

Φύλλο Εργασίας στις κρούσεις

Ερώτηση 1

Σώμα Α μάζας m κινείται με ταχύτητα μέτρου u . Το σώμα συγκρούεται μετωπικά με άλλο σώμα Β. Το σώμα Α μετά την κρούση κινείται με ταχύτητα μέτρου $2u$, σε αντίθετη φορά απ' ό,τι πριν την κρούση.

Ποιο φυσικό μέγεθος διατηρείται κατά την κρούση και γιατί; Να γράψετε μια εξίσωση σε αλγεβρική μορφή που εκφράζει τη διατήρηση αυτή

Κατά την κρούση διατηρείται η ορμή του συστήματος των συγκρουόμενων σωμάτων αφού:

$$\Sigma \vec{F}_{\varepsilon\xi} = \frac{\Delta \vec{p}_{o\lambda}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta \vec{p}_{o\lambda} = \Sigma \vec{F}_{\varepsilon\xi} \cdot \Delta t \xrightarrow[\Delta t \rightarrow 0]{\Sigma \vec{F}_{\varepsilon\xi} \rightarrow 0} \Delta \vec{p}_{o\lambda} = \vec{0}$$

$$mv + p_B = m(-2v) + p_B' \Rightarrow p_B' - p_B = 3mv \Rightarrow \Delta p_B = 3mv$$

Η μεταβολή της ορμής του σώματος Β κατά την κρούση, έχει μέτρο:

α. $2mv$ β. 0 **γ. $3mv$** δ. mv

Ισοδύναμα: $\Delta p_A = p_A' - p_A \xrightarrow{+} \Delta p_A = m(-2v) - mv = -2mv - mv = -3mv$

$$|\Delta p_A| = |\Delta p_B| = 3mv$$

Ερώτηση 2

Βλήμα διαπερνά ακίνητο κιβώτιο μάζας 2Kg και η μεταβολή της κινητικής του ενέργειας κατά την κρούση είναι $\Delta K_1 = -450J$. Να γράψετε μια εξίσωση που να εκφράζει την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας κατά την κρούση αυτή

$$K_1 = K_1' + K_2 + |\Delta K_{o\lambda}|$$

Αν η απώλεια κινητικής ενέργειας για το σύστημα βλήμα-κιβώτιο είναι 441J, η ταχύτητα του κιβωτίου μετά την κρούση έχει μέτρο:

α. 2 m/s **β. 3 m/s** γ. 9 m/s δ. 21 m/s

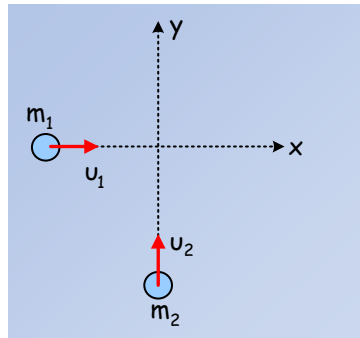
$$K_1 = K_1' + K_2 + |\Delta K_{o\lambda}| \Rightarrow K_2 = (K_1 - K_1') - |\Delta K_{o\lambda}| \Rightarrow K_2 = 450J - 441J = 9J$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \Rightarrow v_2' = 3 \frac{m}{s}$$

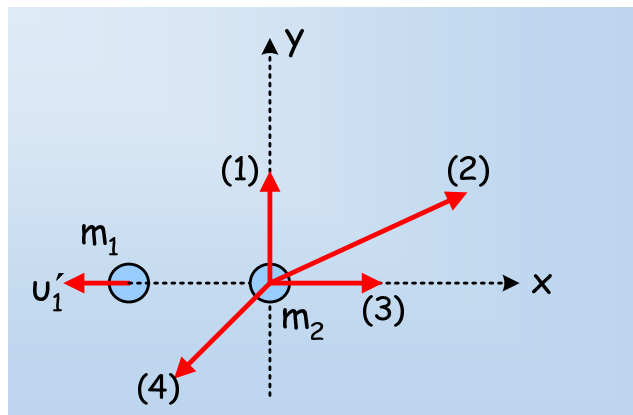
Ερώτηση 3

Δύο σφαίρες με μάζες m_1 και m_2 κινούνται με ταχύτητες $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ σε κάθετες διευθύνσεις και συγκρούονται.

Να σχεδιάσετε το διάνυσμα της ορμής του συστήματος των δύο σφαιρών πριν την κρούση



Η σφαίρα m_1 μετά την κρούση έχει ταχύτητα $\vec{u}_1'$, με αντίθετη κατεύθυνση από την αρχική $\vec{u}_1$.



Να εκφράσετε την $AΔO$ για το σύστημα των δύο σφαιρών στους άξονες $x'x$ και $y'y$

$$\vec{p}_{x(\piριν)} = \vec{p}_{x(\μετά)} \Rightarrow m_1 u_1 = m_1 (-u_1') + m_2 u_{2x}'$$

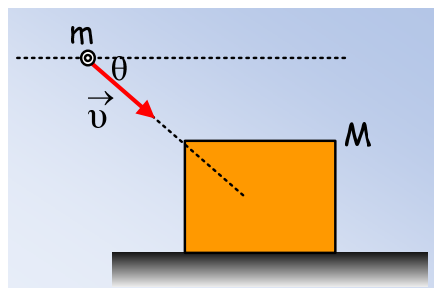
$$\vec{p}_{y(\piριν)} = \vec{p}_{y(\μετά)} \Rightarrow m_2 u_2 = m_2 u_{2y}'$$

Η ταχύτητα της σφαίρας m_2 μετά την κρούση μπορεί να αντιστοιχεί στο διάνυσμα:

- α. (1) β. (2) γ. (3) δ. (4)

Ερώτηση 4

Σφαίρα μάζας m σφηνώνεται με ταχύτητα u , η οποία σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση, σε ακίνητο κύβο μάζας M , ο οποίος ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο.



Κατά την κρούση το συσσωμάτωμα δεν αναπηδά, ενώ αμέσως μετά την κρούση κινείται οριζόντια.

Να εξηγήσετε γιατί κατά την πλάγια πλαστική κρούση της σφαίρας με τον κύβο, δεν διατηρείται η ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων

Η ορμή του συστήματος πριν την κρούση, είναι ίση με την ορμή του βλήματος: $\vec{p}_{ολ(πριν)} = m\vec{v}$

η οποία σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση

Η ορμή του συστήματος μετά την κρούση, είναι ίση με την ορμή του συσσωματώματος, η οποία είναι οριζόντια $\vec{p}_{ολ(μετά)} = m\vec{v}_κ$

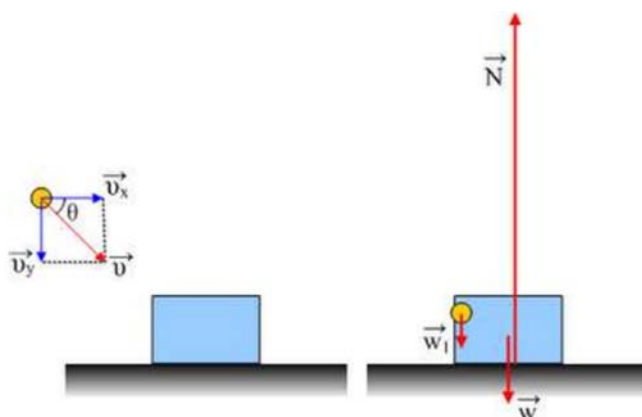
Να υπολογίσετε τη μεταβολή της ορμής του κύβου κατά την κρούση. Είναι αντίθετη της μεταβολής της ορμής του βλήματος;

$$\Sigma \vec{F}_{(x)\varepsilon\xi} = \vec{0} \Rightarrow \Delta \vec{p}_x = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_{x(πριν)} = \vec{p}_{x(μετά)} \Rightarrow mv \cos \theta = (M+m)v_k \Rightarrow v_k = \frac{mv \cos \theta}{M+m}$$

$$\Delta \vec{p}_{κβ} = M\vec{v}_k \Rightarrow \Delta p_{κβ} = M \frac{mv \cos \theta}{M+m}$$

Εφόσον **δεν** διατηρείται η ορμή του συστήματος, οι μεταβολές ορμών των δύο σωμάτων, **δεν** είναι αντίθετες

Να εξηγήσετε γιατί κατά τη διάρκεια της κρούσης, η δύναμη επαφής (την οποία θεωρούμε σταθερή) από το λείο δάπεδο στον κύβο είναι κατακόρυφη με μέτρο $N > (M+m)g$



Εφαρμόζοντας τη γενικευμένη μορφή του 2ου Νόμου του Νεύτωνα, στον άξονα γγ, έχουμε:

$$\Sigma F_y = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} \Rightarrow N - (M+m)g = \frac{0 - m(-v_o \eta \mu \theta)}{\Delta t} \Rightarrow N = (M+m)g + \frac{mv_o \eta \mu \theta}{\Delta t}$$

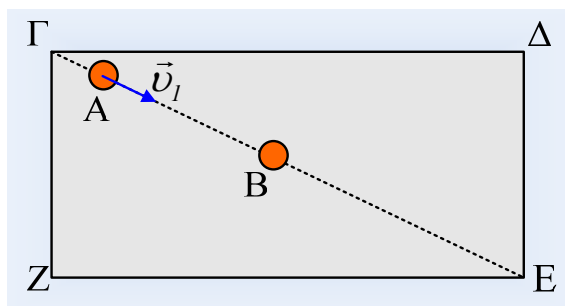
Να δείξετε ότι, η απώλεια μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση είναι ίση με:

$$|\Delta E| = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2} \frac{m^2 v^2 \sin^2 \theta}{M+m}$$

$$|\Delta E| = K_{ολ(πριν)} - K_{ολ(μετά)} \Rightarrow |\Delta E| = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(M+m)v_{\kappa}^2 \Rightarrow |\Delta E| = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2} \frac{m^2 v^2 \sin^2 \theta}{M+m}$$

Ερώτηση 5

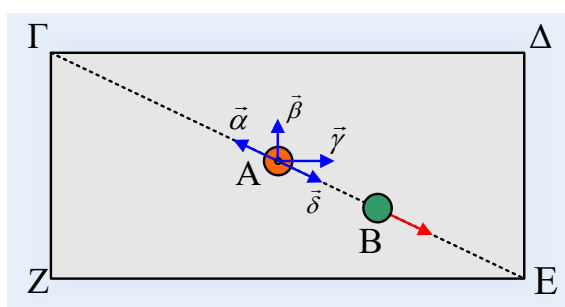
Στο λείο δάπεδο ενός ορθογώνιου δωματίου ΓΔΕΖ, εκτοξεύουμε μια σφαίρα Α, μάζας m_1 , από την κορυφή Γ με κατεύθυνση την απέναντι κορυφή Ε, όπως στο σχήμα. Στην πορεία της η σφαίρα Α συγκρούεται ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Β, μάζας $m_2 < m_1$. Μετά την κρούση η σφαίρα Β φτάνει στην κορυφή Ε.



Να αιτιολογήσετε γιατί η σφαίρα Α μετά την κρούση πρέπει να έχει ταχύτητα πάνω στην ΓΕ

Κατά την κρούση διατηρείται η ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών. Εφόσον πριν την κρούση, η ορμή της σφαίρας Α, άρα και του συστήματος των δύο σφαιρών, είναι πάνω στην ΓΕ, το ίδιο θα πρέπει να ισχύει και μετά την κρούση. Γνωρίζοντας πως μετά την κρούση η σφαίρα Β, φθάνει στην κορυφή Ε, συμπεραίνουμε πως η ορμή της είναι πάνω στην ΓΕ, άρα το ίδιο θα πρέπει να ισχύει και για την ορμή της σφαίρας Α μετά την κρούση.

Η ταχύτητα της Α σφαίρας μετά την κρούση, παριστάνεται με το διάνυσμα:

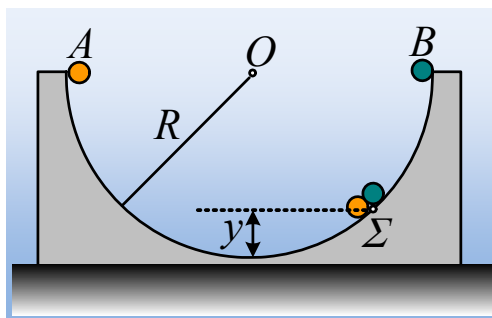


α. $\vec{\alpha}$ β. $\vec{\beta}$ γ. $\vec{\gamma}$ δ. $\vec{\delta}$

Στη μετωπική ελαστική κρούση, όταν η μάζα της κινούμενης σφαίρας είναι μεγαλύτερη από τη μάζα της ακίνητης, η αρχικά κινούμενη σφαίρα, συνεχίζει μετά την κρούση, να κινείται στην ίδια φορά

Ερώτηση 6

Δύο μικρές σφαίρες Α και Β με ίσες ακτίνες, **συγκρατούνται** όπως στο σχήμα στις κορυφές ενός **λείου** ημικυκλικού οδηγού. Σε μια στιγμή αφήνουμε την Α να πέσει, κινούμενη κατά μήκος του οδηγού σε κατακόρυφο επίπεδο. **Μετά από λίγο** αφήνουμε να κινηθεί και την σφαίρα Β. Οι δυο σφαίρες συγκρούονται **κεντρικά** και **ελαστικά** στο σημείο Σ.



Οι σφαίρες κινούνται για ίσα χρονικά διαστήματα μέχρι να συγκρουστούν;

Μεγαλύτερο χρονικό διάστημα κινείται η σφαίρα Α που αρχίζει πρώτη να κινείται

Να αιτιολογήσετε γιατί διατηρείται η μηχανική ενέργεια κάθε σφαίρας στη διάρκεια της κίνησής τους στον ημικυκλικό οδηγό

Σε κάθε θέση της τροχιάς, η δύναμη από τον οδηγό έχει την ακτινική διεύθυνση και είναι κάθετη στην ταχύτητα, οπότε δεν παράγει έργο. Έργο παράγει μόνο το βάρος.

Να συγκρίνετε τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σφαιρών οριακά πριν την κρούση

$$mg(R-y) = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2g(R-y)} \quad \text{Άρα: } v_1 = v_2 = \sqrt{2g(R-y)}$$

Ερώτηση 7

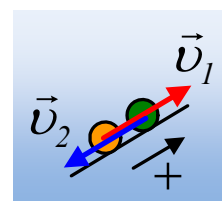
Αμέσως μετά την κρούση των σφαιρών της ερώτησης (6), η ταχύτητα της Β σφαίρας είναι μηδενική. Οι ακτίνες των σφαιρών θεωρούνται αμελητέες σε σχέση με την ακτίνα του ημικυκλικού οδηγού, ώστε να μπορούμε να θεωρούμε πως τη στιγμή της κρούσης βρίσκονται στο ίδιο ύψος από το δάπεδο.

Για τις μάζες m_1 , m_2 των σφαιρών Α και Β αντίστοιχα, ισχύει:

$$\alpha. \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3} \quad \beta. \frac{m_1}{m_2} = 1 \quad \gamma. \frac{m_1}{m_2} = 3$$

Η κρούση των δύο σφαιρών είναι κεντρική ελαστική. Οι ταχύτητες των σφαιρών οριακά πριν την κρούση είναι αντίθετες: $v_1 = -v_2$.

Αμέσως μετά την κρούση η σφαίρα Β θα έχει ταχύτητα:



$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \Rightarrow 0 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} (-v_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow 2m_1 = m_2 - m_1 \rightarrow m_2 = 3m_1 \rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$$

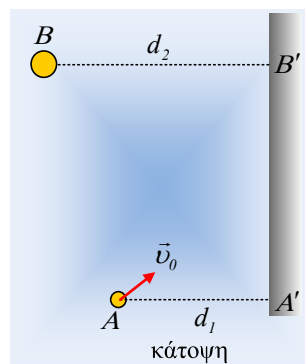
Μετά την κρούση, η σφαίρα Α θα επιστρέψει στη θέση από την οποία ξεκίνησε σταματώντας εκεί την προς τα πάνω κίνησής της ή θα συνεχίσει να κινείται βγαίνοντας έξω από τον οδηγό;

Αιτιολογείστε

Μετά την κρούση, η σφαίρα Α θα συνεχίσει να κινείται βγαίνοντας έξω από τον οδηγό, κινούμενη κατακόρυφα προς τα πάνω, αφού κατά την κρούση παίρνει όλη την κινητική ενέργεια της σφαίρας Β, η οποία ακινητοποιείται στιγμιαία, έχοντας έτσι η σφαίρα Α, μεγαλύτερη μηχανική ενέργεια από ότι πριν την κρούση.

Ερώτηση 8

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δυο μικρές σφαίρες στα σημεία Α και Β. Οι σφαίρες απέχουν από κατακόρυφο τοίχο αποστάσεις $d_1 = (AA') = 1,2\text{m}$ και $d_2 = (BB') = 2\text{m}$, ενώ $(A'B') = D = 2,4\text{m}$. Κάποια στιγμή, η πρώτη σφαίρα δέχεται κατάλληλο κτύπημα αποκτώντας ταχύτητα u_0 , με αποτέλεσμα, μετά την ελαστική κρούση της με τον τοίχο, να συγκρουσθεί με τη δεύτερη σφαίρα κεντρικά.



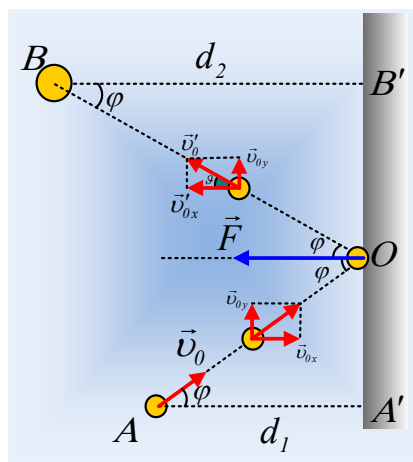
Να συγκρίνετε τα μέτρα των ταχυτήτων της σφαίρας που ήταν στο Α, πριν και μετά την κρούση

Εφόσον η κρούση είναι ελαστική, η κινητική ενέργεια της σφαίρας και κατά συνέπεια, το μέτρο της ταχύτητάς της διατηρούνται σταθερά.

Να σχεδιάσετε τη γωνία πρόσπτωσης και τη γωνία ανάκλασης κατά την κρούση της σφαίρας αυτής στην ακλόνητη επιφάνεια

Έστω η διεύθυνση της αρχικής ταχύτητας u_0 σχηματίζει γωνία φ με την κάθετη AA' , ενώ η σφαίρα κτυπά τον τοίχο στο σημείο Ο. Η δύναμη F από τον τοίχο στη διάρκεια της κρούσης, είναι κάθετη σε αυτόν. Αλλά τότε με βάση το επόμενο σχήμα, η γωνία πρόσπτωσης δηλαδή η

γωνία που σχηματίζει η κάθετη στον τοίχο με τη διεύθυνση της u_0 είναι επίσης φ .



Επίσης η γωνία ανάκλασης, δηλαδή η γωνία της ταχύτητας u_0 με την κάθετη στο O , είναι επίσης φ .

Η σφαίρα συναντά τον τοίχο σε σημείο O , όπου:

- α. $(OA')=1,5m$ β. $(OA')=1,2m$ γ. $(OA')=0,9m$

Από την Τριγωνομετρία εξάλλου παίρνουμε:

$$\varepsilon\phi\varphi = \frac{(OA')}{(AA')} \rightarrow (OA') = (AA')\varepsilon\phi\varphi = d_1\varepsilon\phi\varphi \quad (1)$$

$$\varepsilon\phi\varphi = \frac{(OB')}{(BB')} \rightarrow (OB') = (BB')\varepsilon\phi\varphi = d_2\varepsilon\phi\varphi \quad (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη παίρνουμε:

$$(OA') + (OB') = (d_1 + d_2)\varepsilon\phi\varphi \rightarrow \varepsilon\phi\varphi = \frac{D}{(d_1 + d_2)} = \frac{2,4}{1,2 + 2} = \frac{2,4}{3,2} = \frac{3}{4} \rightarrow$$

$$(OA') = d_1\varepsilon\phi\varphi = 1,2 \cdot \frac{3}{4} m = 0,9m \quad \text{και} \quad (OB') = 1,5m$$

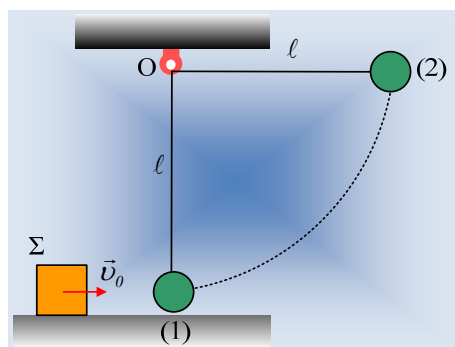
Ποιο το μήκος της τροχιάς της σφαίρας στη διαδρομή AOB :

Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο Θεώρημα, στα δύο ορθογώνια τρίγωνα $AA'O$ και $BB'O$, έχουμε:

$$(AO) = \sqrt{1,2^2 + 0,9^2} m = 1,5m \quad \text{και} \quad (BO) = \sqrt{2^2 + 1,5^2} m = 2,5m \quad \text{Άρα: } (AOB) = 4m$$

Ερώτηση 9

Μια σφαίρα μάζας $m=0,5\text{kg}$ ηρεμεί στο κάτω άκρο κατακόρυφου νήματος μήκους $l=1,25\text{m}$, (θέση 1), το άλλο άκρο του οποίου έχει προσδεθεί σε σταθερό σημείο O . Ένα σώμα Σ μάζας $m_1=2,5\text{kg}$ κινείται με σταθερή ταχύτητα u_0 σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με τη σφαίρα. Μετά την κρούση, τη στιγμή που η σφαίρα περνά από την θέση (2), η τάση του νήματος είναι ίση με $T=4,4\text{N}$.



Να υπολογιστεί η τάση του νήματος, οριακά πριν την κρούση.

Πριν την κρούση η σφαίρα ισορροπεί με την επίδραση της τάσης T_0 του νήματος και του βάρους, οπότε: $\Sigma F=0 \rightarrow T_0=W=mg=0,5 \cdot 10\text{N}=5\text{N}$

Να αιτιολογήσετε γιατί διατηρείται η μηχανική ενέργεια της σφαίρας στη διάρκεια της κίνησής της μέχρι τη θέση (2)

Σε κάθε θέση της τροχιάς, η τάση του νήματος, έχει την ακτινική διεύθυνση και είναι κάθετη στην ταχύτητα, οπότε δεν παράγει έργο. Έργο παράγει μόνο το βάρος.

Να αιτιολογήσετε γιατί η ταχύτητα της σφαίρας στη θέση (2) είναι διάφορη από μηδέν και μετά να την υπολογίσετε

Η σφαίρα τη στιγμή που περνάει από την θέση (2) με το νήμα οριζόντιο, έχει κάποια κατακόρυφη ταχύτητα u_3 (κάθετη στο νήμα, αφού η τροχιά είναι κυκλική). Αν δεν συνέβαινε αυτό και έφτανε στη θέση αυτή με μηδενική ταχύτητα, τότε θα ήταν και μηδενική η τάση του νήματος, αφού:

$$\Sigma F_R = T = F_K = m u^2 / R$$

Η τάση του νήματος, στην οριζόντια θέση (2), παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης:

$$T = m \frac{v_3^2}{R} \rightarrow v_3 = \sqrt{\frac{Tl}{m}} \rightarrow v_3 = \sqrt{\frac{Tl}{m}} = \sqrt{\frac{4,4 \cdot 1,25}{0,5}} \text{ m/s} = \sqrt{11} \text{ m/s}$$

Να υπολογιστεί η ταχύτητα της σφαίρας και τάση του νήματος αμέσως μετά την κρούση.

Λόγω διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, έχουμε:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_3^2 + mg\ell \rightarrow v_2 = \sqrt{v_3^2 + 2g\ell} = \sqrt{11 + 2 \cdot 10 \cdot 1,25} \text{ m/s} = 6 \text{ m/s}$$

Μετά την κρούση, η σφαίρα εκτελεί κυκλική κίνηση, για την οποία:

$$\Sigma F_R = m \frac{v_2^2}{R} \rightarrow T_l - mg = m \frac{v_2^2}{\ell} \rightarrow T_l = mg + m \frac{v_2^2}{\ell} = 0,5 \left(10 + \frac{6^2}{1,25} \right) \text{ N} = 19,4 \text{ N}$$

Ερώτηση 10

Να βρεθεί η ταχύτητα u_0 του σώματος Σ πριν την κρούση καθώς και το κλάσμα της κινητικής του ενέργειας που μεταφέρθηκε στη σφαίρα

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m} u_0 \rightarrow u_0 = \frac{m_1 + m}{2m_1} v_2 \rightarrow u_0 = \frac{m_1 + m}{2m_1} u_2 = \frac{2,5 + 0,5}{2 \cdot 2,5} 6 \text{ m/s} = 3,6 \text{ m/s}$$

Η κινητική ενέργεια που μεταφέρθηκε στη σφαίρα είναι ίση με την κινητική ενέργεια που έχει η σφαίρα, μετά την κρούση: $K'_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$

Το κλάσμα της κινητικής του ενέργειας που μεταφέρθηκε στη σφαίρα είναι:

$$\frac{K'_2}{K_1} = \frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{1}{2}m_1u_0^2} = \frac{18}{32,4}$$

Θοδωρής Παπασγουρίδης

parasgou@gmail.com