεσοκάθετος - Διχοτόμος	47
Ανισοτικές σχέσεις	48
Σχετική θέση ευθείας κύκλου	49
Σχετική θέση δύο κύκλων	49 - 50

Παράλληλες ευθείες

Παραλληλία	51 - 53
Άθροισμα γωνιών τριγώνου	54 - 75
1ο Θέμα	76 - 77

Πραγματικοί αριθμοί

2^ο Θέμα

$$13394. \alpha) (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2 \Leftrightarrow \cancel{\alpha^2} + 2\alpha\beta + \cancel{\beta^2} = \cancel{\alpha^2} + \cancel{\beta^2} + 2 \Leftrightarrow 2\alpha\beta = 2 \Leftrightarrow \alpha\beta = 1$$

$$\beta) \text{ Με } \alpha\beta = 1 \text{ έχουμε } (\alpha\beta - 2)^6 + (\alpha\beta + 1)^2 = (1 - 2)^6 + (1 + 1)^2 = (-1)^6 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

$$13478. \alpha) \alpha^2 = 4(\alpha - 1) \Leftrightarrow \alpha^2 = 4\alpha - 4 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 = 0$$

$$\beta) (\alpha - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

$$14644. \alpha) (2\alpha + 1)(\beta + 1) = 1 \Leftrightarrow 2\alpha\beta + 2\alpha + \beta + 1 = 1 \Leftrightarrow 2\alpha\beta + 2\alpha + \beta = 0$$

$$\beta) \text{ Οι αριθμοί } x, y \text{ είναι αντίθετοι αν και μόνο αν } x + y = 0 \Leftrightarrow \alpha(2 + \beta) + \beta(\alpha + 1) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + 2\alpha\beta + \beta = 0 \text{ που ισχύει από το } \alpha \text{ σκέλος}$$

$$14646. \alpha) (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

$$\beta) \text{ Αν } (\alpha + \beta)^2 = 4\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 0 \stackrel{\alpha \text{ σκέλος}}{\Leftrightarrow} (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

4^ο Θέμα

$$14350. \alpha) \text{ Για να ορίζεται η παράσταση } A \text{ πρέπει } 3x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow 3x \neq -6 \Leftrightarrow x \neq -2.$$

$\beta) \text{ i. Επειδή οι αριθμοί } \alpha, \beta \text{ είναι αντίθετοι, ισχύει ότι:}$

$$\alpha = -\beta \Leftrightarrow 3x - 2y - 2 = -y + 1 + 2x \Leftrightarrow 3x - 2x - 2y + y = 1 + 2 \Leftrightarrow x - y = 3$$

$$\text{ii. } A = \frac{x^2 + 2x - xy - 2y}{3x + 6} = \frac{x(x + 2) - y(x + 2)}{3(x + 2)} = \frac{\cancel{(x + 2)}(x - y)}{3\cancel{(x + 2)}} = \frac{x - y}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$14462. \alpha) \text{ i. } \alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha + \beta) = -2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = 2(\alpha + \beta) \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 = 2(\alpha + \beta)$$

$\text{ii. Επειδή οι } \alpha, \beta \text{ είναι θετικοί αριθμοί είναι και } \alpha + \beta > 0, \text{ οπότε:}$

$$(\alpha + \beta)^2 = 2(\alpha + \beta) \stackrel{:(\alpha + \beta)}{\Leftrightarrow} \alpha + \beta = 2$$

$$\beta) (2\alpha + \beta - 2)(\alpha + 2\beta - 2) = \left(\alpha + \alpha + \beta - 2 \right) \left(\alpha + \beta + \beta - 2 \right) = (\alpha + 2 - 2)(2 + \beta - 2) = \alpha\beta$$

$$14631. \alpha) A = \alpha\gamma \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \right) = \cancel{\alpha}\gamma \frac{1}{\cancel{\alpha}} + \alpha \cancel{\gamma} \frac{1}{\cancel{\gamma}} = \gamma + \alpha = 10$$

$$\beta) (\beta - \gamma)\alpha = \alpha^2 - \beta\gamma \Leftrightarrow \alpha\beta - \alpha\gamma - \alpha^2 + \beta\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha(\beta - \alpha) + \gamma(\beta - \alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\beta - \alpha)(\alpha + \gamma) = 0 \Leftrightarrow 10(\beta - \alpha) = 0 \Leftrightarrow \beta - \alpha = 0 \Leftrightarrow \beta = \alpha.$$

$$\gamma) (2\alpha - \beta + \gamma)(2\beta - \alpha + \gamma) = (2\alpha - \alpha + \gamma)(2\alpha - \alpha + \gamma) = (\alpha + \gamma)(\alpha + \gamma) = 10 \cdot 10 = 100$$

Διάταξη πραγματικών αριθμών

2^ο Θέμα

14309.α) Πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους της ανισότητας $2 < y < 3$ με 2 έχουμε: $4 < 2y < 6$.

$$\beta) \text{ i. Είναι } 4 < 2y < 6 \Leftrightarrow 4 + 3 < 2y + 3 < 6 + 3 \Leftrightarrow 7 < 2y + 3 < 9$$

$$\text{ii. Είναι } 4 < 2y < 6 \Leftrightarrow 4 - 5 < 2y - 5 < 6 - 5 \Leftrightarrow -1 < 2y - 5 < 1$$

14405.α) Επειδή $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$ είναι και $\alpha < \gamma \Leftrightarrow \alpha - \gamma < 0$

$$\beta) \text{ Είναι } \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0 \text{ και } \alpha - \gamma < 0, \text{ οπότε } (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) > 0.$$

14776.α) Είναι $\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 > 0$ και $\beta < 1 \Leftrightarrow \beta - 1 < 0$, άρα $(\alpha - 1)(\beta - 1) < 0$ ως γινόμενο ετερόσημων αριθμών.

$$\beta) \text{ Είναι } (\alpha - 1)(\beta - 1) < 0 \Leftrightarrow \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 < 0 \Leftrightarrow \alpha\beta + 1 < \alpha + \beta.$$

$$2 \leq x \leq 3$$

$$\text{14823. α) } \frac{1 \leq y \leq 2 +}{3 \leq x + y \leq 5}$$

$$\beta) \text{ Είναι } 2 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 4 \leq 2x \leq 6 \text{ (1) και } 1 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow -1 \geq -y \geq -2 \Leftrightarrow -2 \leq -y \leq -1 \text{ (2).}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1), (2) έχουμε: $2 \leq 2x - y \leq 5$

4^ο Θέμα

$$\text{14487.α) Για να ορίζεται η παράσταση A πρέπει } \begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4$$

$$\beta) A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}) = (\sqrt{x-4})^2 - (\sqrt{x+1})^2 = x - 4 - (x + 1) = x - 4 - x - 1 = -5$$

$$\gamma) \frac{5}{\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}} - \frac{5}{\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}} = \frac{5(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}) - 5(\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})}{(\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})} =$$

$$\frac{5\cancel{\sqrt{x-4}} - 5\sqrt{x+1} - 5\cancel{\sqrt{x-4}} - 5\sqrt{x+1}}{-5} = \frac{-10\sqrt{x+1}}{-5} = 2\sqrt{x+1}$$

14540.α) Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες $0 < x < 2$ και $0 < y < 3$ προκύπτει $0 < x + y < 5$.

β) i. $0 < y < 3 \Leftrightarrow -3 \cdot 0 > -3y > -3 \cdot 3 \Leftrightarrow -9 < -3y < 0$.

ii. Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες $0 < x + y < 5$ και $-9 < -3y < 0$, προκύπτει $-9 < x + y - 3y < 5 \Leftrightarrow -9 < x - 2y < 5$

Απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών 2^ο Θέμα

14400.α) i. Για $x = 4$ είναι $A = |4 - 3| = |1| = 1$

ii. Για $x = 3$ είναι $A = |3 - 3| = 0$.

iii. Για $x = 2$ είναι $A = |2 - 3| = |-1| = 1$

β) Για $x < 3$ είναι $x - 3 < 0$, άρα $A = -x + 3$.

14777.α) Είναι $1 < \alpha < 3 \Leftrightarrow 1 - 1 < \alpha - 1 < 3 - 1 \Leftrightarrow 0 < \alpha - 1 < 2$, οπότε $|\alpha - 1| = \alpha - 1$.

Είναι $1 < \alpha < 3 \Leftrightarrow 1 - 3 < \alpha - 3 < 3 - 3 \Leftrightarrow -2 < \alpha - 3 < 0$, οπότε $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$.

β) $|\alpha - 1| + |\alpha - 3| = \cancel{\alpha} - 1 + 3 - \cancel{\alpha} = 2$

14918.α) Αν $\beta > 0$ τότε $\frac{|\beta|}{\beta} = \frac{\beta}{\beta} = 1$ και αν $\beta < 0$ τότε $\frac{|\beta|}{\beta} = \frac{-\beta}{\beta} = -1$

β) Επειδή $\frac{|\beta|}{\beta} = \begin{cases} 1 & \text{αν } \beta > 0 \\ -1 & \text{αν } \beta < 0 \end{cases}$ είναι $\frac{|\beta|}{\beta} - 1 \leq 0$ και $\frac{|\beta|}{\beta} + 1 \geq 0$, οπότε

$$\left| \frac{|\beta|}{\beta} - 1 \right| + \left| \frac{|\beta|}{\beta} + 1 \right| = -\frac{|\beta|}{\beta} + 1 + \frac{|\beta|}{\beta} + 1 = 2$$

4^ο Θέμα

14825.α) $|y - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < y - 3 < 1 \Leftrightarrow 3 - 1 < y < 3 + 1 \Leftrightarrow 2 < y < 4$

β)i. Η περίμετρος Π του ορθογωνίου είναι ίση με $2x + 2y$, οπότε:

$1 < x < 3 \Leftrightarrow 2 < 2x < 6$ (1) και $2 < y < 4 \Leftrightarrow 4 < 2y < 8$ (2).

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1), (2) έχουμε: $5 < 2x + 2y < 10 \Leftrightarrow 5 < \Pi < 10$.

ii. Το εμβαδόν E του ορθογωνίου είναι ίσο με $x \cdot y$, οπότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις $2 < y < 4$ και $1 < x < 3$, έχουμε: $2 < x \cdot y < 12 \Leftrightarrow 2 < E < 12$.

14873.α) Είναι $2 \leq \alpha \leq 3 \Leftrightarrow 2 - 3 \leq \alpha - 3 \leq 3 - 3 \Leftrightarrow -1 \leq \alpha - 3 \leq 0$

$-2 \leq \beta \leq -1 \Leftrightarrow -2 + 2 \leq \beta + 2 \leq -1 + 2 \Leftrightarrow 0 \leq \beta + 2 \leq 1$

β) Είναι $2 \leq \alpha \leq 3$ (1) και $-2 \leq \beta \leq -1 \Leftrightarrow 2 \geq -\beta \geq 1 \Leftrightarrow 1 \leq -\beta \leq 2$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει: $3 \leq \alpha - \beta \leq 5$.

γ) Είναι $3 \leq \alpha - \beta \leq 5$, οπότε $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta$, $1 \leq \alpha - 3 \leq 0$ οπότε $|\alpha - 3| = -\alpha + 3$ και $0 \leq \beta + 2 \leq 1$ οπότε $|\beta + 2| = \beta + 2$. Είναι $|\alpha - \beta| + |\alpha - 3| + |\beta + 2| = \alpha - \beta - \alpha + 3 + \beta + 2 = 5$.

14892.α) Αν $\alpha, \beta > 0$ τότε $\frac{\alpha}{|\alpha|} + \frac{|\beta|}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha} + \frac{\beta}{\beta} = 1 + 1 = 2 \neq 0$ απορρίπτεται.

Αν $\alpha, \beta < 0$ τότε $\frac{\alpha}{|\alpha|} + \frac{|\beta|}{\beta} = \frac{\alpha}{-\alpha} + \frac{-\beta}{\beta} = -1 - 1 = -2 \neq 0$ απορρίπτεται.

Αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$ τότε $\frac{\alpha}{|\alpha|} + \frac{|\beta|}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha} + \frac{-\beta}{\beta} = 1 - 1 = 0$ δεκτό.

Αν $\alpha < 0$ και $\beta > 0$ τότε $\frac{\alpha}{|\alpha|} + \frac{|\beta|}{\beta} = \frac{\alpha}{-\alpha} + \frac{\beta}{\beta} = -1 + 1 = 0$ δεκτό.

Άρα $\frac{\alpha}{|\alpha|} + \frac{|\beta|}{\beta} = 0$ όταν α, β ετερόσημοι.

β) Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha - \beta < 0$, οπότε $\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} = \frac{\alpha - \beta}{-(\alpha - \beta)} = -1$ αδύνατο και επειδή $\alpha \neq \beta$, είναι $\alpha > \beta$.

Επειδή επιπλέον οι α, β είναι ετερόσημοι, ισχύει ότι $\beta < 0 < \alpha$.

Ρίζες πραγματικών αριθμών

2^ο Θέμα

14715.α) Είναι $\alpha + \beta = 1 - \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = 3$ και

$$\alpha\beta = (1 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} - (\sqrt{2})^2 = 2 - \sqrt{2} - 2 = -\sqrt{2}$$

$$\beta) (\alpha - 1)^2 + (\beta - 2)^2 = (1 - \sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2)^2 = 2 + 2 = 4$$

$$\mathbf{14775. \alpha)} \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

$$\beta) \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{12}{6}} = \sqrt{2}$$

4^ο Θέμα

$$\mathbf{14299. \alpha)} \text{ i. } 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4 \quad \text{ii. } (\sqrt{2})^6 = ((\sqrt{2})^2)^3 = 2^3 = 8$$

$$\text{iii. } (\sqrt[3]{2})^6 = ((\sqrt[3]{2})^3)^2 = 2^2 = 4$$

$$\beta) A = (\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2})^6 = (\sqrt{2})^6 (\sqrt[3]{2})^6 = 8 \cdot 4 = 32$$

Εξισώσεις 1^{ου} βαθμού2^ο Θέμα

13398. α) Παρατηρούμε ότι αν βάλουμε στην (I) όπου x το -1 έχουμε: $|-1-5| = |-6| = 6$ άρα το -1 είναι λύση.

β) $|x-5|=6 \Leftrightarrow (x-5=6 \Leftrightarrow x=11) \text{ ή } (x-5=-6 \Leftrightarrow x=-1)$

13405.α) Για $x=2$ είναι $|2+8|=10 \Leftrightarrow |10|=10$ που ισχύει επομένως η τιμή $x=2$ ικανοποιεί την εξίσωση. Για $x=0$ γίνεται $|0+8|=10 \Leftrightarrow |8|=10$ που δεν ισχύει επομένως η τιμή $x=0$ δεν ικανοποιεί την εξίσωση. Για $x=-10$ γίνεται $|-10+8|=10 \Leftrightarrow 0=10$ που δεν ισχύει επομένως η τιμή $x=-10$ δεν ικανοποιεί την εξίσωση.

β) $|x+8|=10 \Leftrightarrow (x+8=10 \Leftrightarrow x=10-8=2) \text{ ή } (x+8=-10 \Leftrightarrow x=-10-8=-18)$

13450.α) Είναι $|6-9| = |-3| = 3$, οπότε ο αριθμός 6 είναι λύση της εξίσωσης $|x-9|=3$.

β) $|x-9|=3 \Leftrightarrow x-9=\pm 3 \Leftrightarrow (x-9=3 \Leftrightarrow x=12) \text{ ή } (x-9=-3 \Leftrightarrow x=6)$

13455.α) Για $x=-2$ είναι $A = |-2+1| = |-1| = 1$ και για $x=1$ είναι $A = |1+1| = |2| = 2$.

β) $|x+1|=2 \Leftrightarrow x+1=\pm 2 \Leftrightarrow (x+1=2 \Leftrightarrow x=1) \text{ ή } (x+1=-2 \Leftrightarrow x=-3)$.

14196.α) $\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta+1}{6} \Leftrightarrow 6 \cdot \frac{\alpha}{3} = 6 \cdot \frac{\beta+1}{6} \Leftrightarrow 2\alpha = \beta+1$

β) Αν $\beta = -3$ τότε $2\alpha = -3+1 \Leftrightarrow 2\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha = -1$

14296.α) Για $x=1$ είναι $|x-2| = |1-2| = 1 \neq 7$ άρα για $x=1$ η εξίσωση δεν επαληθεύεται.

Για $x=2$ είναι $|x-2| = |2-2| = 0 \neq 7$ άρα για $x=2$ η εξίσωση δεν επαληθεύεται.

Για $x=-3$ είναι $|x-2| = |-3-2| = 5 \neq 7$ άρα για $x=-3$ η εξίσωση δεν επαληθεύεται.

β) $|x-2|=7 \Leftrightarrow x-2=\pm 7 \Leftrightarrow (x-2=7 \Leftrightarrow x=9) \text{ ή } (x-2=-7 \Leftrightarrow x=-5)$

14308.α) i. $B = |0-2| = 2$

ii. $B = |-4-2| = |-6| = 6$

iii. $B = |5-2| = 3$

β) $|x-2|=3 \Leftrightarrow x-2=\pm 3 \Leftrightarrow (x-2=3 \Leftrightarrow x=5) \text{ ή } (x-2=-3 \Leftrightarrow x=-1)$

14330.α) $x-5=10 \Leftrightarrow x=10+5=15$.

β) $|x-5|=10 \Leftrightarrow x-5=\pm 10 \Leftrightarrow (x-5=10 \Leftrightarrow x=15) \text{ ή } (x-5=-10 \Leftrightarrow x=-10+5=-5)$

$$14376.α) A=0 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{5}=0 \Leftrightarrow 3x-1=0 \Leftrightarrow 3x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}.$$

β) Οι αριθμητικές τιμές των παραστάσεων A και B είναι αντίθετες όταν

$$A=-B \Leftrightarrow \frac{3x-1}{5} = -\frac{1-2x}{3} \Leftrightarrow 15 \cdot \frac{3x-1}{5} = -15 \cdot \frac{1-2x}{3} \Leftrightarrow 3(3x-1) = -5(1-2x) \Leftrightarrow$$

$$9x-3 = -5+10x \Leftrightarrow 9x-10x = -5+3 \Leftrightarrow -x = -2 \Leftrightarrow x=2$$

$$14755.α) A = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1, x \neq 1$$

β) Είναι $x=3^0-1=1-1=0$, οπότε $A=0+1=1$.

γ) Για $x \neq 1$ έχουμε: $A=2 \Leftrightarrow x+1=2 \Leftrightarrow x=1$

$$14766.α) |x-(-9)|=17$$

$$β) |x-(-9)|=17 \Leftrightarrow |x+9|=17 \Leftrightarrow (x+9=17 \Leftrightarrow x=9) \text{ ή } (x+9=-17 \Leftrightarrow x=-26)$$

14891.α) i. Αφού στους 20 αγώνες έκανε x νίκες, τότε στους υπόλοιπους $20-x$ αγώνες έκανε ήττες.

ii. Από τις x νίκες συγκέντρωσε $3x$ βαθμούς και από τις $20-x$ ήττες $(20-x) \cdot 1 = 20-x$ βαθμούς, άρα συνολικά οι βαθμοί της ήταν $3x+20-x=20+2x$.

β) Είναι $20+2x=50 \Leftrightarrow x=30 \Leftrightarrow x=15$

4^ο Θέμα

14737.α) Αν $x \geq 2$ τότε $K=x-2+1=x-1$ και αν $x < 2$ τότε $K=-x+2+1=3-x$.

β) Οι πραγματικοί αριθμοί x, οι οποίοι έχουν απόσταση από το 2 ίση με 4, είναι εκείνοι που ικανοποιούν τη σχέση $d(x,2)=4 \Leftrightarrow |x-2|=4 \Leftrightarrow x-2=\pm 4 \Leftrightarrow (x-2=4 \Leftrightarrow x=6) \text{ ή } (x-2=-4 \Leftrightarrow x=-2)$.

γ) Για $x=6$ είναι $K=6-1=5$ και για $x=-2$ είναι $K=3-(-2)=5$

δ) $K=0,99 \Leftrightarrow |x-2|+1=0,99 \Leftrightarrow |x-2|=0,99-1 \Leftrightarrow |x-2|=-0,1$ αδύνατη.

Συνεπώς δεν υπάρχει τιμή του x για την οποία $K=0,99$.

$$14305.α) A=x^2+6x+9=x^2+2 \cdot x \cdot 3+3^2=(x+3)^2$$

β) i. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $A=(x+3)^2 \geq 0$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}$ είναι $B=(4y-2)^2 \geq 0$, ισχύει ότι $A+B \geq 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

$$ii. A+B=0 \Leftrightarrow (x+3)^2+(4y-2)^2=0 \Leftrightarrow (x+3=0 \Leftrightarrow x=-3) \text{ και } (4y-2=0 \Leftrightarrow 4y=2 \Leftrightarrow y=\frac{2}{4}=\frac{1}{2})$$

14901.α) Η απόσταση του x από το 3 είναι ίση με την απόσταση του x, από το 5.

β) Μόνο ο αριθμός 4 ισαπέχει από το 3 και το 5.

γ) $|x-3|=|x-5| \Leftrightarrow x-3=\pm(x-5) \Leftrightarrow (x-3=x-5 \Leftrightarrow 3=5 \text{ αδύνατη}) \text{ ή }$

$$(x-3=-x+5 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=4)$$

Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού2^ο Θέμα

13505.α) Το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$ έχει $\alpha=1$, $\beta = -3$ και $\gamma = 2$. Οπότε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

β) Επειδή $\Delta > 0$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.

γ) Η εξίσωση έχει ρίζες τις: $x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3+1}{2} = 2$ και $x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3-1}{2} = 1$

13411.α) Η εξίσωση είναι δευτεροβάθμια με $\alpha=1, \beta=4$, $\gamma=4$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0.$$

β) Η εξίσωση έχει ρίζες τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4}{2} = -2$

13451.α) Αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (1) το $x=4$: $4^2 - 5 \cdot 4 + 4 = 16 - 20 + 4 = 20 - 20 = 0$. Άρα το 4 επαληθεύει την (1).

β) Η εξίσωση (1) είναι δευτέρου βαθμού με $\alpha=1, \beta=-5$ και $\gamma=4$. Υπολογίζουμε την διακρίνουσα

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0. \text{ Επειδή η διακρίνουσα είναι θετική η (1) θα έχει ρίζες τις}$$

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5+3}{2} = 4 \text{ και } x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5-3}{2} = 1$$

14297.α) Είναι $8^2 = 16 \Leftrightarrow 64 = 16$ αδύνατο, άρα ο αριθμός 8 δεν είναι λύση της εξίσωσης.

Είναι $(-4)^2 = 16 \Leftrightarrow 16 = 16$ ισχύει, άρα ο αριθμός -4 είναι λύση της εξίσωσης.

Είναι $(-8)^2 = 16 \Leftrightarrow 64 = 16$ αδύνατο, άρα ο αριθμός -8 δεν είναι λύση της εξίσωσης.

β) $x^2 = 16 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{16} \Leftrightarrow |x| = 4 \Leftrightarrow x = \pm 4$

14381.α) i. Έχουμε $S = x_1 + x_2 = 2 + 1 = 3$ και **ii.** $P = x_1 x_2 = 2 \cdot 1 = 2$

β) Τα x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

14460.α) $S = x_1 + x_2 = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$, $P = x_1 x_2 = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$

β) Τα x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$

14539.α) Για $x = 1$ είναι $1^2 - 7 \cdot 1 + 6 = 1 - 6 + 6 = 0$, άρα ο αριθμός 1 επαληθεύει την εξίσωση (1).

β) Η εξίσωση (1) είναι δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25 \text{ και ρίζες } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{7+5}{2} = 6 \\ x_2 = \frac{7-5}{2} = 1 \end{cases}$$

14647.α) Η εξίσωση (1) είναι δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 \text{ και ρίζες } \omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \omega_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \\ \omega_2 = \frac{4+2}{2} = 3 \end{cases}$$

β) Για $\omega = 1$ η εξίσωση γίνεται $0 \cdot x = 0$ και είναι ταυτότητα.

Για $\omega = 3$ η εξίσωση γίνεται $0 \cdot x = 2$ και είναι αδύνατη.

Άρα για $\omega = 3$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

14824.α) $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$.

Επειδή η διακρίνουσα είναι θετική η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

$$\beta) x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{3+5}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$

4^ο Θέμα

14192.α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 1 + 60 = 61 > 0$ οπότε έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

$$\beta) x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 \pm \sqrt{61}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{61}}{2} \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{61}}{2} \end{cases}$$

γ) Είναι $S = x_1 + x_2 = -\frac{-1}{3} = \frac{1}{3}$ και $P = x_1 x_2 = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}$

14542.α) i) $3x - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$

ii) $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

β) $(3x - 3)(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow (3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1) \text{ ή } ((x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2)$

14717.α) i. Οι αριθμοί α, β έχουν άθροισμα $S = \alpha + \beta = \frac{5}{2}$ και γινόμενο $P = \alpha\beta = 1$, οπότε η εξίσωση

δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β είναι η

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0.$$

ii. Η εξίσωση $2x^2 - 5x + 2 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 9$ και ρίζες $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{5+3}{4} = 2 \\ x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$

β) Έστω ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε να ισχύουν $\alpha + \beta = 1$ και $\alpha\beta = \frac{5}{2}$. Τότε τα α, β θα είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{5}{2} = 0$. Η εξίσωση αυτή όμως έχει $\Delta = -9 < 0$ και είναι αδύνατη. Επομένως, δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha + \beta = 1$ και $\alpha\beta = \frac{5}{2}$.

14769.α) Η περίμετρος Π είναι: $\Pi = 2x + 2(x + 5) = 2x + 2x + 10 = 4x + 10$ και το εμβαδόν του ορθογώνιου είναι $E = \text{μήκος} \times \text{πλάτος} = x(x + 5) \text{ m}^2$.

β) i. $\Pi = 70 \Leftrightarrow 4x + 10 = 70 \Leftrightarrow 4x = 60 \Leftrightarrow x = \frac{60}{4} = 15\text{m}$, οπότε οι διαστάσεις του οικοπέδου είναι 15m και 20m.

ii. $E = 150 \Leftrightarrow x(x + 5) = 150 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 150 = 0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-150) = 625$ και ρίζες

$$x_1 = \frac{-5 - 25}{2} = -\frac{30}{2} = -15 \text{ απορρίπτεται γιατί } x > 0, \quad x_2 = \frac{-5 + 25}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

Οι διαστάσεις του οικοπέδου στη περίπτωση αυτή είναι 10m και 15m.

15097.α) i. $\kappa + \lambda = 2 - \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} = 5 - 2\sqrt{2} = 5 - \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 5 - \sqrt{8}$.

ii. $\kappa \cdot \lambda = (2 - \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 6 - 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 6 - 5\sqrt{2} + 2 = 8 - 5\sqrt{2}$

β) Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού με άθροισμα ριζών $S = 5 - \sqrt{8} = \kappa + \lambda$ και γινόμενο ριζών

$P = 8 - 5\sqrt{2} = \kappa \cdot \lambda$, επομένως οι ρίζες της είναι τα κ, λ .

γ) $(5 - \sqrt{8})^2 - 4(8 - 5\sqrt{2}) > 0 \Leftrightarrow (\kappa + \lambda)^2 - 4\kappa\lambda > 0 \Leftrightarrow \kappa^2 + 2\kappa\lambda + \lambda^2 - 4\kappa\lambda > 0 \Leftrightarrow$

$\kappa^2 - 2\kappa\lambda + \lambda^2 > 0 \Leftrightarrow (\kappa - \lambda)^2 > 0$ ισχύει

3^ο Θέμα

14739.α) Είναι $S = x_1 + x_2 = 4 + 3 = 7$ και $P = x_1 x_2 = 12$, οπότε η εξίσωση είναι η $x^2 - 7x + 12 = 0$.

β) Η εξίσωση είναι η $x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 14x + 24 = 0$, οπότε $\beta = -14$ και $\gamma = 24$.

Ανισώσεις 1^{ου} βαθμού

2^ο Θέμα

14316.α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$A = (x+1)^2 - (x-1)^2 = x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1) = x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 4x$$

β) $A > \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x > \frac{1}{4} \Leftrightarrow x > \frac{1}{16}$

14317.α) $2(x-1) < x+4 \Leftrightarrow 2x-2 < x+4 \Leftrightarrow 2x-x < 4+2 \Leftrightarrow x < 6$ και

$$2-(5-x) > 0 \Leftrightarrow 2-5+x > 0 \Leftrightarrow -3+x > 0 \Leftrightarrow x > 3$$

β) Οι ακέραιοι αριθμοί που είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων, είναι εκείνοι που είναι μεγαλύτεροι από το 3 και μικρότεροι από το 6, δηλαδή είναι οι αριθμοί 4 και 5.

14557.α) $3x-7 \geq 5x+11 \Leftrightarrow -7-11 \geq 5x-3x \Leftrightarrow 2x \leq -18 \Leftrightarrow x \leq -9$

β) $x \in (-\infty, -9]$.

14738.α) $|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

β) $|6x| \leq 6 \Leftrightarrow -6 \leq 6x \leq 6 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

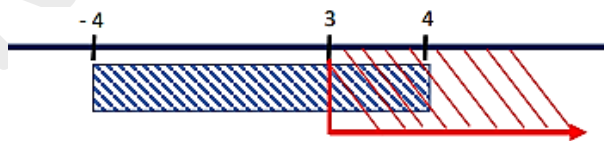
14828.α) $(x+3)^2 - (x+1)^2 = x^2 + 6x + 9 - (x^2 + 2x + 1) = x^2 + 6x + 9 - x^2 - 2x - 1 = 4x + 8 = 4(x+2)$

β) $(x+3)^2 - (x+1)^2 > 0 \Leftrightarrow 4(x+2) > 0 \Leftrightarrow x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

14850.α) $|x| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$

β) $x-7 \geq -4(x-2) \Leftrightarrow x-7 \geq -4x+8 \Leftrightarrow x+4x \geq 8+7 \Leftrightarrow 5x \geq 15 \Leftrightarrow x \geq 3$

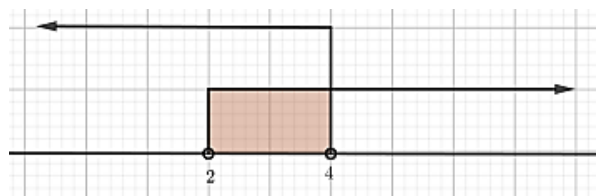
γ) Κοινές λύσεις $3 \leq x \leq 4$.



14921.α) $x-1 > 1 \Leftrightarrow x > 1+1 \Leftrightarrow x > 2$

β) $2x-3 < 5 \Leftrightarrow 2x < 5+3 \Leftrightarrow 2x < 8 \Leftrightarrow x < 4$

γ) Παριστάνουμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Οι κοινές τους λύσεις είναι $x \in (2, 4)$.



15053.α) Το 1 είναι λύση της εξίσωσης όταν $|2 \cdot 1 - 5| = 1 \Leftrightarrow |-3| = 1 \Leftrightarrow 3 = 1$ αδύνατο.

Το 2 είναι λύση της εξίσωσης όταν $|2 \cdot 2 - 5| = 1 \Leftrightarrow |-1| = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$ ισχύει.

β) $|2x-5| = 1 \Leftrightarrow 2x-5 = \pm 1 \Leftrightarrow (2x-5=1 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3)$ ή

$$(2x - 5 = -1 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2)$$

γ) Οι λύσεις της εξίσωσης είναι και λύσεις της ανίσωσης $|x| < 3$ όταν $|3| < 3$ αδύνατο και $|2| < 3$ ισχύει. Άρα δεν επαληθεύουν την ανίσωση.

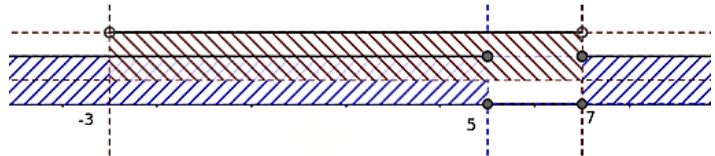
4^ο Θέμα

$$13414.α) |3x - 6| < 15 \Leftrightarrow -15 < 3x - 6 < 15 \Leftrightarrow -15 + 6 < 3x < 15 + 6 \Leftrightarrow -9 < 3x < 21 \Leftrightarrow -3 < x < 7$$

$$β) |x - 6| \geq 1 \Leftrightarrow (x - 6 \leq -1 \Leftrightarrow x \leq 5) \text{ ή } (x - 6 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 7), \text{ άρα } x \in (-\infty, 5] \cap [7, +\infty).$$

γ) Αναπαριστώντας τις λύσεις των δύο ανισώσεων στον άξονα των πραγματικών αριθμών έχουμε:

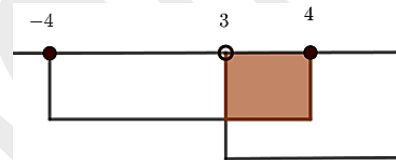
Συνεπώς, οι κοινές λύσεις είναι $x \in (-3, 5]$.



$$13506. α) 3(x - 1) > x + 3 \Leftrightarrow 3x - 3 > x + 3 \Leftrightarrow 3x - x > 3 + 3 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3.$$

$$β) |x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$$

$$γ) x \in (3, 4]$$

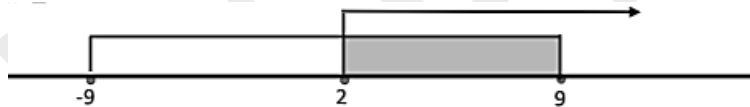


13402.α) Θέλουμε να βρούμε όλους τους πραγματικούς αριθμούς που έχουν απόλυτη τιμή όχι μεγαλύτερη του 9, δηλαδή τους αριθμούς που απέχουν από το μηδέν απόσταση το πολύ 9.

$$\text{Είναι } |x| \leq 9 \Leftrightarrow -9 \leq x \leq 9$$

$$β) 7x - 8 \geq -3(x - 4) \Leftrightarrow 7x - 8 \geq -3x + 12 \Leftrightarrow 10x \geq 20 \Leftrightarrow x \geq 2$$

γ)



Με βάση την παραπάνω γεωμετρική παράσταση των λύσεων, διαπιστώνουμε ότι οι κοινές λύσεις των ανισώσεων (I) και (II) είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί x με $2 \leq x \leq 9$.

$$13457.α) |x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4$$

$$β) 4(x - 1) > 6x - 8 \Leftrightarrow 4x - 4 > 6x - 8 \Leftrightarrow 4x - 6x > 4 - 8 \Leftrightarrow -2x > -4 \Leftrightarrow x < \frac{-4}{-2} \Leftrightarrow x < 2.$$

$$γ) x \in (-4, 2)$$



$$14298.α) \alpha < -2 \Leftrightarrow 2\alpha < -4 \Leftrightarrow 2\alpha + 4 < 0$$

$$β) \text{Είναι } 2\alpha + 4 < 0, \text{ οπότε } |2\alpha + 4| = -2\alpha - 4.$$

$$\text{Είναι } \alpha < -2 \Leftrightarrow 3\alpha < -6 \Leftrightarrow 3\alpha + 6 < 0, \text{ οπότε } |3\alpha + 6| = -3\alpha - 6.$$

$$A = |2\alpha + 4| + 3|3\alpha + 6| = -2\alpha - 4 + 3(-3\alpha - 6) = -2\alpha - 4 - 9\alpha - 18 = -11\alpha - 22$$

$$γ) A > -11 \Leftrightarrow -11\alpha - 22 > -11 \Leftrightarrow -11\alpha > -11 + 22 \Leftrightarrow -11\alpha > 11 \Leftrightarrow \alpha < -1$$

14401.α) $|x-2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-2 < 1 \Leftrightarrow -1+2 < x < 1+2 \Leftrightarrow 1 < x < 3$

β) $|x-2| < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3 \Leftrightarrow 2 < 2x < 6 \Leftrightarrow 3 < 2x+1 < 7$

γ) Είναι $1 < x < 3 \Leftrightarrow 1-1 < x-1 < 3-1 \Leftrightarrow 0 < x-1 < 2$ και

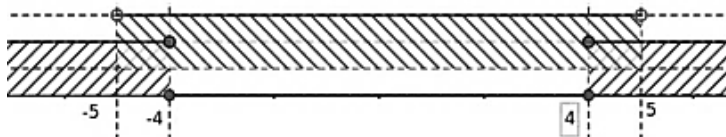
$1 < x < 3 \Leftrightarrow 1-3 < x-3 < 3-3 \Leftrightarrow -2 < x-3 < 0$

άρα $A = |x-1| + |x-3| = x-1 - x+3 = 2$

14541.α) $|x| \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -4 \text{ ή } x \geq 4.$

β) $3(|x|+2)+1 < 22 \Leftrightarrow 3|x|+6+1 < 22 \Leftrightarrow 3|x| < 22-7 \Leftrightarrow 3|x| < 15 \Leftrightarrow |x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 5.$

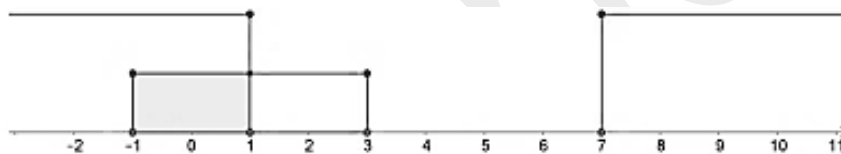
γ) Με βάση τη διπλανή ευθεία αριθμών, οι κοινές λύσεις είναι $x \in (-5, -4] \cup [4, 5)$



14874.α) Είναι $d(x,1) \leq 2 \Leftrightarrow |x-1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x-1 \leq 2 \Leftrightarrow -2+1 \leq x \leq 2+1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$

Για την (2), αναζητούμε αριθμούς που απέχουν από το 4 απόσταση μεγαλύτερη ή ίση του 3, οπότε $x \leq 1$ ή $x \geq 7$.

β) Συναληθεύοντας τις λύσεις των (1) και (2), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, έχουμε ότι $x \in [-1, 1]$.



γ) i. Η παράσταση $|x-1| + |x+1|$ εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του x από τους αριθμούς 1 και -1 αντίστοιχα και επειδή $x \in [-1, 1]$, είναι $d(x,1) + d(x,-1) = 2$.

ii. Επειδή $x \in [-1, 1]$, είναι $x-1 \leq 0$, $x+1 \geq 0$, οπότε $|x-1| + |x+1| = -x+1 + x+1 = 2$

14875.α) $d(x,2) \leq 1 \Leftrightarrow |x-2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x-2 \leq 1 \Leftrightarrow -1+2 \leq x \leq 1+2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$

Για την (2), αναζητούμε αριθμούς y που να απέχουν από το 4 απόσταση μικρότερη ή ίση του 3, οπότε είναι $1 \leq y \leq 7$.

β) i. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις x, y , είναι $\Pi = 2x + 2y$.

Είναι $1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 6$ και $1 \leq y \leq 7 \Leftrightarrow 2 \leq 2y \leq 14$. Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$2+2 \leq 2x+2y \leq 6+14 \Leftrightarrow 4 \leq \Pi \leq 20$

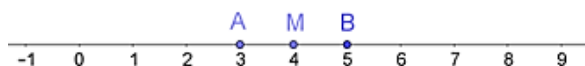
οπότε η περίμετρος είναι τουλάχιστον 4 και το πολύ 20.

ii. Είναι $1 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 7 \Leftrightarrow -1 \geq -y \geq -7 \Leftrightarrow -7 \leq -y \leq -1$ και με πρόσθεση κατά μέλη:

$1-7 \leq x-y \leq 3-1 \Leftrightarrow -6 \leq x-y \leq 2$. Όμως $2 < 6$, άρα $-6 \leq x-y \leq 2 < 6$, δηλαδή

$-6 \leq x-y < 6 \Leftrightarrow |x-y| \leq 6$

15098.α) Η απόσταση του x από το 3 είναι ίση με την απόσταση του x από το 5. Ο μόνος αριθμός που ισαπέχει από το 3 και το 5 είναι το 4, άρα το M τοποθετείται στο 4.

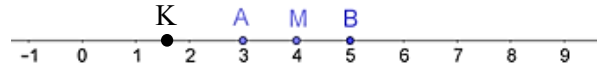


β) $|x-3|=|x-5| \Leftrightarrow x-3=\pm(x-5) \Leftrightarrow (x-3=x-5 \Leftrightarrow -3=-5 \text{ αδύνατη}) \text{ ή } (x-3=-x+5 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=4)$

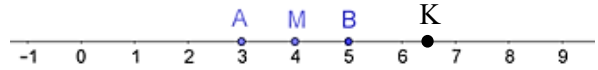
γ) Έστω K η εικόνα του x στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τότε:

$|x-3| \geq |x-5| \Leftrightarrow (KA) \geq (KB)$, δηλαδή η απόσταση του K από το A είναι μεγαλύτερη ή ίση από την απόσταση του από το B .

Αν το K βρίσκεται στην ημιευθεία MA εκτός του σημείου M , δηλαδή αριστερά του M , τότε $(KA) < (KB)$ και απορρίπτεται.



Αν το K βρίσκεται στην ημιευθεία MB , δηλαδή δεξιά του M , τότε $(KA) \geq (KB)$, άρα $x \geq 4$.



Ανισώσεις 2^{ου} βαθμού

2^ο Θέμα

13558.α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 36 - 32 = 4$ και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{6 \pm 2}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{6+2}{4} = 2 \\ x_2 = \frac{6-2}{4} = 1 \end{cases}.$$

β) $2x^2 - 6x + 4 = 2(x-2)(x-1)$

14194.α) Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$ και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-3-5}{2} = -4 \\ x_2 = \frac{-3+5}{2} = 1 \end{cases}.$$

β) Με βάση τον διπλανό πίνακα είναι $x^2 + 3x - 4 < 0 \Leftrightarrow x \in (-4, 1)$

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$	
$x^2 + 3x - 4$	+	o	-	o	+

14663.α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$ οπότε έχει δύο ρίζες άνισες.

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}.$

γ) $x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$x^2 - 3x + 2$	+	o	-	o	+

14736.α) Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$ και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{3+1}{2} = 2 \end{cases}.$$

β) $x^2 - 3x \geq -2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ ή } x \geq 2$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$x^2 - 3x + 2$	+	○	-	○	+

14778.α) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 4x + 3$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 4x + 3 < 0$.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$ και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{4+2}{2} = 3 \end{cases}$$

β) $x^2 - 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$x^2 - 4x + 3$	+	0	-	0	+

14856.α) Η εξίσωση έχει άθροισμα ριζών $S = 2 + 4 = 6$ και γινόμενο ριζών $P = x_1 x_2 = 8$, οπότε από τους τύπους Vieta είναι η $x^2 - 6x + 8 = 0$.

β) $x^2 - 6x + 8 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
$x^2 - 6x + 8$	+	0	-	0	+

4^ο Θέμα

13413.α) Η εξίσωση (1) είναι δευτέρου βαθμού με $\alpha=1$, $\beta=-7$, $\gamma=6$. και διακρίνουσα

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25 > 0.$$

Έχει ρίζες $x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{7+5}{2} = 6$ και $x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{7-5}{2} = 1$

β) Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 7x + 6$ φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

Είναι $x^2 - 7x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 6$, δηλαδή $x \in [1, 6]$.

x	$-\infty$	1	6	$+\infty$	
$x^2 - 7x + 6$	+	o	-	o	+

γ) Οι ακέραιοι αριθμοί που είναι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι αριθμοί στο διάστημα $[1, 6]$ δηλαδή οι 1, 2, 3, 4, 5, 6.

13401.α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$ και

$$\text{ρίζες είναι οι } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 7}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

β) Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου $x^2 - x - 12$

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$	
$x^2 - x - 12$	+	o	-	o	+

Καθώς είναι $\alpha = 1 > 0$, παρατηρούμε ότι είναι $x^2 - x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-3, 4]$

γ) Οι ακέραιες λύσεις της παραπάνω ανίσωσης είναι οι ακέραιοι αριθμοί που βρίσκονται στο διάστημα $[-3, 4]$, δηλαδή οι αριθμοί $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

13452.α) $3(2x+1)+6 < 21 \Leftrightarrow 6x+3+6 < 21 \Leftrightarrow 6x < 21-3-6 \Leftrightarrow 6x < 12 \Leftrightarrow x < \frac{12}{6} \Leftrightarrow x < 2$

β) i. Η εξίσωση είναι δευτεροβάθμια με $\alpha=1$, $\beta=-2$, $\gamma=-3$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16.$$

Έχει ρίζες τις $x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2+4}{2} = 3$ και $x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2-4}{2} = -1$

ii. Το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

Είναι $x^2 - 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$x^2 - 2x - 3$	+	○	-	○	+

γ) Τοποθετούμε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον άξονα πραγματικών αριθμών βρίσκουμε που συναληθεύουν σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα:



Άρα οι κοινές λύσεις είναι το διάστημα $[-1, 2)$

13477. α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$ και

ρίζες είναι οι $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$.

β) Με βάση τον διπλανό πίνακα προσήμων είναι:

$x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$x^2 - 3x + 2$	+	○	-	○	+

γ) Επειδή $-\frac{3}{2} \in (-\infty, 1)$, ο αριθμός $a_1 = -\frac{3}{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του β ερωτήματος.

Επειδή $\frac{3}{2} \notin (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$, ο αριθμός $a_2 = \frac{3}{2}$ δεν είναι λύση της ανίσωσης του β ερωτήματος.

13559.α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$ και

ρίζες είναι οι $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$.

β) Με βάση τον διπλανό πίνακα προσήμων είναι:

$x^2 - 7x + 12 < 0 \Leftrightarrow x \in (3, 4)$.

x	$-\infty$	3	4	$+\infty$	
$x^2 - 7x + 12$	+	○	-	○	+

γ) Επειδή ο αριθμός π βρίσκεται στο διάστημα $(3, 4)$, είναι $\pi^2 - 7\pi + 12 < 0$.

14198.α) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$ και

ρίζες είναι οι $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-8}{2} = -4 \\ x_2 = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$.

β) Με βάση τον διπλανό πίνακα προσήμων είναι:

$x^2 + x - 12 < 0 \Leftrightarrow x \in (-4, 3)$.

x	$-\infty$	-4	3	$+\infty$	
$x^2 + x - 12$	+	○	-	○	+

γ) Επειδή $x \in (-4, 3)$ και θέλουμε συγχρόνως να είναι ακέραιοι, τότε οι τιμές του x που ικανοποιούν και τις δύο σχέσεις είναι: $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2$.

14404.α) Το τριώνυμο $x^2 - 7x - 10$ έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9$ και ρίζες

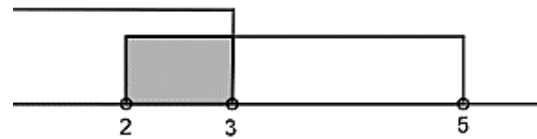
$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{10}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$	
$x^2 - 7x - 10$	+	○	-	○	+

Είναι $x^2 - 7x - 10 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 5$.

β) $3x - 2 < x + 4 \Leftrightarrow 3x - x < 4 + 2 \Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow x < 3$

γ) Οι λύσεις των ερωτημάτων α) και β) παριστάνονται στον άξονα των πραγματικών αριθμών με το διπλανό διάγραμμα, από το οποίο προκύπτει ότι το σύνολο των κοινών τους λύσεων είναι το διάστημα $(2, 3)$.



14488. α) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

β) Το τριώνυμο $x^2 - x - 12$ έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49$ και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 7}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$	
$x^2 - x - 12$	+	○	-	○	+

Είναι $x^2 - x - 12 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 4$.

γ) Από το β ερώτημα έχουμε $x \in (-3, 4)$ επίσης $x \in \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, άρα τα κοινά σημεία των δύο συνόλων είναι οι θετικές ακέραιες τιμές του x . Άρα τα ζητούμενα στοιχεία είναι το σύνολο $\{1, 2, 3\}$.

14514.α) Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 4 - 28 = -26 < 0$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

β) Επειδή το τριώνυμο $x^2 - 2x + 7$ έχει $\Delta < 0$, είναι $x^2 - 2x + 7 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 - 2x + 7 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 7 > 2x$, που σημαίνει ότι το τετράγωνο οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού αυξημένο κατά 7 είναι μεγαλύτερο του διπλάσιου του.

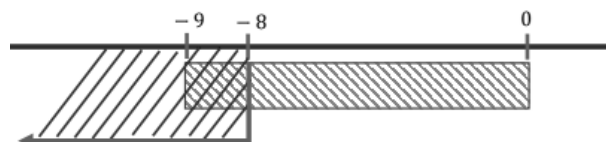
14671.α) $4(x - 2) > 5(2x + 8) \Leftrightarrow 4x - 8 > 10x + 40 \Leftrightarrow 4x - 10x > 40 + 8 \Leftrightarrow$

$$-6x > 48 \Leftrightarrow \frac{-6x}{-6} < \frac{48}{-6} \Leftrightarrow x < -8$$

β) $x^2 + 9x < 0 \Leftrightarrow x(x + 9) < 0 \Leftrightarrow -9 < x < 0$

x	$-\infty$	-9	0	$+\infty$	
$x^2 + 9x$	+	○	-	○	+

γ) Στην ευθεία των πραγματικών αριθμών προκύπτει ότι οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι $-9 < x < -8$.



Αριθμητική πρόοδος

2ο θέμα

13412.α) i) Ο επόμενος αριθμός θα είναι ο $6+2=8$.

ii) Οι αριθμοί αυτοί έχουν σταθερή διαφορά. Δηλαδή καθένας από τον επόμενό του διαφέρει κατά 2, αφού: $4-2=2$ και $6-4=2$. Συνεπώς, πρόκειται για διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega=2$.

β) Εφόσον $\alpha_1=2$, $\omega=2$, έχουμε ότι ο n -οστός όρος θα δίνεται από τον τύπο: $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$, δηλαδή $\alpha_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2 + 2n - 2 = 2n$. Συνεπώς, ο 8ος όρος θα είναι $\alpha_8 = 2 \cdot 8 = 16$.

13399.α) Παρατηρούμε ότι $9 - 5 = 13 - 9 = 17 - 13 = \dots = 4$. Ωστε $\omega = 4$.

β) Καθώς ο νιοστός όρος σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) δίνεται από τη σχέση $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$ έχουμε $\alpha_{51} = \alpha_1 + (51-1)\omega = 5 + 50 \cdot 4 = 5 + 200 = 205$

14191.α) Η αριθμητική πρόοδος έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = -4$ και διαφορά $\omega = 5 - 2 = 3$, άρα ο γενικός της όρος είναι $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega = -4 + (n-1) \cdot 3 = -4 + 3n - 3 = 3n - 7$.

β) $S_n = \frac{10}{2} [2\alpha_1 + (10-1)\omega] = 5(-8 + 9 \cdot 3) = 5 \cdot 19 = 95$

14195.α) $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 5 - 2 = 3$

β) $\alpha_{20} = \alpha_1 + 19\omega = 2 + 19 \cdot 3 = 2 + 57 = 59$

14513.α) $\alpha_2 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 + \omega = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 + 2 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 = 6$

β) $\alpha_7 = \alpha_1 + 6\omega = 6 + 6 \cdot 2 = 6 + 12 = 18$

γ) $S_7 = \frac{7}{2}(\alpha_1 + \alpha_7) = \frac{7}{2}(6 + 18) = \frac{7}{2} \cdot 24 = 7 \cdot 12 = 84$

14630. α) $\omega = \alpha_4 - \alpha_3 = 26 - 18 = 8$.

β) $\alpha_3 = 18 \Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 18 \Leftrightarrow \alpha_1 + 16 = 18 \Leftrightarrow \alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = \alpha_1 + \omega = 2 + 8 = 10$

γ) $\alpha_{37} = \alpha_1 + 36\omega = 2 + 36 \cdot 8 = 2 + 288 = 290$

14659.α) i) Για να είναι οι αριθμοί αυτοί, με τη σειρά που δίνονται διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, πρέπει η διαφορά οποιωνδήποτε δύο διαδοχικών όρων να είναι σταθερή. Αφού κάθε φορά προσθέτουμε το 6, η διαφορά δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων είναι σταθερή και ίση με 6. Οπότε η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega=6$.

ii) Ο επόμενος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου θα προκύψει αν προσθέσουμε στον όρο 0 το 6. Για να βρούμε τον αμέσως επόμενο θα πρέπει να προσθέσουμε στον 6 το 6. Συνεπώς οι ζητούμενοι όροι είναι ο 6 και ο 12.

β) Οι πέντε πρώτοι όροι της αριθμητικής προόδου είναι -12, -6, 0, 6, 12 τότε $-12 + (-6) + 0 + 6 + 12 = 0$. Άρα το άθροισμα των 5 πρώτων όρων της προόδου αυτής είναι ίσο με 0.

14735.α) $\alpha_2 = \alpha_1 + \omega = -4 + 7 = 3$

β) $\alpha_5 = \alpha_1 + 4\omega = -4 + 4 \cdot 7 = 24$

14959.α) $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega = 4 + 3(v-1) = 4 + 3v - 3 = 3v + 1$

β) $\alpha_1 = 4, \alpha_3 = 3 \cdot 3 + 1 = 10, \alpha_5 = 3 \cdot 5 + 1 = 16, \dots$

Η (β_v) έχει πρώτο όρο το 4 και $\omega = 6$, οπότε $\beta_v = \beta_1 + (v-1)\omega = 4 + 6(v-1) = 4 + 6v - 6 = 6v - 2$

14965.α) Η διαφορά της προόδου είναι ίση με τη διαφορά δυο διαδοχικών όρων της, δηλαδή $\omega = 8 - 4 = 4$.

β) Ο πρώτος όρος της προόδου (α_v) είναι $\alpha_1 = 4$, οπότε $\alpha_{20} = \alpha_1 + (20-1)\omega = 4 + 19 \cdot 4 = 80$.

γ) $S_{20} = \frac{20}{2}(4 + 80) = 10 \cdot 84 = 840$

15167.α) $x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

β) Οι λύσεις σε αύξουσα σειρά είναι: -1, 0, 1.

Αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου όταν $2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow 2 \cdot 0 = -1 + 1 \Leftrightarrow 0 = 0$ ισχύει

4ο θέμα

13403.α) Γνωρίζουμε ότι η διαφορά ω της αριθμητικής πρόοδο ισούται με τη διαφορά δύο διαδοχικών όρων της. Επομένως $\omega = \alpha_5 - \alpha_4 = 9 - 7 = 2$.

β) Έχουμε $\alpha_4 = 7 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega = 7 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3 \cdot 2 = 7 \Leftrightarrow \alpha_1 = 7 - 6 = 1$

γ) Για το άθροισμα των έξι πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου ισχύει

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = S_6 = \frac{6}{2}(2\alpha_1 + (6-1)\omega) = 3(2 \cdot 1 + 5 \cdot 2) = 3 \cdot 12 = 36$$

13407.α) Για την αριθμητική πρόοδο (α_n) έχουμε

$$\alpha_3 = 7 \Leftrightarrow \alpha_1 + (3-1)\omega = 7 \Leftrightarrow 1 + 2\omega = 7 \Leftrightarrow 2\omega = 6 \Leftrightarrow \omega = 3$$

β) Για το v -οστό όρο της αριθμητικής προόδου (α_v) ισχύει ο τύπος $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$.

$$\text{Είναι } \alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega = 1 + (v-1) \cdot 3 = 1 + 3v - 3 = 3v - 2$$

Για τον 6ο όρο της αριθμητικής προόδου αντικαθιστούμε στον γενικό τύπο όπου $v=6$ και έχουμε

$$\alpha_6 = \alpha_1 + (6-1)\omega = 1 + 5 \cdot 3 = 1 + 15 = 16.$$

γ) Αν υπάρχει όρος της αριθμητικής προόδου (α_v) που να ισούται με 21 θα υπάρχει $v \in \mathbb{N}^*$ ώστε

$$\alpha_v = 21 \Leftrightarrow 3v - 2 = 21 \Leftrightarrow 3v = 23 \Leftrightarrow v = \frac{23}{3}.$$

Όμως ο αριθμός $\frac{23}{3}$ δεν είναι φυσικός αριθμός, επομένως δεν υπάρχει όρος της αριθμητικής προόδου (α_v) που να ισούται με 21.

13453.α) Γνωρίζουμε στην αριθμητική πρόοδο ο επόμενος όρος διαφέρει από τον προηγούμενο κατά ω . Άρα $\omega = \alpha_5 - \alpha_4 = 7 - 10 = -3$.

Για να βρούμε τον πρώτο όρο παίρνουμε τον τύπο του νιοστού όρου $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$ και τον εφαρμόζουμε για τον 4ο όρο. Δηλαδή

$$\alpha_4 = \alpha_1 + (4-1)\omega \Leftrightarrow 10 = \alpha_1 + 3 \cdot (-3) \Leftrightarrow 10 = \alpha_1 - 9 \Leftrightarrow 10 + 9 = \alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_1 = 19$$

β) Είναι $\alpha_8 = \alpha_1 + (8-1)\omega = 19 + 7 \cdot (-3) = 19 - 21 = -2$

13456.α) $\alpha_3 = 10 \Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 10 \Leftrightarrow \alpha_1 = 10 - 2\omega \quad (1)$

$\alpha_5 = 18 \Leftrightarrow \alpha_1 + 4\omega = 18 \Leftrightarrow 10 - 2\omega + 4\omega = 18 \Leftrightarrow 2\omega = 18 - 10 \Leftrightarrow 2\omega = 8 \Leftrightarrow \omega = 4$ και από την (1) $\Rightarrow \alpha_1 = 2$.

β) $S_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{4}{2}[2\alpha_1 + (4-1)\omega] = 2(4 + 3 \cdot 4) = 32$

14310.α) $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

β) $2x(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow (2x = 0 \Leftrightarrow x = 0) \text{ ή } (x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3)$

γ) Οι ρίζες της εξίσωσης του β) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά είναι -3, 0, 3 και με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, αφού $\frac{-3+3}{2} = 0$.

14311.α) Ο αριθμητικός μέσος των αριθμών 8 και 16 είναι ο $\frac{8+16}{2} = \frac{24}{2} = 12$.

β) i. Ο 4ος όρος α_4 είναι ο αριθμητικός μέσος των $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_5 = 16$ που όπως δείξαμε στο α) ερώτημα είναι ο αριθμός 12, δηλαδή $\alpha_4 = 12$. Είναι $\omega = \alpha_4 - \alpha_3 = 12 - 8 = 4$.

ii. $\alpha_3 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 + 8 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0$.

14648.α) $\alpha_1 = 4 \cdot 1 - 2 = 2$, $\alpha_2 = 4 \cdot 2 - 2 = 6$, $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 6 - 2 = 4$

β) $\alpha_v > 120 \Leftrightarrow 4v - 2 > 120 \Leftrightarrow 4v > 122 \Leftrightarrow v > \frac{122}{4} = 30,5$.

Επειδή ο v είναι φυσικός αριθμός, είναι $v = 31$.

γ) $S_{30} = \frac{30}{2}[2\alpha_1 + (30-1)\omega] = 15(2 \cdot 2 + 29 \cdot 4) = 15 \cdot 120 = 1800$

14664.α) $\alpha_{10} = 21 \Leftrightarrow \alpha_1 + 9\omega = 21 \Leftrightarrow 3 + 9\omega = 21 \Leftrightarrow 9\omega = 18 \Leftrightarrow \omega = 2$.

β) $S_{10} = \frac{10}{2}[2\alpha_1 + (10-1)\omega] = 5(2 \cdot 3 + 9 \cdot 2) = 5(6 + 18) = 5 \cdot 24 = 120$

γ) Έστω v ο φυσικός αριθμός που ισούται με το πλήθος των ζητούμενων πρώτων όρων. Τότε κα πρέπει

$S_v = 168 \Leftrightarrow \frac{v}{2}[2\alpha_1 + (v-1)\omega] = 168 \Leftrightarrow \frac{v}{2}[2 \cdot 3 + (v-1) \cdot 2] = 168 \Leftrightarrow \frac{v}{2}(6 + 2v - 2) = 168 \Leftrightarrow$

$\frac{v}{2}(2v + 4) = 168 \Leftrightarrow v^2 + 2v - 168 = 0$

Η εξίσωση αυτή είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 676$ και ρίζες

$$v_1 = \frac{-2 + 26}{2} = 12$$

$$v_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm 26}{2} = \begin{cases} \nearrow \\ \searrow \end{cases}$$

$$v_2 = \frac{-2 - 26}{2} = -14 \text{ απορρίπτεται}$$

14757.α) Στο τέλος του 4ου μήνα θα είναι κατασκευασμένα 44 αυτοκίνητα, στο τέλος του 5ου μήνα θα είναι κατασκευασμένα 57 αυτοκίνητα και στο τέλος του 6ου μήνα θα είναι κατασκευασμένα 70 αυτοκίνητα.

β) Τα αυτοκίνητα που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 5$ και διαφορά $\omega = 13$ (τα αυτοκίνητα που κατασκευάζονται κάθε μήνα αυξάνονται σταθερά κατά 13).

γ) Τον πρώτο χρόνο (στο τέλος του 12ου μήνα δηλαδή) κατασκευάστηκαν:
 $\alpha_{12} = \alpha_1 + 11\omega = 5 + 11 \cdot 13 = 148$ αυτοκίνητα.

δ) Ζητάμε τον φυσικό αριθμό n για τον οποίο ισχύει:

$$\alpha_n \geq 250 \Leftrightarrow 5 + (n-1) \cdot 13 \geq 250 \Leftrightarrow 5 + 13n - 13 \geq 258 \Leftrightarrow 13n \geq 258 \Leftrightarrow n \geq \frac{258}{13}.$$

Κάνοντας την Ευκλείδεια διαίρεση $248:13$ προκύπτει ότι $258 = 19 \cdot 13 + 11$, οπότε $n \geq 19 + \frac{11}{13}$, άρα μετά από 20 μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250^ο αυτοκίνητο.

14818.α) $\omega = 8 - 4 = 4 = 12 - 8$

β) $S_{10} = \frac{10}{2} [2\alpha_1 + (10-1)\omega] = 5(2 \cdot 4 + 9 \cdot 4) = 5(8 + 36) = 5 \cdot 44 = 220$

γ) i. $S_v = 480 \Leftrightarrow \frac{v}{2} [2\alpha_1 + (v-1)\omega] = 480 \Leftrightarrow \frac{v}{2} [2 \cdot 4 + (v-1)4] = 480 \Leftrightarrow$

$$\frac{v}{2} (8 + 4v - 4) = 480 \Leftrightarrow \frac{v}{2} (4v + 4) = 480 \Leftrightarrow 2v^2 + 2v - 480 = 0 \Leftrightarrow v^2 + v - 240 = 0.$$

ii. Η εξίσωση $v^2 + v - 240 = 0$ είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 240 = 961$

και ρίζες $v_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 + 31}{2} = 15$ και $v_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 - 31}{2} = -16$ απορρίπτεται.

Άρα οι 15 πρώτοι όροι έχουν άθροισμα 480.

14923.α) Είναι $\alpha_{50} = 6560 \Leftrightarrow \alpha_1 + 49\omega = 6560$ (1), $\alpha_{100} = 11910 \Leftrightarrow \alpha_1 + 99\omega = 11910$ (2)

Αφαιρώντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε: $50\omega = 5350 \Leftrightarrow \omega = 107$

Από τη σχέση (1) έχουμε: $\alpha_1 + 49 \cdot 107 = 6560 \Leftrightarrow \alpha_1 = 6560 - 5243 = 1317$

β) Το κόστος για n καλεσμένους είναι:

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega = 1317 + (n-1) \cdot 107 = 1317 + 107n - 107 = 107n + 1210$$

γ) Το κόστος για 85 καλεσμένους είναι $\alpha_{85} = 107 \cdot 85 + 1210 = 10305$ ευρώ.

15064.α) $\omega = 2 - 1 = 1$

β) $S_v = \frac{v}{2} [2\alpha_1 + (v-1)\omega] = \frac{v}{2} [2 \cdot 1 + (v-1) \cdot 1] = \frac{v}{2} (2 + v - 1) = \frac{1}{2} v(v+1)$

γ) Θα βρούμε το άθροισμα των 400 πρώτων φυσικών και από αυτό θα αφαιρέσουμε το άθροισμα των πρώτων 199, τότε το υπόλοιπο είναι το άθροισμα των αριθμών από το 200 έως και το 400.

$$\text{Είναι } 200 + 201 + \dots + 400 = S_{400} - S_{199} = \frac{1}{2} 400(400+1) - \frac{1}{2} \cdot 199 \cdot (199+1) = 200 \cdot 401 - \frac{1}{2} \cdot 199 \cdot 200 = 80.200 - 19.900 = 60.300$$

Γεωμετρική πρόοδος

2ο θέμα

13406.α) Πράγματι οι αριθμοί 1, 2, 4 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αφού $2^2 = 1 \cdot 4$.

β) Αφού οι αριθμοί 1, x, 4 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου θα ισχύει:
 $x^2 = 1 \cdot 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

14304.α) Οι αριθμοί -3, 9, -27 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου γιατί
 $9^2 = (-3)(-27) \Leftrightarrow 81 = 81$.

β) Αφού οι αριθμοί 9, x, 81 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει ότι:
 $x^2 = 9 \cdot 81 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9 \cdot 81} = \pm\sqrt{9} \cdot \sqrt{81} = \pm 3 \cdot 9 = \pm 27$

14709.α) Παρατηρούμε ότι κάθε όρος της προόδου, μετά τον πρώτο όρο, προκύπτει από τον προηγούμενο επί 3. Από αυτό προκύπτει ότι η γεωμετρική πρόοδος έχει λόγο $\lambda = 3$.
 Είναι $\alpha_4 = \alpha_1 \lambda^3 = 1 \cdot 3^3 = 27$.

β) Είναι $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = S_5 = \alpha_1 \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = \frac{242}{2} = 121$

14872.α) $\alpha_2 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot 2^{2-1} = 8 \Leftrightarrow 2\alpha_1 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 = 4$

β) $\alpha_7 = 4 \cdot 2^{7-1} = 4 \cdot 64 = 256$

γ) $S_7 = 4 \cdot \frac{2^7 - 1}{2 - 1} = 4 \cdot 127 = 508$

14889.α) Ο λόγος λ της προόδου είναι $\lambda = \frac{8}{4} = 2$.

β) $\alpha_{10} = \alpha_1 \cdot \lambda^{10-1} = 4 \cdot 2^9 = 4 \cdot 512 = 2048$

γ) $S_{10} = \alpha_1 \frac{\lambda^{10} - 1}{\lambda - 1} = 4 \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 4 \cdot 1023 = 4092$

15168.α) $(x-1)(x^2-4)=0 \Leftrightarrow (x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$ ή $(x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2)$

β) Οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης σε αύξουσα σειρά είναι -2, 1, 2.
 Αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $1^2 = -2 \cdot 2 \Leftrightarrow 1 = -4$ άτοπο.

15169.α) $(2x-1)(x-2)(x-1)=0 \Leftrightarrow \left(2x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\right)$ ή
 $(x-2=0 \Leftrightarrow x=2)$ ή $(x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$.

β) Οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης σε αύξουσα σειρά είναι $\frac{1}{2}, 1, 2$.

Αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \Leftrightarrow 1 = 1$ ισχύει

$$15462.α) \lambda = \frac{1}{\frac{2}{1}} = \frac{1}{2}$$

$$β) \alpha_5 = \alpha_1 \cdot \lambda^4 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$γ) S_5 = \alpha_1 \frac{\lambda^5 - 1}{\lambda - 1} = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{32} - 1}{-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{32} - \frac{32}{32}}{-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{31}{32}}{-\frac{1}{2}} = \frac{31}{64}$$

4ο θέμα

$$14199.α) \text{ Είναι } \alpha_6 = -64 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^5 = -64 \quad (1) \quad \text{ και } \alpha_3 = -8 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^2 = -8 \quad (2).$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (1), (2) κατά μέλη, έχουμε: $\frac{\alpha_1 \cdot \lambda^5}{\alpha_1 \cdot \lambda^2} = \frac{-64}{-8} \Leftrightarrow \lambda^3 = 8 \Leftrightarrow \lambda = 2$ και από τη σχέση (2)

$$\text{προκύπτει: } \alpha_1 \cdot 2^2 = -8 \Leftrightarrow 4\alpha_1 = -8 \Leftrightarrow \alpha_1 = -2.$$

$$β) \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = S_5 = \alpha_1 \frac{\lambda^5 - 1}{\lambda - 1} = -2 \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = -2 \cdot 31 = -62.$$

14558.α) Το 16 είναι ο γεωμετρικός μέσος των $\frac{8}{x}$ και $32x$, αν και μόνο αν: $\frac{8}{x} \cdot 32x = 16^2 \Leftrightarrow 256 = 256$ ισχύει

$$β) \text{ i. Είναι } \lambda = \frac{32x}{16} \Leftrightarrow 4 = 2x \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{ii. Είναι } \alpha_1 = \frac{8}{x} = \frac{8}{2} = 4 \text{ και } \alpha_v = 4 \cdot 4^{v-1} = 2^2 \cdot (2^2)^{v-1} = 2^2 \cdot 2^{2v-2} = 2^{2+2v-2} = 2^{2v}$$

14893.α) Επειδή το μέγιστο ύψος που φτάνει η μπάλα μετά από κάθε αναπήδηση είναι το μισό του προηγούμενου, τα διαδοχικά ύψη είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με $\lambda = \frac{1}{2}$ και πρώτο όρο

$$\alpha_1 = h \cdot \alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1} = h \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{v-1} = \frac{h}{2^{v-1}}.$$

$$β) \alpha_2 = 2 \Leftrightarrow \frac{h}{2} = 2 \Leftrightarrow h = 4 \text{ m}$$

14922.α) Οι $k-1$, 6 και $3k$ είναι οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου, άρα ισχύει:

$$6^2 = 3k(k-1) \Leftrightarrow 36 = 3k^2 - 3k \Leftrightarrow 3k^2 - 3k - 36 = 0 \Leftrightarrow k^2 - k - 12 = 0$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με $\Delta = 49$ και ρίζες $k = 4$ ή $k = -3$.

β) Για $k = 4$,

i. οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι 3, 6 και 12 οπότε η γεωμετρική πρόοδος έχει λόγο $\lambda = \frac{6}{3} = 2$.

Ο τέταρτος όρος της προόδου είναι $12 \cdot 2 = 24$.

ii. η γεωμετρική πρόοδος έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 3$ και λόγο $\lambda = 2$, οπότε ο n -οστός όρος είναι

$$\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1} = 3 \cdot 2^{v-1}.$$

Ζητάμε την μικρότερη τιμή του $v \in \mathbb{N}$ για την οποία

$$\alpha_v > 3 \cdot 2^8 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{v-1} > 3 \cdot 2^8 \Leftrightarrow 2^{v-1} > 2^8 \Leftrightarrow v-1 > 8 \Leftrightarrow v > 9$$

Άρα ο πρώτος όρος που υπερβαίνει το αριθμό $3 \cdot 2^8 = 768$ είναι ο 10ος όρος της προόδου.

$$15059. \alpha) \text{ i. } \frac{x}{3} = \lambda \Leftrightarrow x = 3\lambda, \quad \frac{y-1}{4} = \lambda \Leftrightarrow y-1 = 4\lambda \Leftrightarrow y = 4\lambda + 1, \quad \frac{z+1}{5} = \lambda \Leftrightarrow z+1 = 5\lambda \Leftrightarrow z = 5\lambda - 1$$

$$\text{ii. } 3x - 4y + 5z = 45 \Leftrightarrow 3 \cdot 3\lambda - 4(4\lambda + 1) + 5(5\lambda - 1) = 45 \Leftrightarrow$$

$$9\lambda - 16\lambda - 4 + 25\lambda - 5 = 45 \Leftrightarrow 18\lambda = 54 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

$$\beta) x = 3\lambda = 9, y = 4\lambda + 1 = 12 + 1 = 13 \text{ και } z = 5\lambda - 1 = 15 - 1 = 14.$$

γ) Αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $13^2 = 9 \cdot 14 \Leftrightarrow 169 = 126$ αδύνατο

$$15065. \alpha) \alpha_{17} = \alpha_1 + (17-1)\omega = 16 \cdot 12 = 192$$

$$\beta) \text{ i. } \beta_6 = 192 \Leftrightarrow \beta_1 \cdot \lambda^5 = 192 \Leftrightarrow 6\lambda^5 = 192$$

$$\text{ii. } 6\lambda^5 = 192 \Leftrightarrow \lambda^5 = \frac{192}{6} = 32 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Η έννοια της συνάρτησης

2ο θέμα

13395. α) Είναι $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$ και $f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$ άρα $f(-2) > f(1)$.

β) $f(x) = f(1) \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ δεκτές αφού $x \in \mathbb{R}$.

14193. α) $f(x) = 2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7$

β) $f(x) \geq 7 \Leftrightarrow 2x + 3 \geq 7 \Leftrightarrow 2x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2$.

14658. α) $f(-2) = (-2)^2 + 4 = 4 + 4 = 8$, $f(1) = 1^2 + 4 = 1 + 4 = 5$

β) $f(x) = f(1) \Leftrightarrow x^2 + 4 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

14700. α) $f(0) = 0^2 + 2 = 2$, $f(-1) = 3 \cdot (-1) - 1 = -4$

β) Για $x < 0$ είναι $f(x) \leq 2 \Leftrightarrow 3x - 1 \leq 2 \Leftrightarrow 3x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 1$ και με συναλήθευση $x < 0$

14780. α) Η αντιστοίχιση $x \rightarrow y$ είναι συνάρτηση γιατί κάθε τιμή του x αντιστοιχεί σε μια μόνο τιμή του y .

β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A = \left\{-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 3\right\}$ και το σύνολο τιμών το

$$B = \left\{-6, -4, 0, -\frac{25}{4}\right\}.$$

14871. α) Είναι $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$ με $x \neq 2$.

β) Για κάθε $x \neq 2$ είναι $f(x) \leq 4 \Leftrightarrow x + 2 \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 4 - 2 \Leftrightarrow x \leq 2$. Όμως $x \neq 2$, οπότε τελικά $x < 2$.

4ο θέμα

13397. α) Είναι $f(2) = |2 - 3| + 4 = |-1| + 4 = 1 + 4 = 5$, $f(3) = |3 - 3| + 4 = 0 + 4 = 4$,
 $f(4) = |4 - 3| + 4 = 1 + 4 = 5$

β) $f(x) = 3 \Leftrightarrow |x - 3| + 4 = 3 \Leftrightarrow |x - 3| = -1$ η οποία είναι αδύνατη, αφού δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός του οποίου η απόλυτη τιμή να είναι αρνητική.

γ) i. $x \geq 3 \Leftrightarrow x - 3 \geq 0$ άρα $|x - 3| = x - 3$ και για $x \geq 3$ είναι $f(x) = x - 3 + 4 \Leftrightarrow f(x) = x + 1$.

ii. Με $x \geq 3$ έχουμε: $\frac{x^2}{16} + x = f(x) \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + x = x + 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$

$$14331.a) x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x-1) - 2(x-1) = (x-1)(x-2)$$

β) i) Για να ορίζεται η f πρέπει $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, άρα $A = \mathbb{R} - \{1\}$.

$$ii) \text{ Για κάθε } x \neq 1 \text{ είναι } f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{x-1}} = x-2$$

iii) Για κάθε $x \neq 1$ είναι $f(x) = -1 \Leftrightarrow x-2 = -1 \Leftrightarrow x = -1+2 = 1$ απορρίπτεται.

Άρα δεν υπάρχει τιμή του πραγματικού αριθμού x , για την οποία $f(x) = -1$.

$$14632.a) f(2) = |2-2|+2 = 2, f(-3) = |-3-2|-3 = 5-3 = 2.$$

β) i. Για $x > 2$ είναι $x-2 > 0$, οπότε $f(x) = x-2+x = 2x-2 = 2(x-1)$.

$$ii. f(x) = (x-2)(x-1) \Leftrightarrow 2(x-1) - (x-2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2-x+2) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(4-x) = 0 \Leftrightarrow (x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ απορρίπτεται}) \text{ ή } (4-x=0 \Leftrightarrow x=4 \text{ δεκτή})$$

$$14705.a) f(1) = |2-5|+4 = 3+4 = 7, f(3) = |6-5|+4 = 1+4 = 5 \text{ και } f\left(\frac{5}{2}\right) = \left|2 \cdot \frac{5}{2} - 5\right| + 4 = 0+4 = 4$$

β) f(x) = 0 $\Leftrightarrow |2x-5|+4 = 0 \Leftrightarrow |2x-5| = -4$ αδύνατη

γ) i. Για $x \geq \frac{5}{2}$ είναι $2x \geq 5 \Leftrightarrow 2x-5 \geq 0$ οπότε $|2x-5| = 2x-5$ και $f(x) = 2x-5+4 = 2x-1$.

$$ii. \frac{x^2}{5} + x = f(x) \Leftrightarrow \frac{x^2}{5} + x = 2x-1 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 10x-5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 5 = 0.$$

$$\text{Η εξίσωση έχει διακρίνουσα } \Delta = 5 \text{ και ρίζες } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ δεκτές.}$$

14716.a) Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$ και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{5+1}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

β) Για να ορίζεται η f πρέπει $x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ και $x \neq 3$, άρα $A = \mathbb{R} - \{2, 3\}$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x \cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-3)} = \frac{x}{x-3}$$

γ) Για $x \neq 2$ και $x \neq 3$ έχουμε:

$$f(x) = 4 \Leftrightarrow \frac{x}{x-3} = 4 \Leftrightarrow x = 4x-12 \Leftrightarrow x-4x = -12 \Leftrightarrow -3x = -12 \Leftrightarrow x = 4$$

14807.α) Από τον τρόπο κατασκευής του σχήματος, προκύπτει ότι το τετράγωνο Γ έχει πλευρά $2x$ και το τετράγωνο Δ έχει πλευρά $3x$, οπότε το σχήμα (ορθογώνιο) που σχηματίζεται έχει μήκος $2x + 3x = 5x$ και πλάτος $3x$. Άρα η περιμέτρός του, έστω $\Pi(x)$ είναι $\Pi(x) = 2(5x + 3x) = 16x, x > 0$.

β) Το εμβαδόν $E(x)$ του σχήματος είναι $E(x) = 3x \cdot 5x = 15x^2, x > 0$.

γ) Για $x > 0$ έχουμε: $E(x) < 240 \Leftrightarrow 15x^2 < 240 \Leftrightarrow x^2 < 16 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x < 4$.

Άρα το εμβαδόν του σχήματος είναι μικρότερο του 240 μόνο όταν το μήκος του αρχικού τετραγώνου είναι μικρότερο του 4.

14819.α) Για να ορίζεται η συνάρτηση πρέπει $3x^2 - x - 2 \neq 0$.

Το τριώνυμο $3x^2 - x - 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 25$ και ρίζες $x = 1$ ή $x = -\frac{2}{3}$.

Άρα $3x^2 - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq -\frac{2}{3}$, οπότε $A = \mathbb{R} - \left\{1, -\frac{2}{3}\right\}$.

β) Είναι $3x^2 - x - 2 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 1) = (3x + 2)(x - 1)$

γ) $f(x) = \frac{x^2 - x}{3x^2 - x - 2} = \frac{x(x-1)}{(3x+2)(x-1)} = \frac{x}{3x+2}$

δ) $|f(x)| = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left| \frac{x}{2x+3} \right| = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{|x|}{|2x+3|} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow |2x+3| = 4|x| \Leftrightarrow 2x+3 = \pm 4x \Leftrightarrow$

$\left(2x+3=4x \Leftrightarrow 2x-4x=-3 \Leftrightarrow -2x=-3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \text{ δεκτή} \right)$ ή

$\left(2x+3=-4x \Leftrightarrow 2x+4x=-3 \Leftrightarrow 6x=-3 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2} \text{ δεκτή} \right)$

Γραφική παράσταση συνάρτησης

2ο θέμα

13500.α) $f(2) = 2 \cdot 2^2 - 1 = 8 - 1 = 7$ και $f(0) = 2 \cdot 0^2 - 1 = -1$

β) Επειδή $f(2) = 7$ και $f(0) = -1$ τα σημεία $A(2,7)$ και $B(0,-1)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f .

14890.α) i. Τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$ είναι δύο, το $(-2, 0)$ και το $(1, 0)$.

Με τον $y'y$ άξονα το σημείο τομής είναι το $(0, -2)$.

ii. Η γραφική παράσταση βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ άξονα για $x \in (-2, 1)$.

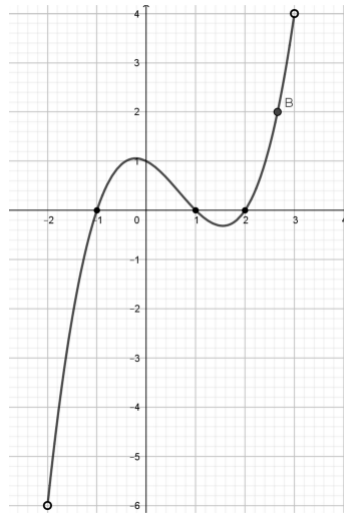
β) Στη γραφική παράσταση υπάρχουν δυο σημεία με τεταγμένη $y = 4$, το $(-3, 4)$ και το $(2, 4)$.

14966.α) $A_f = (-2, 2)$

β) 1 σημείο

γ) i. $(-1, 0)$, $(1, 0)$ και $(2, 0)$

ii. Για $x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$

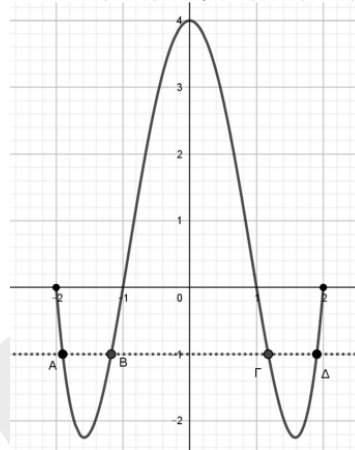


15424.α) $A_f = [-2, 2]$

β) 4 σημεία

γ) i. $(-2, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$ και $(2, 0)$

ii. Για $x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$



15461.α) $A_f = \left[-\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right]$

β) i. το σημείο της γραφικής παράστασης της f που έχει τετμημένη 2 είναι το $(2, 1)$ άρα $f(2) = 1$.

Το σημείο της γραφικής παράστασης της f που έχει τετμημένη 3 είναι το $(3, -1)$, άρα $f(3) = -1$.

ii. Το σημείο της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη 4 είναι το $(-4, 4)$, άρα $f(x) = 4 \Leftrightarrow x = -4$

γ) Επειδή $A_f = \left[-\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right]$, δεν υπάρχει σημείο στη γραφική παράσταση της f που να έχει τετμημένη 4.

4ο θέμα

13462. α) $|x - 1| = 4 \Leftrightarrow (x - 1 = 4 \Leftrightarrow x = 5) \text{ ή } (x - 1 = -4 \Leftrightarrow x = -3)$

β) Για να έχει η εξίσωση $x^2 - Sx + P = 0$ ρίζες το 5 και το -3 θα πρέπει το S να είναι το άθροισμα των δύο ριζών της (1) και P το γινόμενό τους. Επομένως $S = 2$ και $P = -15$

γ) Για να ανήκει το A στο πρώτο τεταρτημόριο πρέπει να έχει θετικές συντεταγμένες. Έχει τεταγμένη ίση με $5 > 0$ επομένως πρέπει να έχει και θετική τετμημένη. Άρα πρέπει $\rho = 5$.

13396. α) Πρέπει $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ άρα $A = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

β) Επειδή $f(3) = \frac{3}{3-2} = \frac{3}{1} = 3$ το σημείο $M(3, 3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f . Επιπλέον

$f(1) = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$, οπότε το σημείο $N(1, 1)$ δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

$$\gamma) f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{x-2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = x-2 \Leftrightarrow x = -2 \text{ δεκτή αφού πρέπει } x \neq 2.$$

14318.α) Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από την αρχή O , ισχύει $f(0) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{2 \cdot 0 + \alpha}{0 + 3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{3} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

β) Για $\alpha = 0$ είναι $f(x) = \frac{2x}{x+3}$, $x \neq -3$.

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x+3} = 1 \Leftrightarrow 2x = x+3 \Leftrightarrow 2x - x = 3 \Leftrightarrow x = 3 \text{ δεκτή}$$

$$\gamma) \text{ Είναι } f(x) = x \Leftrightarrow \frac{2x}{x+3} = x \Leftrightarrow 2x = x^2 + 3x \Leftrightarrow 0 = x^2 + 3x - 2x \Leftrightarrow$$

$$x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } (x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1) \text{ δεκτές λύσεις}$$

$$\mathbf{14472.α)} f(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

β) Επειδή $f(-2) = 3$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M(-2, 3)$.

$$\gamma) f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(1, 0)$ και $(-1, 0)$.

$$\delta) f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$$

$$\mathbf{14816.α)} f(0) = |0 - 2| + 3 = 2 + 3 = 5, f(2) = |2 - 2| + 3 = 3 \text{ και } f(-2) = |-2 - 2| + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$\beta) f(x) = 7 \Leftrightarrow |x - 2| + 3 = 7 \Leftrightarrow |x - 2| = 4 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 4 \Leftrightarrow$$

$$(x - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 6) \text{ ή } (x - 2 = -4 \Leftrightarrow x = -2)$$

$$\gamma) f(x) = 2 \Leftrightarrow |x - 2| + 3 = 2 \Leftrightarrow |x - 2| = -1 \text{ αδύνατη.}$$

Άρα δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση να πάρει την τιμή 2.

14768.α) Για $x = 0$, παίρνουμε $g(0) = 0^2 - 16 = -16$, άρα η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -16)$.

$$\text{Είναι } g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4.$$

Άρα η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $B(4, 0)$ και $\Gamma(-4, 0)$.

$$\beta) f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4x - 20 = x^2 - 16 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Είναι $f(2) = 4 \cdot 2 - 20 = -12$, άρα το μοναδικό κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων είναι το $\Delta(2, -12)$.

$$\gamma) f(x) = -24 \Leftrightarrow 4x - 20 = -24 \Leftrightarrow 4x = -24 + 20 \Leftrightarrow 4x = -4 \Leftrightarrow x = -1.$$

14817.α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $x \neq 0$, άρα $A = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$.

β) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$, οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(1, 0)$. Η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον $y'y$ άξονα, γιατί $x \neq 0$.

γ) $f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 1 \Leftrightarrow x-1=x \Leftrightarrow -1=0$ αδύνατο.

Άρα στη γραφική παράσταση της f δεν υπάρχει σημείο με τεταγμένη 1.

14822.α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της γραφικής της παράστασης, δηλαδή το $A = [-6, 8]$.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $(-2, 6)$, οπότε $f(-2) = 6$. Ακόμη διέρχεται από τα σημεία $(0, 4)$ και $(3, 1)$, άρα $f(0) = 4$ και $f(3) = 1$.

γ) Οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει ότι $f(x) = 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$, δηλαδή $x = -5$, $x = 4$.

δ) Οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει ότι $f(x) < 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$, δηλαδή $x \in [-6, -5) \cup (4, 8]$.

15099.α) Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = 3$ είναι τα $(2, 3)$ και $(8, 3)$, οι τετμημένες τους είναι 2 και 8.

β) $f(x) = 3 \Leftrightarrow |x-5| = 3 \Leftrightarrow x-5 = \pm 3 \Leftrightarrow (x-5=3 \Leftrightarrow x=8) \text{ ή } (x-5=-3 \Leftrightarrow x=2)$

γ) i. Οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την $y = 3$, άρα $x \in (2, 8)$.

ii. $|x-5| < 3 \Leftrightarrow -3 < x-5 < 3 \Leftrightarrow 2 < x < 8$

Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$

2ο θέμα

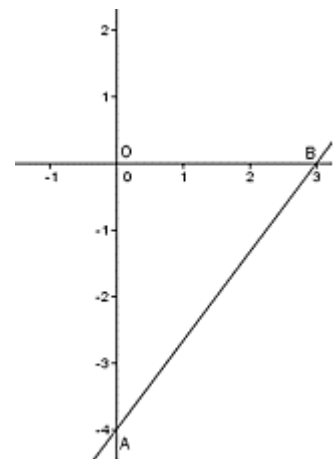
14461α) Για $x = 0$ είναι $y = \frac{4}{3} - 4$ και για $y = 0$ είναι

$0 = \frac{4}{3}x - 4 \Leftrightarrow \frac{4}{3}x = 4 \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$, οπότε η γραφική παράσταση

της f τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(0, -4)$ και $B(3, 0)$.

β) Το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές OB , OA και ισχύει $(OB) = 3$ και $(OA) = 4$. Επομένως το εμβαδόν του E είναι:

$$E = \frac{(OA)(OB)}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

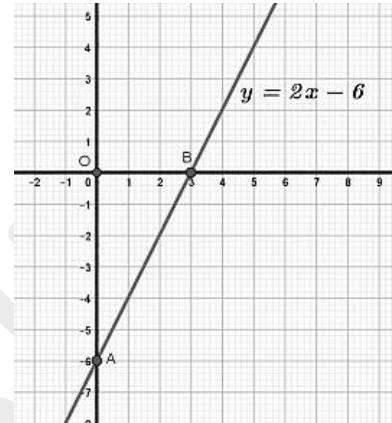


14643.α) Η κλίση της ευθείας είναι $\alpha = \frac{3-1}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1$

β) Η ευθεία έχει εξίσωση της μορφής $y = -x + \beta$. Επειδή διέρχεται από το σημείο $A(3,1)$ ισχύει ότι $1 = -3 + \beta \Leftrightarrow 4 = \beta$, οπότε η ε έχει εξίσωση $y = -x + 4$.

14767.α) $f(0) = 2 \cdot 0 - 6 = -6$ και $f(3) = 2 \cdot 3 - 6 = 6 - 6 = 0$

β) Η γραφική παράσταση της f είναι μια ευθεία, η οποία, με βάση τα παραπάνω, τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(3,0)$ και τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -6)$. Έτσι, έχουμε το παρακάτω σχήμα.



14827.α) Επειδή η ε διέρχεται από το A , ισχύει ότι $2 = 2 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2$.

β) Είναι $\varepsilon: y = 2x + 2$.

Το σημείο B έχει $y = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$, άρα $B(-1, 0)$.

4ο θέμα

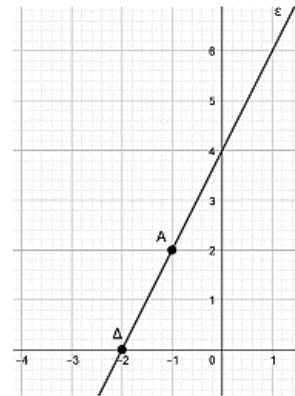
14197.α) Για να ανήκει το σημείο A στην ε πρέπει $2 = 2(-1) + 4 \Leftrightarrow 2 = -2 + 4$ που ισχύει, άρα το σημείο A ανήκει στην ευθεία.

Για να ανήκει το σημείο B στην ε πρέπει $1 = 2 \cdot 6 + 4 \Leftrightarrow 1 = 16$ αδύνατο, άρα το σημείο B δεν ανήκει στην ευθεία.

Για να ανήκει το σημείο Γ στην ε πρέπει $6 = 2 \cdot 1 + 4 \Leftrightarrow 6 = 6$ αδύνατο, άρα το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία.

β) Για $y = 0$ είναι $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$. Άρα το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $x'x$ είναι το $\Delta(-2,0)$.

γ) Σημειώνουμε στο καρτεσιανό επίπεδο δύο από τα σημεία της ευθείας που βρήκαμε στα προηγούμενα ερωτήματα, π.χ. τα $A(-1,2)$ και $\Delta(-2,0)$ και τη σχεδιάζουμε όπως στο διπλανό σχήμα.



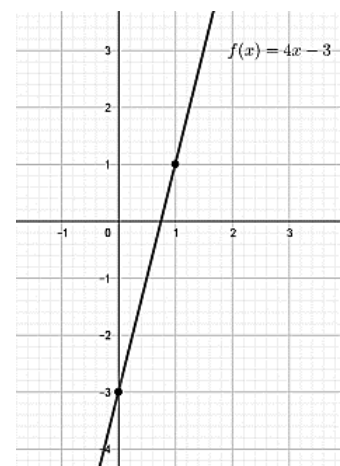
14382.α) i. Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$ και

$f(0) = 4 \cdot 0 - 3 = -3$, άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες

στα σημεία $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ και $(0, -3)$.

ii. Είναι $f(1) = 4 \cdot 1 - 3 = 4 - 3 = 1$ άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $(1,1)$.

β) i. Είναι $f(x) = 21 \Leftrightarrow 4x - 3 = 21 \Leftrightarrow 4x = 24 \Leftrightarrow x = 6$, άρα το σημείο της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη 21 είναι το $(6,21)$.



ii. Η γραφική παράσταση της f είναι ευθεία.

Για να χαράξουμε την ευθεία αυτή χρειαζόμαστε δυο σημεία.

Δυο από τα σημεία που βρήκαμε στα παραπάνω ερωτήματα είναι τα $(0, -3)$ και $(1, 1)$. Οπότε η γραφική παράσταση της f είναι η ευθεία του διπλανού σχήματος:

14642.α) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2.$

Άρα, τα σημεία τομής είναι τα $A(0, 0)$ και $B(2, 0)$.

β) Για να βρούμε τα σημεία τομής της της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = -1$, λύνουμε την εξίσωση $f(x) = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Άρα το κοινό σημείο είναι το $\Gamma(1, -1)$.

γ) Οι τετμημένες των σημείων A , Γ και B είναι οι αριθμοί $0, 1$ και 2 αντίστοιχα.

Ισχύει ότι: $1 - 0 = 2 - 1 = 1$. Άρα, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega = 1$.

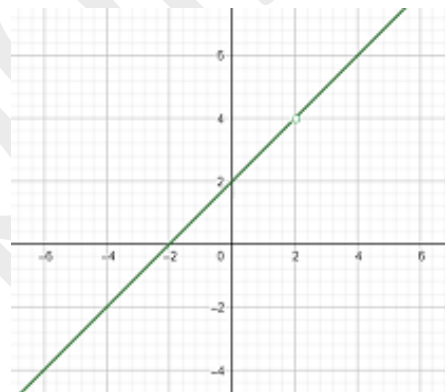
14657.α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$, άρα $A = \mathbb{R} - \{2\}$.

β) i. Για $x \neq 2$ είναι $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$

ii. Για να σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f παίρνουμε πίνακα τιμών με $x \neq 2$

x	y
0	2
2	0

Τοποθετούμε τα σημεία $(0, 2)$ και $(-2, 0)$ στους άξονες $x'x$ και $y'y$. Προκύπτει το παρακάτω σχήμα, η ευθεία $y = x + 2$ αποτελεί την γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης. Από την ευθεία εξαιρείται το σημείο $(2, 4)$ λόγω του περιορισμού.



14708.α) i. Ισχύει αν $\varepsilon // \delta$ τότε οι δύο ευθείες θα έχουν την ίδια κλίση. Η κλίση της ευθείας δ είναι -3 . Άρα $\alpha = -3$, δηλαδή η κλίση της ευθείας ε είναι -3 .

ii. Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον $x'x$ είναι αμβλεία διότι η κλίση της ε είναι $\alpha = -3 < 0$.

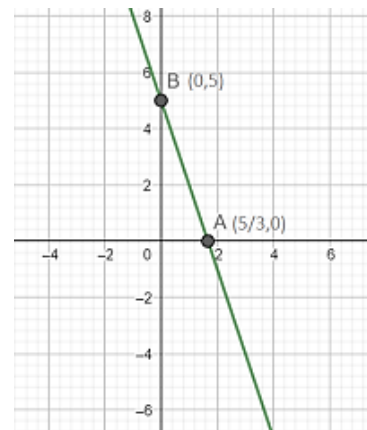
β) i. Η ευθεία τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τεταγμένη $y=0$.

Για $y=0$ έχουμε: $-3x + 5 = 0 \Leftrightarrow -3x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}.$

Άρα το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $x'x$ είναι το $A\left(\frac{5}{3}, 0\right)$.

Για $x=0$ έχουμε: $y=5$. Άρα το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα $y'y$ είναι το $B(0, 5)$.

ii. Για να σχεδιάσουμε την ευθεία, ενώνουμε τα σημεία που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα, δηλαδή A και B τα οποία βρίσκονται πάνω στους άξονες.



14779.α) Το σημείο τομής της ευθείας (ε) με τον άξονα $y'y$ είναι το $A(0, 3)$.

β) Η κλίση της ευθείας (ε) είναι $\alpha = \tan B = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

γ) Από το α) ερώτημα έχουμε $\beta = 3$ και από το β) ερώτημα έχουμε $\alpha = \frac{1}{2}$ άρα η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $y = \frac{1}{2}x + 3$.

14999.α) $(0,0)$ και $(7,7)$.

β) Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$, άρα $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 6$

γ) Οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από τη γραφική παράσταση της g , άρα $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in (0, 7)$

15045.α) Τα σημεία συνάντησης των δρόμων είναι : $A(0,2)$, $B(2,2)$ και $\Gamma(1,0)$.

β) Βλέπουμε πως ο δρόμος C_3 είναι παράλληλος με τον άξονα $x'x$ και τέμνει τον $y'y$ στο 2, άρα έχει εξίσωση $y = 2$.

γ) Η ευθεία $ΑΓ$ έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$.

Επειδή διέρχεται από το A , ισχύει ότι $2 = \alpha \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2$.

Επειδή διέρχεται από το σημείο Γ , ισχύει ότι $0 = \alpha \cdot 1 + 2 \Leftrightarrow \alpha = -2$, άρα $C_2 : y = -2x + 2$.

δ) $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB) \cdot (\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$

14821.α) Η κλίση της ευθείας (ε) είναι $\alpha = \frac{6-0}{3-0} = 2$.

Η ευθεία (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων, οπότε έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x$, όπου $\alpha = 2$. άρα είναι η $y = 2x$.

β) i. Η ευθεία (η) είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) οπότε έχουν την ίδια κλίση. Επομένως η κλίση της ευθείας (η) είναι 2 και αφού διέρχεται από το $K(0, 4)$, δηλαδή τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 4, θα έχει εξίσωση $y = 2x + 4$.

ii. Η τετμημένη του σημείου τομής της ευθείας (η) με τον άξονα $x'x$, είναι η λύση της εξίσωσης $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$, άρα είναι το σημείο $(-2, 0)$.

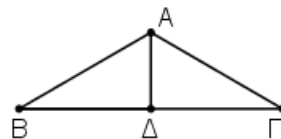
Κριτήρια Ισότητας Τριγώνων

2^ο Θέμα

12535.α) Η ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου, οπότε $\hat{B}\hat{A}\hat{D} = \frac{\hat{A}}{2} = 60^\circ$.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν:

- $AB = AG$ από την υπόθεση
 - την ΑΔ κοινή πλευρά
 - $\hat{B}\hat{A}\hat{D} = \hat{G}\hat{A}\hat{D}$ γιατί η ΑΔ είναι η διχοτόμος του τριγώνου
- Οπότε σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

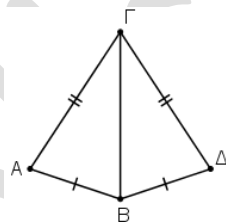


12538.α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ έχουν:

- $AB = BD$,
- $AG = GD$
- ΒΓ κοινή πλευρά

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ίσα, απέναντι από ίσες πλευρές υπάρχουν ίσες γωνίες, άρα $\hat{B}\hat{A}\hat{G} = \hat{B}\hat{A}\hat{G} = 75^\circ$.



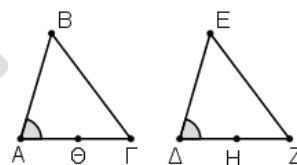
12454.α) Επειδή το Θ είναι μέσο της ΑΒ ισχύει ότι $A\Theta = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Επειδή το Η είναι μέσο της ΔΖ ισχύει ότι $\Delta H = \frac{\Delta Z}{2} = \frac{4}{2} = 2$

β) Τα τρίγωνα ΑΓΘ και ΔΕΗ έχουν:

- $AG = DE$ (δεδομένα)
- $\angle A = \angle \Delta$ (δεδομένα)
- $A\Theta = \Delta H$ από το ερώτημα (α)

Από το κριτήριο ισότητας Π-Γ-Π τα τρίγωνα ΑΓΘ και ΔΕΗ είναι ίσα.

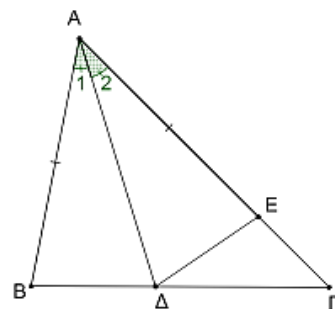


13436.α) Είναι $AE = AG - EG = 7 - 2 = 5$.

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΔ τα οποία έχουν:

- $AD = AD$, κοινή πλευρά.
- $AB = AE = 5$, από τα δεδομένα και το ερώτημα α).
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ γιατί η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α.

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΔ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ).



13445.α) Οι γωνίες $\hat{A}\hat{O}\hat{Z}$ και $\hat{B}\hat{O}\hat{H}$ είναι κατακορυφήν γωνίες άρα είναι ίσες.

$$\text{Είναι } \hat{A}\hat{O}\hat{Z} + \hat{A}\hat{O}\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{O}\hat{Z} + 80^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{O}\hat{Z} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ = \hat{B}\hat{O}\hat{H}$$

β) Τα τρίγωνα ΑΟΖ και ΒΟΗ έχουν:

- $OZ = OH = 3$, από δεδομένα
- $OA = OB = 2$, αφού είναι $OA = AH - OH = 5 - 3 = 2$ και $OB = BZ - OZ = 5 - 3 = 2$.
- $\hat{A}\hat{O}\hat{Z} = \hat{B}\hat{O}\hat{H} = 100^\circ$

Συνεπώς, τα τρίγωνα ΟΑΖ και ΟΒΗ είναι ίσα γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές τις πλευρές γωνίες ίσες.

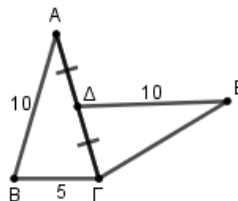
13527.α) Το σημείο Δ είναι το μέσο του ΑΓ, άρα

$$\Delta\Gamma = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{10}{2} = 5 = B\Gamma$$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ έχουν:

- $AB = ED = 10$, από τα δεδομένα.
- $AG = EG$, γιατί $AG = AB = 10$ και $EG = ED = 10$.
- $B\Gamma = \Delta\Gamma$, από το ερώτημα α).

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι ίσα, γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (κριτήριο ΠΠΠ).



γ) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΕΔΓ, που αποδείχθηκε στο προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει ότι η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση με τη γωνία Ε του τριγώνου ΕΔΓ, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές τους ΒΓ και ΔΓ αντίστοιχα.

13681.α) 1) Οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΒΑΓ είναι οι ΑΒ και ΑΓ.

2) Οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΒΔΓ είναι οι ΔΒ και ΔΓ.

3) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΔΓ η γωνία ΓΒΔ είναι ίση με την γωνία ΒΓΔ.

4) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΑΓ η γωνία ΒΓΑ είναι ίση με την γωνία ΓΒΑ.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν:

- $AB = AG$ (πρόταση 1 του α) ερωτήματος)
- $DB = DG$ (πρόταση 2 του α) ερωτήματος)
- $AD = AD$ (κοινή πλευρά)

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι ίσα γιατί έχουν τρεις πλευρές ίσες μία προς μία (κριτήριο ΠΠΠ).

γ) 1. → β) 2. → γ) 3. → α)

13682.α) Τα τρίγωνα ΟΒΜ και ΟΓΜ έχουν:

- $OB = OG$ (από δεδομένα)
- $\widehat{BOM} = \widehat{GOM}$
- $OM = OM$ (κοινή πλευρά)

Άρα, τα τρίγωνα ΟΒΜ και ΟΓΜ είναι ίσα, γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (Κριτήριο ΠΓΠ).

β) 1. Η γωνία $\widehat{OBM}$ του τριγώνου ΟΒΜ είναι ίση με την γωνία $\widehat{OGM}$ του τριγώνου ΟΓΜ.

2. Η γωνία $\widehat{OMB}$ του τριγώνου ΟΒΜ είναι ίση με την γωνία $\widehat{OMG}$ του τριγώνου ΟΓΜ.

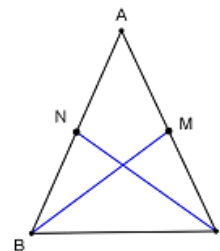
γ) Οι γωνίες $\widehat{BMx}$ και $\widehat{GMx}$ είναι ίσες, ως παραπληρωματικές γωνίες των ίσων γωνιών $\widehat{OMB}$ και $\widehat{OMG}$ της πρότασης 2 του β) ερωτήματος.

13683.α) Αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και η πλευρά ΒΓ είναι η βάση του, τότε οι ίσες πλευρές του θα είναι οι ΑΒ και ΑΓ, δηλαδή $AB = AG$. Οι ίσες γωνίες του θα είναι οι γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{G}$ ως προσκείμενες στη βάση του ΒΓ, δηλαδή $\widehat{B} = \widehat{G}$.

β) Έστω ΒΜ και ΓΕ οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις πλευρές του ΑΓ και ΑΒ.

ι. Τα τρίγωνα ΒΓΜ και ΓΒΝ έχουν:

- $B\Gamma = B\Gamma$ ως κοινή πλευρά
- $\widehat{B} = \widehat{G}$



• $GM = BN$ ως μισά των ίσων πλευρών AG και AB από το α) ερώτημα.
Συνεπώς, τα τρίγωνα BGM και GBN είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ).

ii. Αφού τα τρίγωνα BGM και GBN είναι ίσα, τότε ως άμεσο συμπέρασμα της ισότητάς τους είναι $GN = BM$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους $\hat{B}$ και $\hat{G}$ αντίστοιχα.

13685.α) Είναι $OA = OB$ ως ακτίνες του κύκλου, άρα το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές με βάση BG , οπότε $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$.

β) Τα τρίγωνα OAG και OBD έχουν:

• $OA = OB$, ως ακτίνες του κύκλου.

• $AG = BD$, από τα δεδομένα.

• $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$

Άρα τα τρίγωνα OAG και OBD θα είναι ίσα γιατί έχουν δυο πλευρές και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ).

γ) Αφού τα τρίγωνα OAG και OBD είναι ίσα (από το β) ερώτημα) θα είναι και $OG = OD$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{B}_1$ αντίστοιχα.

4^ο Θέμα

12512.α) Επειδή $AB = AG$ (1) είναι και $AD = AE$ (2), οπότε το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές.

β) Αφαιρώντας τις (1), (2) προκύπτει: $AB - AD = AG - AE \Leftrightarrow BD = GE$

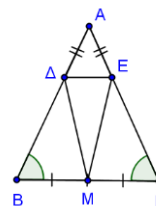
γ) i. Τα τρίγωνα BDM και MEG έχουν:

1) $BD = GE$

2) $BM = MG$ γιατί το M είναι μέσο της BG και

3) $\hat{B} = \hat{G}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ABG .

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.



ii. Επειδή τα τρίγωνα BDM και MEG είναι ίσα, έχουν και $MD = ME$, οπότε το τρίγωνο MDE είναι ισοσκελές.

12698.α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle BDA$ και $\triangle BEA$ έχουν:

• την DB κοινή πλευρά

• $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ γιατί η BD είναι διχοτόμος από την υπόθεση

Άρα τα δύο τρίγωνα είναι ίσα, οπότε $AD = DE$ ως πλευρές των ίσων τριγώνων που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες B_1 και B_2 αντίστοιχα.

Επίσης τα ίσα τρίγωνα, έχουν και τις τρίτες τους γωνίες ίσες. Δηλαδή τις γωνίες BDA και BDE αντίστοιχα, επομένως θα είναι και $AB = EB$, ως ευθύγραμμα τμήματα που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες, ίσων τριγώνων.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle DZA$ και $\triangle DZE$ έχουν:

• $DA = DE$, λόγω του (α) ερωτήματος

• $\hat{AZD} = \hat{EZD}$, ως κατακορυφήν γωνίες

Άρα τα δύο τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν τις πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ορθές τους γωνίες ίσες, δηλαδή $DZ = DG$.

γ) Τα ορθογώνια τρίγωνα ABG και EBZ έχουν:

- $AB = EB$ λόγω του (α)
 - Τη γωνία B κοινή
- Άρα τα δύο τρίγωνα $ABΓ$ και EBZ είναι ίσα.

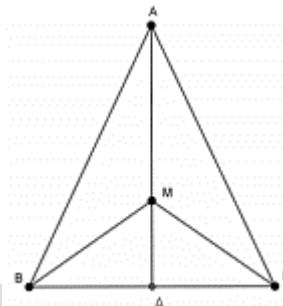
12699.α) Τα τρίγωνα MAB , $MAΓ$ έχουν

- την MA κοινή πλευρά
- $MB = MΓ$, από την υπόθεση
- $AB = AΓ$, από την υπόθεση

Οπότε τα τρίγωνα MAB και $MAΓ$ είναι ίσα (ΠΠΠ).

β) Λόγω του (α) θα είναι $\hat{MAB} = \hat{MAG}$, ως γωνίες των ίσων τριγώνων MAB , $MAΓ$ που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές τους MB και $MΓ$ αντίστοιχα. Άρα η MA διχοτομεί τη γωνία A .

γ) Λόγω του (β) η AD είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$, άρα θα είναι και ύψος, οπότε $AD \perp BΓ$, επομένως $MD \perp BΓ$, δηλαδή το MD είναι ύψος του τριγώνου $MBΓ$.



12837.α) Επειδή $AB = AΓ$ και $BD = GE$ θα είναι και $AB + BE = AΓ + GE$ ή $AD = AE$ οπότε το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα BDM και GEM έχουν:

- $BD = GE$, από την υπόθεση.
 - $MB = MΓ$, γιατί το M είναι μέσο της $BΓ$.
 - $\hat{DBM} = \hat{EGM}$ ως παραπληρωματικές γωνίες των ίσων γωνιών B και $Γ$ του ισοσκελούς τριγώνου $ABΓ$.
- Οπότε συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα MBD και MGE είναι ίσα (ΠΓΠ).

γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ η AM είναι διάμεσος, άρα και διχοτόμος της γωνίας A . Έτσι στο ισοσκελές τρίγωνο ADE η AZ είναι διχοτόμος οπότε θα είναι και ύψος. Δηλαδή η AZ είναι κάθετη στην DE .

12840.α) Τα τρίγωνα ADB και $ADΓ$ έχουν:

- την AD κοινή πλευρά
- $\hat{ADB} = \hat{ADΓ}$, από την υπόθεση
- $A\hat{B} = A\hat{Γ}$ από την υπόθεση

Δηλαδή, έχουν από δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες, οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα ΠΓΠ.

β) Λόγω του ερωτήματος (α), είναι $\hat{ADB} = \hat{ADΓ}$ ως γωνίες των ίσων τριγώνων, που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές τους DB και $DΓ$ αντίστοιχα.

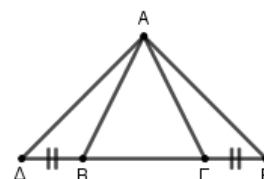
γ) Λόγω του ερωτήματος (α) έχουμε $AB = AΓ$, ως πλευρές των ίσων τριγώνων ADB και $ADΓ$, που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{ADB}$ και $\hat{ADΓ}$, αντίστοιχα. Άρα το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ισοσκελές και λόγω του ερωτήματος (β), η AD είναι διχοτόμος της γωνίας BAG . Έτσι, στο ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$, η AE είναι διχοτόμος, άρα θα είναι και διάμεσος, οπότε το E είναι το μέσο της $BΓ$.

12972.α) Είναι $\hat{B} = \hat{Γ}$ επειδή $ABΓ$ ισοσκελές τρίγωνο με βάση $BΓ$.

Τότε: $\hat{B}_{εξ} = 180^\circ - \hat{B} = 180^\circ - \hat{Γ} = \hat{Γ}_{εξ}$.

β) Τα τρίγωνα ABD και $AΓE$ έχουν:

- $AB = AΓ$, από υπόθεση.

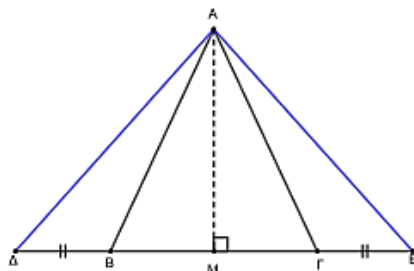


- $BD = GE$, από υπόθεση.
- $\hat{B}_{εξ} = \hat{Γ}_{εξ}$, από το α) ερώτημα.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες, δηλαδή είναι ίσα με το κριτήριο Π-Γ-Π.

γ) Ύψος τριγώνου είναι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από μία κορυφή του στο φορέα της απέναντι πλευράς. Τα σημεία Δ, Β, Γ και Ε βρίσκονται στην ίδια ευθεία από κατασκευή. Τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν κοινή κορυφή το σημείο Α, το οποίο δεν ανήκει στην ευθεία αυτή.

Η κάθετη από σημείο εκτός ευθείας είναι μοναδική, επομένως από το σημείο Α υπάρχει μοναδική κάθετη στην ευθεία ΔΕ και είναι το τμήμα ΑΜ. Δηλαδή τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν το ίδιο ύψος από την κορυφή Α, οπότε ο μαθητής έχει δίκιο.



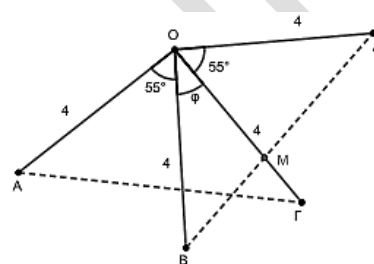
12974.α) i. $\hat{A}\hat{O}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{O}\hat{B} + \varphi = 55^\circ + \varphi$ και

$\hat{B}\hat{O}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{O}\hat{\Gamma} + \varphi = 55^\circ + \varphi$, άρα $\hat{A}\hat{O}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{O}\hat{\Delta}$.

ii. Τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΒΟΔ έχουν:

- $OA = OB = 4$, από υπόθεση
- $OG = OD = 4$, από υπόθεση
- $\hat{A}\hat{O}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{O}\hat{\Delta}$

Άρα τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες, οπότε είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο Π-Γ-Π.



β) Αν το σημείο Μ είναι μέσο του τμήματος ΒΔ, τότε το τμήμα ΟΜ θα είναι διάμεσος της βάσης ΒΔ στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΟΔ.

Επειδή όμως η διάμεσος της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής, το τμήμα ΟΜ θα είναι και διχοτόμος της γωνίας ΒΟΔ. Δηλαδή θα πρέπει $\hat{B}\hat{O}\hat{M} = \hat{M}\hat{O}\hat{\Delta} = 55^\circ$ ή αλλιώς $\varphi = 55^\circ$.

Πράγματι, αν $\varphi = 55^\circ$ τότε στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΟΔ το τμήμα ΟΜ είναι διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του, επομένως είναι και διάμεσος. Δηλαδή το Μ είναι το μέσο του ΒΔ.

13287.α) Στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ:

- $AB = AD$, από υπόθεση
- $GB = GD$, από υπόθεση
- ΓΑ κοινή πλευρά

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ έχουν τις πλευρές τους μία προς μία ίσες, άρα είναι ίσα.

Οπότε $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{A} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ διότι είναι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΔ αντίστοιχα.

Άρα η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΓ του ερωτήματος

α) προκύπτει ότι $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma}$ (1), διότι είναι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΓΒ και ΓΔ αντίστοιχα.

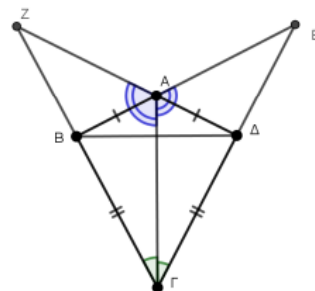
Επιπλέον $\hat{Z}\hat{A}\hat{B} = \hat{E}\hat{A}\hat{\Delta}$ (2) ως κατακορυφήν γωνίες.

Λόγω των (1) και (2) έχουμε :

$$\hat{Z}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{Z}\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{E}\hat{A}\hat{\Delta} + \hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{E}\hat{A}\hat{\Gamma}$$

γ) Τα τρίγωνα ΖΑΓ και ΕΑΓ έχουν:

- $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Gamma}\Delta$



- ΑΓ κοινή πλευρά
- $\hat{Z}\hat{A}\Gamma = \hat{E}\hat{A}\Gamma$

Τα τρίγωνα ΖΑΓ και ΕΑΓ έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες μία προς μία ίσες, οπότε από το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα. Συνεπώς ισχύει $\Gamma Z = \Gamma E$, διότι είναι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{Z}\hat{A}\Gamma, \hat{E}\hat{A}\Gamma$.

13288.α) Τα τρίγωνα ΑΚΛ και ΒΚΛ έχουν:

- $KA = KB$, ως ακτίνες του κύκλου με κέντρο Κ
- $LA = LB$, ως ακτίνες του κύκλου με κέντρο Λ
- ΚΛ = ΚΛ κοινή πλευρά

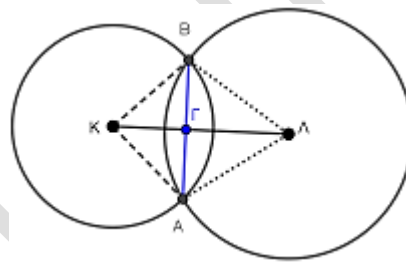
Τα τρίγωνα έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι ίσα από το κριτήριο ΠΠΠ.

β) Στο τρίγωνο ΑΚΒ οι πλευρές του ΚΑ και ΚΒ είναι ίσες. Άρα το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ. Ομοίως στο τρίγωνο ΑΛΒ οι πλευρές του ΛΑ και ΛΒ είναι ίσες. Άρα το τρίγωνο ΑΛΒ είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ.

i. Από την ισότητα των τριγώνων ΑΚΛ και ΒΚΛ του ερωτήματος α) προκύπτει ότι οι γωνίες

$\hat{A}\hat{K}\hat{L}$ και $\hat{B}\hat{K}\hat{L}$ ίναι ίσες, αφού είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΛΑ και ΛΒ αντίστοιχα.

Άρα η ΚΓ είναι διχοτόμος τη γωνίας $\hat{A}\hat{K}\hat{B}$ ή η ΚΛ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\hat{K}\hat{B}$.



ii. Το τρίγωνο ΑΚΒ, όπως δείξαμε στο ερώτημα β), είναι ισοσκελές και η ΚΓ από i) είναι η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής $\hat{A}\hat{K}\hat{B}$.

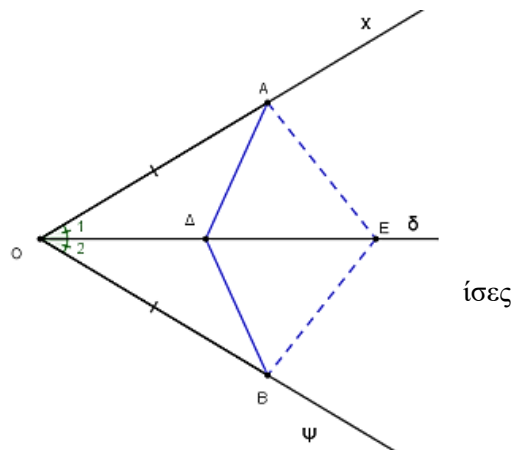
Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής στο ισοσκελές τρίγωνο θα είναι και ύψος του τριγώνου, άρα η ΚΓ είναι κάθετη στην ΑΒ, ή η ΚΛ είναι κάθετη στη χορδή ΑΒ

13496.α) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΔ έχουν:

- $OA = OB$, από υπόθεση,
- ΟΔ κοινή πλευρά,
- $\hat{A}\hat{O}\hat{D} = \hat{B}\hat{O}\hat{D}$ επειδή η ΟΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{xO}\hat{\psi}$.

Επομένως είναι ίσα, επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΟΑΔ και ΟΒΔ προκύπτει ότι $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{O} = \hat{B}\hat{\Delta}\hat{O}$ γιατί είναι απέναντι από τις πλευρές ΟΑ και ΟΒ αντίστοιχα. Επομένως είναι $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{E} = \hat{B}\hat{\Delta}\hat{E}$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{O}$ και $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{O}$ αντίστοιχα.



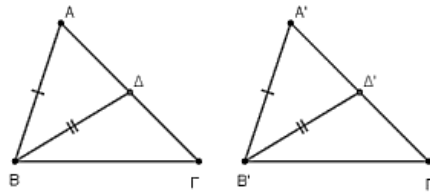
γ) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΔΕ έχουν:

- ΔΕ κοινή πλευρά,
- $\Delta A = \Delta B$, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}\hat{O}\hat{\Delta}$ και $\hat{B}\hat{O}\hat{\Delta}$ των ίσων τριγώνων ΟΑΔ και ΟΒΔ αντίστοιχα,
- $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{E} = \hat{B}\hat{\Delta}\hat{E}$

Επομένως είναι ίσα, επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες. Άρα $AE = BE$, γιατί είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{E}$ και $\hat{B}\hat{\Delta}\hat{E}$ αντίστοιχα.

Επομένως ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

13502.α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A'B'\Delta'$ έχουν:
 $B\Delta = B'\Delta'$, από υπόθεση.
 $AB = A'B'$, από υπόθεση.
 $A\Delta = A'\Delta'$, ως μισά των ίσων πλευρών AG και $A'G'$.



Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Επομένως $\hat{A} = \hat{A}'$ επειδή είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές $B\Delta$ και $B'\Delta'$ αντίστοιχα.

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:

$AB = A'B'$, από υπόθεση.

$AG = A'G'$, από υπόθεση.

$\hat{A} = \hat{A}'$

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες. Οπότε ο ισχυρισμός του μαθητή δεν είναι σωστός. Τα στοιχεία που έχουμε αρκούν για να θεωρήσουμε ότι τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.

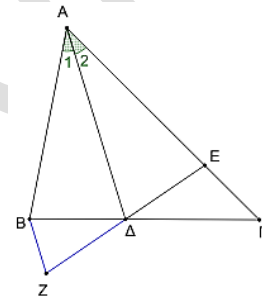
13530.α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AE\Delta$ τα οποία έχουν:

• $A\Delta = A\Delta$, κοινή πλευρά.

• $AB = AE$, γιατί από τα δεδομένα έχουμε $AB = 10$ και $AE = AG - AE = 14 - 4 = 10$.

• $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ αφού η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A .

Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AE\Delta$ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ).



β) Αφού τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AE\Delta$ είναι ίσα, θα είναι ίσες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}_1, \hat{A}_2$ δηλαδή $B\Delta = \Delta E$.

γ) Είναι $\Delta Z = \Delta E$, από τα δεδομένα και $B\Delta = \Delta E$ από το προηγούμενο ερώτημα, άρα $\Delta Z = B\Delta$. Δηλαδή το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές, οπότε οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του BZ είναι ίσες, άρα $\hat{\Delta BZ} = \hat{\Delta ZB}$.

13794.α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $BA\Delta$ και $GA\epsilon$ που έχουν:

i. $AB = AG$ (υπόθεση)

ii. $A\Delta = A\epsilon$ (υπόθεση)

iii. $\hat{B}\hat{A}\Delta = \hat{G}\hat{A}\epsilon$ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες. Άρα $B\Delta = \Gamma\epsilon$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}\hat{A}\Delta$ και $\hat{G}\hat{A}\epsilon$.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και από την σύγκριση του ερωτήματος α) έχουμε $\hat{A}\hat{B}\Delta = \hat{A}\hat{\Gamma}\epsilon$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές $A\Delta$ και $A\epsilon$. Έχουμε $\hat{A}\hat{B}\Delta + \hat{B} = \hat{A}\hat{\Gamma}\epsilon + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Gamma}\hat{B}\Delta = \hat{B}\hat{\Gamma}\epsilon$.

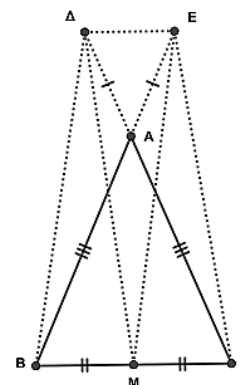
γ) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $BM\Delta$ και $\Gamma M\epsilon$ που έχουν:

i. $BM = \Gamma M$ (M μέσο της πλευράς $B\Gamma$)

ii. $B\Delta = \Gamma\epsilon$ (από ερώτημα α))

iii. $\hat{M}\hat{B}\Delta = \hat{M}\hat{\Gamma}\epsilon$

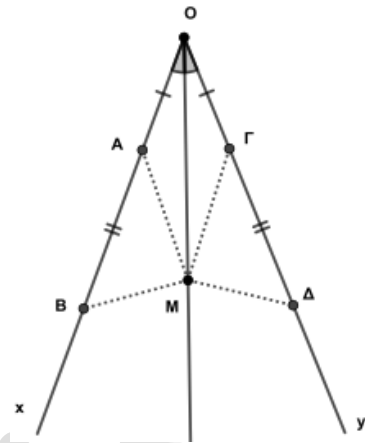
Τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, άρα $M\Delta = M\epsilon$.



13795.α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα OMB και OMA που έχουν:

- i. OM κοινή πλευρά
- ii. OB=OA (υπόθεση)
- iii. $\hat{BOM} = \hat{AOM}$ (OM διχοτόμος της γωνίας x O y)

Τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, άρα MB=MA ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{BOM}$ και $\hat{AOM}$.



β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AMB και ΓMD που έχουν:

- i. MB=MA (από ερώτημα α))
- ii. $\hat{AMB} = \hat{GMD}$ (από την προηγούμενη σύγκριση και επειδή είναι απέναντι από την κοινή πλευρά OM)
- iii. AB=ΓΔ (ως διαφορά ίσων τμημάτων OB-OA και OΔ-OΓ)

Τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, άρα $\hat{AMB} = \hat{GMD}$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές AB=OB-OA και ΓΔ=OΔ-OΓ.

γ) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα OAM και OΓM που έχουν:

- i. OM κοινή πλευρά
- ii. OA=OB (υπόθεση)
- iii. AM=ΓM (από την προηγούμενη σύγκριση και αφού είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{AMB}$ και $\hat{GMD}$)

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, άρα έχουν και $\hat{AMO} = \hat{GMO}$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές OA και OΓ.

13284.α) Τα τρίγωνα ABΓ και ZΔΕ έχουν:

- AB = ZΔ = 3
- AΓ = ZE = 5
- $\hat{A} = \hat{Z} = 40^\circ$

Άρα τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές και τις περιεχόμενες γωνίες αυτών των πλευρών ίσες μία προς μία, οπότε από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) i. Στο διάλογο φαίνεται η Αθηνά να συνειδητοποιεί ότι η γωνία των 58° στο τρίγωνο ΚΛΜ είναι η περιεχόμενη στις ίσες πλευρές ΚΛ και ΚΜ του ισοσκελούς τριγώνου ΚΛΜ, οι οποίες είναι οι δύο πλευρές του τριγώνου ΚΛΜ που είναι ίσες μία προς μία με δύο πλευρές του τριγώνου ΗΘΙ. Από την άλλη, η γωνία των 58° στο τρίγωνο ΗΘΙ δεν είναι η περιεχόμενη στις ίσες πλευρές ΗΘ και ΗΙ, οι οποίες είναι ίσες μία προς μία με τις δύο πλευρές του τριγώνου ΚΛΜ, αλλά είναι μία από τις γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου.

ii. Έχει δίκιο η Αθηνά. Στο ΚΛΜ η γωνία της κορυφής είναι 58° και καθεμιά από τις γωνίες στη βάση

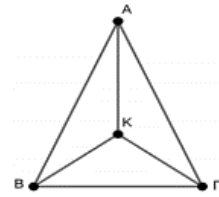
είναι ίση με $\frac{180^\circ - 58^\circ}{2} = 61^\circ$, οπότε τα δύο τρίγωνα δεν έχουν τις περιεχόμενες γωνίες στις ίσες πλευρές ίσες.

Στο ΗΘΙ η μια γωνία στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου είναι 58° οπότε και η άλλη γωνία στη βάση θα είναι 58° , έτσι η γωνία στην κορυφή του τριγώνου ΗΘΙ θα είναι $180^\circ - 2 \cdot 58^\circ = 64^\circ$.

Τα τρίγωνα ενώ έχουν ίσες μία προς μία τις δύο πλευρές τους (ΗΙ = ΚΜ και ΗΘ = ΚΛ) δεν έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, οπότε δεν είναι ίσα.

3^ο Θέμα

12527.α) Από την υπόθεση έχουμε $KB = KG$, οπότε το τρίγωνο $KBΓ$ είναι ισοσκελές με βάση τη $BΓ$. Επομένως οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες. Δηλαδή η γωνία $KBΓ$ είναι ίση με τη γωνία $KΓB$.



β) Τα τρίγωνα BAK και $ΓAK$ έχουν:

- την AK κοινή πλευρά
- $AB = AG$ από την υπόθεση
- $KB = KG$ από την υπόθεση

οπότε τα τρίγωνα BAK και $KAΓ$ είναι ίσα (ΠΠΠ).

γ) Επειδή λόγω του (β) ερωτήματος τα τρίγωνα BAK και $ΓAK$ είναι ίσα, θα είναι ίσες και οι γωνίες KAB και KAG , γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές KB και KG , οπότε η AK είναι διχοτόμος της γωνίας BAG .

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

2^ο Θέμα

13680.α) Η γωνία $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{E}$ του τριγώνου $\Delta A E$, ως παραπληρωματική γωνία της γωνίας $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 90^\circ$ του τριγώνου $B A \Gamma$, οπότε $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{E} = 90^\circ$. Οπότε το τρίγωνο $\Delta A E$ είναι ορθογώνιο. Επομένως ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

β) Τα τρίγωνα $B A \Gamma$ και $\Delta A E$ έχουν:

- $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{E} = 90^\circ$
- $BA = \Delta A = 3$
- $A\Gamma = AE = 4$, αφού $AE = AB + BE = 3 + 1 = 4$.

Άρα τα τρίγωνα $B A \Gamma$ και $\Delta A E$ είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

γ) Η γωνία $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{A}$ του τριγώνου $B A \Gamma$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{\Delta}\hat{E}\hat{A}$ του τριγώνου $\Delta A E$.

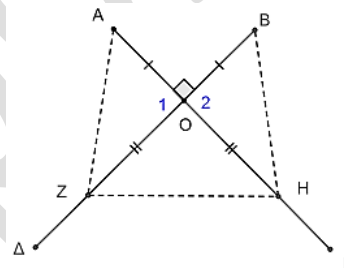
Η γωνία $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{E}$ του τριγώνου $\Delta A E$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $B A \Gamma$.

4^ο Θέμα

13688.α) Τα τρίγωνα $O A Z$ και $O B H$ έχουν:

- $OA = OB$ από δεδομένα
- $OZ = OH$ από δεδομένα
- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 90^\circ$ γιατί τα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέμνονται κάθετα.

Συνεπώς, τα τρίγωνα $O A Z$ και $O B H$ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές ίσες μία προς μία.



β) Αφού τα τρίγωνα $O A Z$ και $O B H$ του ερωτήματος α) είναι ίσα έχουν και όλα τα άλλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα.

Δηλαδή είναι $\hat{O}\hat{A}\hat{Z} = \hat{O}\hat{B}\hat{H}$ (ισότητα 1) ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές OZ και OH αντίστοιχα, καθώς και $AZ = BH$ (ισότητα 3) ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{O}_1$ και $\hat{O}_2$ αντίστοιχα.

Συνεπώς, άμεσα συμπεράσματα της ισότητας των τριγώνων του α) ερωτήματος είναι οι ισότητες 1 και 3.

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε ότι είναι $AZ = BH$. Επειδή το Z είναι σημείο της ΔB και η ΔB είναι κάθετη στην $A\Gamma$ από τα δεδομένα, θα είναι $AZ = ZH$ όταν η ΔB είναι μεσοκάθετος του τμήματος AH .

Οπότε είναι $OA = OH$ (1).

Όμοια, επειδή το H είναι σημείο της $A\Gamma$ και η $A\Gamma$ είναι κάθετη στην ΔB από τα δεδομένα, θα είναι $ZH = HB$ όταν η $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ZB .

Οπότε θα είναι $OB = OZ$ (2).

Από (1) και (2) θα προκύπτει ότι για να είναι το ZH ίσο με το AH και το BH αρκεί να είναι

$OA = OZ = OH = OB$.

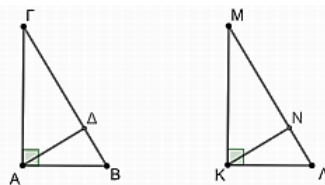
13779.α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABΓ και ΚΛΜ:

i. $\hat{A} = \hat{K} = 90^\circ$

ii. $AG = KM$ (από υπόθεση)

iii. $BΓ = ΛΜ$ (από υπόθεση)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την υποτείνουσα ίσες μία προς μία.



β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΚΛΝ:

i. $\hat{Δ} = \hat{N} = 90^\circ$ (εφόσον τα ΑΔ και ΚΝ είναι ύψη)

ii. $AB = ΚΛ$ (από την ισότητα των τριγώνων ABΓ και ΚΛΜ)

iii. $\hat{B} = \hat{Λ}$ (ως γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΓ και ΚΜ των ίσων τριγώνων ABΓ και ΚΛΜ)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσά τους και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

Επομένως οι κάθετες πλευρές τους ΑΔ και ΚΝ είναι ίσες, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{Λ}$, στα ίσα τρίγωνα.

γ) Σε ίσα ορθογώνια τρίγωνα, τα ύψη τους που φέρονται από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίσα.

13793.α) Στο ισοσκελές τρίγωνο ABΓ το τμήμα ΑΔ είναι ύψος που αντιστοιχεί στη βάση ΒΓ άρα είναι και διχοτόμος δηλαδή ισχύει $\hat{B}\hat{A}\hat{D} = \hat{Γ}\hat{A}\hat{D}$.

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ που έχουν:

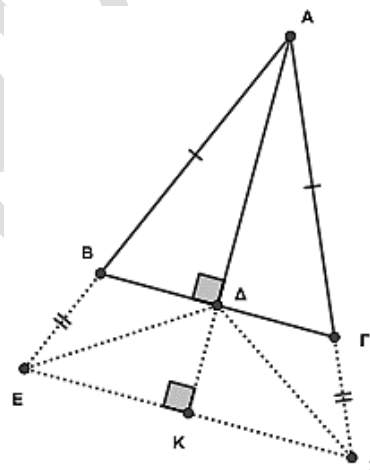
i. ΑΔ κοινή πλευρά

ii. $AE = AZ$ (ως άθροισμα ίσων τμημάτων $AB + BE$ και $AG + ΓΖ$)

iii. $\hat{B}\hat{A}\hat{D} = \hat{Γ}\hat{A}\hat{D}$

Τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

γ) Από τη σύγκριση του ερωτήματος β) έχουμε $ED = ΔΖ$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}\hat{A}\hat{D}$ και $\hat{Γ}\hat{A}\hat{D}$ των ίσων τριγώνων ΑΕΖ και ΑΖΔ, άρα το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισοσκελές με βάση ΕΖ και το τμήμα ΔΚ είναι ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του ΕΖ άρα είναι και διάμεσος δηλαδή το σημείο Κ είναι το μέσο του ΕΖ ή $EK = KZ$.



3^ο Θέμα

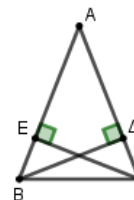
13788.α) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ τα οποία έχουν:

• $\hat{E} = \hat{Γ} = 90^\circ$

• ΒΓ κοινή πλευρά

• $\hat{B} = \hat{Γ}$ (προσκειμένες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου)

Τα τρίγωνα είναι ίσα αφού είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και έχουν μια οξεία γωνία ίση.



β) Από τη σύγκριση του α) ερωτήματος τα τρίγωνα ΒΓΕ και ΒΓΔ είναι ίσα, άρα οι πλευρές τους είναι μία προς μία ίσες. $BE = ΓΔ$ (1), γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}\hat{Γ}\hat{E}$ και $\hat{Γ}\hat{B}\hat{Δ}$ αντίστοιχα.

γ) Στο τρίγωνο ABΓ έχουμε $AE = AB - BE$ και $ΑΔ = ΑΓ - ΓΔ$ και επειδή το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές ($AB = ΑΓ$) και λόγω της σχέσης (1) έχουμε $AE = ΑΔ$.

ΚΥΚΛΟΣ – ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΣ - ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ

4^ο Θέμα

13503.α) i. Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΔ έχουν:

- ΟΑ = ΟΒ, από υπόθεση.
- ΟΔ κοινή.
- ΑΔ = ΒΔ, από υπόθεση.

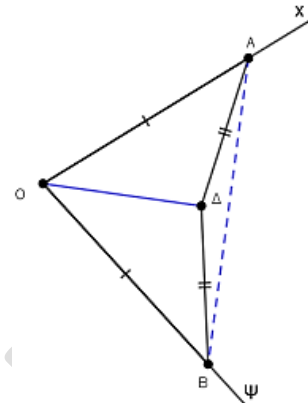
Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία.

ii. Από την ισότητα των τριγώνων ΟΑΔ και ΟΒΔ, έχουμε ότι

$\widehat{ΑΟΔ} = \widehat{ΒΟΔ}$ επειδή είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΔ και ΒΔ

αντίστοιχα. Επομένως, η ΟΔ είναι διχοτόμος της ΑΟΒ, οπότε:

$$\widehat{ΑΟΔ} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$



β) ΟΑ = ΟΒ, από υπόθεση, άρα το Ο ανήκει στην μεσοκάθετο της ΑΒ. ΔΑ = ΔΒ, από υπόθεση, άρα το Δ ανήκει στην μεσοκάθετο της ΑΒ. Επομένως, η ΟΔ είναι μεσοκάθετος της ΑΒ. Άρα, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

13651.α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ έχουν:

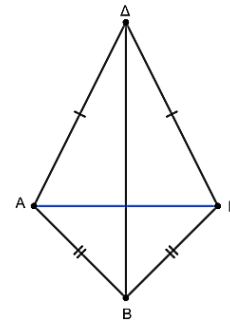
- ΑΔ = ΓΔ από υπόθεση
- ΑΒ = ΓΒ από υπόθεση
- ΔΒ κοινή πλευρά

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ είναι ίσα, αφού έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία (Π-Π-Π).

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΓΒΔ προκύπτει ότι

$\widehat{ΑΔΒ} = \widehat{ΒΔΓ}$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΓΒ αντίστοιχα. Άρα, η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΔΓ.

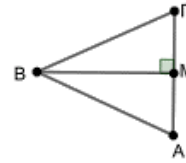
γ) Το σημείο Δ ισαπέχει από τα σημεία Α και Γ, αφού ΑΔ = ΓΔ. Επομένως, βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΑΓ. Όμοια, και το σημείο Β βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΑΓ, αφού ΑΒ = ΓΒ. Άρα, η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ. Συνεπώς, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι αληθής.



ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

2^ο Θέμα

13786.α) Το BM είναι διάμεσος του τριγώνου ABΓ, αλλά και ύψος του καθώς είναι κάθετο στην πλευρά ΑΓ. Επομένως, το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ.



β) i. Η περίμετρος του τριγώνου είναι ίση με 40.

Επομένως $AB + BΓ = 40 - ΑΓ = 40 - 12 = 28$ μέτρα.

Το ABΓ είναι ισοσκελές με $AB = BΓ$. Άρα $AB = 28:2 = 14$ μέτρα.

ii. Επίσης το M είναι μέσο του ΑΓ, άρα $AM = 12:2 = 6$ μέτρα. Άρα, για την περιφράξη χρειαζόμαστε $28 + 6 = 34$ μέτρα.

13789.α) Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $AB = ΑΓ$. Επομένως για τις γωνίες της βάσης του BΓ ισχύει ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

β) Από την υπόθεση ισχύει ότι $\hat{B} > \hat{A}$, άρα οι απέναντι πλευρές από τις γωνίες αυτές στο τρίγωνο ABΓ είναι ομοίως άνισες. Άρα $ΑΓ > BΓ$.

γ) Από την υπόθεση $\hat{B} > \hat{A}$ και από το α) έχουμε ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, άρα $\hat{\Gamma} > \hat{A}$, οπότε η μικρότερη γωνία του τριγώνου ABΓ είναι η $\hat{A}$.

4^ο Θέμα

13690.α) i. Αφού οι ΓΛ και BK είναι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις πλευρές AB και ΑΓ, τότε τα σημεία Λ και K θα είναι τα μέσα των πλευρών AB και ΑΓ και θα ισχύουν: $ΑΛ = ΛB = \frac{AB}{2}$ (1) και

$$AK = KΓ = \frac{ΑΓ}{2} \text{ (2).}$$

Και αφού είναι $AB = ΑΓ$ (από την υπόθεση), τότε από τις σχέσεις (1) και (2) θα είναι $ΛB = KΓ$ ως μισά ίσων τμημάτων.

ii. Τα τρίγωνα ΛBΓ και KΓB έχουν:

- $ΛB = KΓ$ (από το α) ερώτημα).
- $BΓ = BΓ$ (κοινή πλευρά).
- $\hat{ΛBΓ} = \hat{KΓB}$ ως προσκείμενες γωνίες στη βάση BΓ του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ.

Επομένως, τα τρίγωνα ΛBΓ και KΓB θα είναι ίσα γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ).

β) Αφού τα τρίγωνα ΛBΓ και KΓB είναι ίσα από το α) ii. ερώτημα, τότε θα είναι $\hat{ΛΓB} = \hat{KΒΓ}$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές BΛ και KΓ των ίσων τριγώνων. Οπότε το τρίγωνο BΘΓ θα είναι ισοσκελές γιατί έχει δυο γωνίες ίσες.

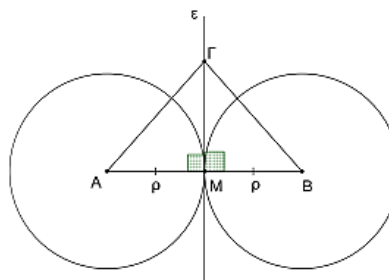
γ) Αν η διάμεσος BK που αντιστοιχεί στην πλευρά ΑΓ είναι και ύψος, τότε η BK θα είναι κάθετη στο μέσο του τμήματος ΑΓ, οπότε θα είναι μεσοκάθετος στο τμήμα ΑΓ. Το B ως σημείο της μεσοκαθέτου BK θα ισαπέχει από τα άκρα του, δηλαδή θα είναι $BA = BΓ$ (3). Επειδή το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $AB = ΑΓ$ και επειδή είναι $BA = BΓ$, από σχέση (3), προκύπτει ότι $BA = BΓ = ΓΑ$, άρα το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο γιατί έχει τρεις πλευρές ίσες.

ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΥΚΛΟΥ

4^ο Θέμα

13531.α) Το σημείο επαφής δύο κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά ανήκει στη διάκεντρό τους. Άρα η $\widehat{AMB}$ είναι ευθεία γωνία, οπότε $\widehat{AMB} = 180^\circ$.

β) Η εφαπτομένη ε είναι κάθετη στην διάκεντρο AB . Επιπλέον, το M είναι το μέσο της AB , αφού $AM = MB = \rho$. Άρα η ευθεία ε είναι μεσοκάθετος του τμήματος AB . Το σημείο Γ που ανήκει στην ε θα ισαπέχει από τα άκρα του AB , δηλαδή $AG = BG$.



γ) Τα σημεία A, M, B είναι συνευθειακά, αφού από το

ερώτημα α) έχουμε ότι $\widehat{AMB} = 180^\circ$.

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την AB , γιατί $AG = BG$. Για να είναι η AG κάθετη στη $B\Gamma$, θα πρέπει το τρίγωνο $AB\Gamma$ εκτός από ισοσκελές να είναι και ορθογώνιο με $\widehat{AGB} = 90^\circ$.

Σε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο οι οξείες γωνίες είναι συμπληρωματικές και ίσες με 45° η κάθε μία. Άρα $\widehat{MAG} = 45^\circ$.

ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

2^ο Θέμα

13775.α) Το $B\Gamma$ είναι ακτίνα του κύκλου με κέντρο B , άρα $B\Gamma = 3$. Το $A\Delta$ είναι ακτίνα του κύκλου με κέντρο A , άρα $A\Delta = 4$.

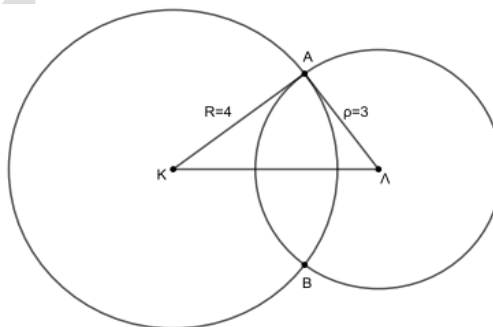
β) Η πρόταση ii. «Το AB είναι μικρότερο από 7» είναι η σωστή πρόταση, γιατί οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι, άρα η απόσταση των κέντρων τους είναι μικρότερη από το άθροισμα των ακτινών τους.

4^ο Θέμα

13498.α) Έστω οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) με $R = 4$, $\rho = 3$ και $K\Lambda = 5$.

i. Έχουμε $R + \rho = 7$ και $R - \rho = 1$.

Αφού $K\Lambda < R + \rho$ και $K\Lambda > R - \rho$, συμπεραίνουμε ότι οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω A και B , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



ii. Στο τρίγωνο $AK\Lambda$ είναι $AK > A\Lambda$, αφού $AK = R = 4$ και $A\Lambda = \rho = 3$.

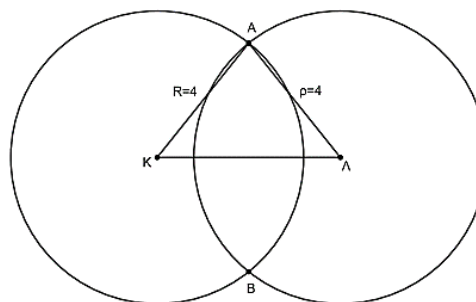
Οπότε, οι απέναντι γωνίες $\widehat{AK\Lambda}$ και $\widehat{K\Lambda A}$ των άνισων πλευρών AK και $A\Lambda$ αντίστοιχα θα είναι ομοίως άνισες. Δηλαδή, $\widehat{AK\Lambda} > \widehat{K\Lambda A}$.

β) Αν οι γωνίες $\widehat{AK\Lambda}$ και $\widehat{K\Lambda A}$

του τριγώνου $AK\Lambda$ γίνουν ίσες, τότε θα πρέπει οι απέναντι πλευρές τους AK και $A\Lambda$ αντίστοιχα να είναι ίσες. Σε αυτή την περίπτωση θα είναι

$\rho = R = 4$.

Άρα, το μήκος της ακτίνας ρ θα πρέπει να είναι ίσο με 4.



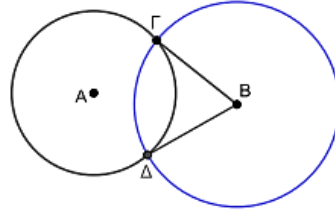
13783.α) Στο αρχικό σχήμα υπάρχει ο κύκλος $(A, 4)$. Σχεδιάζουμε κύκλο με κέντρο το B και ακτίνα $B\Gamma$, δηλαδή τον $(B, 5)$. Οι κύκλοι $(A, 4)$ και $(B, 5)$ τέμνονται, γιατί:

$$5 - 4 < AB < 5 + 4 \Leftrightarrow 1 < 7 < 9.$$

Άρα ισχύει $R - \rho < \delta < R + \rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το B , R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο A και $\delta = AB$ η διάκεντρός τους.

Επομένως οι κύκλοι τέμνονται και άρα έχουν δύο κοινά σημεία, το Γ και το Δ .

Το $B\Delta$ είναι το ζητούμενο ευθύγραμμο τμήμα.



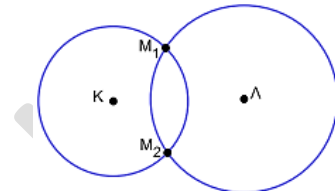
β) Υπάρχουν δύο περιπτώσεις.

1 η περίπτωση: Το M απέχει 4 από το K και 5 από το Λ .

Τότε το M είναι το κοινό σημείο των δύο κύκλων $(K, 4)$ και $(\Lambda, 5)$. Το σημείο αυτό μπορεί να βρεθεί, γιατί οι δύο κύκλοι τέμνονται εφόσον

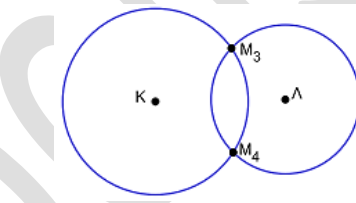
$$5 - 4 < K\Lambda < 5 + 4. \text{ Σχεδιάζουμε τους δύο κύκλους.}$$

Το M μπορεί να είναι στη θέση του M_1 ή του M_2 .



2 η περίπτωση: Το M απέχει 4 από το Λ και 5 από το K .

Τότε το M είναι το κοινό σημείο των δύο κύκλων $(K, 5)$ και $(\Lambda, 4)$. Με παρόμοιο συλλογισμό όπως στην πρώτη περίπτωση βρίσκουμε ότι το M μπορεί να είναι στη θέση του M_3 ή του M_4 , όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Παραλληλία

2^ο Θέμα

12963.α) Είναι $\hat{\phi}_2 = \hat{\alpha} = 27^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $y'y, x'x$ που τέμνονται από τη ΒΓ.

$\hat{\phi}_1 = \hat{\phi}_2 = 27^\circ$ λόγω διχοτόμησης.

α) Οι γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{A}\hat{B}x$ είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων $y'y, x'x$ που τέμνονται από την ΑΒ, άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}\hat{B}x = 2 \cdot 27^\circ = 54^\circ$

13686.α) Από τα δεδομένα έχουμε ότι ΑΜ διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, άρα το Μ θα είναι μέσο του ΒΓ. Τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ έχουν:

- $MB = MG$, αφού Μ μέσο του ΒΓ.
- $MD = ME$, από τα δεδομένα
- $\hat{B}\hat{M}\hat{D} = \hat{G}\hat{M}\hat{E}$ ως κατακορυφήν γωνίες.

Άρα τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα, γιατί έχουν δυο πλευρές και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ).

β) Αφού τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα από το α) ερώτημα, οι γωνίες $\hat{B}\hat{D}\hat{M}$ και $\hat{G}\hat{E}\hat{M}$ θα είναι ίσες, ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές τους ΜΒ και ΜΓ αντίστοιχα.

γ) Τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι παράλληλα, γιατί τεμνόμενα από την ΑΕ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες $\hat{B}\hat{D}\hat{M}$ και $\hat{G}\hat{E}\hat{M}$ ίσες (από το β) ερώτημα).

13821.α) Εφόσον η ΒΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\hat{B}\epsilon_1$ ισχύει ότι $\hat{A}\hat{B}H = \hat{H}\hat{B}\epsilon_1 = 51^\circ$.

β) Είναι $\hat{A}\hat{B}\epsilon_1 = \hat{A}\hat{B}H + \hat{H}\hat{B}\epsilon_1 = 102^\circ$. Άρα οι εντός και επί τα αυτά γωνίες $\hat{A}\hat{B}\epsilon_1 = 102^\circ$ και $\hat{B}\hat{A}H = 78^\circ$ των ϵ_1 και ϵ_2 με τέμνουσα την ΑΒ είναι παραπληρωματικές, οπότε οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες.

γ) Η ΓΔ τέμνει κάθετα την ϵ_2 από την υπόθεση ($\hat{A}\hat{G}\hat{D} = 90^\circ$) συνεπώς τέμνει κάθετα και την ϵ_1 που είναι παράλληλη της ϵ_2 . Άρα η γωνία $\hat{B}\hat{D}\hat{G}$ είναι ορθή.

4^ο Θέμα

12970.α) i. Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ έχουν:

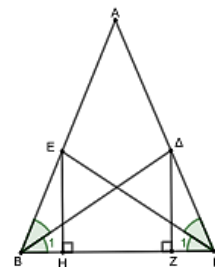
- ΒΓ κοινή πλευρά
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.
- $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \hat{\Gamma}_1$ ως μισά των ίσων γωνιών Β και Γ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ. Τα τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προκείμενες γωνίες στην πλευρά αυτή ίσες, άρα είναι ίσα με το κριτήριο Γ-Π-Γ.

ii. Έστω ΕΘ και ΔΗ οι κάθετες στην πλευρά ΒΓ.

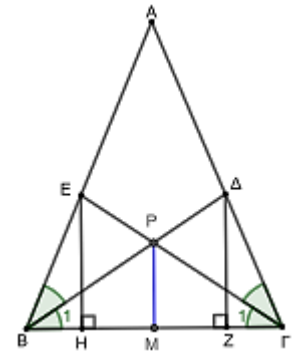
Από το α) ερώτημα τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα, άρα θα ισχύει $\hat{G}\hat{D} = \hat{B}\hat{E}$ (1) γιατί είναι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{B}_1$ και $\hat{\Gamma}_1$ αντίστοιχα.

Τα τρίγωνα ΕΒΗ και ΔΓΖ έχουν:

- $\hat{H} = \hat{Z} = 90^\circ$
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$
- $EB = \Delta\Gamma$ από τη σχέση (1)



Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε είναι και $EH = \Delta Z$ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες B και Γ αντίστοιχα.



β) Έστω P το σημείο τομής των BD και ΓΕ και M το μέσο της πλευράς BG. Επειδή $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ το τρίγωνο BPG είναι ισοσκελές με κορυφή το σημείο P. Το ευθύγραμμο τμήμα PM είναι διάμεσος της βάσης BG, αφού M είναι το μέσο του BG, επομένως θα είναι και ύψος, δηλαδή $PM \perp BG$. Άρα το τμήμα PM καθώς και τα τμήματα EH και ΔH είναι κάθετα τμήματα στο ίδιο τμήμα BG, οπότε είναι μεταξύ τους παράλληλα.

13001.α) i. Τα τρίγωνα ABD και EGD έχουν:

- $AD = DE$ από υπόθεση.
- $BD = DG$, διότι Δ μέσο της BG.
- $\hat{A}\hat{D}B = \hat{E}\hat{D}G$ ως κατακορυφήν.

Άρα τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες, οπότε από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ABD και EGD είναι ίσα.

ii. Η πλευρά ΓΕ του τριγώνου EGD είναι ίση με την πλευρά AB του τριγώνου ABD, οπότε η πλευρά ΓΕ έχει μήκος 3. Γιατί οι πλευρές ΓΕ και AB βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{E}\hat{D}G$ και $\hat{A}\hat{D}B$ αντίστοιχα.

β) Ο μαθητής ακολούθησε τη διαδρομή ADE, σε ευθεία γραμμή, και η εφαρμογή έδειξε ότι είχε διανύσει 8,5 χιλιόμετρα. Στο σχέδιο βλέπουμε ότι ακόμα και αν είχε πάει από το χωριό A στο χωριό Γ και από εκεί στο χωριό E που είναι μια πιο μακρινή διαδρομή από την ευθύγραμμη, θα είχε κάνει $5 + 3 = 8$ χιλιόμετρα. Αυτό μας δείχνει και η εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο AGE. $AE < AG + GE$ δηλαδή $AE < 5 + 3 = 8$. Οπότε δεν είναι δυνατό η διαδρομή AE να είναι 8,5 χιλιόμετρα, αφού θα πρέπει να είναι μικρότερη από 8 χιλιόμετρα.

13446. α) i. $\hat{A}\hat{E}Z = \hat{B}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων EZ και BG που τις τέμνει η AB.

$\hat{A}\hat{Z}E = \hat{\Gamma}$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων EZ και BG που τις τέμνει η AG.

ii. Αφού το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG$ τότε είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Όμως $\hat{A}\hat{E}Z = \hat{B}$ και $\hat{A}\hat{Z}E = \hat{\Gamma}$, άρα $\hat{A}\hat{E}Z = \hat{A}\hat{Z}E$ Οπότε το τρίγωνο AEZ έχει δυο γωνίες ίσες, άρα θα είναι ισοσκελές.

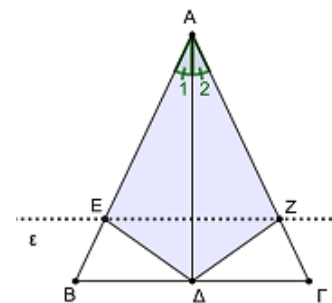
β) Τα τρίγωνα AED και AZD έχουν:

$AD = AD$ κοινή πλευρά

$AE = AZ$, διότι AEZ ισοσκελές τρίγωνο από προηγούμενο ερώτημα.

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ διότι η AD είναι διχοτόμος της γωνίας A.

Άρα τα τρίγωνα AED και AZD είναι ίσα γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες.

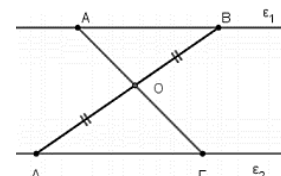


13495.α) Οι γωνίες ABO και ΓΔO είναι ίσες, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων e_1 και e_2 που τέμνονται από την BD.

β) Τα τρίγωνα ABO και ΓΔO έχουν:

- $BO = OD$, από υπόθεση,

- $\hat{A}\hat{O}B = \hat{\Delta}\hat{O}G$ ως κατακορυφήν,



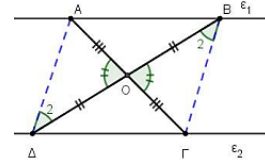
$$\hat{A}BO = \hat{G}\hat{A}O$$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

γ) Φέρνουμε τις ΑΔ και ΒΓ.

Τα τρίγωνα ΑΔΟ και ΓΒΟ έχουν:

- $AO = OG$, γιατί είναι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}BO$ και $\hat{G}\hat{A}O$ αντίστοιχα των ίσων τριγώνων ABO και $G\hat{A}O$,
- $OD = BO$, από υπόθεση,
- $\hat{A}\hat{O}D = \hat{B}\hat{O}G$ ως κατακορυφήν.



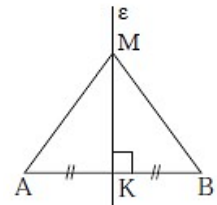
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες. Επομένως, οι γωνίες $\hat{A}_2$ και $\hat{B}_2$ είναι ίσες γιατί είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές AO και OG αντίστοιχα. Άρα, οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ είναι παράλληλες γιατί τέμνονται από την ΒΔ και σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες

$\hat{A}_2$ και $\hat{B}_2$ ίσες.

1^ο Θέμα

12462.α) i. Σ ii. Λ iii. Λ iv. Σ v. Σ

β) Έστω ευθύγραμμο τμήμα AB, Μ ένα σημείο, ώστε $MA = MB$ και Κ το μέσο του AB. Τότε το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές και η MK διάμεσός του, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα, η MK θα είναι και ύψος δηλαδή η MK είναι μεσοκάθετος του AB.



Άθροισμα γωνιών τριγώνου

2^ο Θέμα

12359.α) Επειδή το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ABΓ είναι 180° , έχουμε:

$$\hat{A} + 65^\circ + 48^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 113^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 180^\circ - 113^\circ = 67^\circ$$

β) Τα τρίγωνα ABΓ και ΔZE έχουν:

- AB = ΔZ από υπόθεση.

- ΑΓ = ΔΕ από υπόθεση.

- $\hat{A} = \hat{\Delta} = 67^\circ$

Επομένως είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

γ) Από την ισότητα των τριγώνων ABΓ και ΔEZ προκύπτει ότι BΓ = EZ, αφού είναι απέναντι πλευρές από τις ίσες γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ αντίστοιχα. Επομένως EZ = 9.

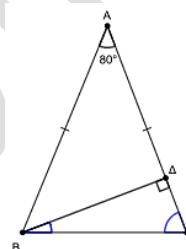
12463.α) Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με βάση τη BΓ, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Στο τρίγωνο ABΓ είναι: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 2\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow$

$$2\hat{B} = 180^\circ - 80^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 100^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 50^\circ \text{ οπότε και } \hat{\Gamma} = 50^\circ.$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔBΓ είναι:

$$\Delta\hat{B}\Gamma + \hat{\Delta} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{B}\Gamma + 90^\circ + 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{B}\Gamma = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$



12464.α) i. Οι γωνίες ω και B είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων BΓ και x'x που τέμνονται από την AB. Οπότε $\hat{\omega} = \hat{B} = 65^\circ$.

ii. Οι γωνίες φ και Γ είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων BΓ και x'x που τέμνονται από την ΑΓ. Οπότε $\hat{\phi} = \hat{\Gamma} = 58^\circ$.

β) Από τα ερωτήματα α, β, είναι $\hat{\omega} = 65^\circ$, $\hat{\phi} = 58^\circ$ και:

$$x'\hat{A}x = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} + \hat{\phi} + \hat{\theta} = 180^\circ \Leftrightarrow 65^\circ + 58^\circ + \hat{\theta} = 180^\circ \Leftrightarrow 123^\circ + \hat{\theta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\theta} = 180^\circ - 123^\circ = 57^\circ$$

12456.α) Στο αρχικό ισοσκελές τρίγωνο ABΓ είναι AB = ΑΓ άρα οι γωνίες της βάσης του BΓ είναι ίσες, δηλαδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Στο τρίγωνο ABΓ ισχύει ότι

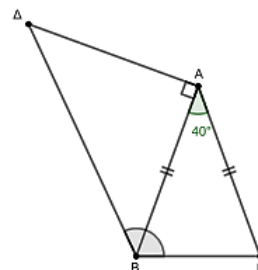
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 180^\circ - 40^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 140^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 70^\circ$$

β) Οι ίσες πλευρές του ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου BΑΔ, που κατασκευάζεται εξωτερικά του ABΓ, είναι οι AB και ΑΔ. Άρα οι γωνίες της βάσης του ΔB είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\Delta} = \Delta\hat{B}A$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου BΑΔ έχουμε ότι

$$\hat{\Delta} + \Delta\hat{A}B + \Delta\hat{B}A = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta\hat{B}A + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta\hat{B}A = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta\hat{B}A = 45^\circ.$$

Είναι $\Delta\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{B}A + \hat{B} = 45^\circ + 70^\circ = 115^\circ$



12511. α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία του A , είναι κατακορυφήν της γωνίας ΔAE , οπότε $\hat{A} = 80^\circ$.

β) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 70^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 30^\circ$.

γ) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ έχουν:

- $AB = A\Delta$ εφόσον από την υπόθεση το A είναι το μέσο του $B\Delta$
- $A\Gamma = AE$ εφόσον από την υπόθεση το A είναι το μέσο του ΓE
- $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{E}$ ως κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι ίσα (ΠΓΠ)

12532. α) Είναι $\hat{\omega} = \hat{A} = 40^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $A\Delta$.
Επίσης $\hat{\phi} = \hat{\Gamma} = 50^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $B\Gamma$.

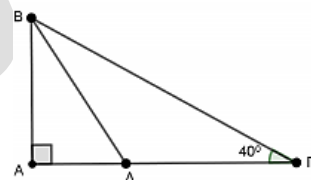
β) Στο τρίγωνο OAB έχουμε: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{A}\hat{O}\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 50^\circ + \hat{A}\hat{O}\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{O}\hat{B} = 90^\circ$ άρα το ευθύγραμμο τμήμα OA είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα OB .

12533. α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι

$$\hat{A} + \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 50^\circ.$$

β) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B οπότε λόγω του ερωτήματος (α), είναι

$$\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ.$$



γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι: $\hat{A} + \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} + \hat{B}\hat{\Delta}\hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 25^\circ + \hat{B}\hat{\Delta}\hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}\hat{\Delta}\hat{A} = 65^\circ$

12534. α) Είναι $\hat{A}_{\text{εξ}} + \hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow 140^\circ + \hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 40^\circ$

β) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 70^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 70^\circ$.

Επειδή $\hat{\Gamma} = \hat{B}$, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$.

12536. α) Επειδή $AB = A\Gamma$, είναι $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B}$.

β) i. Επειδή η AM είναι διχοτόμος της γωνίας A , ισχύει ότι $\hat{B}\hat{A}\hat{M} = \hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma} = 20^\circ$, οπότε $\hat{A} = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$.

ii. Στο αρχικό ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = A\Gamma$ άρα οι γωνίες της βάσης του $B\Gamma$ είναι ίσες, δηλαδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2\hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 180^\circ - 40^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 140^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 70^\circ \text{ οπότε και } \hat{\Gamma} = 70^\circ.$$

12537. α) Είναι $\hat{B}_{\text{εξ}} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

β) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 60^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ, \text{ οπότε το τρίγωνο } AB\Gamma \text{ είναι ορθογώνιο στο } A.$$

12658. α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΓ = ΒΓ, οι γωνίες της βάσης του ΑΒ είναι ίσες, δηλαδή $\hat{Γ}ΒΑ = \hat{Γ}ΑΒ = 55^\circ$.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι:

$$\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Α} + 55^\circ + 55^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Α} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

γ) Το ΓΜ είναι ύψος του ισοσκελούς ΑΒΓ που αντιστοιχεί στη βάση του. Άρα θα είναι και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του ισοσκελούς, δηλαδή της $\hat{Α}$. Επομένως $\hat{Α}Μ = \frac{\hat{Α}}{2} = 35^\circ$.

12962.α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, οπότε $\hat{Β} = \hat{Γ}$.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι:

$$\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 2\hat{Β} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{Β} = 180^\circ - 80^\circ \Leftrightarrow 2\hat{Β} = 100^\circ \Leftrightarrow \hat{Β} = 50^\circ \text{ οπότε και } \hat{Γ} = 50^\circ$$

β) Από την υπόθεσή έχουμε ότι ΒΔ=ΒΓ, επομένως το τρίγωνο ΓΒΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΔΓ. Οι γωνίες Γ και ΓΔΒ είναι ίσες ως προκείμενες στη βάση του ΔΓ, οπότε $\hat{Γ}ΔΒ = \hat{Γ} = 50^\circ$.

Στο τρίγωνο ΓΒΔ ισχύει ότι $\hat{Γ}ΒΔ + \hat{Γ}ΔΒ + \hat{Β} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Γ}ΒΔ + 50^\circ + 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Γ}ΒΔ = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

Επειδή $\hat{Α} = 80^\circ$, είναι $\hat{Α} = \hat{Γ}ΒΔ$.

12964.α) Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Α} + 65^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Α} = 180^\circ - 105^\circ \Leftrightarrow \hat{Α} = 75^\circ$$

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΔΕΖ έχουμε:

$$\hat{Ε} + \hat{Δ} + \hat{Ζ} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Ε} + 65^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Ε} = 180^\circ - 105^\circ \Leftrightarrow \hat{Ε} = 75^\circ$$

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΚΛΗ έχουμε:

$$\hat{Η} + \hat{Λ} + \hat{Κ} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Η} + 65^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Η} = 180^\circ - 105^\circ \Leftrightarrow \hat{Η} = 75^\circ$$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΗ έχουν:

• ΒΓ = ΛΗ = 4.6, από την υπόθεση

• $\hat{Β} = \hat{Λ} = 65^\circ$

• $\hat{Γ} = \hat{Η} = 40^\circ$

Σύμφωνα με το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΗ είναι ίσα.

12965.α) Στο τρίγωνο ΓΑΒ είναι ΓΑ=ΓΒ, οπότε αυτό είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ. Άρα οι γωνίες

$\hat{Α}$ και $\hat{Β}$ είναι ίσες, οπότε $\hat{Β} = 40^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών τριγώνου στο τρίγωνο ΓΑΒ έχουμε:

$$\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Α} + 40^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Α} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

β) Είναι $\hat{Δ}ΓΑ + \hat{Α}ΓΒ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Δ}ΓΑ + 100^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Δ}ΓΑ = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

Επειδή το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές με ΔΑ = ΔΓ, είναι $\hat{Δ}ΑΓ = \hat{Δ}ΓΑ = 80^\circ$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ΑΓ.

Από το άθροισμα γωνιών τριγώνου στο τρίγωνο ΔΑΓ έχουμε:

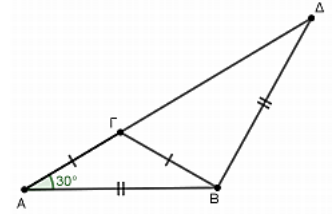
$$\hat{Δ} + \hat{Δ}ΑΓ + \hat{Δ}ΓΑ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Δ} + 80^\circ + 80^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Δ} = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$$

12968.α) i. Στο τρίγωνο ΓΑΒ είναι ΓΑ=ΓΒ, άρα αυτό είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ, οπότε $\hat{A} = \hat{B} = 30^\circ$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 30^\circ + \hat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\hat{C} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$



ii. Το τρίγωνο ΒΑΔ έχει ΒΑ=ΒΔ οπότε είναι ισοσκελές με βάση την ΑΔ, άρα $\hat{A} = \hat{B} = 30^\circ$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΔ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 30^\circ + \hat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{C} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

β) Είναι $\hat{C} = 120^\circ = 4 \cdot 30^\circ = 4\hat{A}$

13000.α) Είναι $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{C} = 40^\circ$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΔΕΓ έχουμε:

$$\hat{D} + \hat{E} + \hat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{D} + 90^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$$

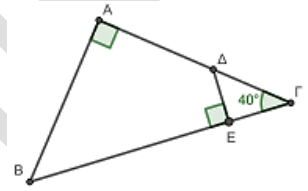
$$\hat{D} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

β) Είναι $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{D} = 50^\circ$ και

$$\hat{A} + \hat{D} + \hat{E} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{E} = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του τετραπλεύρου ΑΔΕΒ έχουμε:

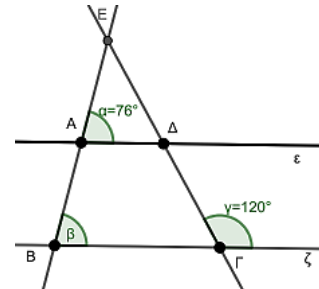
$$\hat{A} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{B} = 360^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 50^\circ + 40^\circ + \hat{B} = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$$



13004.α) Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ε, ζ που τέμνονται από την ΑΒ, άρα $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 76^\circ$.

β) Στο τρίγωνο ΕΒΓ η γωνία $\hat{\gamma}$ είναι εξωτερική, οπότε ισούται με το άθροισμα των δύο μέσα και απέναντι γωνιών του τριγώνου, δηλαδή:

$$\hat{\gamma} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \Leftrightarrow 120^\circ = 76^\circ + \hat{\beta} \Leftrightarrow \hat{\beta} = 120^\circ - 76^\circ = 44^\circ$$



13230.α) Είναι $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 135^\circ + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 45^\circ$

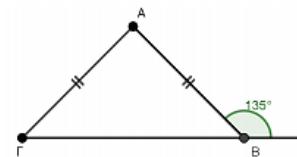
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, οπότε $\hat{A} = \hat{B} = 45^\circ$.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow 45^\circ + 45^\circ + \hat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{C} = 90^\circ$$

β) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΑΒ = ΑΓ είναι ισοσκελές.

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\hat{A} = 90^\circ$, είναι ορθογώνιο.

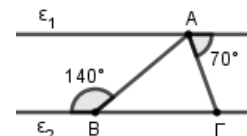


13437.α) Είναι $\hat{B} + 140^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.

β) Η γωνία Γ του τριγώνου ΑΒΓ και η γωνία των 70° είναι ίσες ως εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζουν οι παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 τεμνόμενες από την ΑΓ.

Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 70^\circ + \hat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{C} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

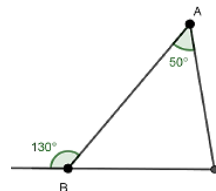


13293.α) Είναι $\hat{B} + \hat{B}_{\varepsilon\xi} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ABΓ έχουμε

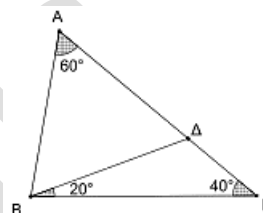
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 50^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

β) Στο τρίγωνο ABΓ δείξαμε στο α) ερώτημα ότι $\hat{A} = \hat{B} = 50^\circ$, οπότε το τρίγωνο ABΓ έχει δύο γωνίες του ίσες και άρα είναι ισοσκελές. Στο ισοσκελές τρίγωνο οι προκειμένες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, οπότε αφού είναι ίσες οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$, η βάση του ισοσκελούς είναι η πλευρά AB και οι ίσες πλευρές του είναι οι ΓΑ και ΓΒ.



13438.α) Η γωνία $\hat{A}\hat{\Delta}B$ είναι εξωτερική του τριγώνου BΓΔ, άρα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών, δηλαδή $\hat{A}\hat{\Delta}B = \hat{\Gamma} + \hat{B} = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$.

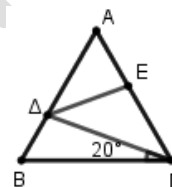
β) Από την υπόθεση και το ερώτημα α) έχουμε ότι οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{A}\hat{\Delta}B$ του τριγώνου ABΔ είναι 60° . Αυτό σημαίνει ότι και η τρίτη γωνία B θα είναι 60° , οπότε το τρίγωνο ABΔ είναι ισόπλευρο.



13439.α) Επειδή το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Η γωνία $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου BΓΔ, άρα είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του, δηλαδή

$$\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B} + \hat{\Gamma} = 60^\circ + 20^\circ = 80^\circ.$$



β) Επειδή η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma$ έχουμε $\hat{E}\hat{\Delta}\Gamma = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$.

Είναι $\hat{A}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{A}\hat{\Gamma}B - \hat{\Delta}\hat{\Gamma}B = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$, άρα $\hat{E}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{A}\hat{\Gamma}\Delta$.

13493.α) Επειδή τα PA και PB είναι εφαπτόμενα τμήματα, θα είναι ίσα, δηλαδή $PB = PA = 8$.

β) Η PO είναι διχοτόμος της γωνίας APB των εφαπτόμενων τμημάτων PA και PB, οπότε

$$\hat{A}\hat{P}O = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ.$$

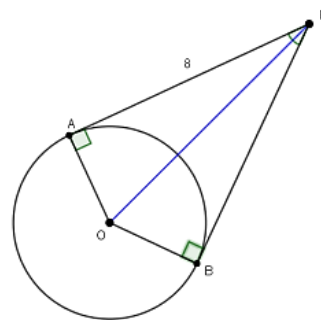
γ) Επειδή η PB είναι εφαπτόμενη στον κύκλο, θα είναι κάθετη στην ακτίνα στο σημείο επαφής B. Άρα $\hat{P}\hat{B}O = 90^\circ$.

Η PO είναι διχοτόμος της γωνίας APB των εφαπτόμενων τμημάτων PA

και PB, άρα $\hat{B}\hat{P}O = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$.

Στο τρίγωνο OPB ισχύει:

$$\hat{P}\hat{O}B + \hat{P}\hat{B}O + \hat{B}\hat{P}O = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{P}\hat{O}B = 180^\circ - 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ.$$



13492.α) Επειδή το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΔΕΖ είναι 180° , έχουμε:

$$\hat{Z} + \hat{\Delta} + \hat{E} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Z} + 65^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Z} = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

β) Τα τρίγωνα ABΓ και ΔΖΕ έχουν:

- $AB = \Delta Z$, από υπόθεση,

- $\hat{B} = \hat{E} = 75^\circ$

- $\hat{A} = \hat{\Delta} = 40^\circ$

Επομένως, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔZE είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

γ) Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι $A\Gamma = \Delta E$, γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες B και Z αντίστοιχα. Επομένως, $\Delta E = 8$ αφού $A\Gamma = 8$.

13494.α) Στο ορθογώνιο ΔEZ ισχύει ότι $\hat{E} + \hat{Z} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{E} + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{E} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν:

- $B\Gamma = EZ$, από υπόθεση,
- $\hat{\Gamma} = \hat{Z} = 30^\circ$
- $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες.

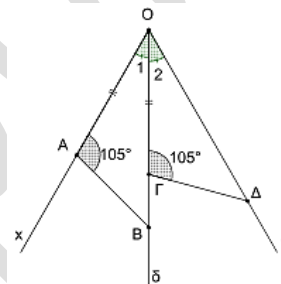
γ) Αν είναι $AB = 5$, τότε θα είναι $\Delta E = 5$, επειδή είναι πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{Z}$ αντίστοιχα των ίσων τριγώνων $AB\Gamma$ και ΔEZ .

13529.α) Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου OAB είναι
 $\hat{A} + \hat{B} + \hat{O}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 105^\circ + \hat{B} + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$

β) Τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ έχουν:

- $OA = O\Gamma$, από τα δεδομένα.
- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 30^\circ$, γιατί η $O\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας xOy
- $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 105^\circ$

Τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (κριτήριο ΓΠΓ). Συνεπώς, θα είναι $AB = \Gamma\Delta$ ως ίσες πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{O}_1$ και $\hat{O}_2$ αντίστοιχα.



13624.α) Η ημιευθεία $O\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας xOy , οπότε

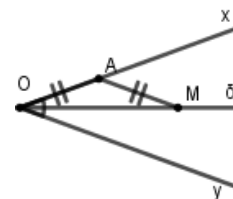
$$x\hat{O}\delta = \delta\hat{O}y = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ.$$

β) Επειδή $AO = OM$ το τρίγωνο AOM είναι ισοσκελές με βάση την OM , οπότε

$\hat{A}MO = x\hat{O}\delta = 20^\circ$. Στο τρίγωνο AOM ισχύει:

$$O\hat{A}M + \hat{A}MO + x\hat{O}\delta = 180^\circ \Leftrightarrow O\hat{A}M + 20^\circ + 20^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow O\hat{A}M = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ.$$

γ) Η γωνία $O\hat{A}M$ είναι αμβλεία οπότε το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.



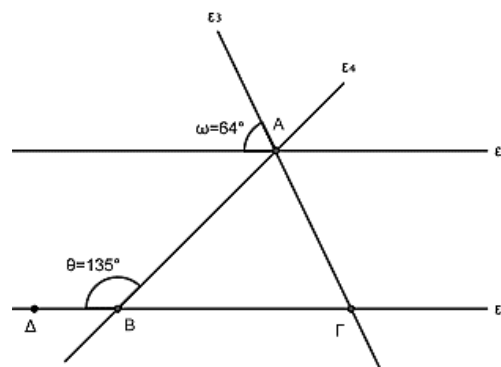
13627.α) Είναι

$$\hat{G}BA + 135^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{G}BA = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

Οι γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{A}\hat{\Gamma}B$ είναι ίσες ως εκτός εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ϵ_1 και ϵ_2 τεμνόμενων από την $A\Gamma$. Άρα $\hat{A}\hat{\Gamma}B = 64^\circ$.

β) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει:

$$\hat{G}BA + \hat{A}\hat{\Gamma}B + \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 45^\circ + 64^\circ + \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow$$



$$\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 180^\circ - 109^\circ = 71^\circ$$

γ) Οι γωνίες του τριγώνου ABΓ είναι οξείες, αφού στα ερωτήματα (α) και (β), επομένως, το τρίγωνο ABΓ είναι οξυγώνιο.

13631.α) Στο τρίγωνο ABΓ ισχύει: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 67^\circ + \hat{B} + 49^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$

Στο τρίγωνο ΔΕΖ ισχύει: $\hat{\Delta} + \hat{E} + \hat{Z} = 180^\circ \Leftrightarrow 64^\circ + \hat{E} + 67^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{E} = 180^\circ - 131^\circ = 49^\circ$

β) Τα τρίγωνα ABΓ και ZΔΕ έχουν:

- $AG = EZ = 5$

- $\hat{E} = \hat{\Gamma} = 49^\circ$

- $\hat{A} = \hat{Z} = 64^\circ$

Επομένως, τα τρίγωνα ABΓ και ZΔΕ είναι ίσα αφού έχουν μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μια προς μια (Γ-Π-Γ).

γ) Από την ισότητα των τριγώνων ABΓ και ZΔΕ προκύπτει ότι: $B\Gamma = E\Delta$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{Z}$ αντίστοιχα.

$AB = \Delta Z$, αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{E}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

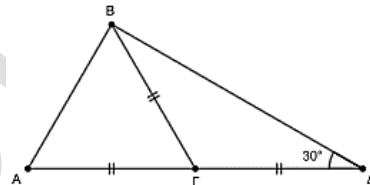
13673.α) Το τρίγωνο BΓΔ είναι ισοσκελές με $\Gamma B = \Gamma \Delta$, οπότε

$\hat{\Delta} = \hat{\Delta B\Gamma} = 30^\circ$ ως προσκείμενες στη βάση BΔ.

Στο τρίγωνο BΓΔ ισχύει:

$\hat{\Delta B\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{\Delta B\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta B\Gamma} + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$

$\hat{\Delta B\Gamma} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.



β) Είναι $B\hat{\Gamma}A + \hat{\Delta B\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow B\hat{\Gamma}A = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

γ) Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $AG = \Gamma B$, οπότε οι γωνίες $\hat{A B\Gamma}$ και $\hat{A}$ είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση AB.

Στο τρίγωνο ABΓ ισχύει: $\hat{A B\Gamma} + \hat{A} + B\hat{\Gamma}A = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{A} + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A} = 120^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 60^\circ = \hat{A B\Gamma}$
Επειδή το τρίγωνο ABΓ έχει τρεις γωνίες ίσες είναι ισόπλευρο.

13684.α) Είναι

$\hat{\beta} + \hat{A B\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 114^\circ + \hat{A B\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A B\Gamma} = 180^\circ - 114^\circ = 66^\circ$

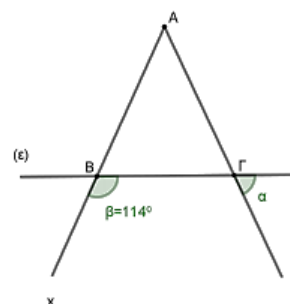
Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{A\Gamma B}$ είναι κατακορυφήν, οπότε $\hat{\alpha} = \hat{A\Gamma B} = 66^\circ$.

β) Επειδή $\hat{A B\Gamma} = \hat{A\Gamma B} = 66^\circ$ το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

γ) Για τις γωνίες του τριγώνου ABΓ ισχύει:

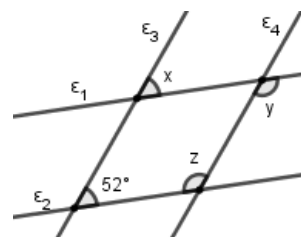
$B\hat{A\Gamma} + \hat{A B\Gamma} + \hat{A\Gamma B} = 180^\circ \Leftrightarrow B\hat{A\Gamma} + 66^\circ + 66^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$

$B\hat{A\Gamma} = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$



13787.α) Είναι $\hat{x} = 52^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ϵ_1 και ϵ_2 που τέμνονται από την ϵ_3 .

β) Η γωνία $\hat{z}$ και η γωνία των 52° είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ϵ_3 και ϵ_4 που τέμνονται από την ϵ_2 , άρα
 $\hat{z} = 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ$



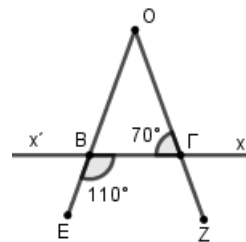
γ) Είναι $\hat{y} = \hat{z} = 128^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ϵ_1 και ϵ_2 που τέμνονται από την ϵ_4 .

13827.α) Η γωνία $\hat{ΓΒΟ}$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{ΓΒΕ}$ οπότε
 $\hat{ΓΒΟ} + \hat{ΓΒΕ} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{ΓΒΟ} + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{ΓΒΟ} = 70^\circ$

β) Επειδή $\hat{ΓΒΟ} = \hat{ΒΓΟ}$ το τρίγωνο $ΟΒΓ$ θα είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις $ΟΒ$ και $ΟΓ$.

γ) Για τις γωνίες του τριγώνου $ΟΒΓ$ γνωρίζουμε ότι

$$\hat{ΓΒΟ} + \hat{ΒΓΟ} + \hat{ΒΟΓ} = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + 70^\circ + \hat{ΒΟΓ} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{ΒΟΓ} = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ.$$



4^ο Θέμα

12360.α) i. Είναι

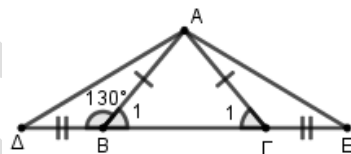
$$\hat{B}_{\text{εξωτ}} + \hat{B}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 130^\circ + \hat{B}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}_1 = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με βάση την $ΒΓ$, ισχύει ότι

$$\hat{\Gamma}_1 = \hat{B}_1 = 50^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $ΑΒΓ$ έχουμε:

$$\hat{ΒΑΓ} + \hat{\Gamma}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{ΒΑΓ} + 50^\circ + 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{ΒΑΓ} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$



ii. Τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΕ$ έχουν:

- $ΑΒ = ΑΓ$ από υπόθεση

- $ΒΔ = ΓΕ$ από υπόθεση

- $\hat{B}_{\text{εξωτ}} = \hat{\Gamma}_{\text{εξωτ}}$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{\Gamma}_1$ και $\hat{B}_1$.

Επομένως είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (Π-Γ-Π).

β) Φέρουμε τις αποστάσεις των $Β$ και $Γ$ από τις $ΑΔ$ και $ΑΕ$, δηλαδή τις $ΒΗ$ και $ΓΘ$ αντίστοιχα.

Τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΕ$ έχουν:

- $ΑΒ = ΑΓ$ υπόθεση

- $ΒΔ = ΓΕ$ υπόθεση

- $\hat{B}_{\text{εξωτ}} = \hat{\Gamma}_{\text{εξωτ}}$

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα $ΑΒΔ$

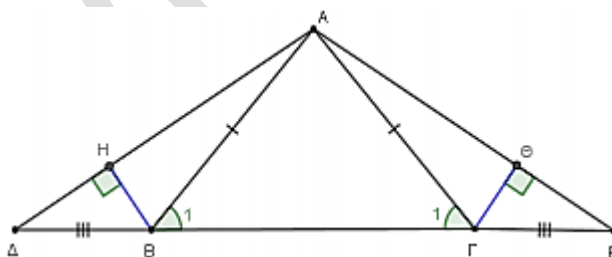
και $ΑΓΕ$ είναι ίσα οπότε έχουν και $\hat{Δ} = \hat{Ε}$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΔΗΒ$ και $ΓΘΕ$ έχουν:

- $ΒΔ = ΓΕ$

- $\hat{Δ} = \hat{Ε}$

Επομένως είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια και έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μια προς μια. Άρα $ΒΗ = ΓΘ$, ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών $\hat{Δ}, \hat{Ε}$ αντίστοιχα.



12458.α) i. Επειδή το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με βάση τη $ΒΓ$, ισχύει ότι $\hat{Β} = \hat{\Gamma}$

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΔΒΖ$ και $ΕΓΗ$ έχουν:

- $ΒΔ = ΓΕ$ υπόθεση

- $\hat{ΔΒΖ} = \hat{ΗΓΕ}$, ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{\Gamma}$

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε θα έχουν ίσες και τις αντίστοιχες οξείες γωνίες $\hat{Δ}$ και $\hat{Ε}$. Επομένως οι πλευρές που είναι απέναντι από τις γωνίες αυτές, θα είναι ίσες, δηλαδή $ΒΖ = ΓΗ$.

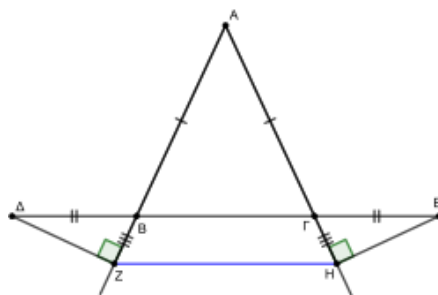
ii. Επειδή $AB = AG$ (υπόθεση) και $BZ = GH$ (από το i) ερώτημα), τότε $AB + BZ = AG + GH$, δηλαδή $AZ = AH$ ως αθροίσματα ίσων τμημάτων. Άρα το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές.

β) Επειδή το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές με βάση τη ZH , είναι $\hat{Z} = \hat{H}$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου AZH έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{Z} + \hat{H} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 2\hat{Z} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$2\hat{Z} = 180^\circ - 50^\circ \Leftrightarrow 2\hat{Z} = 130^\circ \Leftrightarrow \hat{Z} = 65^\circ, \text{ οπότε και } \hat{H} = 65^\circ.$$



12466.α) i. Στο τρίγωνο AOB οι δύο πλευρές του, OA και OB είναι ίσες ως ακτίνες του κύκλου, οπότε το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές με βάση την AB , οπότε $\hat{OBA} = \hat{OAB}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου OBA έχουμε:

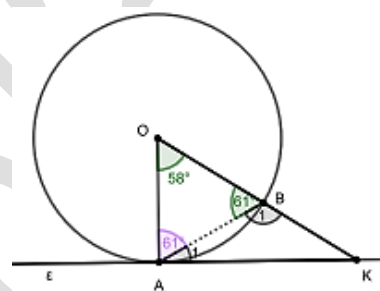
$$\hat{O} + \hat{OBA} + \hat{OAB} = 180^\circ \Leftrightarrow 58^\circ + 2\hat{OBA} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$2\hat{OBA} = 180^\circ - 58^\circ \Leftrightarrow 2\hat{OBA} = 122^\circ \Leftrightarrow \hat{OBA} = 61^\circ, \text{ οπότε και } \hat{OAB} = 61^\circ.$$

ii. Είναι $\hat{B}_1 + \hat{OBA} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B}_1 = 180^\circ - 61^\circ = 119^\circ$

Από την κατασκευή η ευθεία ε είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο A , οπότε η ακτίνα OA είναι κάθετη στην ε . Άρα $\hat{OAK} = 90^\circ$.

$$\text{Είναι } \hat{A}_1 = 90^\circ - 61^\circ = 29^\circ.$$



β) Ζητείται η χορδή AB να γίνει ίση με την ακτίνα του κύκλου ρ . Τότε οι τρεις πλευρές του τριγώνου AOB θα είναι ίσες με την ακτίνα ρ και το τρίγωνο θα είναι ισόπλευρο. Σε αυτή την περίπτωση κάθε γωνία του θα είναι 60° . Δηλαδή η γωνία $\hat{O}$ θα έπρεπε να είχε σχεδιαστεί ίση με 60° ώστε η χορδή AB να είναι ίση με την ακτίνα ρ του κύκλου.

12660.α) Η GM είναι διάμεσος της πλευράς AB του $AB\Gamma$ άρα $AB = 2 \cdot BM = 6$.

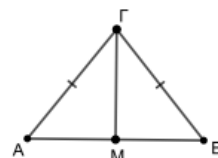
β) Το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, λόγω της υπόθεσης $AG = BG$. Η GM είναι διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του ισοσκελούς, δηλαδή της $\hat{AGB}$ γιατί είναι διάμεσος της βάσης του, οπότε $\hat{AGB} = 2\hat{AGM} = 66^\circ$.

Οι γωνίες $\hat{GAB}$ και $\hat{GBA}$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου GAB , οπότε είναι ίσες.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου GBA έχουμε:

$$\hat{AGB} + \hat{GAB} + \hat{GBA} = 180^\circ \Leftrightarrow 66^\circ + 2\hat{GAB} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{GAB} = 180^\circ - 66^\circ \Leftrightarrow$$

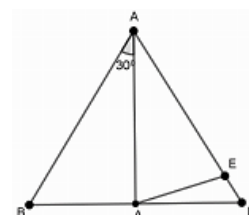
$$2\hat{GAB} = 114^\circ \Leftrightarrow \hat{GAB} = 57^\circ, \text{ οπότε και } \hat{GBA} = 57^\circ.$$



γ) Εφόσον γνωρίζουμε ότι $AG = 6$, τότε $BG = 6$, γιατί το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AG = BG$. Επίσης, από το α) ερώτημα έχουμε ότι $AB = 6$. Συνεπώς, το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και άρα έχει όλες του τις γωνίες ίσες. Η κάθε μια είναι ίση με 60° .

12697.α) Επειδή $AB = AG$, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε η διάμεσος AD είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου. Εφόσον η AD είναι διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$ θα είναι $\hat{DAG} = \hat{BAD} = 30^\circ$

β) Λόγω του (α) ερωτήματος είναι $\hat{A} = 60^\circ$, δηλαδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και έχει μία γωνία του ίση με 60° , άρα τελικά το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.



γ) Επειδή $AD = AE$ το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές με βάση την DE , οπότε $\hat{ADE} = \hat{AED}$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ADE έχουμε:

$$\hat{\Delta AG} + \hat{ADE} + \hat{AED} = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 2\hat{ADE} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{ADE} = 180^\circ - 30^\circ \Leftrightarrow 2\hat{ADE} = 150^\circ \Leftrightarrow \hat{ADE} = 75^\circ.$$

Η AD είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ABG που αντιστοιχεί στη βάση του, οπότε είναι και ύψος του τριγώνου, άρα $\hat{ADG} = 90^\circ$.

$$\text{Είναι } \hat{EDG} = \hat{ADG} - \hat{ADE} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

12700.α) Είναι $\hat{\Delta} + \hat{\Delta}_{\varepsilon\zeta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}_{\varepsilon\zeta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

β) Από το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου $ABGD$ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} + 50^\circ + 70^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$$

γ) Επειδή η AO και η BO είναι διχοτόμοι των γωνιών A, B

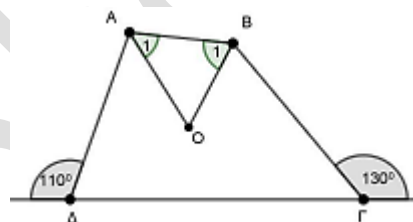
αντίστοιχα, ισχύει ότι $\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$ και $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου AOB έχουμε:

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{AOB} = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \hat{AOB} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} + \hat{AOB} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\frac{240^\circ}{2} + \hat{AOB} = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + \hat{AOB} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{AOB} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$



12701α) Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με n πλευρές ισούται με $2 \cdot n - 4$ ορθές. Έτσι για το πολύγωνο $ABGDE$ το άθροισμα των γωνιών του είναι: $2 \cdot 5 - 4 = 10 - 4 = 6$ ορθές ή $6 \cdot 90^\circ = 540^\circ$, άρα

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E} = 540^\circ$$

β) Είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{E} = 540^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} + 100^\circ + 140^\circ + 80^\circ = 540^\circ \Leftrightarrow$

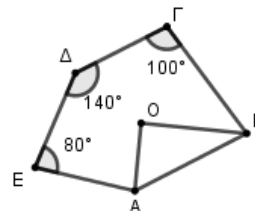
$$\hat{A} + \hat{B} = 540^\circ - 320^\circ = 220^\circ$$

γ) Επειδή η AO και η BO είναι διχοτόμοι των γωνιών A, B αντίστοιχα, ισχύει ότι $\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$ και $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου AOB έχουμε:

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{AOB} = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \hat{AOB} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} + \hat{AOB} = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{220^\circ}{2} + \hat{AOB} = 180^\circ \Leftrightarrow 110^\circ + \hat{AOB} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{AOB} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$



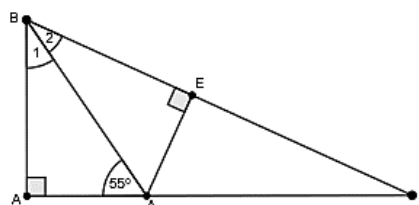
12838.α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABD είναι

$$\hat{B}_1 + \hat{ADB} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B}_1 + 55^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B}_1 = 35^\circ.$$

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ABD και EBD έχουν:

- τη BD κοινή πλευρά
- $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 35^\circ$ γιατί η BD είναι διχοτόμος της γωνίας B ,

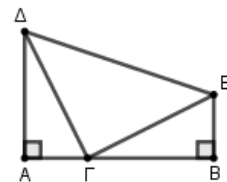
άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε θα είναι $AB = EB$, ως πλευρές των ίσων τριγώνων, που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες ADB και EDB αντίστοιχα.



γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, λόγω του ερωτήματος (α) η γωνία $\hat{B} = 70^\circ$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 20^\circ$. Επίσης το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ορθογώνιο με $\hat{E} = 90^\circ$, άρα η γωνία ΕΔΓ ως συμπληρωματική της $\hat{\Gamma}$ θα ισούται με 70° .

12839.α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ έχουν:

- $AD = BG$, από την υπόθεση
- $AG = BE$, από την υπόθεση οπότε έχουν τις κάθετες πλευρές τους μία προς μία ίσες και επομένως είναι ίσα.



β) Επειδή τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα, θα έχουν ίσες υποτείνουσες. Δηλαδή θα είναι $DG = GE$, οπότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ισοσκελές. γ) Από το άθροισμα των οξείων γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου ΒΓΕ έχουμε:

$$E\hat{\Gamma}B + \hat{E} = 90^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + \hat{E} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{E} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ.$$

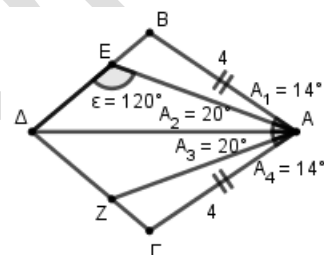
Λόγω του ερωτήματος (α) από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΒΓΕ θα είναι και $A\hat{\Gamma}D = \hat{E} = 50^\circ$.

Όμως $D\hat{\Gamma}E = 180^\circ - A\hat{\Gamma}D - E\hat{\Gamma}B = 180^\circ - 50^\circ - 40^\circ = 90^\circ$ οπότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και λόγω του (β) ερωτήματος και ισοσκελές

12969. α) i. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν:

- $AB = AG = 4$, από υπόθεση
- ΑΔ κοινή πλευρά
- $B\hat{A}D = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 34^\circ = \hat{A}_3 + \hat{A}_4 = D\hat{A}G$

Τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές αντίστοιχα ίσες, άρα είναι ίσα με το κριτήριο Π-Γ-Π.



ii. Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ του i. ερωτήματος, οι γωνίες $B\hat{A}D$ και $D\hat{A}G$ είναι ίσες γιατί είναι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ, τα οποία έχουν:

- $\hat{A}_2 = \hat{A}_3 = 20^\circ$
- ΑΔ κοινή πλευρά
- $B\hat{A}D = D\hat{A}G$ από το ii. του α) ερωτήματος.

Τα τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες γωνίες στην πλευρά αυτή, ίσες, άρα είναι ίσα με το κριτήριο Γ-Π-Γ.

Επομένως θα είναι ίσες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{A}_2$ και $\hat{A}_3$, δηλαδή $DE = DZ$.

γ) Η γωνία ε είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΕ οπότε

$$\hat{\epsilon} = \hat{B} + \hat{A}_1 \Leftrightarrow 120^\circ = \hat{B} + 14^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 120^\circ - 14^\circ = 106^\circ$$

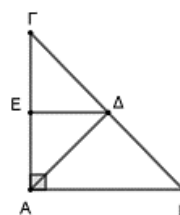
12971.α) $DE \parallel AB$, από την υπόθεση και $AB \perp AG$ αφού $\hat{A} = 90^\circ$, άρα η ΔΕ θα είναι κάθετη στην ΑΓ. Οπότε το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο με $D\hat{E}G = 90^\circ$.

β) Στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, για το άθροισμα των οξείων γωνιών του έχουμε:

$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και επειδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ως γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου θα ισχύει $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΓ από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε:

$$D\hat{E}G + \hat{\Gamma} + E\hat{D}G = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 45^\circ + E\hat{D}G = 180^\circ \Leftrightarrow E\hat{D}G = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$



Άρα και το ΔΕΓ είναι ισοσκελές τρίγωνο με ΔΕ = ΕΓ.

γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διάμεσος της πλευράς ΒΓ, επομένως θα είναι και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, άρα $\hat{\Gamma\Delta A} = 45^\circ$.

Το τρίγωνο ΑΔΓ έχει δύο γωνίες ίσες, οπότε είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ. Το τμήμα ΔΕ είναι ύψος, αφού $\Delta E \perp AG$, άρα είναι και διάμεσος. Επομένως το Ε είναι μέσο της ΑΓ.

12973.α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΗ είναι ισοσκελή με βάσεις τις ΒΕ και ΓΗ αντίστοιχα, αφού από την υπόθεση $AH = 4 = AG$ και $AE = 3 = AB$. Είναι $\hat{BAE} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ και $\hat{GAH} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Άρα τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΗ έχουν τη γωνία της κορυφής τους ίση με 60° , οπότε είναι τελικά ισόπλευρα.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΗ έχουν:

- $AB = AE = 3$, από την υπόθεση
- $AG = AH = 4$, από την υπόθεση
- $\hat{A} = \hat{EAH} = 120^\circ$ ως κατακορυφήν γωνίες

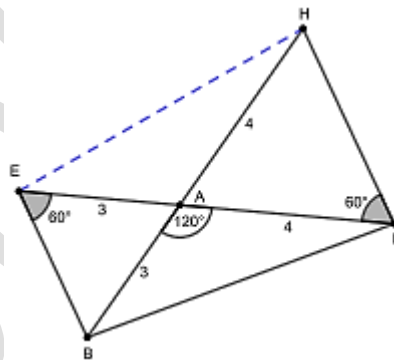
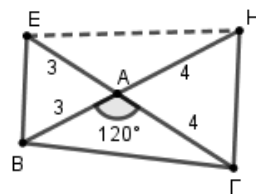
Τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες, άρα είναι ίσα με το κριτήριο Π-Γ-Π.

γ) Είναι $\hat{BEA} = 60^\circ$ γιατί είναι γωνία του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΕ.

Επίσης $\hat{A\Gamma H} = 60^\circ$ γιατί είναι γωνία του ισόπλευρου τριγώνου ΑΓΗ.

Οι γωνίες $\hat{BEA}$ και $\hat{A\Gamma H}$ είναι ίσες και είναι γωνίες εντός εναλλάξ των τμημάτων ΒΕ και ΓΗ που τέμνονται από την ΓΕ.

Άρα $BE \parallel GH$.



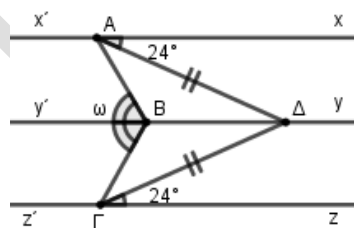
12975.α) Είναι $\hat{A\Delta B} = \hat{\Delta Ax} = 24^\circ$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ευθειών $x'x$ και $y'y$ που τέμνονται από το τμήμα ΑΔ.

Ομοίως $\hat{B\Delta\Gamma} = \hat{\Delta\Gamma z} = 24^\circ$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων ευθειών $y'y$ και $z'z$ που τέμνονται από το τμήμα ΓΔ.

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ έχουν:

- $AD = GD$, από την υπόθεση
- ΒΔ κοινή πλευρά
- $\hat{A\Delta B} = \hat{B\Delta\Gamma} = 24^\circ$

Άρα είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες, δηλαδή είναι ίσα με το κριτήριο Π-Γ-Π.



β) i. Αν τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ είναι ισοσκελή με βάσεις

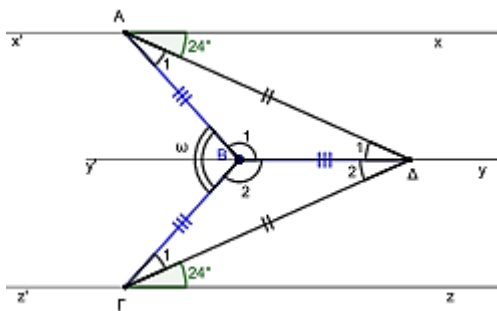
ΑΔ και ΓΔ αντίστοιχα, τότε $\hat{\Delta_1} = \hat{\Delta_2} = 24^\circ$ και

$\Delta_2 = \Gamma_1 = 24^\circ$. Δηλαδή οι ίσες γωνίες των βάσεων τους είναι ίσες με 24° . Επειδή τα τρίγωνα είναι ίσα από το α) ερώτημα, θα είναι ίσες και οι γωνίες των κορυφών τους, δηλαδή $\hat{B_1} = \hat{B_2}$ (1).

Από το άθροισμα γωνιών τριγώνου στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

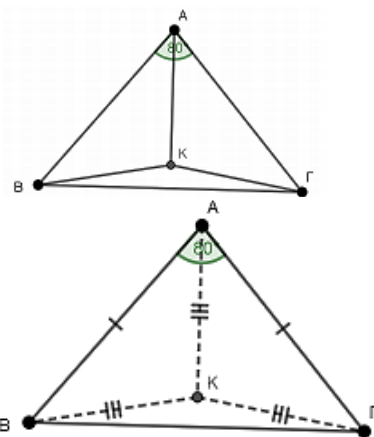
$$\hat{B_1} + \hat{\Delta_1} + \hat{A_1} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B_1} + 24^\circ + 24^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B_1} = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ.$$

ii. Για τη γωνία ω έχουμε: $\hat{\omega} = 360^\circ - \hat{B_1} - \hat{B_2} = 360^\circ - 132^\circ - 132^\circ = 96^\circ$



13002.α) Τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ έχουν:

- ΚΑ κοινή πλευρά
 - $BK = GK$, από υπόθεση
 - $AB = AG$, διότι το $ABΓ$ είναι ισοσκελές τρίγωνο.
- Από το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ είναι ίσα, αφού έχουν τις πλευρές τους μία προς μία ίσες.



β) Το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, άρα ισχύει ότι

$\hat{B} = \hat{Γ}$ ως γωνίες της βάσης του.

Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Α, οπότε ισχύει ότι

$$\hat{B}\hat{A}K = \hat{K}\hat{A}\Gamma = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

Επειδή $KB = KA$, το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές και οι γωνίες στη βάση του ΑΒ θα είναι ίσες. Δηλαδή $\hat{A}\hat{B}K = \hat{B}\hat{A}K = 40^\circ$ (1).

Όμοια, επειδή $KA = KG$ το τρίγωνο ΑΓΚ είναι ισοσκελές, και οι γωνίες στη βάση του ΑΓ θα είναι ίσες.

Δηλαδή $\hat{K}\hat{\Gamma}A = \hat{K}\hat{A}\Gamma = 40^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΚ έχουμε:

$$\hat{A}\hat{K}B + \hat{A}\hat{B}K + \hat{B}\hat{A}K = 180^\circ \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{A}\hat{K}B + 40^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{K}B = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ \quad (2)$$

Από την ισότητα των τριγώνων ΒΚΑ και ΓΚΑ του ερωτήματος α) προκύπτει ότι $\hat{A}\hat{K}B = \hat{A}\hat{K}\Gamma$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Οπότε λόγω της (2) έχουμε

$$\hat{A}\hat{K}\Gamma = 100^\circ.$$

$$\gamma) \text{ Είναι } \hat{B}\hat{K}\Gamma + \hat{A}\hat{K}B + \hat{A}\hat{K}\Gamma = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{B}\hat{K}\Gamma + 100^\circ + 100^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{B}\hat{K}\Gamma = 360^\circ - 200^\circ = 160^\circ$$

13285.α) Η ΕΔ είναι παράλληλη στην ΑΒ και η ΑΓ είναι κάθετη στην ΑΒ, αφού είναι

$\hat{A} = 90^\circ$. Οπότε, η ΑΓ θα είναι κάθετη και στην ΕΔ. Άρα, το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{Γ}\hat{E}\Delta$.

β) Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$, ισχύει ότι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

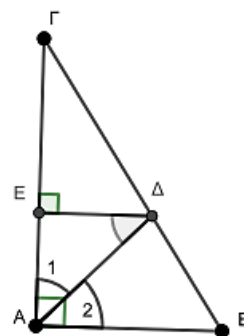
Είναι $\hat{A}\hat{\Delta}E = \hat{A}_2 = 45^\circ$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΕΔ και ΑΒ με τέμνουσα την ΑΔ.

γ) Είναι $\hat{B} = \hat{Γ} + 20^\circ$

Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει ότι

$$\hat{B} + \hat{Γ} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{Γ} + 20^\circ + \hat{Γ} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\hat{Γ} = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{Γ} = 35^\circ \text{ και } \hat{B} = 35^\circ + 20^\circ = 55^\circ.$$

Είναι $\hat{E}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B} = 55^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΑΒ με τέμνουσα την ΒΓ.

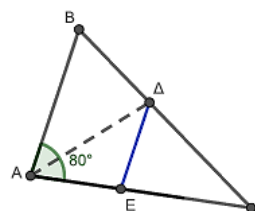


13286. α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + \hat{Γ} + 20^\circ + \hat{Γ} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{Γ} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ \Leftrightarrow \hat{Γ} = 40^\circ \text{ και } \hat{B} = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ.$$

β) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α, άρα ισχύει ότι $\hat{B}\hat{A}\Delta = \hat{\Gamma}\hat{A}\Delta = \frac{\hat{A}}{2} = 40^\circ$.

i. $\hat{E}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{B} = 60^\circ$ ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΑΒ που τέμνονται από την ΒΔ. Ομοίως $\hat{\Delta}\hat{E}\Gamma = \hat{A} = 80^\circ$ ως γωνίες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΑΒ που τέμνονται από την ΑΓ.



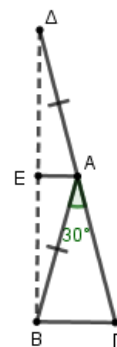
- ii. Είναι $\hat{E}\hat{\Delta}A = \hat{B}\hat{\Delta}A = 40^\circ$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΔE , AB που τέμνονται από την $A\Delta$.
Επίσης έχουμε $\hat{\Gamma}\hat{A}\Delta = \frac{\hat{A}}{2} = 40^\circ$ Οπότε, το τρίγωνο $A\Delta E$ έχει $\hat{\Gamma}\hat{A}\Delta = \hat{E}\hat{\Delta}A$ και είναι ισοσκελές.

13289.α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές από την υπόθεση με $AB = A\Gamma$, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Gamma} = 150^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 75^\circ = \hat{B}$$

β) «Στο τρίγωνο $\Gamma B\Delta$ το τμήμα BA είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά $\Delta\Gamma$ ». Από την κατασκευή το τμήμα $A\Delta$ είναι ίσο με την πλευρά AB του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$. Οπότε το $A\Delta$ είναι ίσο και με το $A\Gamma$. Δηλαδή το σημείο A χωρίζει το τμήμα $\Gamma\Delta$ σε δύο ίσα τμήματα, οπότε το σημείο A είναι το μέσο του $\Gamma\Delta$. Στο τρίγωνο $\Gamma B\Delta$ το ευθύγραμμο τμήμα BA ενώνει την κορυφή B του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς $\Gamma\Delta$, άρα το BA είναι διάμεσος του τριγώνου που αντιστοιχεί στην πλευρά $\Gamma\Delta$.



γ) i. Είναι $\hat{E}\hat{A}\Delta = \hat{\Gamma} = 75^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων AE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$. Είναι $\hat{B}\hat{A}E = \hat{A}\hat{B}\Gamma = 75^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την AB . Άρα $\hat{E}\hat{A}\Delta = \hat{B}\hat{A}E = 75^\circ$.

ii. Στο τρίγωνο $BA\Delta$ οι πλευρές του AB και $A\Delta$ έχουν κατασκευαστεί ίσες. Οπότε το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές με βάση τη ΔB . Επειδή $\hat{E}\hat{A}\Delta = \hat{B}\hat{A}E$ η AE είναι η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του ισοσκελούς τριγώνου $BA\Delta$. Συνεπώς το AE είναι και ύψος προς τη βάση του ισοσκελούς, δηλαδή το AE είναι κάθετο στο τμήμα ΔB .

13290.α) Είναι $\hat{B}_{\epsilon\zeta} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 135^\circ + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$.

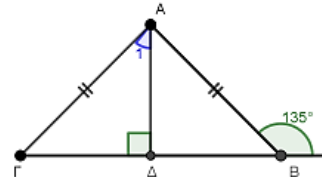
Από το άθροισμα των γωνιών τριγώνου έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 45^\circ + 45^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

β) Επειδή $\hat{A} = 90^\circ$ και $AB = A\Gamma$, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

γ) i. Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ έχει $\hat{\Delta} = 90^\circ$ οπότε είναι ορθογώνιο.

ii. Είναι $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ και $\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2} = 45^\circ$ οπότε το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.



13291.α) Είναι $\hat{B}_{\epsilon\zeta} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 130^\circ + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.

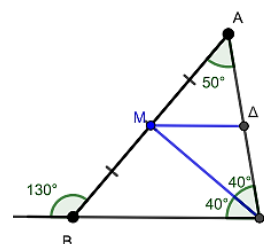
Από το άθροισμα των γωνιών τριγώνου έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 50^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

β) Επειδή $\hat{A} = \hat{B}$ το τρίγωνο ΓAB είναι ισοσκελές με βάση την AB .

γ) i. Από το β) ερώτημα το ΓAB είναι ισοσκελές τρίγωνο και ΓM είναι η διάμεσος προς τη βάση του AB . Η διάμεσος προς τη βάση του ισοσκελούς είναι και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής, οπότε

$$\hat{B}\hat{\Gamma}M = \hat{M}\hat{\Gamma}\Delta = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ.$$



Είναι $\hat{\Delta}\hat{M}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{M} = 40^\circ$ γιατί είναι εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων $M\Delta$ και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη $M\Gamma$.

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\Delta M\Gamma$ έχουμε:

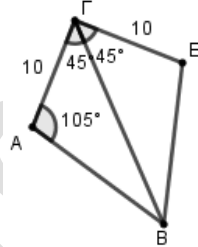
$$\hat{\Delta}\hat{M}\hat{\Gamma} + \hat{M}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} + \hat{M}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 40^\circ + \hat{M}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{M}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$$

ii. Το τρίγωνο $M\Gamma\Delta$, δείξαμε στο i) ότι, έχει δύο γωνίες του ίσες με 40° . Άρα το $M\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τρίγωνο με $\Delta M = \Delta\Gamma$.

13292.α) Στα τρίγωνα $A\Gamma B$ και $E\Gamma B$:

- $\Gamma A = \Gamma E = 10$
- $\hat{A}\hat{\Gamma}B = \hat{B}\hat{\Gamma}E = 45^\circ$
- $\Gamma B = \Gamma B$ κοινή πλευρά.

Τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες, οπότε από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Από την ισότητα των τριγώνων του ερωτήματος α) προκύπτει ότι

$$\hat{\Gamma}\hat{A}B = \hat{\Gamma}\hat{E}B = 105^\circ$$

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\hat{\Gamma}\hat{A}B + \hat{A}\hat{\Gamma}B + \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 105^\circ + 45^\circ + \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

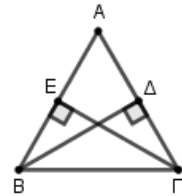
γ) Από την ισότητα των τριγώνων $A\Gamma B$ και $E\Gamma B$ του ερωτήματος α) προκύπτει ότι $\hat{E}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 30^\circ$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΓA και ΓE . Οπότε

$$\hat{A}\hat{B}E = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} + \hat{E}\hat{B}\hat{\Gamma} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ.$$

13440.α) Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma E B$ έχουν:

- $\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$
- $B\Gamma = B\Gamma$, κοινή πλευρά.
- $B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}\hat{B}E$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma E B$ είναι ίσα, γιατί έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.



β) Αφού τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma E B$ είναι ίσα, θα είναι $B\Delta = \Gamma E$ ως ίσες πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $B\hat{\Gamma}\Delta$ και $\hat{\Gamma}\hat{B}E$ αντίστοιχα.

γ) Το σημείο B ανήκει στη μεσοκάθετο του $A\Gamma$, γιατί το τμήμα $B\Delta$ είναι διάμεσος και ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$. Άρα το σημείο B ισαπέχει από τα άκρα του $A\Gamma$, δηλαδή $AB = B\Gamma$ (1).

Το σημείο Γ ανήκει στη μεσοκάθετο του AB , γιατί το τμήμα ΓE είναι διάμεσος και ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$. Άρα το σημείο Γ ισαπέχει από τα άκρα του AB , δηλαδή $A\Gamma = B\Gamma$ (2).

Από τις ισότητες (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{A} = 60^\circ$.

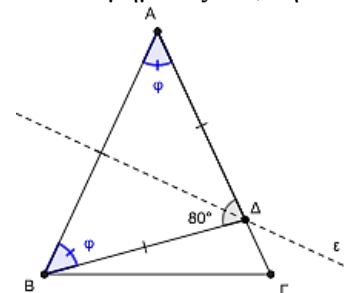
13447.α) i. Αφού η ευθεία (ϵ) είναι μεσοκάθετος της πλευράς AB του τριγώνου $AB\Gamma$ και το σημείο Δ είναι σημείο της μεσοκαθέτου (ϵ), τότε το Δ θα ισαπέχει από τα άκρα A και B του τμήματος AB , δηλαδή θα είναι $\Delta A = \Delta B$. Άρα το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές με $\Delta A = \Delta B$.

ii. Αφού το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές με $\Delta A = \Delta B$ (από α) i. ερώτημα), τότε θα έχει ίσες και τις προσκείμενες γωνίες στη βάση του AB , δηλαδή $\hat{A} = \hat{B}\hat{\Delta} = \hat{\phi}$.

Για τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta B$ ισχύει ότι

$$\hat{A}\hat{\Delta}B + \hat{\phi} + \hat{\phi} = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 2\hat{\phi} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\phi} = 100^\circ \Leftrightarrow \hat{\phi} = 50^\circ.$$

Άρα $\hat{A} = 50^\circ$.



β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι το τρίγωνο $\Lambda\Delta\text{B}$ είναι ισοσκελές με $\hat{A} = \hat{A\Delta B} = \hat{\phi} = 50^\circ$ και επειδή είναι $\hat{\Delta B\Gamma} = 15^\circ$ από την υπόθεση, τότε θα είναι $\hat{A\text{B}\Gamma} = \hat{\phi} + \hat{\Delta B\Gamma} = 50^\circ + 15^\circ = 65^\circ$.
Για τις γωνίες του τριγώνου $\text{AB}\Gamma$ ισχύει
 $\hat{A} + \hat{\Gamma} + \hat{A\text{B}\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + \hat{\Gamma} + 65^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$.
Επειδή $\hat{\Gamma} = \hat{A\text{B}\Gamma}$ το τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$ θα είναι ισοσκελές.

13448.α) Αφού το τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις AB και $\text{A}\Gamma$, τότε θα έχει τις προσκείμενες γωνίες στη βάση του $\text{B}\Gamma$ ίσες, δηλαδή είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.
Για τις γωνίες του τριγώνου $\text{AB}\Gamma$ ισχύει ότι

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + \hat{B} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ = \hat{\Gamma}$$

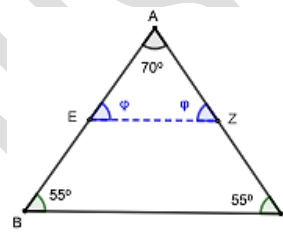
Συνεπώς, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

β) i. Αφού είναι E μέσο της πλευράς AB και Z μέσο της πλευράς $\text{A}\Gamma$, τότε θα είναι $\text{AE} = \text{EB} = \frac{\text{AB}}{2}$ και $\text{AZ} = \text{Z}\Gamma = \frac{\text{A}\Gamma}{2}$.

Οπότε θα ισχύει $\text{AE} = \text{EB} = \text{AZ} = \text{Z}\Gamma$ ως μισά των ίσων πλευρών AB , $\text{A}\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $\text{AB}\Gamma$ (δεδομένο).
Επομένως, το τρίγωνο AEZ θα είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις AE και AZ .

Το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές με γωνία κορυφής $\hat{A} = 70^\circ$ οπότε οι γωνίες της βάσης του EZ είναι ίσες, δηλαδή $\hat{A\hat{E}Z} = \hat{A\hat{Z}E} = \hat{\phi}$.

Για τις γωνίες του τριγώνου AEZ ισχύει ότι $\hat{A} + \hat{\phi} + \hat{\phi} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\phi} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ \Leftrightarrow \hat{\phi} = 55^\circ$



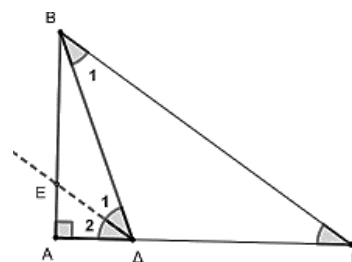
ii. Είναι $\hat{B} = \hat{\phi}$ άρα $\text{EZ} \parallel \text{B}\Gamma$ γιατί τεμνόμενα από την AB σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.

13449.α) i. Αφού είναι $\Delta\Gamma = \Delta\text{B}$ από δεδομένα, το τρίγωνο $\text{B}\Delta\Gamma$ θα είναι ισοσκελές με βάση τη $\text{B}\Gamma$, οπότε $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}$ (1).

ii. Αφού η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A\Delta B}$, είναι $\hat{\Delta}_1 = \frac{\hat{A\Delta B}}{2}$.

Η γωνία $\hat{A\Delta B}$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου $\text{B}\Delta\Gamma$, οπότε θα είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του.

Δηλαδή $\hat{A\Delta B} = \hat{B}_1 + \hat{\Gamma} = 2\hat{\Gamma}$, άρα $\hat{\Delta}_1 = \frac{2\hat{\Gamma}}{2} = \hat{\Gamma}$.



iii. Είναι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}$, άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$, άρα οι ΔE και ΓB θα είναι παράλληλες γιατί τεμνόμενες από την $\text{B}\Delta$ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες. Οπότε η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A\Delta B}$ είναι παράλληλη στο τμήμα $\text{B}\Gamma$.

β) Είναι $\hat{A\Delta B} = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow 70^\circ = 2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 35^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\text{AB}\Gamma$ είναι $\hat{A\hat{B}\Gamma} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A\hat{B}\Gamma} + 35^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A\hat{B}\Gamma} = 55^\circ$.

13501.α) Τα τρίγωνα $\text{B}\Delta\Gamma$ και $\text{B}'\Delta'\Gamma'$ έχουν:

- $\Gamma\Delta = \Gamma'\Delta'$, από υπόθεση

- $\hat{B} = \hat{B}'$

- $\Gamma\Delta = \Gamma'\Delta'$

Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $B'\Delta'\Gamma'$ είναι ίσα, επειδή είναι ορθογώνια και έχουν μία κάθετη πλευρά και την απέναντι σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

Επομένως, θα έχουν και τις υποτείνουσες ίσες, δηλαδή $B\Gamma = B'\Gamma'$.

β) i. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε θα έχουν και τις άλλες γωνίες τους ίσες, δηλαδή $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.

ii. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν:

- $B\Gamma = B'\Gamma'$, από το α) ερώτημα.

- $\hat{B} = \hat{B}'$

- $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

γ) Αν το Δ είναι μέσο της AB , τότε η $\Gamma\Delta$ εκτός από ύψος θα είναι και διάμεσος. Επομένως το τρίγωνο $AB\Gamma$ θα είναι ισοσκελές με βάση την AB , αφού η διάμεσος του $\Gamma\Delta$ είναι και ύψος.

13504.α) i. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + 80^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ.$$

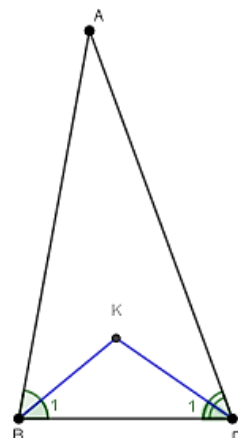
ii. Είναι $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2} = 40^\circ$ και $\hat{\Gamma}_1 = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 35^\circ$. Στο τρίγωνο $BK\Gamma$ είναι:

$$B\hat{K}\Gamma + \hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow B\hat{K}\Gamma + 40^\circ + 35^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B\hat{K}\Gamma = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

β) Αν το τρίγωνο $BK\Gamma$ είναι ισοσκελές με $BK = \Gamma K$, τότε οι γωνίες της βάσης $B\Gamma$ θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$. Επειδή όμως BK και ΓK είναι διχοτόμοι των

γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ θα έχουμε $\frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Άρα, το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.



13652.α) Είναι $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\theta} = 46^\circ$ ως κατακορυφήν.

Είναι $\hat{\Gamma} = \hat{\omega} = 67^\circ$ ως εκτός εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ϵ_1 και ϵ_2 τεμνόμενων από την $A\Gamma$. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει:

$$B\hat{A}\hat{\Gamma} + A\hat{B}\hat{\Gamma} + A\hat{\Gamma}B = 180^\circ \Leftrightarrow$$

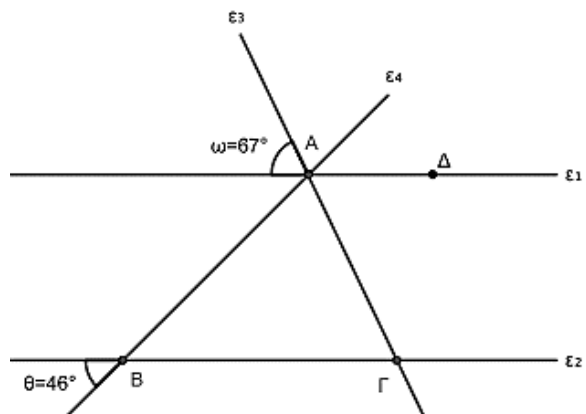
$$B\hat{A}\hat{\Gamma} + 46^\circ + 67^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$B\hat{A}\hat{\Gamma} = 180^\circ - 113^\circ = 67^\circ.$$

β) Επειδή $B\hat{A}\hat{\Gamma} = A\hat{\Gamma}B$ το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

γ) i. Είναι $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{\omega} = 67^\circ$ ως κατακορυφήν.

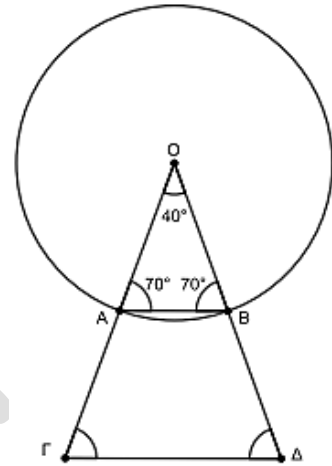
ii. Επειδή $B\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}\hat{A}\hat{\Delta}$ συμπεραίνουμε ότι η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\hat{\Delta}$. Επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι αληθής



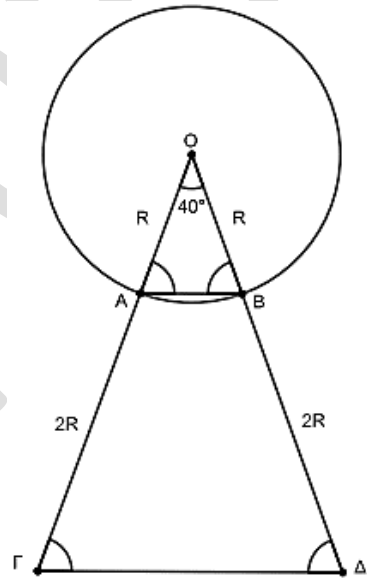
13674.α) Το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές, αφού οι πλευρές OA και OB είναι ίσες με την ακτίνα R , επομένως $\hat{A} = \hat{B}$. Στο τρίγωνο OAB ισχύει:
 $\hat{O} + \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2\hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 70^\circ = \hat{B}$.

β) i. Τα τμήματα OG και OD είναι ίσα, αφού $OG = OA + AG = 2R$ και $OD = OB + BD = 2R$. Επομένως, το τρίγωνο OGD είναι ισοσκελές με βάση GD . Οπότε, οι γωνίες OGD και ODG είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση.
 Στο τρίγωνο OGD ισχύει:
 $\hat{O} + \hat{O}GD + \hat{O}DG = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2\hat{O}GD = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{O}GD = 140^\circ \Leftrightarrow \hat{O}GD = 70^\circ = \hat{ODG}$.

ii. Οι AB και GD τέμνονται από την AG και σχηματίζουν τις εκτός εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους $\hat{OAB}$ και $\hat{ODG}$ ίσες. Επομένως, οι AB και GD είναι παράλληλες, δηλαδή $AB \parallel GD$.



γ) Αν είναι $AG = 2OA = 2R$ και $BD = 2OB = 2R$, τότε τα τμήματα OG και OD θα είναι ίσα, αφού $OG = OA + AG = 3R$ και $OD = OB + BD = 3R$. Επομένως, το τρίγωνο OGD θα είναι ισοσκελές με βάση GD . Οπότε, οι γωνίες OGD και ODG θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση. Στο τρίγωνο OGD ισχύει:
 $\hat{O} + \hat{O}GD + \hat{O}DG = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2\hat{O}GD = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{O}GD = 140^\circ \Leftrightarrow \hat{O}GD = 70^\circ = \hat{ODG}$.
 Όπως και στο ερώτημα (βii), οι AB και GD τέμνονται από την AG και σχηματίζουν τις εκτός εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους $\hat{OAB}$ και $\hat{ODG}$ ίσες. Επομένως, οι AB και GD είναι παράλληλες, δηλαδή $AB \parallel GD$.



13675.α) Είναι $\hat{A}_{\text{εξ}} + \hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow 100^\circ + \hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 80^\circ$

Στο τετράπλευρο $ABGD$ ισχύει: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{G} + \hat{D} = 360^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 220^\circ + \hat{D} = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{D} = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$

β) Στο τρίγωνο BGO ισχύει: $\hat{BOG} + \hat{OBG} + \hat{OGB} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{BOG} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{G}}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{BOG} + \frac{\hat{B} + \hat{G}}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{BOG} + \frac{220^\circ}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{BOG} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

γ) Οι AD και BG τέμνονται από την AB . Επομένως, για να είναι $AD \parallel BG$ θα πρέπει να σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους $\hat{A}$ και $\hat{B}$ παραπληρωματικές, δηλαδή:

$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$. Τότε $\hat{G} = 220^\circ - 100^\circ = 120^\circ$.

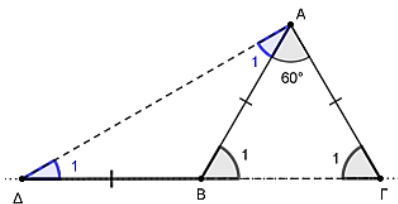
13689.α) Αφού είναι $AB = AG$, τότε το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ισοσκελές με βάση $BΓ$, οπότε θα έχει ίσες και τις προσκείμενες γωνίες στη βάση του $BΓ$, δηλαδή $\hat{B}_1 = \hat{Γ}_1$.

Για τις γωνίες του τριγώνου $ABΓ$ ισχύει ότι

$$\hat{B}\hat{A}\hat{Γ} + \hat{B}_1 + \hat{Γ}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + 2\hat{B}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$2\hat{B}_1 = 120^\circ \Leftrightarrow \hat{B}_1 = 60^\circ = \hat{Γ}_1.$$

$$\text{Είναι } \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} + \hat{B}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$



β) Αφού είναι $B\Delta = BA$, τότε το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση ΔA , οπότε θα έχει ίσες και τις προσκείμενες γωνίες στη βάση του ΔA , δηλαδή $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$.

Για τις γωνίες του τριγώνου $AB\Delta$ ισχύει ότι

$$\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} + \hat{\Delta}_1 + \hat{A}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + 2\hat{\Delta}_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\Delta}_1 = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1 = 30^\circ = \hat{A}_1$$

Είναι $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} + \hat{A}_1 = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

γ) Για το τρίγωνο $ABΓ$ έχουμε ότι $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{B}_1 = \hat{Γ}_1 = 60^\circ$ άρα το τρίγωνο $ABΓ$ είναι ισόπλευρο, δηλαδή είναι $AB = AG = BΓ$ (1).

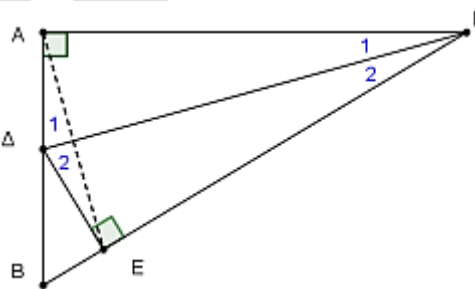
Επίσης έχουμε $B\Delta = AB$ (2) από τα δεδομένα.

Από τις σχέσεις (1) και (2) θα έχουμε $B\Delta = BΓ$, οπότε το B θα είναι μέσο του $\Delta\Gamma$. Άρα το τμήμα AB θα είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά $\Delta\Gamma$ του τριγώνου $\Delta A\Gamma$.

13691.α) i. Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $E\Gamma\Delta$ έχουν:

- $\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$
- $\Gamma\Delta = \Gamma\Delta$, ως κοινή πλευρά.
- $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ γιατί η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma}$ από τα δεδομένα.

Οπότε τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $E\Gamma\Delta$ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια και έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.

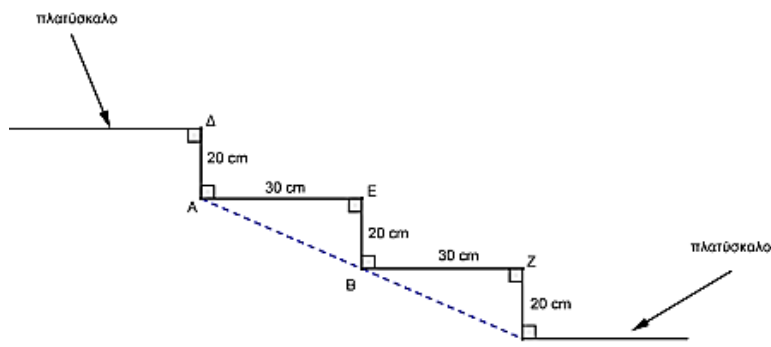


ii. Αφού τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $E\Gamma\Delta$ είναι ίσα θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, δηλαδή:

- $\Delta A = \Delta E$ (1), ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{\Gamma}_1$ και $\hat{\Gamma}_2$.
- $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ ως συμπληρωματικές γωνίες των ίσων γωνιών $\hat{\Gamma}_1$ και $\hat{\Gamma}_2$ των ορθογώνιων τριγώνων $\Gamma A\Delta$ και $\Gamma E\Delta$ αντίστοιχα.
- $\Gamma A = \Gamma E$ (2), ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{\Delta}_1$ και $\hat{\Delta}_2$.

β) Αφού είναι $\Delta A = \Delta E$ από τη σχέση (1), τότε το σημείο Δ ισαπέχει από τα σημεία A και E . Επίσης είναι $\Gamma A = \Gamma E$ από τη σχέση (2), οπότε το σημείο Γ ισαπέχει από τα σημεία A και E . Άρα τα διαφορετικά σημεία Γ και Δ θα ανήκουν στη μεσοκάθετο του τμήματος AE , οπότε η $\Gamma\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του AE .

13692. Έστω AB και ΓB οι αποστάσεις των σημείων A και Γ από το σημείο B .



α) Τα τρίγωνα AEB και BZΓ έχουν:

- $AE = BZ = 30\text{cm}$
- $EB = Z\Gamma = 20\text{cm}$
- $\hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$

Οπότε τα τρίγωνα AEB και BZΓ είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία. Επομένως θα έχουν και τις αντίστοιχες υποτεινόμενες τους AB και BΓ ίσες, δηλαδή $AB = B\Gamma$. Άρα τα σημεία A και Γ απέχουν το ίδιο από το σημείο B.

β) Για να βρίσκονται τα σημεία A, B και Γ στην ίδια ευθεία αρκεί να δειχθεί ότι η γωνία $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ είναι ευθεία γωνία ή ότι $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 180^\circ$.

Είναι $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{B}\hat{E} + \hat{E}\hat{B}\hat{\Gamma} = 90^\circ + \hat{A}\hat{B}\hat{E} + \hat{Z}\hat{B}\hat{\Gamma}$ (1). Όμως είναι $\hat{A}\hat{B}\hat{E} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{Z}$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές AE και BZ αντίστοιχα των ίσων τριγώνων AEB και BZΓ του α) ερωτήματος.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο BZΓ είναι $\hat{A}\hat{B}\hat{E} + \hat{Z}\hat{B}\hat{\Gamma} + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{B}\hat{E} + \hat{Z}\hat{B}\hat{\Gamma} = 90^\circ$ (1)

Οπότε η σχέση (1) λόγω της σχέσης (2) γίνεται $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Συνεπώς τα σημεία A, B και Γ θα βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

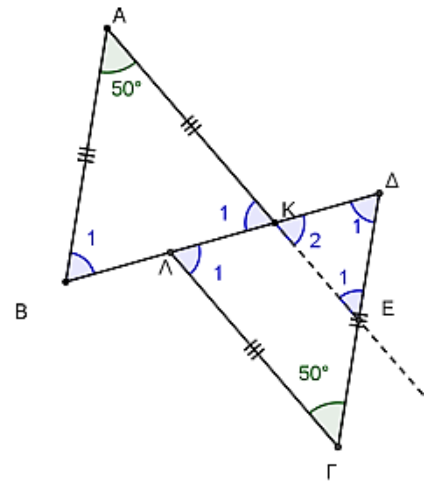
13694.α) Επειδή τα τρίγωνα ABK και ΓΔΛ είναι ίσα με $AB = \Gamma\Delta = AK = \Gamma\Lambda$, τότε θα είναι

$\hat{K}_1 = \hat{\Lambda}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ (1) ως απέναντι γωνίες των ίσων πλευρών AB, AK, ΓΔ και ΓΛ αντίστοιχα. Οπότε θα είναι $AB \parallel \Delta\Gamma$ γιατί τεμνόμενες από την ΒΔ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες $\hat{B}_1$ και $\hat{\Delta}_1$ ίσες (από σχέση (1)).

β) Στο τρίγωνο ΓΔΛ έχουμε ότι $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$ ως κατακορυφήν γωνίες και $\hat{K}_1 = \hat{\Delta}_1$ από τη σχέση (1), άρα θα είναι $\hat{K}_2 = \hat{\Delta}_1$. Οπότε το τρίγωνο ΚΔΕ θα είναι ισοσκελές γιατί έχει δυο γωνίες ίσες.

γ) Αν το τρίγωνο ΚΔΕ ήταν ισόπλευρο, τότε κάθε του γωνία θα ήταν 60° , δηλαδή $\hat{K}_2 = \hat{\Delta}_1 = \hat{E}_1 = 60^\circ$ (2). Τότε επίσης θα είναι $\hat{A} = 60^\circ$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων AB και ΔΓ του α) ερωτήματος με τέμνουσα την ΑΕ. Οπότε, με βάση τα δεδομένα, θα είναι και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Συνεπώς, αν οι ίσες γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ των δεδομένων είναι 60° , τότε το τρίγωνο ΚΔΕ θα είναι ισόπλευρο.



13792.α) Οι γωνίες $\hat{A}_{εξ}$ και $\hat{A}$ είναι παραπληρωματικές άρα:

$$\hat{A}_{εξ} + \hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

Στο τρίγωνο ABΓ έχουμε

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 60^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

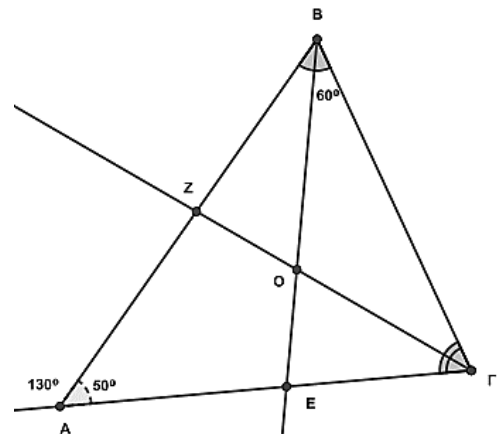
$$\hat{\Gamma} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ.$$

β) Η BE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ του τριγώνου ABΓ

$$\text{άρα: } \hat{A}\hat{B}\hat{E} = \hat{E}\hat{B}\hat{\Gamma} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \text{ (1)}$$

Η ΓΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ABΓ άρα:

$$\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{Z} = \hat{Z}\hat{\Gamma}\hat{B} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ \text{ (2)}$$



Στο τρίγωνο ΒΓΟ έχουμε:

$$\text{Ο}\hat{\text{B}}\Gamma + \text{Β}\hat{\text{O}}\Gamma + \text{Ο}\hat{\Gamma}\text{Β} = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + \text{Β}\hat{\text{O}}\Gamma + 35^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \text{Β}\hat{\text{O}}\Gamma = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ.$$

13820.α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΜ είναι $\text{Β}\hat{\text{Μ}}\text{Κ} + \hat{\text{Β}} + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \text{Β}\hat{\text{Μ}}\text{Κ} + \hat{\text{Β}} = 90^\circ$, άρα η $\hat{\text{Β}}$ είναι συμπληρωματική της $\text{Β}\hat{\text{Μ}}\text{Κ}$.

β) Είναι $\text{Β}\hat{\text{Μ}}\text{Κ} + \hat{\text{Β}} = 90^\circ \Leftrightarrow \text{Β}\hat{\text{Μ}}\text{Κ} = 90^\circ - \hat{\text{Β}} = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$

Επίσης, στο ισοσκελές ΑΒΓ, η ΑΜ είναι διάμεσος, άρα και ύψος της ΒΓ. Επομένως, το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την $\text{Α}\hat{\text{Μ}}\text{Β}$.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΜ ισχύει ότι: $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Μ} + \hat{\text{Β}} + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Μ} = 90^\circ - \hat{\text{Β}}$, άρα $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Μ} = \text{Β}\hat{\text{Μ}}\text{Κ}$.

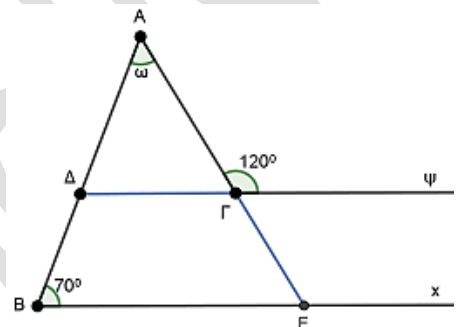
17334.α) Οι γωνίες ΓΕχ και ΑΓψ, είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων Εχ και Γψ που τέμνονται από την ΕΓ. Επομένως είναι ίσες. Άρα $\Gamma\hat{\text{Ε}}\chi = 120^\circ$.

β) Η γωνία ΑΕχ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΕ, επομένως θα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του. Δηλαδή

$$\text{Α}\hat{\text{Ε}}\chi = \hat{\text{Α}} + \hat{\text{Β}} \Leftrightarrow 120^\circ = \hat{\omega} + 70^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} = 120^\circ - 70^\circ = 50^\circ$$

γ) Οι γωνίες ΓΔΒ και ΔΒΕ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΓ και ΒΕ που τέμνονται από την ΔΒ, επομένως είναι παραπληρωματικές.

Άρα $\Gamma\hat{\Delta}\text{Β} + \Delta\hat{\text{Β}}\text{Ε} = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma\hat{\Delta}\text{Β} + 70^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma\hat{\Delta}\text{Β} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.



3^ο Θέμα

12457.α) Είναι $\hat{\text{Β}}_{\text{εξ}} + \hat{\text{Β}} = 180^\circ \Leftrightarrow 105^\circ + \hat{\text{Β}} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\text{Β}} = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.

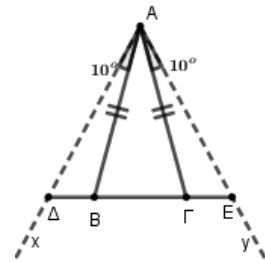
Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, είναι $\hat{\text{Β}} = \hat{\Gamma} = 75^\circ$.

β) i. Στο τρίγωνο ΑΔΒ από το άθροισμα γωνιών τριγώνου έχουμε:

$$\hat{\Delta} + \hat{\text{Β}}_{\text{εξ}} + \chi\hat{\text{Α}}\text{Β} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} + 105^\circ + 10^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

Επειδή $\hat{\text{Β}} = \hat{\Gamma} = 75^\circ$, είναι και $\hat{\text{Β}}_{\text{εξ}} = \hat{\Gamma}_{\text{εξ}} = 105^\circ$ ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες γωνίες τους είναι ίσες, δηλαδή $\hat{\text{Ε}} = \hat{\Delta} = 65^\circ$

ii. Επειδή $\hat{\text{Ε}} = \hat{\Delta}$ το τρίγωνο ΑΔΕ έχει δύο γωνίες του ίσες, οπότε είναι ισοσκελές.



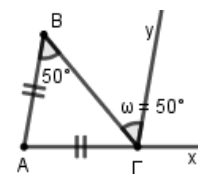
12467.α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, είναι $\hat{\Gamma} = \hat{\text{Β}} = \hat{\omega} = 50^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{\text{Α}} + \hat{\text{Β}} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\text{Α}} + 50^\circ + 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\text{Α}} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

β) Είναι $\text{Β}\hat{\Gamma}\chi + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \text{Β}\hat{\Gamma}\chi = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$, οπότε

$$\chi\hat{\Gamma}\gamma = \text{Β}\hat{\Gamma}\chi - \hat{\omega} = 130^\circ - 50^\circ = 80^\circ$$



γ) Οι γωνίες $\hat{\text{Β}}$ και $\text{Β}\hat{\Gamma}\gamma$ είναι εντός εναλλάξ των ΑΒ, Γγ που τέμνονται από την ΒΓ, επειδή είναι ίσες οι ΑΒ, Γγ είναι παράλληλες.

12659.α) Επειδή η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$, ισχύει ότι $\hat{B}\hat{A}M = \frac{\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}}{2} \Leftrightarrow \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 2 \cdot 32^\circ = 64^\circ$

β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 64^\circ + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ - 64^\circ = 116^\circ$$

γ) i. Αν $\hat{B} = 58^\circ$ τότε $58^\circ + \hat{\Gamma} = 116^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 116^\circ - 58^\circ = 58^\circ$, οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{B}$ και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

ii. Αν $\hat{B} = 64^\circ$ τότε $64^\circ + \hat{\Gamma} = 116^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 116^\circ - 64^\circ = 52^\circ$, οπότε το τρίγωνο έχει τρεις γωνίες άνισες επομένως και οι απέναντι πλευρές είναι ομοίως άνισες και το τρίγωνο είναι σκαληνό και δεν είναι ισοσκελές.

12702.α) i. Είναι $\hat{B}\hat{A}Z + \hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow 110^\circ + \hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 70^\circ$

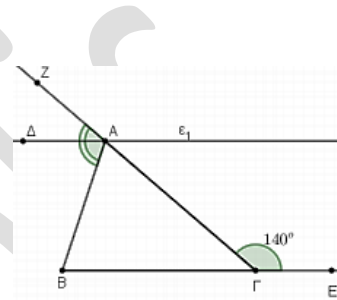
$$\hat{\Gamma} + \hat{A}\hat{\Gamma}E = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

ii. Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι 180° , οπότε:

$$\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + \hat{B} + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

β) Επειδή $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{B}$ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

γ) Είναι $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{B} = 70^\circ$ γιατί είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ.



13827.α) $\hat{O}\hat{B}\hat{\Gamma} + \hat{E}\hat{B}\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{O}\hat{B}\hat{\Gamma} + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{O}\hat{B}\hat{\Gamma} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

β) Επειδή $\hat{O}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{O}\hat{\Gamma}\hat{B}$ το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ.

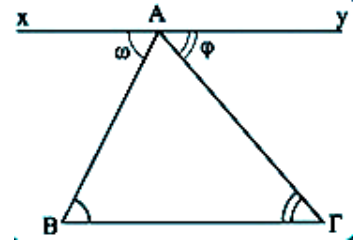
Το 1^ο Θέμα της Τράπεζας

12358.α) i. Λ ii. Σ iii. Λ iv. Σ v. Σ

β) Από μια κορυφή, π.χ. την Α, φέρουμε ευθεία $xy \parallel BG$. Τότε $\hat{\omega} = \hat{B}$ (1) και $\hat{\phi} = \hat{\Gamma}$ (2), ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και BG με τέμνουσες AB και AG αντίστοιχα.

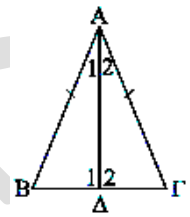
Αλλά $\hat{\omega} + \hat{A} + \hat{\phi} = 2\angle$ (3).

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\angle$



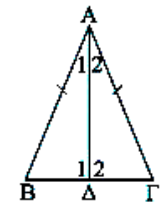
12453.α) i. Λ ii. Σ iii. Σ iv. Σ v. Λ

β) Έστω ισοσκελές τρίγωνο ABG με $AB = AG$ και AD η διάμεσός του. Τα τρίγωνα ABD και AGD έχουν $AB = AG$, AD κοινή και $BD = DG$, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από τις ισότητες αυτές προκύπτει αντίστοιχα ότι η AD είναι διχοτόμος και ύψος.



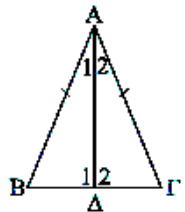
12455.α) i. Σ ii. Σ iii. Λ iv. Λ v. Σ

β) Έστω ισοσκελές τρίγωνο ABG με $AB = AG$. Φέρουμε τη διχοτόμο του AD . Τα τρίγωνα ADB και ADG έχουν $AB = AG$, AD κοινή και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.



12461.α) i. Λ ii. Σ iii. Σ iv. Σ v. Λ

β) Έστω ισοσκελές τρίγωνο ABG με $AB = AG$ και AD η διάμεσός του. Τα τρίγωνα ABD και AGD έχουν $AB = AG$, AD κοινή και $BD = DG$, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από τις ισότητες αυτές προκύπτει αντίστοιχα ότι η AD είναι διχοτόμος και ύψος.

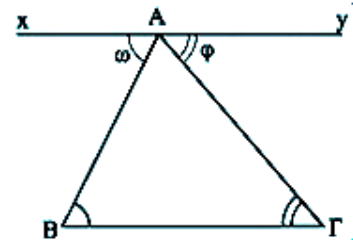


12646.α) i. Σ ii. Λ iii. Λ iv. Σ v. Λ

β) Από μια κορυφή, π.χ. την Α, φέρουμε ευθεία $xy \parallel BG$. Τότε $\hat{\omega} = \hat{B}$ (1) και $\hat{\phi} = \hat{\Gamma}$ (2), ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και BG με τέμνουσες AB και AG αντίστοιχα.

Αλλά $\hat{\omega} + \hat{A} + \hat{\phi} = 2\angle$ (3).

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\angle$

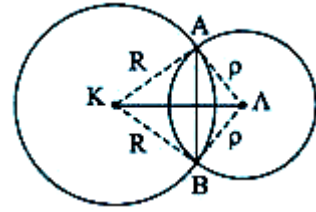


α) i. Σ ii. Σ iii. Λ iv. Λ v. Σ

β) Τα τρίγωνα AOP και BOP (σχ.60) έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, OP κοινή και $OA = OB$ ($= \rho$), άρα είναι ίσα, οπότε $PA = PB$.

13435.α) i. Λ ii. Σ iii. Σ iv. Λ v. Λ

β) Έστω οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) και A, B τα σημεία τομής τους. Επειδή $KA = KB = R$, το σημείο K είναι σημείο της μεσοκαθέτου του AB . Όμοια από την $LA = LB = \rho$ προκύπτει ότι και το Λ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του AB . Άρα, η $K\Lambda$ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής AB του κύκλου.



13830.α) i. Λ ii. Σ iii. Σ iv. Σ v. Λ

β) Έχουμε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\pi$ και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} + \hat{\Gamma} = 2\pi$ οπότε

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} + \hat{\Gamma} \text{ ή } \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = \hat{A} + \hat{B}$$



Askisopolis