

3.2 Το κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π – Γ – Π)

1. ΘΕΜΑ_2_13685

Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και χορδή του AB . Πάνω στη χορδή AB παίρνουμε σημεία Γ και Δ τέτοια, ώστε $A\Gamma = B\Delta$.

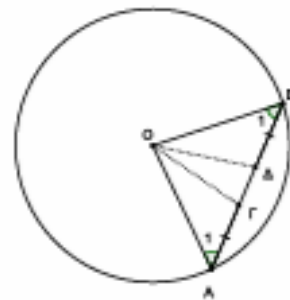
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές και ότι οι γωνίες του $\hat{A}_1$ και $\hat{B}_1$ είναι ίσες.

β) Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα OAG και OBD είναι ίσα.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Είναι ίσα τα τμήματα OG και OD ;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



2. ΘΕΜΑ_2_13683

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση την πλευρά $B\Gamma$.

α) Να γράψετε τις ιδιότητες που αφορούν τις πλευρές και τις γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Από τις κορυφές B και Γ φέρνουμε τις διαμέσους BM και ΓN που αντιστοιχούν στις πλευρές του $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

i. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $B\Gamma M$ και ΓBN και να αιτιολογήσετε γιατί είναι ίσα.

ii. Να εξηγήσετε γιατί οι διάμεσοι BM και ΓN είναι ίσες.

3. ΘΕΜΑ_2_13682

Στο σχήμα, το M είναι ένα τυχαίο σημείο της ημιευθείας Ox και B, Γ είναι σημεία τέτοια, ώστε $B\hat{O}x = \Gamma\hat{O}x$ και $OB = O\Gamma$.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα OBM και $O\Gamma M$ και να δικαιολογήσετε ότι είναι ίσα.

β) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις με τις άλλες ίσες γωνίες που προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα της ισότητας των δυο τριγώνων OBM και $O\Gamma M$.

1. Η γωνία $O\hat{B}M$ του τριγώνου OBM είναι ίση με την γωνία του τριγώνου $O\Gamma M$.

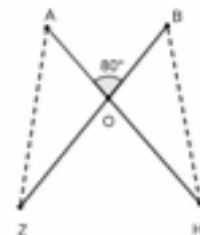
2. Η γωνία του τριγώνου OBM είναι ίση με την γωνία $\Gamma\hat{M}O$ του τριγώνου $O\Gamma M$.

γ) Είναι οι γωνίες $B\hat{M}x$ και $\Gamma\hat{M}x$ ίσες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



4. ΘΕΜΑ_2_13445

Στο σχήμα, τα τμήματα AH και BZ είναι ίσα και τέμνονται σε σημείο O έτσι ώστε η γωνία $A\hat{O}B$ να είναι ίση με 80° . Έστω ότι είναι $AH = BZ = 5$ και $OH = OZ = 3$.



α) Να αποδείξετε ότι $\hat{A}\hat{O}\hat{Z} = \hat{B}\hat{O}\hat{H} = 100^\circ$.

β) Είναι τα τρίγωνα ΔOZ και ΔOH ίσα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

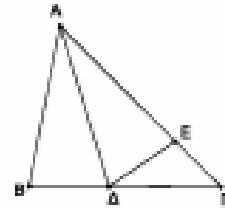
5. ΘΕΜΑ_2_13436

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 5$ και $A\Gamma = 7$ και η διχοτόμος του $\hat{A}$.

Στην πλευρά $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο E , ώστε $\Gamma E = 2$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AE .

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AE\Delta$ είναι ίσα.



6. ΘΕΜΑ_2_12454

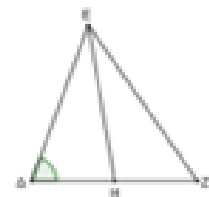
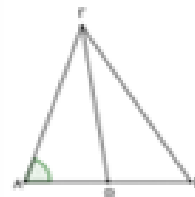
Δίνονται δύο ίσα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔZE για τα οποία

ισχύει $AB = \Delta Z = 4\text{cm}$, $A\Gamma = \Delta E$ και $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Έστω Θ

το μέσο της AB και H το μέσο της ΔZ .

α) Να υπολογίσετε το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων $A\Theta$ και ΔH .

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma\Theta$ και $\Delta E H$ είναι ίσα.

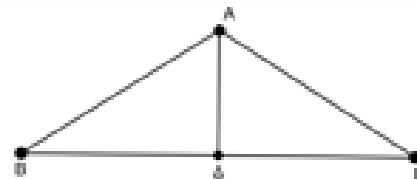


7. ΘΕΜΑ_2_12535

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB = A\Gamma$ η γωνία της κορυφής του A είναι ίση με 120° . Αν η $A\Delta$ είναι διχοτόμος του τριγώνου τότε:

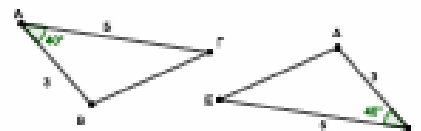
α) να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta}$,

β) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta \Gamma$ είναι ίσα.



8. ΘΕΜΑ_3_13284

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔZE του παρακάτω σχήματος είναι ίσα.



β) Ο Φοίβος και η Αθηνά, δύο μαθητές της Α' Λυκείου, μελετούν παρέα Γεωμετρία. Μεταξύ τους γίνεται ο εξής διάλογος, καθώς συγκρίνουν τα τρίγωνα του σχήματος που ακολουθεί:



Φ : Τα δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία, αφού $HI = KM$ και $H\Theta = KA$, και από μία γωνία ίση, αυτή που σημειώνεται με 58° , οπότε θα είναι μεταξύ τους ίσα.

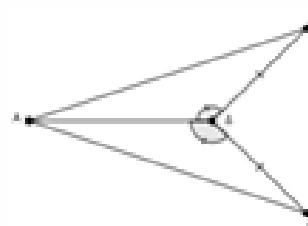
Λ : Πράγματι έχουν δυο πλευρές τους ίσες μία προς μία, αλλά η γωνία των 58° είναι σε διαφορετική θέση σε σχέση με τις ίσες πλευρές στα δύο τρίγωνα. Νομίζω ότι μπορώ να αποδείξω ότι τα τρίγωνα $H\Theta I$ και KAM δεν είναι ίσα.

- i. Να εξηγήσετε τι εννοεί η Αθηνά σχετικά με τη διαφορετική θέση της γωνίας των 58° .
- ii. Με ποιόν από τους δύο μαθητές συμφωνείτε; Αν νομίζετε ότι έχει δίκιο ο Φοίβος, δικαιολογήστε γιατί. Αν νομίζετε ότι έχει δίκιο η Αθηνά, βοηθήστε την να ολοκληρώσει την απόδειξή της.

9. ΘΕΜΑ_4_12840

Στο σχήμα δίδονται ότι ισχύουν: $\Delta B = \Delta \Gamma$ και $\hat{A}\hat{B} = \hat{A}\hat{\Gamma}$.

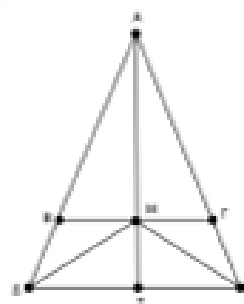
- α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔB και $\Delta \Gamma$.
- β) Να αιτιολογήσετε γιατί $\hat{A}\hat{B} = \hat{A}\hat{\Gamma}$.
- γ) Φέρνουμε τη $B\Gamma$. Αν η AA προεκτενόμενη προς το Δ , τέμνει την $B\Gamma$ στο E , να αποδείξετε ότι το E είναι το μέσο της $B\Gamma$.



10. ΘΕΜΑ_4_12837

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M είναι το μέσο της βάσης $B\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB , $A\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα BA , ΓE αντίστοιχα, ώστε $BA = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

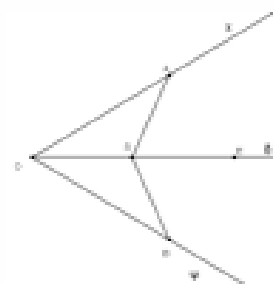
- α) το τρίγωνο ΔDE είναι ισοσκελές,
- β) τα τρίγωνα MBA και $M\Gamma E$ είναι ίσα,
- γ) αν η AM προεκτενόμενη προς το M , τέμνει την ΔE στο σημείο Z , να αιτιολογήσετε ότι η AZ είναι κάθετη στην ΔE .



11. ΘΕΜΑ_4_13496

Δίνεται η γωνία $\chi\hat{O}\psi$ και η διχοτόμος της $O\delta$. Πάνω στις $O\chi$ και $O\psi$ παίρνουμε σημεία A και B αντίστοιχα, ώστε $OA = OB$. Πάνω στην $O\delta$ θεωρούμε σημεία Δ και E όπως φαίνονται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα $O\Delta\Delta$ και OBA είναι ίσα,
- β) $\hat{A}\hat{\Delta E} = \hat{B}\hat{\Delta E}$.
- γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι $AE = BE$. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



12. ΘΕΜΑ_4_13794

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στις προεκτάσεις των πλευρών του BA προς το A και ΓA προς το A , παίρνουμε σημεία E και Δ αντίστοιχα, ώστε $AE = A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι $BA = GE$.

β) Να αποδείξετε ότι $\widehat{GBA} = \widehat{BGE}$.

γ) Έστω M το μέσο της πλευράς BG , να αποδείξετε ότι $MA = ME$.

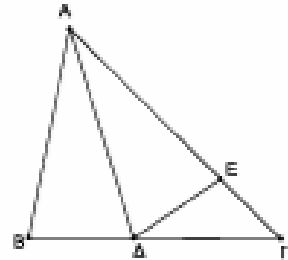
13. ΘΕΜΑ_4_13530

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=10$ και $A\Gamma=14$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Στην πλευρά $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο E ώστε $GE = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AE\Delta$ είναι ίσα.

β) Να δικαιολογήσετε γιατί είναι ίσα τα τμήματα BA , AE .

γ) Προεκτείνουμε την EA προς το A κατά τμήμα AZ , ώστε $AZ = AE$. Να αποδείξετε ότι $\widehat{ABZ} = \widehat{AZB}$.



14. ΘΕΜΑ_4_12512

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και στις ίσες πλευρές του AB , $A\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα $AD = \frac{1}{3}AB$ και $AE = \frac{1}{3}A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές.

β) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα BD και GE είναι ίσα.

γ) Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα BDM και $ΓEM$ είναι ίσα.

ii. το τρίγωνο DEM είναι ισοσκελές.

