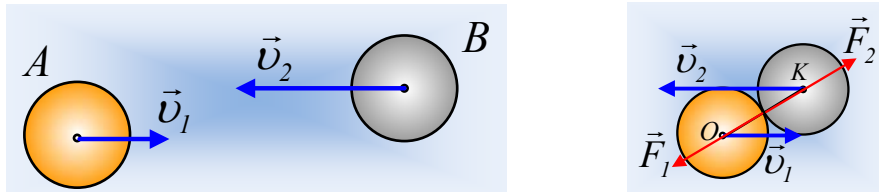
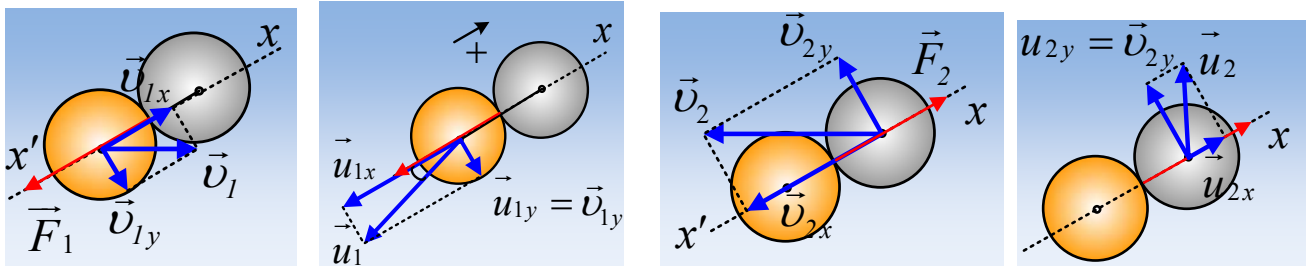


Φυλλάδιο 7: Κρούσεις Μεθοδολογία-Ασκήσεις

Κατά την **ελαστική κρούση** μεταξύ δύο σφαιρών, **δεν αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής** μεταξύ των σφαιρών στη διάρκεια της κρούσης. Αναπτύσσονται **δυνάμεις επαφής**, οι οποίες **διέρχονται από τα κέντρα μάζας** των σφαιρών και **βρίσκονται πάνω στη διάκεντρο των σφαιρών**, όπως στο επόμενο σχήμα.



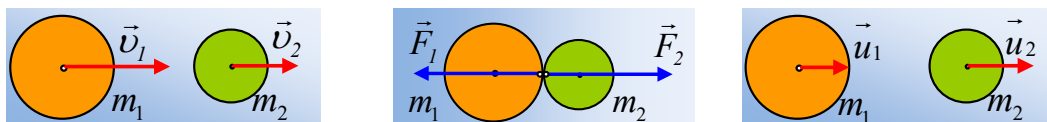
Αναλύοντας τις ταχύτητες των σφαιρών σε συνιστώσες, $\vec{v}_x$ στη διεύθυνση της διακέντρου και $\vec{v}_y$ σε διεύθυνση κάθετη στη διεύθυνση της διακέντρου, **μεταβολή ορμής για κάθε σφαίρα συμβαίνει μόνο κατά τη διεύθυνση της διακέντρου**, δηλαδή **μεταβάλλονται μόνο οι $\vec{v}_x$ συνιστώσες των ταχυτήτων**, ενώ οι $\vec{v}_y$ συνιστώσες **παραμένουν αμετάβλητες**.



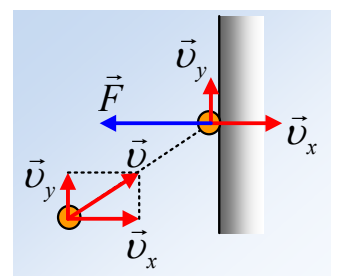
οριακά πριν την κρούση αμέσως μετά την κρούση οριακά πριν την κρούση αμέσως μετά την κρούση

Κρούσεις ελαστικές μετωπικές

Σε μια κρούση **μετωπική-ελαστική** μεταξύ δύο σφαιρών, αφενός **οι ταχύτητες των σφαιρών πριν την κρούση βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία**, που δεν είναι άλλη από τη **διάκεντρο των σφαιρών**, αφετέρου η **κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών διατηρείται σταθερή** πριν και μετά την κρούση. Εφόσον **οι δυνάμεις επαφής μεταξύ των σφαιρών κατά τη διάρκεια της κρούσης, βρίσκονται πάνω στη διάκεντρο των σφαιρών**, μεταβολή ορμής για κάθε σφαίρα έχουμε μόνο πάνω στη διεύθυνση της διακέντρου, με αποτέλεσμα και **οι ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση, να βρίσκονται επίσης πάνω στη διεύθυνση της διακέντρου**. Τα επόμενα σχήματα είναι σε κάτοψη



Όταν μια μικρή σφαίρα συγκρούεται **ελαστικά** με τοίχο, δεν εμφανίζεται τριβή μεταξύ της σφαίρας και του τοίχου, οπότε η **δύναμη που δέχεται η σφαίρα από τον τοίχο, είναι κάθετη σε αυτόν**, μεταβάλλοντας τη συνιστώσα $\vec{v}_x$ της ταχύτητας, αφήνοντας ανεπηρέαστη τη συνιστώσα $\vec{v}_y$, την παράλληλη στην επιφάνεια επαφής.



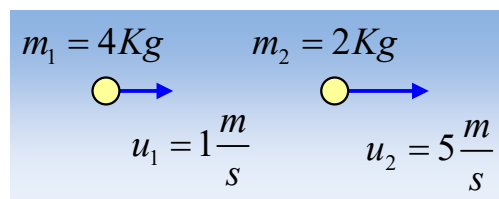
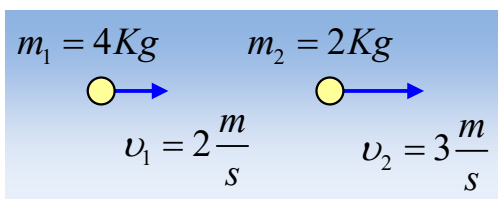
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δύο λείες, ομογενείς σφαίρες με μάζες m_1 και m_2 , κινούνται χωρίς να περιστρέφονται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Οι ταχύτητες των σφαιρών $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ βρίσκονται πάνω στη διάκεντρο των σφαιρών, οπότε οι σφαίρες συγκρούονται μετωπικά.

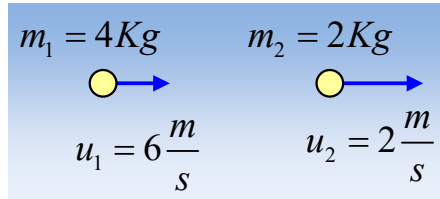
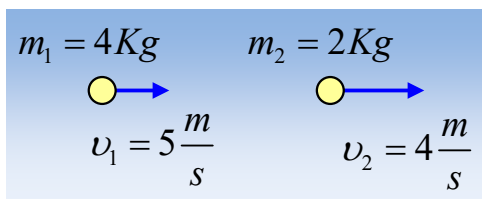
A) Να δείξετε ότι, αν ισχύει η σχέση: $v_1 + u_1 = v_2 + u_2$, στην οποία τα σύμβολα v_1, v_2 και u_1, u_2 παριστάνουν τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων πριν και μετά την κρούση αντίστοιχα, τότε η κρούση θα είναι ελαστική.

B) Ποιες από τις επόμενες μετωπικές κρούσεις **δεν** μπορούν να πραγματοποιηθούν, ποιες είναι **μετωπικές ανελαστικές** και ποιες **μετωπικές ελαστικές**; Δικαιολογείστε πλήρως την απάντησή σας

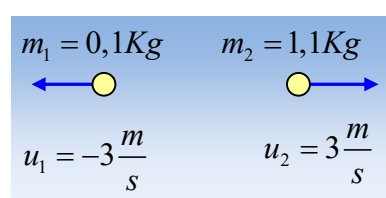
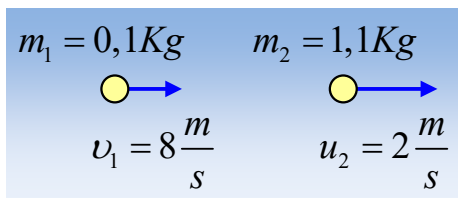
(i)



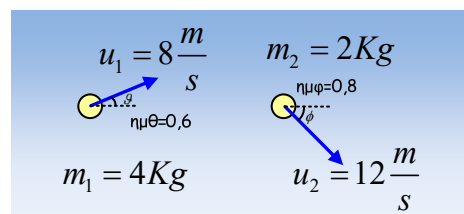
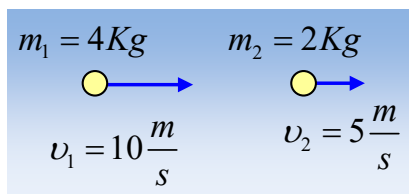
(ii)



(iii)



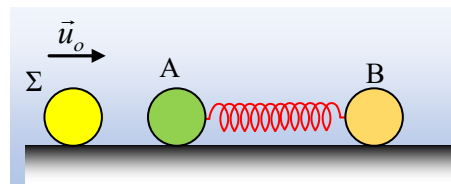
(iv)



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δυο σφαίρες Α και Β, της ίδιας ακτίνας με μάζες $m_1=2kg$ και $m_2=6kg$ αντίστοιχα, δεμένες στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=50N/m$ και φυσικού μήκους $l_0=\sqrt{3} m$.

Μια τρίτη σφαίρα Σ, ίδιας ακτίνας και μάζας $m=1\text{kg}$, κινείται οριζόντια κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου με ταχύτητα $u_0=12\text{m/s}$ (χωρίς να περιστρέφεται) και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με την σφαίρα Α. Να βρείτε:

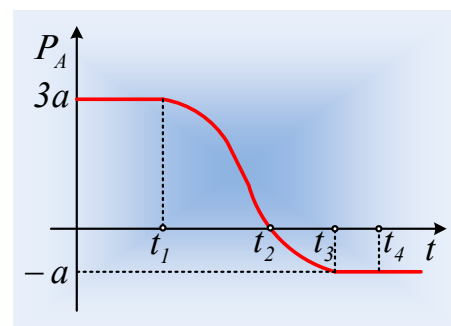


- i) την ταχύτητα την οποία αποκτά η Α σφαίρα μετά την κρούση, η οποία θεωρείται ακαριαία (αμελητέας διάρκειας, οπότε η σφαίρα «δεν προλαβαίνει» να μεταβάλλει το μήκος του ελατηρίου). Απ: 4 m/s
- ii) την ελάχιστη απόσταση των σφαιρών Α και Β, για την κίνησή τους μετά την παραπάνω κρούση. Απ: $0,6\sqrt{3}m$
- iii) τη μέγιστη στιγμιαία ταχύτητα την οποία θα αποκτήσει η Β σφαίρα; Απ: 2m/s
- iv) Κάποια στιγμή t_1 βλέπουμε τη σφαίρα Α να έχει ταχύτητα μέτρου $u_1=1\text{m/s}$ με κατεύθυνση προς τα αριστερά. Για τη στιγμή αυτή να υπολογιστεί η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου. Απ: $\frac{20}{3}J$

2. Στο διάγραμμα φαίνεται η μεταβολή της ορμής ενός σώματος Α που οφείλεται στην μετωπική ελαστική κρούση του με ακίνητο σώμα Β.

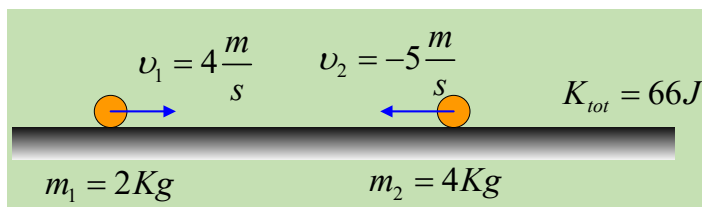
Η κρούση πραγματοποιείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος; Δικαιολογείστε.



- i) Η κρούση διαρκεί χρονικό διάστημα $\Delta t=t_2-t_1$.
- ii) Την χρονική στιγμή t_4 το σώμα Β δεν δέχεται δύναμη από το σώμα Α.
- iii) Το σώμα Β έχει μεγαλύτερη μάζα από το σώμα Α.
- iv) Την χρονική στιγμή t_2 το σώμα Β έχει ορμή $+3a$.
- v) Μετά την κρούση το σώμα Β έχει ορμή μεγαλύτερη από την αρχική ορμή του σώματος Α.

3. Σφαίρα μάζας $m_1=2\text{ Kg}$ που κινείται με ταχύτητα μέτρου $u_1=4\text{ m/s}$ συγκρούεται **μετωπικά και ελαστικά** με άλλη σφαίρα μάζας $m_2=4\text{ Kg}$ που κινείται αντίρροπα από την πρώτη με ταχύτητα μέτρου $u_2=5\text{ m/s}$.



- A) Να υπολογίσετε τις ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση
- B) Εφόσον κατά την κρούση αλλάζει η φορά κίνησης κάθε σφαίρας, θα υπάρξει χρονική στιγμή κατά την οποία η ταχύτητα κάθε σφαίρας θα μηδενιστεί. Ο μηδενισμός της ταχύτητας θα συμβεί ταυτόχρονα για τις δύο σφαίρες; Αν όχι, μπορείτε να προβλέψετε ποιας σφαίρας η ταχύτητα θα μηδενιστεί πρώτη;

Γ) Ποια η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών, τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα της σφαίρας μάζας $m_1=2\text{ Kg}$;

Δ) Ποια η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών, τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα της σφαίρας μάζας $m_2=4\text{ Kg}$;

Ε) Ποια η μέγιστη δυναμική ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης του συστήματος των σφαιρών;

Απ: Α) $v_1' = -8\frac{m}{s}$ $v_2' = 1\frac{m}{s}$ Β) της σφαίρας m_1 Γ) $K_{tot} = 18J$ Δ) $K_{tot} = 36J$ Ε) $U_{ελ(max)} = 54J$

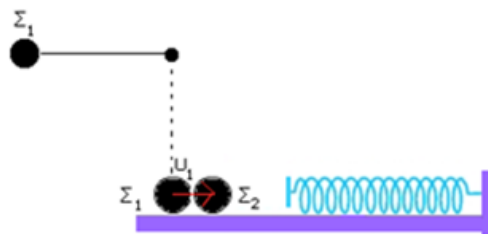
4. Μια σφαίρα Σ_1 μάζας $m_1=2\text{kg}$ κινείται (χωρίς να στρέφεται) σε λείο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα $u_1=3\text{m/s}$ με διεύθυνση κάθετη σε κατακόρυφο τοίχο. Στην πορεία της συναντά δεύτερη ακίνητη σφαίρα Σ_2 μάζας $m_2=1\text{kg}$, η οποία απέχει κατά $d=6\text{m}$ από τον τοίχο. Οι δύο σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Στη συνέχεια η σφαίρα Σ_2 συγκρούεται επίσης ελαστικά με τον τοίχο. Να βρεθούν:

i) Η απόσταση από τον τοίχο που θα πραγματοποιηθεί η δεύτερη κρούση μεταξύ των σφαιρών. Απ: 3,6m

ii) Η απόσταση από τον τοίχο που θα πραγματοποιηθεί η τρίτη κρούση μεταξύ των σφαιρών. Απ: 54m

Οι δύο σφαίρες θεωρούνται υλικά σημεία αμελητέων διαστάσεων σε σχέση με την απόσταση $d=6\text{m}$, η διάρκεια των κρούσεων θεωρείται αμελητέα και όλες οι κρούσεις θεωρούνται μετωπικές και ελαστικές. Θετική φορά να θεωρήσετε τη φορά της αρχικής ταχύτητας της σφαίρας Σ_1

5. Ένα σώμα Σ_1 με μάζα $m_1=1\text{Kg}$ είναι δεμένο με αβαρές και μη εκτατό νήμα μήκους $L=1,8\text{m}$, του οποίου η άλλη άκρη είναι ακλόνητα στερεωμένη, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αρχικά το νήμα είναι οριζόντιο. Αφήνουμε ελεύθερο το σώμα Σ_1 να κινηθεί. Το σώμα Σ_1 μόλις το νήμα γίνει κατακόρυφο, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με σώμα Σ_2 μάζας $m_2=m_1$, που είναι ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα Σ_2 μετά την κρούση συναντά και συγκρούεται με το ελεύθερο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$, του οποίου η άλλη άκρη είναι ακλόνητα στερεωμένη, όπως στο σχήμα. Το σώμα Σ_2 συμπιέζει το ελατήριο και στη συνέχεια συναντά εκ νέου το σώμα Σ_1 και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά για δεύτερη φορά με αυτό. Να θεωρηθούν οι τριβές και η αντίσταση του αέρα αμελητέες.



α) Να βρείτε το μέτρο της τάσης του νήματος ελάχιστα πριν την κρούση $\Sigma_1-\Sigma_2$

β) Να βρείτε τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

γ) Να βρείτε τη μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου.

δ) Να βρείτε το μέγιστο ύψος που θα φτάσει το σώμα Σ_1 που είναι δεμένο με το νήμα μετά τη δεύτερή του κρούση με το σώμα Σ_2 .

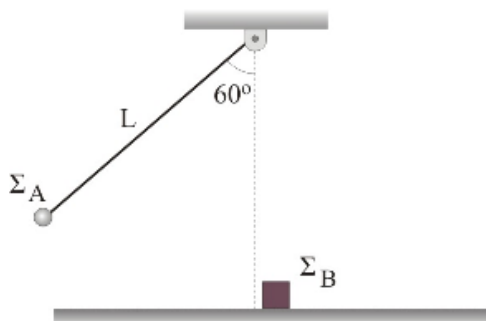
6. Μία σφαίρα Σ_A , μάζας $m_A=2\text{kg}$, είναι κρεμασμένη με νήμα μήκους $L=0,9\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε οροφή. Εκτρέπουμε τη σφαίρα από τη θέση ισορροπίας της κατά 60° και με το νήμα τεντωμένο την αφήνουμε ελεύθερη, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

Όταν η σφαίρα Σ_A διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα, Σ_B , μάζας $m_B=4\text{kg}$, που βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος Σ_B και του οριζόντιου δαπέδου είναι $\mu=0,5$.

Να υπολογίσετε:

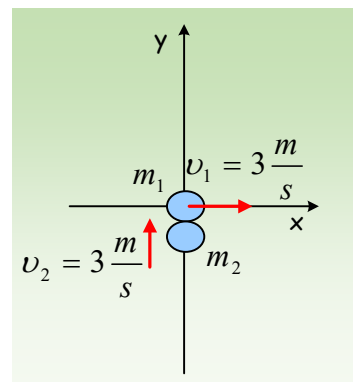
- την τάση του νήματος στη θέση που αυτό σχηματίζει με την κατακόρυφη που διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της σφαίρας γωνία φ , για την οποία ισχύει $\sin\varphi=2/3$.
- τις ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.
- το ποσοστό % της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ_A , που απέμεινε σε αυτή, μετά την κρούση.
- τη μετατόπιση του σώματος Σ_B μέχρι να σταματήσει και τη θερμότητα που παράχθηκε κατά τη διάρκεια της κίνησης.

Δίνονται: $\sin 60^\circ = 1/2$ και $g=10\text{ m/s}^2$.

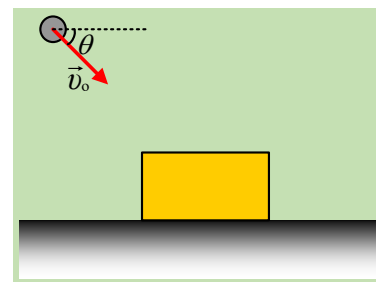


7. Δύο λείες και ελαστικές σφαίρες, μάζας $m_1=1\text{ Kg}$ και $m_2=2\text{ Kg}$ κινούνται με ταχύτητες ίσων μέτρων $v_1=v_2=3\frac{m}{s}$. Οι σφαίρες συγκρούονται ελαστικά και οι διευθύνσεις των ταχυτήτων τη στιγμή της κρούσης είναι κάθετες μεταξύ τους. Να βρείτε τις ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση

Απ: $u_1=5\frac{m}{s}$ $\varphi\theta=\frac{4}{3}$ $u_2=1\frac{m}{s}$



8. Σώμα μάζας $M=1,99\text{Kg}$ ηρεμεί σε οριζόντιο λείο δάπεδο. Βλήμα μάζας $m=10\text{g}$ σφηνώνεται στο σώμα με ταχύτητα μέτρου u_0 , η διεύθυνση της οποίας σχηματίζει γωνία $\theta=60^\circ$ με την οριζόντια διεύθυνση. Το βλήμα σφηνώνεται στο σώμα, **χωρίς** αυτό να αναπηδήσει. Η κρούση έχει μετρήσιμη χρονική διάρκεια $\Delta t=0,01\text{s}$.

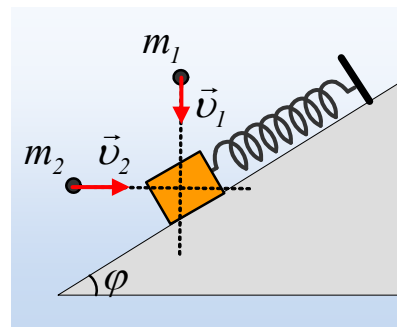


Αμέσως μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα αποκτά **οριζόντια** ταχύτητα $u_k=1\text{m/s}$. Να βρείτε το μέτρο της **μέσης** δύναμης, που ασκεί το συσσωμάτωμα στο δάπεδο στη διάρκεια της κρούσης.

Θεωρείστε $g=10\text{m/s}^2$

Απ: $F_N = (20 + 200\sqrt{3})N$

9. Ξύλινο σώμα μάζας M ισορροπεί σε **λείο** κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi = 30^\circ$, συνδεδεμένο στο κάτω άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k . Δύο βλήματα με **ίσες** μάζες m_1 και m_2 σφηνώνονται **ακαριαία** και **ταυτόχρονα** στο ξύλινο σώμα. Το m_1 είχε **οριακά πριν** την κρούση κατακόρυφη ταχύτητα μέτρου u_1 , ενώ το m_2 είχε **οριακά πριν** την κρούση οριζόντια ταχύτητα μέτρου u_2 . Κατά την κρούση το συσσωμάτωμα $M+m_1+m_2$ **δεν αναπηδά**



α) Ποιος ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων $\frac{u_1}{u_2}$ ώστε κατά την κρούση να εμφανίζεται η **μέγιστη απώλεια μηχανικής ενέργειας** του συστήματος των τριών σωμάτων M, m_1, m_2 ;

β) Ποια η μεταβολή της ορμής του συστήματος των τριών σωμάτων M, m_1, m_2 κατά την κρούση;

Απ: α) $\frac{u_1}{u_2} = \sqrt{3}$ β) $|\Delta \vec{p}_{ολ}| = |\vec{p}_{ολ(πριν)}| = 2p_2 = 2mu_2$

10. Στο κάτω άκρο κατακόρυφου νήματος μήκους L ισορροπεί μικρό σφαιρίδιο Σ_1 , του οποίου η ακτίνα είναι αμελητέα σε σχέση με το μήκος του νήματος. Το άλλο άκρο του νήματος είναι δεμένο σε σταθερό σημείο O . Το σφαιρίδιο Σ_1 συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με σφαιρίδιο Σ_2 και αμέσως μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα μέτρου $u'_1 = \sqrt{4gL}$, ενώ το σφαιρίδιο Σ_2 αμέσως μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα αντίθετης φοράς απ' αυτή

που είχε πριν την κρούση και μέτρου $u'_2 = \frac{u_2}{3}$. Να υπολογίσετε:

α) Το λόγο μαζών των δύο σφαιριδίων Απ: $m_1/m_2 = 2$

β) Τη γωνία που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφη, στο **ανώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς** στο οποίο φθάνει το σώμα. Απ: $\sin\varphi = 2/3$

11. Μια σφαίρα A , μάζας $m_A = 1 \text{ kg}$ κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $u_A = 8 \text{ m/s}$ και συγκρούεται πλάγια με ακίνητη σφαίρα, B , μάζας $m_B = 2 \text{ kg}$. Μετά την κρούση οι σφαίρες κινούνται σε κατευθύνσεις που σχηματίζουν με την ταχύτητα u_A γωνίες $\theta_A = 30^\circ$ και $\theta_B = 60^\circ$, αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

α) τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σφαιρών μετά την κρούση.

β) τη μεταβολή ορμής της κάθε σφαίρας κατά την κρούση.

γ) πόσο θα απέχουν οι σφαίρες $2s$ μετά την κρούση.

δ) τη θερμότητα που ελευθερώθηκε κατά την κρούση.

