

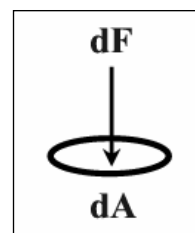
|Λυμένα θέματα στα ρευστά σε ισορροπία

Θέμα 1ο

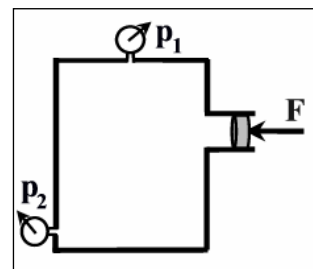
Οι βασικές προτάσεις και παραδοχές για την ισορροπία των ρευστών:

1.1 Τα υγρά θεωρούνται ως πρακτικώς ασυμπίεστα ρευστά. Δηλαδή ο όγκος τους δεν μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται η πίεση. Ομοίως δεν μεταβάλλεται και η πυκνότητα όταν μεταβάλλεται η πίεση μιας και $\rho = m/V$. Μπορούμε και ένα αέριο να το θεωρήσουμε ως ασυμπίεστο όταν η διαφορά πίεσης μεταξύ των διαφόρων περιοχών του δεν είναι πολύ μεγάλη.

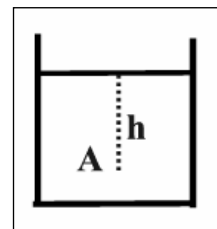
1.2 Η πίεση γενικώς είναι ένα μονόμετρο μέγεθος που ορίζεται ως το πηλίκο του μέτρου της δύναμης dF που ασκείται κάθετα σε μια επιφάνεια εμβαδού dA προς το εμβαδόν αυτό, δηλαδή $p = \frac{dF}{dA}$ ή $p = \frac{F}{A}$. Η πίεση στο SI μετριέται σε Pascal (Pa). $1\text{Pa} = 1\text{N/m}^2$. Τεχνική μονάδα είναι η ατμόσφαιρα, $1\text{atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{Pa}$.



1.3 Η πίεση στα διάφορα σημεία του χώρου που καταλαμβάνει ένα υγρό και στα τοιχώματα του δοχείου που το περιέχει οφείλεται ή στο βάρος του υγρού ή σε κάποιο εξωτερικό αίτιο ή και στα δυο μαζί. Τα πιεσόμετρα (1) και (2) του σχήματος μετρούν πίεση που οφείλεται τόσο στη βαρύτητα όσο και στην εξωτερική δύναμη F που ασκείται στο έμβολο.



1.4 Η υδροστατική πίεση, p , οφείλεται στο βάρος του υγρού και έχει νόημα μόνο αν το υγρό είναι μέσα στο πεδίο βαρύτητας. Σε ένα σημείο του υγρού A ισούται με $p = \rho gh$, όπου ρ η πυκνότητα του υγρού, g η επιτάχυνση της βαρύτητας και h το βάθος, δηλαδή η απόσταση του A από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού.



1.5 Εκτός πεδίου βαρύτητας η πίεση σε όλη την έκταση του υγρού είναι η ίδια. Άρα σύμφωνα με την αρχή του **Pascal** η πίεση που δημιουργεί ένα εξωτερικό αίτιο σε κάποιο σημείο του υγρού μεταφέρεται ακριβώς ίδια σε κάθε σημείο του υγρού και των τοιχωμάτων του δοχείου.

1.6 Σε ένα υγρό που ισορροπεί σε ανοικτό δοχείο εντός της ατμόσφαιρας ασκείται στην επιφάνεια του υγρού και η ατμοσφαιρική πίεση η οποία ως εξωτερικό αίτιο μεταφέρεται αναλλοίωτη σε κάθε σημείο του υγρού. Άρα η συνολική πίεση στο σημείο A θα είναι το άθροισμα της ατμοσφαιρικής και τη υδροστατικής πίεσης, δηλαδή

$$p_{\text{ολ}} = p_{\text{atm}} + \rho gh$$

1.7 Η ολική πίεση σε μια νοητή επιφάνεια που βρίσκεται μέσα σε ένα υγρό και σε συγκεκριμένο βάθος είναι ίδια ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό της επιφάνειας αυτής.

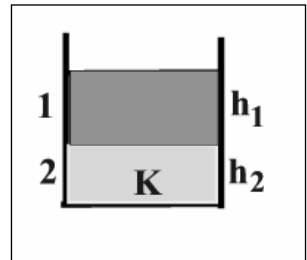
1.8 Η υδροστατική πίεση σε βάθος h από την επιφάνεια υγρού, πυκνότητας ρ που βρίσκεται σε ισορροπία

– δεν εξαρτάται από το σχήμα του δοχείου,

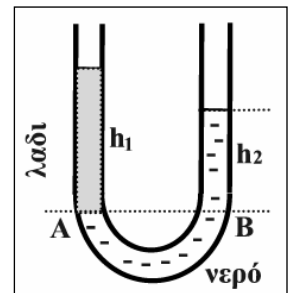
- δεν εξαρτάται από τον όγκο του υγρού που περιέχει το δοχείο,
- είναι ίδια για όλα τα σημεία σε ίσες κατακόρυφες αποστάσεις από την ελεύθερη επιφάνεια ενός υγρού.

1.9 Στην περίπτωση δύο ή περισσότερων υγρών που δεν αναμειγνύονται αλλά ισορροπούν όπως στο διπλανό σχήμα, η πίεση στο σημείο K που βρίσκεται ακριβώς πάνω από τον πυθμένα του δοχείου θα είναι

$$p_K = p_{\text{ατμ}} + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2$$



1.10 Στο ανοικτό δοχείο σχήματος U περιέχεται νερό πυκνότητας $\rho_2 = 10^3 \text{ kg/m}^3$ και λάδι πυκνότητας ρ_1 όπως στο διπλανό σχήμα. Το ύψος της στήλης του λαδιού είναι $h_1 = 40 \text{ cm}$, ενώ το ύψος του νερού, πάνω από το επίπεδο διαχωρισμού των δύο υγρών, $h_2 = 30 \text{ cm}$. Πάνω από το λάδι και το νερό επικρατεί ατμοσφαιρική πίεση. Μπορούμε να βρούμε την πυκνότητα του λαδιού με τη βοήθεια της αρχής του Pascal που επιβάλλει οι πιέσεις να μεταφέρονται σε όλα τα σημεία ενός υγρού που ισορροπεί αναλλοίωτες. Ως αποτέλεσμα της αρχής αυτής στα σημεία A και B του νερού που βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο οι πιέσεις θα είναι ίσες, $p_A = p_B$.



Όπως η πίεση στο A είναι:

$$p_A = p_{\text{ατμ}} + \rho_1 g h_1$$

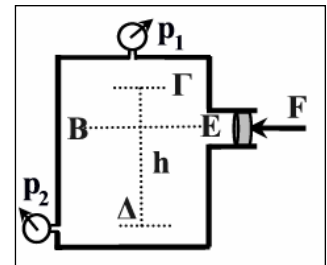
και στο B

$$p_B = p_{\text{ατμ}} + \rho_2 g h_2$$

$$\text{Άρα: } p_{\text{ατμ}} + \rho_1 g h_1 = p_{\text{ατμ}} + \rho_2 g h_2 \rightarrow \rho_1 = \rho_2 \frac{h_2}{h_1} \rightarrow \rho_1 = 750 \text{ kg/m}^3$$

Θέμα 2^ο

Το κλειστό δοχείο του σχήματος βρίσκεται εντός του πεδίου βαρύτητας, g και περιέχει πλήρως υγρό πυκνότητας ρ σε ισορροπία. Στο έμβολο εμβαδού A που μπορεί να κινείται χωρίς τριβές, ασκείται συνολική εξωτερική δύναμη F . Τα σημεία Γ και Δ απέχουν κατακόρυφη απόσταση, h , ενώ τα σημεία B και E βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Παρατηρούμε ότι:



2.1 Σε κάθε σημείο η πίεση διαμορφώνεται ως άθροισμα της υδροστατικής πίεσης και της εξωτερικής πίεσης $p_{\text{εξ}} = F/A$.

2.2 Αν η εξωτερική δύναμη αυξηθεί κατά dF τότε σε κάθε σημείο η πίεση θα αυξηθεί κατά dF/A .

2.3 Η δύναμη που οφείλεται στην ατμοσφαιρική πίεση εμπεριέχεται στην εξωτερική δύναμη F που ασκείται στο έμβολο από εξωτερικά αίτια.

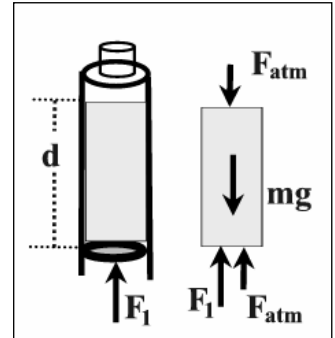
2.4 Τα σημεία B και E έχουν ίσες πιέσεις αφού βρίσκονται στο ίδιο βάθος.

2.5 Τα σημεία Γ και Δ έχουν διαφορά πίεσης $p_{\Delta} - p_{\Gamma} = \rho g h$, αφού απέχουν μεταξύ τους κατά h και η εξωτερική πίεση F/A τα επηρεάζει το ίδιο (Pascal).

2.6 Μεταξύ των σημείων Γ , B και Δ η κατάταξη των πιέσεων είναι: $p_{\Delta} > p_B > p_{\Gamma}$ και η διαφορά οφείλεται στην αύξηση του βάθους.

Θέμα 3^ο

Μια κατακόρυφη σύριγγα περιέχει νερό με πυκνότητα $\rho=10^3 \text{ kg/m}^3$. Στο κάτω μέρος της υπάρχει αβαρές έμβολο εμβαδού διατομής $A_1=5 \text{ cm}^2$, ενώ στο πάνω μέρος καταλήγει σε στενότερο σωλήνα εμβαδού διατομής $A_2=1 \text{ cm}^2$. Στο περιβάλλον επικρατεί ατμοσφαιρική πίεση $p_{\text{ατμ}}=10^5 \text{ N/m}^2$. Αν το υγρό καταλαμβάνει χώρο του σωλήνα εμβαδού A_1 σε ύψος $d=10 \text{ cm}$, πόσο πρέπει να είναι το μέτρο μιας κατακόρυφης δύναμης F_1 που πρέπει να ασκούμε εξωτερικά ώστε το έμβολο να ισορροπεί;



Οι πλευρικές δυνάμεις που ασκούνται στη μάζα του νερού από τα τοιχώματα του σωλήνα είναι μεταξύ τους αντίθετες λόγω συμμετρίας και αλληλοεξουδετερώνονται. Απομένουν οι κατακόρυφες που για να ισορροπεί η μάζα του νερού πρέπει $\Sigma F=0$. Αυτές είναι:

- το βάρος του νερού: $mg = \rho V \cdot g = \rho A_1 \cdot d \cdot g = 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \rightarrow mg = 0,5 \text{ N}$.
- η ζητούμενη δύναμη F_1 με φορά κατακόρυφη προς τα πάνω
- οι δυνάμεις F_{atm} που ασκεί η ατμόσφαιρα τόσο στην επάνω ανοικτή επιφάνεια με κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα κάτω όσο και στο έμβολο με κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα πάνω. Επειδή η υψομετρική διαφορά της επάνω επιφάνειας του νερού από το έμβολο είναι αμελητέα αυτές έχουν ίσα μέτρα $F_{\text{atm}} = p_{\text{atm}} \cdot A_1$.

$$\Sigma F=0 \rightarrow F_1 + F_{\text{atm}} - mg - F_{\text{atm}} = 0 \rightarrow F_1 = mg = 0,5 \text{ N}$$

Θέμα 4^ο

Το κυλινδρικό δοχείο περιέχει υγρό πυκνότητας ρ σε ύψος h βρίσκεται εντός του πεδίου βαρύτητας, g και εκτός ατμόσφαιρας. Αν ο πυθμένας έχει εμβαδόν A ,

4.1 Πόση είναι η δύναμη που δέχεται ο πυθμένας από το υγρό.

$$F = p \cdot A = \rho g h \cdot A$$

4.2 Ποια σχέση έχει η δύναμη που δέχεται ο πυθμένας από το υγρό, με το βάρος του υγρού;

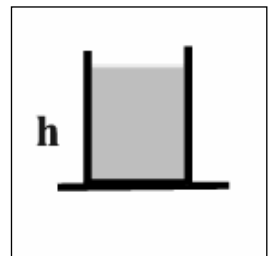
Το υγρό ισορροπεί υπό την επίδραση του βάρους του $mg = \rho V \cdot g = \rho \cdot A h \cdot g$ και της δύναμης F' που δέχεται από τον πυθμένα και είναι αντίθετη από την F που δέχεται ο πυθμένας από το υγρό,

$$F' = F = \rho g h \cdot A = mg$$

Άρα ο πυθμένας δέχεται από το υγρό δύναμη ίση με το βάρος του υγρού.

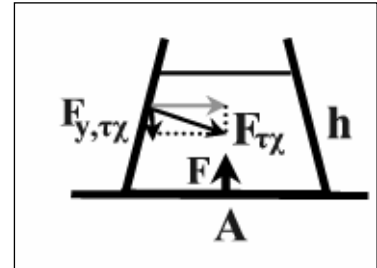
4.3 Τι θα άλλαζε στη δύναμη αν το σύστημα ήταν μέσα στην ατμόσφαιρα;

Θα αυξάνονταν κατά $p_{\text{ατμ}} \cdot A$, άρα η δύναμη θα ήταν $F = p_{\text{ολ}} \cdot A = (\rho g h + p_{\text{ατμ}}) \cdot A$



Θέμα 5^ο

Το κωνικό δοχείο του σχήματος περιέχει υγρό πυκνότητας ρ σε ύψος h , βρίσκεται εντός του πεδίου βαρύτητας, g και εκτός ατμόσφαιρας και ισορροπεί πάνω σε οριζόντιο τραπέζι. Ο πυθμένας έχει εμβαδόν A και το υγρό που περιέχει ισορροπεί.



5.1 Η δύναμη που δέχεται ο πυθμένας του δοχείου από το υγρό είναι:

$$F = \rho \cdot A = \rho g h \cdot A$$

*Το σχήμα του δοχείου δεν επηρεάζει την υδροστατική πίεση σε βάθος h , που είναι $p = \rho g h$.

5.2 Ποια είναι η σχέση που έχει η δύναμη, F , που δέχεται ο πυθμένας από το υγρό, με το βάρος του υγρού που περιέχει;

Η δύναμη F είναι μεγαλύτερη από το βάρος του υγρού, διότι τώρα τα πλευρικά τοιχώματα ασκούν δυνάμεις $F_{\tau\chi}$ στη μάζα του υγρού των οποίων η κατακόρυφη συνιστώσα $F_{y, \tau\chi}$ έχει φορά προς τα κάτω. Άρα για τη μάζα του υγρού που ισορροπεί θα ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow F - F_{y, \tau\chi} - mg = 0 \rightarrow F = mg + F_{y, \tau\chi} \rightarrow F > mg$$

5.3 Ποια είναι η σχέση της συνισταμένης δύναμη που δέχεται το δοχείο από το υγρό με το βάρος του υγρού;

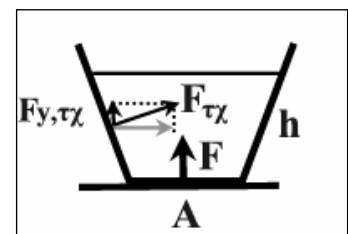
Το υγρό ισορροπεί υπό την επίδραση του βάρους του mg και της συνισταμένης δύναμης F_δ που δέχεται από το δοχείο, άρα $F_\delta - mg = 0 \rightarrow F_\delta = mg$. Συνεπώς η συνολική δύναμη που δέχεται το υγρό από το δοχείο, πυθμένα και πλευρικά τοιχώματα, είναι ίση κατά μέτρο με το βάρος του υγρού.

5.4 Πόση είναι η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το δοχείο;

Το δοχείο ισορροπεί πάνω στο τραπέζι και συνεπώς η συνολική δύναμη που δέχεται από το βάρος του, το υγρό που περιέχει και το τραπέζι θα είναι μηδέν.

Θέμα 6^ο

Το ανεστραμμένο κωνικό δοχείο του σχήματος περιέχει υγρό πυκνότητας ρ σε ύψος h , βρίσκεται εντός του πεδίου βαρύτητας, g και εκτός ατμόσφαιρας και ισορροπεί πάνω σε οριζόντιο τραπέζι. Ο πυθμένας έχει εμβαδόν A και το υγρό που περιέχει ισορροπεί.



6.1 Η δύναμη που δέχεται ο πυθμένας του δοχείου από το υγρό είναι:

$$F = \rho \cdot A = \rho g h \cdot A$$

6.2 Ποια είναι η σχέση που έχει η δύναμη, F , που δέχεται ο πυθμένας από το υγρό, με το βάρος του υγρού που περιέχει;

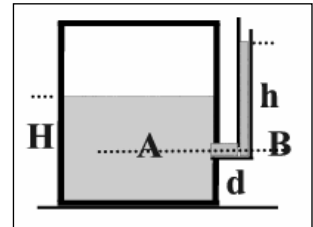
Η δύναμη F είναι τώρα μικρότερη από το βάρος του υγρού, διότι τα πλευρικά τοιχώματα ασκούν δυνάμεις $F_{\tau\chi}$ στη μάζα του υγρού των οποίων η κατακόρυφη συνιστώσα $F_{y, \tau\chi}$ έχει φορά προς τα πάνω. Άρα για τη μάζα του υγρού που ισορροπεί θα ισχύει:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F+F_{y,\tau\chi}-mg=0 \rightarrow F=mg-F_{y,\tau\chi} \rightarrow F < mg$$

* Δεν είναι τυχαίο ότι όλα τα αντίστοιχα δοχεία καθημερινής χρήσης, λεκάνες, βαθιά πιάτα, σουπιέρες, σαλατιέρες κλπ έχουν ένα παρόμοιο σχήμα, ακριβώς για να μειώνουν και το φορτίο στον πυθμένα. Εκτός βέβαια από την σαφή χρηστική αξία τους.

Θέμα 7^ο

Κλειστό κυλινδρικό δοχείο περιέχει υγρό πυκνότητας, $\rho=10^3 \text{ kg/m}^3$, σε ύψος $H=1\text{m}$ και στο πάνω μέρος του, αέρα σε πίεση p . Στην πλευρική επιφάνεια του δοχείου και σε ύψος $d=0,5\text{m}$ είναι προσαρμοσμένος λεπτός ανοικτός σωλήνας ύψους $h=1\text{m}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ατμοσφαιρική πίεση είναι $p_{\text{ατμ}}=10^5 \text{ N/m}^2$. Ζητάμε την πίεση του αέρα πάνω από το υγρ.



Οι πιέσεις στα σημεία A και B του υγρού που βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο είναι μεταξύ τους ίσες, $p_A=p_B$ (1)

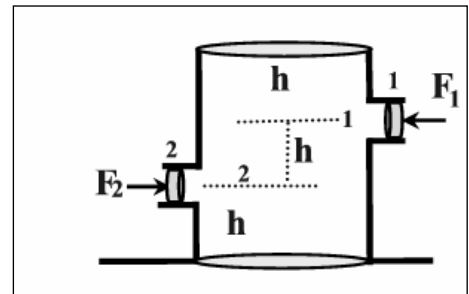
Αλλά $p_A=p+p\gamma(H-d)$ (2) και $p_B=p_{\text{ατμ}}+p\gamma h$ (3)

Από (1)(2)(3) $\rightarrow p+p\gamma(H-d)=p_{\text{ατμ}}+p\gamma h \rightarrow p=p_{\text{ατμ}}+p\gamma(h+d)-p\gamma H \rightarrow$

$$p=p_{\text{ατμ}}+p\gamma(h+d-H)=(10^5+0,5 \cdot 10^4) \text{ N/m}^2 \rightarrow p=10,5 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$$

Θέμα 8^ο

Στο διπλανό σχήμα, βλέπετε μια κατακόρυφη τομή ενός κλειστού κυλινδρικού δοχείου ύψους $H=3h=3\text{m}$ το οποίο είναι γεμάτο νερό, στο οποίο υπάρχουν δύο αβαρή έμβολα A και B, τα οποία μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές, σε ισορροπία. Τα εμβαδά των εμβόλων είναι $A_1=A_2=4\text{cm}^2$, η πυκνότητα του νερού $\rho=1.000 \text{ kg/m}^3$, η ατμοσφαιρική πίεση $p_{\text{ατμ}}=10^5 \text{ Pa}$ και $g=10 \text{ m/s}^2$.



8.1 Αν στο έμβολο (1) ασκήσουμε με το δάχτυλο εξωτερική δύναμη $F_1=20\text{N}$, τότε πόσο θα είναι το μέτρο της εξωτερικής δύναμης F_2 που πρέπει να ασκούμε με ένα άλλο δάχτυλο στο έμβολο (2).

Η πίεση του υγρού πίσω από το έμβολο (1) είναι p_1 και πίσω από το έμβολο (2) είναι p_2 . Η διαφορά των πιέσεων αυτών οφείλεται στην υψομετρική διαφορά h και είναι:

$$p_2-p_1=p\gamma h \quad (1)$$

Αφού το έμβολο (1) ισορροπεί χωρίς τριβές θα πρέπει οι πιέσεις αριστερά και δεξιά του να είναι ίσες δηλαδή: $p_1=p_{\text{ατμ}}+F_1/A_1$ (2)

Ομοίως $p_2=p_{\text{ατμ}}+F_2/A_2$ (3)

Από: (1)(2)(3) $\rightarrow F_2/A_2 - F_1/A_1=p\gamma h \rightarrow F_2=F_1+p\gamma h A_1 \rightarrow F_2=24\text{N}$

8.2 Αν το εμβαδόν της πάνω και κάτω βάσης του κυλίνδρου είναι $A=2\text{m}^2$ να υπολογιστούν οι δυνάμεις που το νερό ασκεί στην κάτω και πάνω βάση του κυλίνδρου.

Η πίεση $p_2 = p_{\text{atm}} + F_2/A_2 = 1,6 \cdot 10^5 \text{N/m}^2$. Άρα η πίεση στην κάτω έδρα είναι

$$p_K = p_2 + \rho gh = 1,6 \cdot 10^5 \text{N/m}^2 + 10^4 \text{N/m}^2 \rightarrow p_K = 1,7 \cdot 10^5 \text{N/m}^2$$

Άρα η δύναμη στην κάτω βάση είναι: $F_K = p_K \cdot A = 3,4 \cdot 10^5 \text{N}$

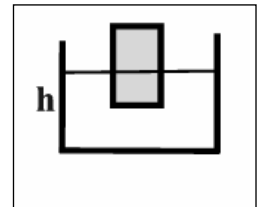
Η πίεση στην άνω έδρα p_A διαφέρει από την πίεση p_K κατά $3\rho gh$ λόγω της υψομετρικής διαφοράς $3h$ με $p_K > p_A$.

$$p_K - p_A = 3\rho gh \rightarrow p_A = p_K - 3\rho gh = 1,7 \cdot 10^5 \text{N/m}^2 - 0,3 \cdot 10^5 \text{N/m}^2 \rightarrow p_A = 1,4 \cdot 10^5 \text{N/m}^2$$

Άρα η δύναμη στην πάνω βάση: $F_A = p_A \cdot A = 2,8 \cdot 10^5 \text{N}$

Θέμα 9

Δοχείο εμβαδού βάσης $A=0,5\text{m}^2$ περιέχει υγρό πυκνότητας $\rho=10^3 \text{kg/m}^3$ σε ύψος $h=2\text{m}$. Στην επιφάνεια του υγρού ισορροπεί όρθιος κύλινδρος μάζας $m=8\text{kg}$. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$ και $p_{\text{atm}}=10^5 \text{N/m}^2$. Θα υπολογίσουμε τη δύναμη που δέχεται ο πυθμένας από το υγρό.



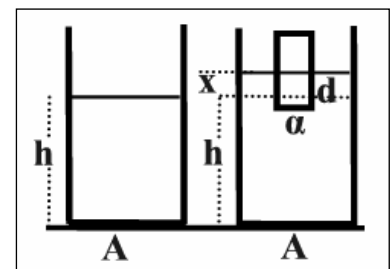
Η πίεση στον πυθμένα δεν επηρεάζεται από τα σώματα που υπάρχουν μέσα στο δοχείο είτε επιπλέουν, είτε όχι. Βεβαίως και οι βυθισμένοι όγκοι διαμορφώνουν το ύψος της στάθμης του υγρού άρα και την υδροστατική πίεση στον πυθμένα. Η συνολική πίεση στον πυθμένα του δοχείου με βάση τα δεδομένα είναι

$$p = p_{\text{atm}} + \rho gh \rightarrow p = 10^5 \text{N/m}^2 + 0,2 \cdot 10^5 \text{N/m}^2 = 1,2 \cdot 10^5 \text{N/m}^2$$

Η δύναμη στον πυθμένα: $F = p \cdot A = 6 \cdot 10^4 \text{N}$

Θέμα 10^ο

Ορθογώνιο ανοικτό δοχείο εμβαδού βάσης A περιέχει υγρό πυκνότητας ρ . Ο πυθμένας δέχεται από το υγρό δύναμη F . Τοποθετούμε στο υγρό κύλινδρο βάρους mg και εμβαδού βάσης, a , που ισορροπεί στην επιφάνεια αυτού βυθισμένος κατά το ένα μέρος του ύψους του, d . Δείξτε ότι η δύναμη που δέχεται ο πυθμένας του δοχείου από το υγρό είναι τώρα αυξημένη κατά mg .



Πριν τοποθετήσουμε τον κύλινδρο η στάθμη του νερού είναι σε ύψος h και η πίεση στον πυθμένα εμβαδού A είναι $p_1 = p_{\text{atm}} + \rho gh$, άρα η δύναμη είναι

$$F_1 = (p_{\text{atm}} + \rho gh)A \quad (1)$$

Τοποθετούμε τον κύλινδρο εμβαδού βάσης, a , που επιπλέει βυθισμένος κατά d ενώ η στάθμη του υγρού ανεβαίνει κατά x σε σχέση με την αρχική. Η πίεση στον πυθμένα τώρα διαμορφώνεται στην τιμή

$$p_2 = p_{\text{atm}} + \rho g(h+x) \quad \text{και η δύναμη } F_2 = p_2 \cdot A = [p_{\text{atm}} + \rho g(h+x)] \cdot A \quad (2)$$

Η αύξηση δύναμης θα είναι: $\Delta F = F_2 - F_1 = [p_{\text{ατμ}} + \rho g(h+x)] \cdot A - (p_{\text{ατμ}} + \rho gh)A = \rho g \cdot x \cdot A$ (3)

Ο όγκος ($A \cdot x$) του υγρού που εκτοπίστηκε λόγω της βύθισης του κυλίνδρου είναι λογικά ίσος με τον όγκο που κατέλαβε το βυθισμένο μέρος του κυλίνδρου με όγκο ($d \cdot a$). Άρα: $Ax = da$ (4)

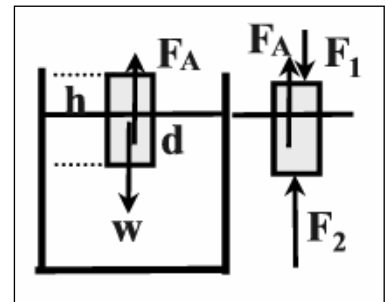
Από (3)(4) $\rightarrow \Delta F = \rho g \cdot x \cdot A = \rho g(d \cdot a)$ (5) όπου A η Άνωση

Λόγω ισορροπίας όμως του κυλίνδρου: $\Sigma F = 0 \rightarrow F_1 - mg - F_{\text{ατμ}} = 0 \rightarrow p_1 a - mg - p_{\text{ατμ}} a = 0 \rightarrow (p_{\text{ατμ}} + \rho g d) a - mg - p_{\text{ατμ}} a = 0 \rightarrow mg = \rho g d a$ (6)

Συνεπώς από (5)(6) $\rightarrow \Delta F = mg$

Θέμα 11^ο

Ένα ομογενές ορθογώνιο πρίσμα ύψους h αποτελείται από υλικό πυκνότητας ρ_{π} . Το πρίσμα ισορροπεί στην επιφάνεια υγρού πυκνότητας ρ_{ν} όπως στο σχήμα, βυθισμένο κατά μήκος d στο υγρό. Το εμβαδόν της βάσης του είναι, A και η επιτάχυνση της βαρύτητας, g .



11.1 Τι είναι η άνωση;

Είναι η συνισταμένη δύναμη που ασκεί το ρευστό στο σώμα. Έστω ότι το πρίσμα ισορροπεί βυθισμένο κατά το μέρος του ύψους του d στο υγρό πυκνότητας ρ_{ν} . Επειδή οι πλευρικές δυνάμεις αλληλοεξουδετερώνονται απομένουν μόνο αυτές με την κατακόρυφη διεύθυνση. Η F_1 που ασκείται από την ατμόσφαιρα με φορά προς τα κάτω και είναι $F_1 = p_{\text{ατμ}} A$ και η F_2 που ασκείται στην κάτω επιφάνεια του πρίσματος από το υγρό και είναι $F_2 = p_2 A = (p_{\text{ατμ}} + \rho_{\nu} g d) A$.

Η συνισταμένη αυτών είναι η άνωση: $\Sigma F = F_A = F_2 - F_1 = \rho g(d \cdot A) \rightarrow F_A = \rho_{\nu} g V_{\text{βυθ}}$

όπου $V_{\text{βυθ}} = A \cdot d$ ο όγκος του βυθισμένου σώματος. Η κατεύθυνση της άνωσης είναι κατακόρυφη προς τα πάνω και το σημείο εφαρμογής της είναι το κέντρο άνωσης δηλαδή το κέντρο μάζας του βυθισμένου μέρους για τα ομογενή σώματα. Φυσικά η έκφραση ($\rho_{\nu} g V_{\text{βυθ}}$) ισοδυναμεί με το βάρος του υγρού που το σώμα εκτοπίζει. Άρα η δύναμη της άνωσης ισούται με το βάρος του ρευστού που εκτοπίζεται από αυτό. Αυτή είναι η **αρχή του Αρχιμήδη** και ισχύει για σώμα οποιουδήποτε σχήματος.

11.2 Ποια είναι η σχέση του τμήματος d που είναι βυθισμένο με το συνολικό ύψος h του πρίσματος;

Το σώμα ισορροπεί δεχόμενο δύο κατακόρυφες αντίθετες δυνάμεις, το βάρος του και την άνωση.

Το βάρος: $w = mg = \rho_{\sigma} g V_{\sigma} = \rho_{\sigma} g A h$

Η άνωση: $A = \rho_{\nu} g V_{\text{βυθ}} = \rho_{\nu} g A d$

Αλλά και ισορροπεί οπότε: $\Sigma F = 0 \rightarrow A - w = 0 \rightarrow \rho_{\nu} g V_{\text{βυθ}} = \rho_{\pi} g V_{\sigma} \rightarrow V_{\text{βυθ}} = V_{\sigma} \cdot \frac{\rho_{\pi}}{\rho_{\nu}}$

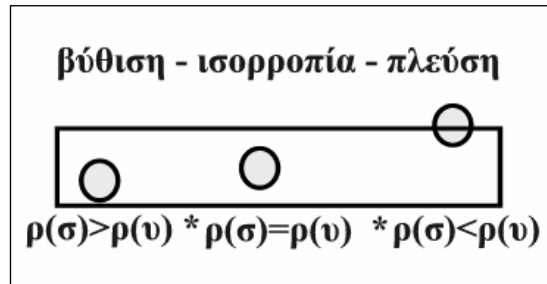
Από: $V_{\text{βυθ}} = V_{\sigma} \cdot \frac{\rho_{\pi}}{\rho_{\nu}} \rightarrow A d = A h \cdot \frac{\rho_{\pi}}{\rho_{\nu}} \rightarrow d = h \cdot \frac{\rho_{\pi}}{\rho_{\nu}}$

- Όσο η πυκνότητα του υλικού πλησιάζει προς την πυκνότητα του υγρού το βυθισμένο μέρος αυξάνεται, αλλά πάντα επιπλέει. Αν γίνουν ίσες τότε το σώμα ισορροπεί βυθισμένο εξ ολοκλήρου στο υγρό. Αν φυσικά είναι $\rho_{\pi} > \rho_{\nu}$ το σώμα βυθίζεται.

- Το ανθρώπινο σώμα αποτελείται κυρίως από νερό και γι' αυτό και ισορροπεί σχεδόν βυθισμένο εξ ολοκλήρου στο νερό. Εάν εισπνεύσουμε βαθιά αυξάνουμε τον όγκο και ελαττώνουμε την μέση πυκνότητα μας με αποτέλεσμα να επιπλέουμε πιο άνετα.

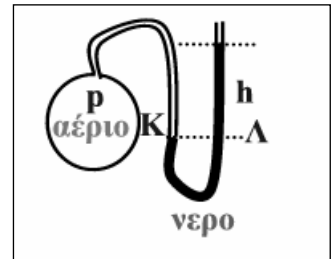
- Ένα κουτάκι Diet Coke θα επιπλέει ενώ ένα κουτάκι Classic Coke όχι, διότι η Classic Coke περιέχει 11 κουταλιές ζάχαρης ενώ η Diet Coke δεν περιέχει ζάχαρη. Η πυκνότητα της ζάχαρης είναι μεγαλύτερη από αυτήν του νερού.

- Η πυκνότητα του πάγου είναι 917 kg/m^3 ενώ του θαλασσινού νερού 1024 kg/m^3 . Η έκφραση «βλέπουμε μόνο την κορυφή του παγόβουνου» αντιστοιχεί στο ότι το $917/1024 = 89.6\%$ ενός παγόβουνου βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια του νερού.



Θέμα 12^ο

Ένα μανόμετρο νερού τύπου U συνδέεται με ένα κλειστό σφαιρικό δοχείο που περιέχει αέριο αγνώστου πίεσης p . Η υψομετρική διαφορά h στο μανόμετρο είναι 60 cm . Ο σωλήνας νερού είναι ανοικτός στο πάνω μέρος του όπου επικρατεί ατμοσφαιρική πίεση. Δίνονται $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ και $p_{\text{atm}} = 10^5 \text{ N/m}^2$. Θέλουμε να μάθουμε την πίεση στο εσωτερικό του δοχείου.



Με δεδομένα ότι το αέριο έχει αμελητέο βάρος και την αρχή του Pascal καταλαβαίνουμε ότι η ζητούμενη πίεση, p του αερίου θα είναι ίδια και πάνω από το σημείο K. Επίσης στα K και Λ του υγρού που ισορροπεί και βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο επίσης οι πιέσεις θα είναι ίσες. Άρα:

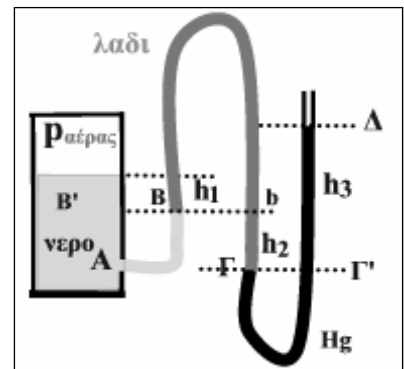
$$p_K = p \quad (1) \quad p_{\Lambda} = \rho gh + p_{\text{atm}} \quad (2)$$

$$\text{με } p_K = p_{\Lambda} \rightarrow p = \rho gh + p_{\text{atm}} \rightarrow \mathbf{p = 106 \text{ kPa}}$$

Αυτός είναι ένας απλός και γρήγορος τρόπος να μετράμε πίεση ενός αερίου.

Θέμα 13^ο

Στη διπλανή διάταξη βλέπουμε ένα κλειστό δοχείο με νερό πυκνότητας $\rho_{\nu} = 10^3 \text{ kg/m}^3$ που στο πάνω μέρος του έχει εγκλωβιστεί αέρας πίεσης p . Ο σωλήνας που ξεκινάει από το σημείο A του δοχείου περιέχει νερό μέχρι το B, μετά περιέχει λάδι πυκνότητας $\rho_{\lambda} = 800 \text{ kg/m}^3$ μέχρι το σημείο Γ και τέλος υδράργυρο πυκνότητας $\rho_{\text{Hg}} = 13600 \text{ kg/m}^3$ μέχρι το Δ. Πάνω από το Δ υπάρχει ατμοσφαιρικός αέρας με $p_{\text{atm}} = 10^5 \text{ Pa}$. Οι υψομετρικές διαφορές που φαίνονται στο σχήμα είναι $h_1 = 0,1 \text{ m}$, $h_2 = 0,2 \text{ m}$ και $h_3 = 0,3 \text{ m}$. Δίνεται και το $g = 10 \text{ m/s}^2$. Με αυτόν τον περιπετειώδη τρόπο θέλουμε να υπολογίσουμε την πίεση p του αέρα στο δοχείο.



Οι πιέσεις στα σημεία B και B' του νερού είναι ίσες. Άρα $p_B = p_{B'} \rightarrow p_B = \rho_v g h_1 + p$ (1)

Οι πιέσεις στα σημεία B και b του λαδιού είναι ίσες, $p_B = p_b = \rho_v g h_1 + p$

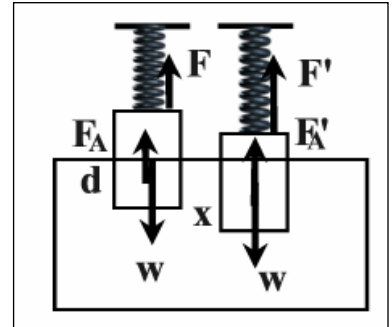
Οι πιέσεις στα σημεία Γ και Γ' του υδραργύρου είναι ίσες, ενώ $p_\Gamma = p_B + \rho_\lambda g h_2$ (2)

$$p_\Gamma = p_{\Gamma'} \rightarrow p_b + \rho_\lambda g h_2 = \rho_{Hg} g h_3 + p_{atm} \rightarrow \rho_v g h_1 + p + \rho_\lambda g h_2 = \rho_{Hg} g h_3 + p_{atm} \rightarrow$$

$$\rightarrow p = \rho_{Hg} g h_3 + p_{atm} - \rho_v g h_1 - \rho_\lambda g h_2 \rightarrow p = 138.080 \text{ N/m}^2$$

Θέμα 14^ο

Κύλινδρος με εμβαδόν βάσης A είναι δεμένος στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k και ηρεμεί βυθισμένος κατά ένα μέρος στο νερό λίμνης πυκνότητας ρ. Απομακρύνουμε τον κύλινδρο λίγο από τη θέση ισορροπίας, κατακόρυφα προς τα κάτω και τον αφήνουμε να ταλαντωθεί υποθέτοντας ότι οι τριβές είναι γενικώς αμελητέες. Θα δείξουμε ότι ο κύλινδρος κάνει ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς, D.



Στη θέση ισορροπίας ο κύλινδρος δέχεται τρεις δυνάμεις, το βάρος του $w = mg$, τη δύναμη του ελατηρίου $F = k\Delta l$ και την άνωση $F_A = \rho g V_{\text{βυθ}} = \rho g A \cdot d$ έτσι ώστε:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow w - F - F_A = 0 \rightarrow mg - k\Delta l - \rho g A \cdot d = 0 \quad (1)$$

Σε μια τυχαία απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας προς τα κάτω η συνισταμένη δύναμη θα γίνει

$$\Sigma F = w - F' - F_A' = mg - k(\Delta l + x) - \rho g A \cdot (d + x) = mg - k\Delta l - kx - \rho g A d - \rho g A x = -(k + \rho g A)x = -Dx$$

Άρα $\Sigma F = -Dx$ όπου $D = k + \rho g A$

Θέμα 15^ο

Πως με ένα βαρόμετρο μπορούμε να μετρήσουμε την υψομετρική διαφορά μεταξύ δύο σημείων ενός βουνού; Αν στο σημείο A της πλαγιάς το βαρόμετρο δείξει πίεση 980 mbars και μετά από κάποια ανάβαση μέχρι το σημείο B η ένδειξη γίνει 790 mbars και γνωρίζουμε την πυκνότητα του αέρα $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ και την επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ μπορούμε να υπολογίσουμε την υψομετρική διαφορά Δh μεταξύ των A και B. Δίνεται ότι $1 \text{ mbar} = 10^2 \text{ N/m}^2$.

Ο αέρας συμπεριφέρεται ως ιδανικό ρευστό και ο νόμος της υδροστατικής πίεσης ισχύει κατ' αναλογία. Απλώς είναι πολύ μικρότερη η πυκνότητα του αέρα από αυτή του νερού.

$$p_1 = 980 \text{ mbars} = 980 \cdot 10^2 \text{ N/m}^2 = 0,98 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

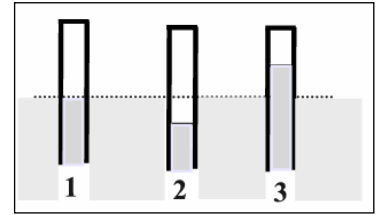
$$p_2 = 790 \text{ mbars} = 790 \cdot 10^2 \text{ N/m}^2 = 0,79 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = 0,19 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$\Delta p = \rho g \Delta h \rightarrow \Delta h = \frac{\Delta p}{\rho \cdot g} = \frac{0,19 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2}{1,2 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} \rightarrow \Delta h = 1614 \text{ m}$$

Θέμα 16^ο

Ανεστραμμένος σωλήνας ισορροπεί κατακόρυφος στην επιφάνεια του νερού. Στο πάνω μέρος του σωλήνα υπάρχει αέρας. Αναρωτιόμαστε ποια από τις εικόνες που βλέπουμε στο σχήμα είναι η σωστή.

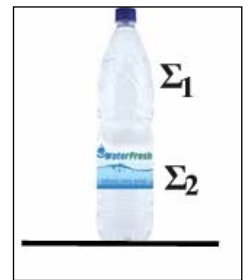


Και πάλι έχουμε ένα πρόβλημα ισορροπίας που πρέπει να υπακούσει στη γνωστή συνθήκη $\Sigma F=0$. Για να ίσχυε το πρώτο σχήμα (1) θα έπρεπε το βάρος του σωλήνα να ήταν αμελητέο. Διότι στην επιφάνεια του νερού επικρατεί ατμοσφαιρική πίεση και θα πρέπει και στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο εντός του σωλήνα να επικρατεί ίδια πίεση, πράγμα αδύνατο αφού υπάρχει αέρας αλλά και το βάρος του σωλήνα.

Το 2^ο σχήμα είναι το σωστό. Στο οριζόντιο επίπεδο της στάθμης του νερού εντός του σωλήνα η πίεση διαμορφώνεται από τον εγκλωβισμένο αέρα και το βάρος του σωλήνα ενώ απέξω από την ατμόσφαιρα και την πίεση του υγρού, και είναι λογικό σε κατάλληλες θέσεις οι πιέσεις αυτές να εξισορροπούνται. Το σχήμα (3) είναι εντελώς παράλογο σύμφωνα με την λογική που αναπτύξαμε.

Θέμα 17^ο

Το μπουκάλι νερού του σχήματος είναι γεμάτο με νερό αλλά το τοίχωμα του πώματος δεν ασκεί δύναμη στο νερό αν και εφάπτεται σε αυτό χωρίς να μεσολαβεί αέρας.



17.1 Ανοίγουμε μια μικρή οπή στο σημείο Σ_1 10cm κάτω από το πάνω μέρος αλλά το νερό δεν εκρέει. **Γιατί;**

Διότι η εσωτερική υδροστατική πίεση ρgh είναι πολύ μικρότερη από την εξωτερική ατμοσφαιρική πίεση 10^5 Pa οπότε το νερό δεν μπορεί να βγει.

17.2 Ανοίγουμε και μια δεύτερη οπή στο σημείο Σ_2 και παρατηρούμε ότι εκρέει νερό ενώ από την οπή Σ_1 μπαίνουν στο υγρό φυσαλίδες αέρα. **Γιατί;**

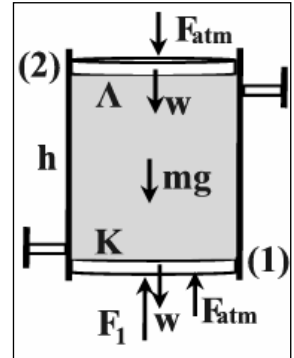
Διότι η οπή Σ_1 φέρνει το νερό σε επαφή με την ατμόσφαιρα και φτιάχνει εκεί ατμοσφαιρική πίεση. Η πίεση τώρα του νερού μέσα από την οπή Σ_2 είναι $p_{\text{ατμ}} + \rho gh$ και είναι μεγαλύτερη από την $p_{\text{ατμ}}$ που επικρατεί εξωτερικά, άρα το νερό εκρέει. Οι φυσαλίδες μπαίνουν διότι η πίεση του αέρα έξω από τη Σ_1 είναι μεγαλύτερη από την πίεση του νερού μέσα από την οπή Σ_1 .

17.3 Όταν η στάθμη του νερού κατέβει μέχρι το ύψος της οπής Σ_1 κλείνουμε την οπή Σ_1 και παρατηρούμε ότι μετά από λίγο παύει να εκρέει νερό από την οπή Σ_2 . **Γιατί;**

Διότι τώρα ο αέρας που έχει εγκλωβιστεί μέσα στο μπουκάλι και η στήλη του νερού που απομένει δεν έχουν την απαιτούμενη πίεση εσωτερικά του δοχείου ώστε να υπερνικήσουν την εξωτερική ατμοσφαιρική πίεση που επικρατεί έξω από την οπή Σ_2 ώστε το νερό να εκρέει.

Θέμα 18^ο

Στο διπλανό σχήμα, βλέπετε μια κατακόρυφη τομή ενός σταθερού κλειστού κυλινδρικού δοχείου ύψους $h=1\text{m}$ το οποίο είναι γεμάτο νερό και H πάνω και κάτω έδρα του κυλίνδρου είναι έμβολα εμβαδού $A=10\text{cm}^2$, βάρους $w=20\text{N}$ το καθένα τα οποία δεν παρουσιάζουν τριβές με το κυλινδρικό μέρος. Τα έμβολα με το νερό ισορροπούν με τη βοήθεια κατακόρυφης δύναμης F_1 που ασκείται εξωτερικά στο κάτω έμβολο ενώ όλο το σύστημα περιβάλλεται από ατμοσφαιρικό αέρα. Η πυκνότητα του νερού είναι $\rho=1.000\text{kg/m}^3$, η ατμοσφαιρική πίεση $p_{\text{atm}}=10^5\text{Pa}$ και το $g=10\text{m/s}^2$.



18.1 Θα υπολογίσουμε την πίεση στο σημείο K ακριβώς πάνω από το έμβολο (1) και στο Λ ακριβώς κάτω από το έμβολο (2).

Η πίεση στο K . Ας δούμε τι υπάρχει πάνω από το K και το πιέζει προς τα κάτω. Ατμόσφαιρα, το έμβολο (2) και το νερό. Και τα τρία αυτά ασκούν πιέσεις

$$\text{Άρα: } p_K = p_{\text{atm}} + \frac{w}{A} + \rho gh \rightarrow p_K = (10^5 + 0,2 \cdot 10^5 + 0,1 \cdot 10^5) \text{Pa} \rightarrow p_K = 1,3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\text{Η διαφορά πίεσης μεταξύ των } K \text{ και } \Lambda \text{ είναι: } p_K - p_\Lambda = \rho gh \rightarrow p_\Lambda = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

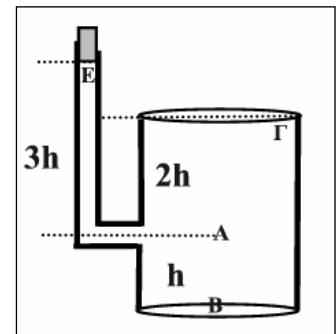
18.2 Ποιο θα είναι το μέτρο της δύναμης F_1 ώστε το σύστημα να ισορροπεί;

Αν γράψουμε τη συνθήκη ισορροπίας για το έμβολο (1). Αυτό δέχεται τη δύναμη του βάρους του $w=20\text{N}$, την δύναμη $F_K = p_K A = 130\text{N}$ από το υπερκείμενο υγρό, τη δύναμη της ατμόσφαιρας $F_{\text{atm}} = p_{\text{atm}} \cdot A = 100\text{N}$ και τη δύναμη F_1 .

$$\Sigma F = 0 \rightarrow F_1 + F_{\text{atm}} - w - F_K = 0 \rightarrow F_1 = w + F_K - F_{\text{atm}} \rightarrow F_1 = 20\text{N} + 130\text{N} - 100\text{N} \rightarrow F_1 = 50\text{N}$$

Θέμα 19^ο

Το κυλινδρικό δοχείο ύψους $3h$ είναι γεμάτο με νερό πυκνότητας, ρ . Το δοχείο συνδέεται με σωλήνα διατομής A , όπως στο σχήμα, όπου το νερό φτάνει σε ύψος $3h$. Ο σωλήνας φράσσεται με έμβολο βάρους $w = \rho gh \cdot A$ το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Το δοχείο βρίσκεται σε περιβάλλον μηδενικής ατμοσφαιρικής πίεσης και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g .



19.1 Ας υπολογίσουμε συναρτήσει του γινομένου ρgh τις πιέσεις, p_A στο σημείο A , p_B στο σημείο B πολύ κοντά στην κάτω έδρα και p_Γ πολύ κοντά στην άνω έδρα του κυλίνδρου:

Η πίεση στο σημείο A καθορίζεται από την πίεση που ασκεί το βάρος του εμβόλου και η στήλη $3h$ του υγρού. Άρα θα είναι: $p_A = p_{\text{εμβ}} + \rho 3h \cdot g = \frac{w}{A} + 3\rho gh = \frac{\rho gh A}{A} + 3\rho gh \rightarrow p_A = 4\rho gh$

$$\text{Η πίεση στο } B \text{ θα υπολογιστεί μέσω της } p_A : p_B - p_A = \rho gh \rightarrow p_B = 5\rho gh$$

$$\text{Η πίεση στο } \Gamma \text{ θα υπολογιστεί μέσω της } p_A : p_A - p_\Gamma = \rho g 2h \rightarrow p_\Gamma = p_A - 2\rho gh \rightarrow p_\Gamma = 2\rho gh$$

19.2 Αν ασκήσουμε στο έμβολο κατακόρυφη δύναμη F , μέτρου $F=3w$, όπου w το βάρος του εμβόλου, με φορά προς τα κάτω κατά πόσο αυξάνεται η πίεση που ασκείται από το νερό στην πάνω έδρα του κυλίνδρου;

Η πίεση ακριβώς κάτω από το έμβολο τώρα γίνεται: $p_E = \frac{F+w}{A} = \frac{4w}{A} = 4\rho gh$

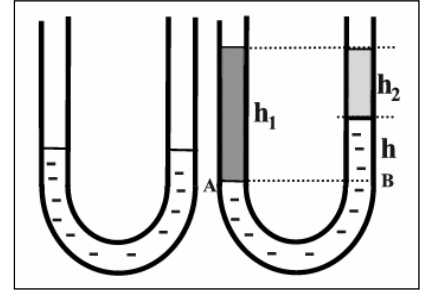
Μεταξύ των Ε και Γ υπάρχει μια υψομετρική διαφορά h , άρα

$$p_{\Gamma} - p_E = \rho gh \rightarrow p_{\Gamma} = 5\rho gh$$

$$\text{Άρα } \Delta p_{\Gamma} = 5\rho gh - 2\rho gh \rightarrow \Delta p_{\Gamma} = 3\rho gh$$

Θέμα 20^ο

Το δοχείο σχήματος U περιέχει υδράργυρο πυκνότητας $\rho = 13,6 \text{ g/cm}^3$ που ισορροπεί. Προσθέτουμε στο αριστερό σκέλος ένα υγρό (1) πυκνότητας $\rho_1 = 2 \text{ g/cm}^3$ και στο δεξιό άλλο υγρό (2) με $\rho_2 = 0,8 \text{ g/cm}^3$. Και τα δύο υγρά δεν αναμειγνύονται με τον υδράργυρο και ισορροπούν έτσι ώστε οι στάθμες τους να βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Το ύψος της στήλης του υγρού (1) είναι $h_1 = 25,6 \text{ cm}$. Ποια είναι η διαφορά του ύψους του υδραργύρου στα δύο σκέλη;



Το υγρό (1) είναι βαρύτερο από το υγρό (2) συνεπώς η στάθμη του νερού θα κατέβει στο αριστερό σκέλος και θα ανέβει στο δεξιό. Αν h_1 είναι το ύψος της στήλης του υγρού ρ_1 και h_2 το ύψος της στήλης του υγρού ρ_2 , η διαφορά h του ύψους του υδραργύρου στα δύο σκέλη θα είναι $h = h_1 - h_2 \rightarrow h_2 = h_1 - h$ (1). Οι πιέσεις στα σημεία Α και Β είναι ίσες: $p_A = p_B$ (2)

$$p_A = p_{\text{atm}} + \rho_1 g h_1 \quad (3)$$

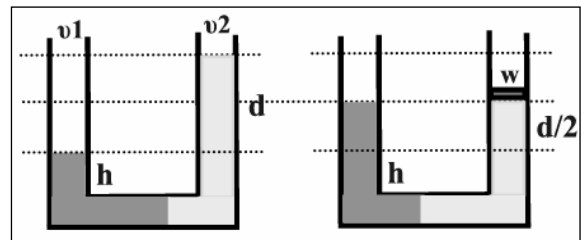
$$p_B = p_{\text{atm}} + \rho g h + \rho_2 g h_2 \quad (4)$$

Από (2)(3)(4) και (1) έχουμε

$$p_{\text{atm}} + \rho_1 g h_1 = p_{\text{atm}} + \rho g h + \rho_2 g h_2 \rightarrow \rho_1 g h_1 = \rho g h + \rho_2 g (h_1 - h) \rightarrow h = \frac{(\rho_1 - \rho_2) h_1}{(\rho - \rho_2)} \rightarrow h = 2,4 \text{ cm}$$

Θέμα 21^ο

Δύο μη αναμειγνύόμενα υγρά v_1 και v_2 με πυκνότητες ρ_1 και ρ_2 αντίστοιχα όπου $\rho_1 = 3\rho_2$ ισορροπούν στον σωλήνα σταθερής διατομής όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Για να φέρουμε τα δύο υγρά στην ίδια στάθμη τοποθετούμε από την μεριά του v_2 , εφαρμοστό έμβολο βάρους w και εμβαδού της διατομής ίσο με τη διατομή A του σωλήνα.. Το έμβολο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές, μέσα στον κατακόρυφο σωλήνα. Μπορούμε να υπολογίσουμε το βάρος του.



Οι πιέσεις στη διαχωριστική επιφάνεια των υγρών που ισορροπούν είναι ίσες.

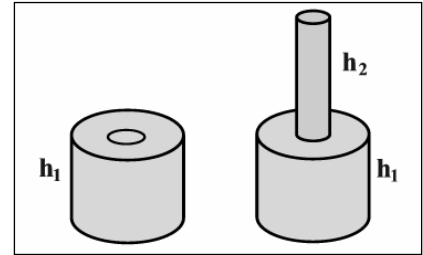
Από την αρχική ισορροπία: $p_1 = p_2 \rightarrow p_{\text{atm}} + \rho_1 g H = p_{\text{atm}} + \rho_2 g (d + H) \rightarrow 3\rho_2 g H = \rho_2 g d + \rho_2 g H \rightarrow d = 2H$.

Από τη νέα ισορροπία που δημιουργείται λόγω του εμβόλου που προκαλεί πρόσθετη πίεση W/A

$$p_1' = p_2' \rightarrow p_{\text{atm}} + \rho_1 g \left(H + \frac{d}{2}\right) = p_{\text{atm}} + \rho_2 g \left(\frac{d}{2} + H\right) + \frac{W}{A} \rightarrow \dots \rightarrow 4\rho_2 g H = \frac{W}{A} \rightarrow w = 4\rho_2 g H \cdot A.$$

Θέμα 22^ο

Ο μεγάλος κάτω κύλινδρος έχει εμβαδόν βάσης $A_1=25\text{cm}^2$ και ύψος $h_1=1\text{m}$ είναι κλειστός και στο επάνω μέρος του έχει μια τρύπα εμβαδού $A_2=5\text{cm}^2$ στο κέντρο του. Είναι δε γεμάτος με νερό. Η πυκνότητα του νερού είναι $\rho=10^3\text{kg/m}^3$ και η ατμοσφαιρική πίεση 10^5Pa και δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



22.1 Πόση είναι η πίεση στον πυθμένα του κυλίνδρου;

$$p=p_{\text{ατμ}}+\rho gh_1=10^5\text{Pa}+0,1\cdot 10^5\text{Pa}\rightarrow p=1,1\cdot 10^5\text{Pa}$$

Τοποθετούμε στο κέντρο του ένα ανοικτό σωλήνα ύψους $h_2=1\text{m}$ και εμβαδού βάσης $A_2=5\text{cm}^2$ που προσαρμόζεται στην ανάλογη τρύπα του κυλίνδρου και γεμίζουμε έως επάνω με νερό.

22.2 Πόση θα γίνει τώρα η συνολική πίεση στον πυθμένα του κυλίνδρου;

$$p_1=p_{\text{ατμ}}+\rho g(h_1+h_2)=10^5\text{Pa}+0,2\cdot 10^5\text{Pa}\rightarrow p_1=1,2\cdot 10^5\text{Pa}$$

22.3 Πόσο είναι το συνολικό βάρος του νερού κυλίνδρου και σωλήνα;

Η στήλη του νερού που έχει ο σωλήνας αντιστοιχεί σε όγκο, $V_2=A_2\cdot h_2$ και ο κύλινδρος $V_1=A_1\cdot h_1$. Το βάρος του νερού της στήλης του σωλήνα είναι:

$$w_2=m_2g=\rho V_2g=\rho A_2\cdot h_2\cdot g=10^3\text{kg/m}^3\cdot 5\cdot 10^{-4}\text{m}^2\cdot 1\text{m}\cdot 10\text{m/s}^2\rightarrow w_2=5\text{N}$$

Το βάρος του νερού της στήλης του κυλίνδρου είναι:

$$W_1=m_1g=\rho V_1g=\rho A_1\cdot h_1\cdot g=10^3\text{kg/m}^3\cdot 25\cdot 10^{-4}\text{m}^2\cdot 1\text{m}\cdot 10\text{m/s}^2\rightarrow w_1=25\text{N}$$

Το συνολικό βάρος είναι $w=w_1+w_2=30\text{N}$

22.4 Πόσο είναι το μέτρο της δύναμης F_1 που δέχεται ο πυθμένας του κυλίνδρου από το νερό και πόση η δύναμη F_2 που δέχεται το καπάκι της πάνω βάσης του μεγάλου κυλίνδρου.

Η βάση του κυλίνδρου δέχεται δύναμη F_1 που αντιστοιχεί στην πίεση p_1 . Άρα:

$$F_1=p_1A_1=1,2\cdot 10^5\text{Pa}\cdot 25\cdot 10^{-4}\text{m}^2\rightarrow F_1=300\text{N}$$

Στη βάση του σωλήνα η πίεση είναι $p_2=p_{\text{ατμ}}+\rho gh_2=1,1\cdot 10^5\text{Pa}$

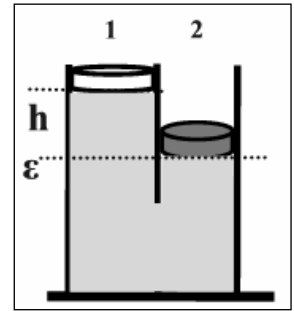
Το καπάκι της πάνω βάσης δέχεται δύναμη από το νερό που αντιστοιχεί στην πίεση που επικρατεί στο νερό που εφάπτεται σε αυτό, δηλαδή στην πίεση p_2 . και το εμβαδόν του είναι $A_k=A_1-A_2=20\cdot 10^{-4}\text{m}^2$. Άρα $F_2=p_2(A_1-A_2)\rightarrow F_2=1,1\cdot 10^5\text{Pa}\cdot 20\cdot 10^{-4}\text{m}^2\rightarrow F_2=220\text{N}$

•Αξιίζει μια επιβεβαίωση. Η μάζα όλου του νερού, σωλήνα και κυλίνδρου έχει συνολικό βάρος $w=50\text{N}$, δέχεται από την ατμόσφαιρα δύναμη προς τα κάτω $F_{\text{ατμ}}=p_{\text{ατμ}}A_2=50\text{N}$ και από το πάνω καπάκι δύναμη πάλι προς τα κάτω $F_2=220\text{N}$. Η μόνη δύναμη που δέχεται προς τα πάνω είναι από τον πυθμένα δηλαδή η $F_1=300\text{N}$. Πράγματι:

$$\Sigma F=F_1-(w+F_{\text{ατμ}}+F_2)=300\text{N}-(30\text{N}+50\text{N}+220\text{N})=0$$

Θέμα 23^ο

Τα δύο συγκοινωνούντα δοχεία περιέχουν νερό πυκνότητας $\rho=1000\text{kg/m}^3$ και τα έμβολα ισορροπούν όπως στο σχήμα. Το έμβολο (1) έχει εμβαδόν $A_1=50\text{cm}^2$ και μάζα $m_1=5\text{kg}$ ενώ το έμβολο (2) εμβαδόν $A_2=40\text{cm}^2$ και μάζα $m_2=8\text{kg}$. Το σύστημα βρίσκεται εντός ατμόσφαιρας. Θέλουμε να υπολογίσουμε την υψομετρική διαφορά h των δύο εμβόλων.



Οι πιέσεις στο οριζόντιο επίπεδο (ϵ) πρέπει να είναι ίσες αφού το σύστημα ισορροπεί.

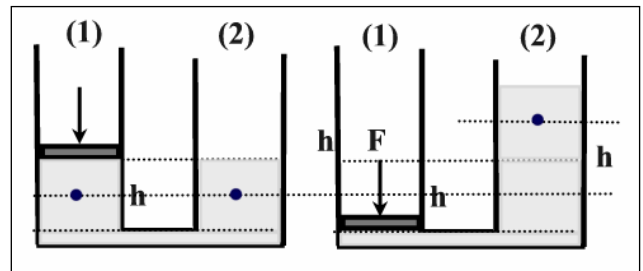
$$\text{Άρα} \quad p_1 = p_2. \quad (1)$$

$$p_1 = p_{\text{atm}} + \frac{W_1}{A_1} + \rho g h_1 \quad (2) \quad \text{και} \quad p_2 = p_{\text{atm}} + \frac{W_2}{A_2} \quad (3)$$

$$\text{Από (1)(2)(3)} \rightarrow p_{\text{atm}} + \frac{W_1}{A_1} + \rho g h = p_{\text{atm}} + \frac{W_2}{A_2} \rightarrow \rho g h = \frac{m_2 g}{A_2} - \frac{m_1 g}{A_1} \rightarrow h = \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{m_2}{A_2} - \frac{m_1}{A_1} \right) \rightarrow h = 1\text{m}$$

Θέμα 24^ο

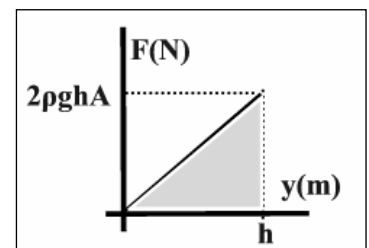
Σε όμοια συγκοινωνούντα δοχεία διατομής $A=0,2\text{m}^2$ περιέχεται νερό πυκνότητας $\rho=10^3\text{kg/m}^3$ σε ύψος 1m πάνω από τον σωλήνα που συνδέει τα δοχεία. Αβαρές έμβολο ισορροπεί πάνω στο νερό στον σωλήνα (1). Πιέζοντας το έμβολο προς τα κάτω με δύναμη F , διώχνουμε αργά όλο το νερό από το δοχείο αυτό. Ζητάμε το έργο αυτής της δύναμης.



Η κίνηση γίνεται αργά αργά με σταθερή μικρή ταχύτητα και συνεπώς η μεταβολή της κινητικής ενέργειας της μάζας του νερού που μετακινείται είναι μηδενική, $\Delta K=0$. Από την αρχική μέχρι την τελική κατάσταση υπάρχει μια ανύψωση του κέντρου μάζας του νερού κατά h . Από το ΘΜΚΕ έχουμε:

$$W_F + W_{\text{mg}} = \Delta K \rightarrow W_F - mgh = 0 \rightarrow W_F = \rho Vgh = \rho(Ah)gh \rightarrow W_F = \rho Agh^2 \rightarrow W_F = 2000\text{J}$$

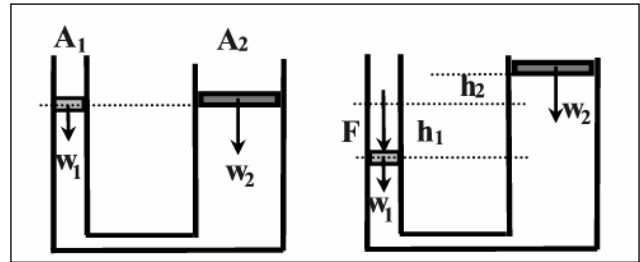
• Η δύναμη που ασκούμε στο έμβολο είναι μεταβλητή ως προς τη μετατόπιση y εμβόλου. Για κάθε μετατόπιση κατά y η δύναμη κρατάει νερό ύψους $2y$, άρα η πίεση που απαιτείται είναι $p = \rho g 2y$ και η δύναμη είναι $F = pA = \rho g 2yA \rightarrow F = 2\rho g yA$. Το έργο αυτής της δύναμης για μετατόπιση από $0 \leq y \leq h$ υπολογίζεται και από τη γραφική παράσταση, $(F-y)$.



$$W_F = \frac{1}{2} 2\rho g h A \cdot h \rightarrow W_F = \rho Agh^2 \rightarrow W_F = 2000\text{J}$$

Θέμα 25^ο

Στο διπλανό σχήμα, φαίνεται ένας υδραυλικός ανυψωτήρας, με χρήση νερού, όπου τα δύο έμβολα (1) και (2), κυλινδρικού σχήματος, έχουν διατομές $A_1=2\text{cm}^2$ και $A_2=40\text{cm}^2$ αντίστοιχα και ισορροπούν στο ίδιο ύψος. Το έμβολο (1) έχει βάρος $w_1=10\text{N}$. Δίνονται το $g=10\text{m/s}^2$ και η πυκνότητα του νερού $\rho=10^3\text{kg/m}^3$. Οι τριβές είναι μηδενικές.



25.1 Πόσο είναι το βάρος του εμβόλου (2);

Οι πιέσεις κάτω από τα έμβολα είναι ίσες μιας και ισορροπούν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.

$$p_1=p_2 \rightarrow p_{\text{atm}} + \frac{w_1}{A_1} = p_{\text{atm}} + \frac{w_2}{A_2} \rightarrow w_2 = w_1 \frac{A_2}{A_1} \rightarrow w_2 = 200\text{N}$$

25.2 Ασκούμε στο έμβολο (1) κατακόρυφη δύναμη και το κατεβάζουμε κατά $h_1=40\text{cm}$. Πόση είναι η τελική τιμή της δύναμης ώστε το σύστημα να ισορροπεί στη νέα του θέση.

Στη νέα θέση αν το έμβολο (1) έχει κατέβει κατά h_1 , το έμβολο (2) θα έχει ανέβει κατά h_2 από την αρχική θέση ισορροπίας του. Επειδή ο όγκος του νερού που έφυγε από τον σωλήνα (1) πήγε στον σωλήνα (2) θα έχουμε:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 \rightarrow A_1 h_1 = A_2 h_2 \rightarrow h_2 = \frac{A_1 h_1}{A_2} \rightarrow h_2 = 2\text{cm}.$$

Οι πιέσεις στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο (ε) θα είναι και πάλι ίσες άρα

$$p_K = p_A \rightarrow p_{\text{atm}} + \frac{w_1 + F}{A_1} = p_{\text{atm}} + \frac{w_2}{A_2} + \rho g(h_1 + h_2) \rightarrow \frac{w_1 + F}{A_1} = \frac{w_2}{A_2} + \rho g(h_1 + h_2) \rightarrow \dots \rightarrow F = 0,84\text{N}$$

25.3 Πόσο είναι το έργο της δύναμης F για αυτήν την ανύψωση;

Τα έργα: του βάρους του εμβόλου (1) $W_1 = w_1 h_1 = 4\text{J}$

του βάρους εμβόλου (2): $W_2 = -w_2 h_2 = -4\text{J}$

Της μάζας του νερού που ανυψώνεται. Η μάζα είναι $m_v = \rho \Delta V = \rho A_1 h_1 = 0,08\text{kg}$ και το κέντρο

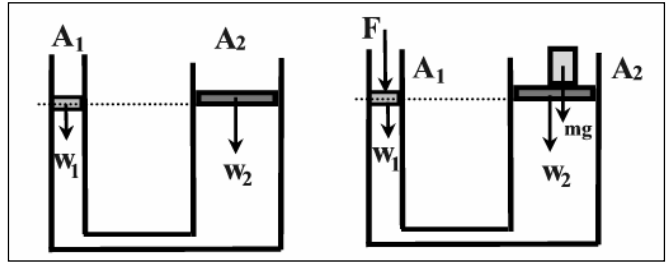
μάζας της ανυψώνεται κατά $x = \frac{h_1 + h_2}{2} = 0,21\text{m}$

$$W_v = -m_v g x = -m_v g \cdot \frac{h_1 + h_2}{2} \rightarrow W_v = -1,68\text{J}$$

$$\text{Από ΘΜΚΕ: } W_F + W_1 + W_2 + W_v = \Delta K = 0 \rightarrow W_F = -W_v = 1,68\text{J}$$

Θέμα 26^ο

Στο διπλανό σχήμα, φαίνεται ένας υδραυλικός ανυψωτήρας, με χρήση νερού, όπου τα δύο έμβολα Α και Β, κυλινδρικού σχήματος, έχουν διατομές $A_1=2\text{cm}^2$ και $A_2=40\text{cm}^2$ αντίστοιχα και ισορροπούν στο ίδιο ύψος. Το έμβολο (1) έχει βάρος $w_1=10\text{N}$. Δίνονται η ατμοσφαιρική πίεση $p_{\text{atm}}=10^5\text{N/m}^2$ το $g=10\text{m/s}^2$ και η πυκνότητα του νερού $\rho=10^3\text{kg/m}^3$ ενώ οι κινήσεις των εμβόλων γίνονται χωρίς τριβές.



26.1 Πόσο είναι το βάρος του εμβόλου (2);

Οι πιέσεις ακριβώς κάτω από τα έμβολα είναι ίσες αφού αυτά ισορροπούν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.

$$p_1 = p_{\text{atm}} + \frac{w_1}{A_1} \quad \text{και} \quad p_2 = p_{\text{atm}} + \frac{w_2}{A_2}$$

$$p_1 = p_2 \rightarrow p_{\text{atm}} + \frac{w_1}{A_1} = p_{\text{atm}} + \frac{w_2}{A_2} \rightarrow \frac{w_1}{A_1} = \frac{w_2}{A_2} \rightarrow w_2 = w_1 \cdot \frac{A_2}{A_1} \rightarrow w_2 = 200\text{N}$$

26.2 Τοποθετούμε πάνω στο έμβολο Β, ένα σώμα Σ μάζας 200kg. Πόση κατακόρυφη δύναμη F πρέπει να ασκήσουμε στο Α έμβολο, ώστε να μην μετακινηθούν τα έμβολα;

Στην ίδια λογική με την ερώτηση (1). Απλά στο ένα έμβολο προσθέσαμε βάρος και πρέπει να το ισορροπήσουμε με δύναμη F.

$$p_1' = p_2' \rightarrow p_{\text{atm}} + \frac{w_1 + F}{A_1} = p_{\text{atm}} + \frac{w_2 + mg}{A_2} \rightarrow F = (w_2 + mg) \frac{A_1}{A_2} - w_1 \rightarrow F = 100\text{N}$$

26.3 Αυξάνοντας το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F μετακινούμε το έμβολο (1) προς τα κάτω κατά $h_1=80\text{cm}$, φέρνοντάς το να ισορροπεί σε μια νέα θέση. Θα υπολογίσουμε κατά πόσο ανέβηκε το έμβολο (2) και ποια είναι η τελική τιμή της δύναμης, F_1 .

Αν το έμβολο (1) κατέβει κατά h_1 , το έμβολο (2) θα ανέβει κατά h_2 . Ο όγκος ΔV_1 του νερού που κατεβαίνει θα ισούται με τον αντίστοιχο όγκο του νερού που ανεβαίνει, άρα:

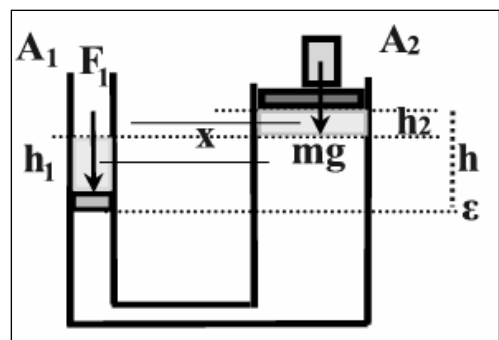
$$\Delta V_1 = \Delta V_2 \rightarrow h_1 A_1 = h_2 A_2 \rightarrow h_2 = h_1 \frac{A_1}{A_2} \rightarrow h_2 = 4\text{cm}$$

Στη νέα θέση ισορροπίας οι πιέσεις στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο (ε) πρέπει να είναι ίδιες, συνεπώς

$$\text{Κάτω από το έμβολο (1):} \quad p_1' = p_{\text{atm}} + \frac{F_1 + w_1}{A_1}$$

$$\text{Κάτω από το έμβολο (2):} \quad p_2' = p_{\text{atm}} + \frac{mg + w_2}{A_2} + \rho gh$$

$$\text{Όπου } h = h_1 + h_2 = 84\text{cm} = 0,84\text{m} \quad (\odot \text{ σχήμα})$$



$$p_1' = p_2' \rightarrow p_{\text{atm}} + \frac{F_1 + w_1}{A_1} = p_{\text{atm}} + \frac{mg + w_2}{A_2} + \rho gh \rightarrow F_1 = 101,68\text{N}$$

26.4 Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης F .

Και τέλος θα υπολογίσουμε το έργο αυτής της μεταβλητής δύναμης F που σπρώχνει προς τα κάτω το έμβολο (1) με $w_1=10\text{N}$ και το κατεβάζει κατά $h_1=0,8\text{m}$ ενώ ανεβάζει το άλλο με $w_2=200\text{N}$ κατά $h_2=0,04\text{m}$. Ανεβάζει όμως και το πρόσθετος βάρος $mg=2000\text{N}$ κατά h_2 .

Η δύναμη της ατμόσφαιρας παράγει έργο στο έμβολο (1) και καταναλώνει στο (2). Το συνολικό έργο είναι μηδέν γιατί:

$$W_{\text{ατμ}}=W_{(1)}+W_{(2)}=F_{\text{ατμ},1}h_1-F_{\text{ατμ},2}h_2=p_{\text{ατμ}}A_1h_1=p_{\text{ατμ}}A_2h_2=p_{\text{ατμ}}\Delta V_1-p_{\text{ατμ}}\Delta V_2\rightarrow W=0$$

Για τη μετακίνηση αυτή γίνονται τα εξής έργα:

$$W_F \text{ ζητούμενο και } W_{\text{ατμ}}=0$$

Τα έργα των βαρών των εμβόλων και του πρόσθετου σώματος:

$$W_{w1}=w_1h_1=10\cdot 0,8=8\text{J},$$

$$W_{w2}=-w_2\cdot h_2=-200\cdot 0,04=-8\text{J}, \text{ και}$$

$$W_{mg}=-mgh_2=-2000\cdot 0,04=-80\text{J}$$

Το έργο της ποσότητας νερού που το κέντρο μάζας της ανεβαίνει κατά $x=\frac{1}{2}(h_1+h_2)=42\text{cm}$,

$$W_{\text{νερού}}=-m_v g x = \rho \Delta V \cdot g \cdot x = -\rho A_1 h_1 g \cdot x \rightarrow W_{\text{νερού}}=-0,672\text{J}$$

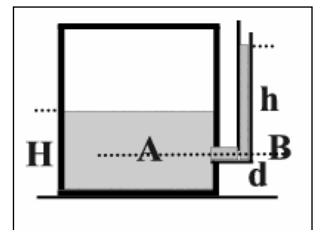
Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας όλου του συστήματος φυσικά είναι μηδέν.

Γράφω το ΘΜΚΕ:

$$W_F+W_{w1}+W_{w2}+W_{mg}+W_{\text{νερού}}=\Delta K \rightarrow W_F+w_1h_1-w_2h_2-mgh_2+W_{\text{νερού}}=0 \rightarrow W_F=80,672\text{J}$$

Θέμα 27^ο

Κλειστό κυλινδρικό δοχείο περιέχει υγρό σε ύψος $H=0,4\text{m}$ και στο πάνω μέρος του αέρα σε πίεση $p=110\text{kPa}$. Στην πλευρική επιφάνεια του δοχείου και σε ύψος $d=20\text{cm}$ είναι προσαρμοσμένος λεπτός ανοικτός σωλήνας ύψους $h=70\text{cm}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η στάθμη του υγρού μέσα στο δοχείο θεωρείται αμετάβλητη μετά την αύξηση της πίεσης. Δίνονται η $p_{\text{ατμ}}=10^5\text{Pa}$ και $g=10\text{m/s}^2$.



27.1 Πόση είναι η πίεση στον πυθμένα;

$$\text{Οι πιέσεις στα A και B είναι ίσες: } p_A = p + \rho g(H-d) \quad p_B = p_{\text{ατμ}} + \rho gh$$

$$p_A = p_B \rightarrow p + \rho g(H-d) = p_{\text{ατμ}} + \rho gh \rightarrow \rho = \frac{p - p_{\text{ατμ}}}{g(d+h-H)} \rightarrow \rho = 2 \cdot 10^3 \text{kg/m}^3$$

$$\text{Η πίεση στον πυθμένα του δοχείου: } p_{\pi} = p + \rho gH \rightarrow p_{\pi} = 1,18 \cdot 10^5 \text{Pa}$$

27.2 Πόση είναι η μεταβολή ύψους Δh που φτάνει το υγρό μέσα στο σωλήνα αν η πίεση στον αέρα αυξηθεί κατά 10%.

Η αύξηση της πίεσης είναι $\Delta p = 0,1P = 11 \cdot 10^3 \text{Pa}$. Άρα η νέα πίεση του αέρα είναι $p' = p + \Delta p \rightarrow p' = 121 \cdot 10^3 \text{Pa}$

Από την ισότητα των πιέσεων στα A και B:

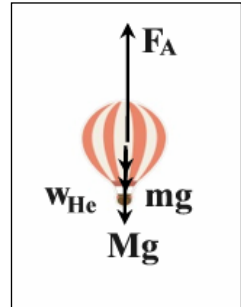
$$p_A' = p_B' \rightarrow p' + \rho g(H-d) = p_{\text{ατμ}} + \rho g(h + \Delta h) \rightarrow \Delta h = \frac{p' - p_{\text{ατμ}} + \rho g(H-d-h)}{\rho g} \rightarrow \Delta h = 0,55\text{m}$$

Θέμα 28^ο

Ένα σφαιρικό μπαλόνι «αεροστάτου» που περιέχει Ήλιο (He) έχει ακτίνα $R = 10\text{m}$. Τα σχοινιά μαζί με το καλάθι έχουν συνολική μάζα $m = 200\text{ kg}$. Πόση είναι η μάζα M του μέγιστου φορτίου που μπορεί αυτό το αερόστατο να μεταφέρει;

Δίνονται: $\rho_{\text{He}} = 0,16\text{ kg/m}^3$ και $\rho_{\text{αερα}} = 1,26\text{ kg/m}^3$

Η άνωση του αέρα κρατάει το αερόστατο. Παρόλη την μικρή του πυκνότητα ο αέρας έχει μεγάλες δυνατότητες τηρουμένων των αναλογιών. Ο όγκος του μπαλονιού είναι $V = \frac{4\pi R^3}{3} = 4.187\text{m}^3$



Η άνωση του αέρα είναι : $F_A = \rho_{\text{αερα}} g \cdot V$

Το συνολικό βάρος περιλαμβάνει το βάρος $w = mg$ του καλάθιού, το βάρος του φορτίου $W = Mg$ αλλά και το βάρος του Ηλίου $w_{\text{He}} = \rho_{\text{He}} g V$

$$\Sigma F = 0 \rightarrow F_A - mg - Mg - w_{\text{He}} = 0 \rightarrow \rho_{\text{αερα}} g \cdot V - \rho_{\text{He}} g V = mg + Mg \rightarrow \mathbf{M = (\rho_{\text{αερα}} - \rho_{\text{He}}) V - m}$$

$$\mathbf{M = 4.405,7\text{kg}}$$

Λυμένα θέματα στα ρευστά σε κίνηση

Θέμα 1^ο

Εισαγωγικές έννοιες

1.1. **Ροή** ονομάζεται η κίνηση ρευστού σε μια περιοχή του χώρου. Η περιοχή αυτή ονομάζεται πεδίο ροής.

1.2 **Ρευματική γραμμή** (γραμμή ροής) ονομάζεται η τροχιά την οποία διαγράφει μια στοιχειώδης μάζα του ρευστού («σωματίδιο» ή μόριο ρευστού) κατά την κίνησή του. Με άλλα λόγια το σύνολο των διαδοχικών του θέσεων.

1.3 Η ταχύτητα κάθε σωματιδίου είναι εφαπτόμενη της ρευματικής γραμμής. Ρευματική γραμμή και ταχύτητα ροής έχουν την ίδια κατεύθυνση.

1.4 Δύο ρευματικές γραμμές δεν τέμνονται ποτέ γιατί τότε το «σωματίδιο» που θα έφτανε σε αυτήν την τομή θα είχε ταυτόχρονα δύο ταχύτητες, πράγμα αδύνατο.

1.5 Όσο πυκνότερες είναι οι ρευματικές γραμμές τόσο μεγαλύτερη είναι η ταχύτητα ροής.

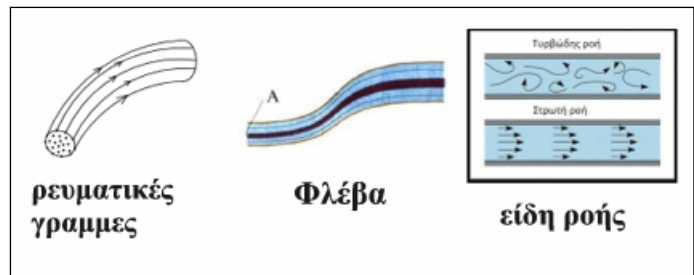
1.6 **Ιδανικά ρευστά** είναι αυτά που είναι (α) ασυμπίεστα, (β) δεν εμφανίζουν εσωτερική τριβή όταν ρέουν, (γ) δεν εμφανίζουν δυνάμεις συνάφειας όταν ρέουν, δηλαδή τριβές με τα τοιχώματα του σωλήνα που ρέουν.

1.7 **Τυρβώδης ροή** είναι η ροή όταν δημιουργούνται δίνες και αυτό συμβαίνει όταν η εσωτερική τριβή και οι δυνάμεις συνάφειας ξεπερνούν κάποιο όριο. Συμβαίνει στα πραγματικά ρευστά.

1.8 **Στρωτή ροή** είναι η ροή ρευστού χωρίς δίνες. Τέτοια ροή κάνουν πάντοτε τα ιδανικά ρευστά επειδή δεν έχουν τριβές.

1.9 **Φλέβα** ονομάζουμε ένα σύνολο από πολλές γειτονικές ρευματικές γραμμές που σχηματίζουν μια σωληνωτή περιοχή. Κάθε σωματίδιο του ρευστού που βρίσκεται μέσα σε φλέβα δεν μπορεί να βγει από τα νοητά της τοιχώματα.

1.10 **Σωλήνα ροής** ονομάζουμε κάθε μορφής τοιχώματα που περιορίζουν ένα ρέον ρευστό. Πχ ένας σωλήνας ύδρευσης, η κοίτη ενός ποταμού κλπ.



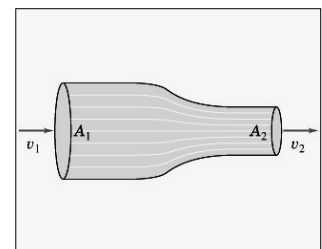
Θέμα 2^ο

2.1 Τι είναι η Παροχή (όγκου), Π , ενός σωλήνα ή μιας φλέβας;

Ως παροχή όγκου ενός σωλήνα ή μιας φλέβας ορίζεται το πηλίκο του όγκου του ρευστού ΔV που περνάει μέσα από μια διατομή του σωλήνα ροής σε χρόνο Δt , προς τον χρόνο αυτόν.

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} \rightarrow \Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A \cdot \Delta x}{\Delta t} = A v \rightarrow \Pi = A \cdot v$$

Η παροχή μιας φλέβας ισούται με το γινόμενο του εμβαδού διατομής της φλέβας επί την ταχύτητα του ρευστού στη θέση αυτή. Μετριέται σε m^3/s στο SI.



2.2. Τι είναι η παροχή μάζας, dm/dt ;

Είναι ο ρυθμός της διερχόμενης μάζας (kg/s) από μια διατομή ενός σωλήνα. Ισούται με το γινόμενο της πυκνότητας, ρ , επί την παροχή, Π .

$$\frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} \rightarrow \frac{dm}{dt} = \rho \cdot \Pi$$

Θέμα 3^ο

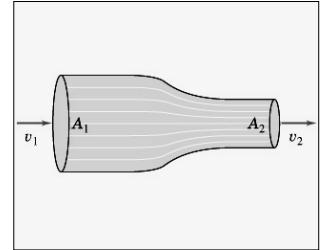
Η εξίσωση της συνέχειας και η διατήρηση της μάζας

Κατά μήκος ενός σωλήνα ή μιας φλέβας η παροχή διατηρείται σταθερή. Αυτό είναι συνέπεια της αρχής διατήρησης της μάζας και συνεπάγεται ότι, σε μια στρωτή ροή ενός ασυμπίεστου ρευστού που ρέει σε σωλήνα μεταβλητής διατομής, ισχύει:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Απόδειξη: Όση μάζα ρευστού περνάει από την διατομή A_1 περνάει και από την A_2 . Άρα:

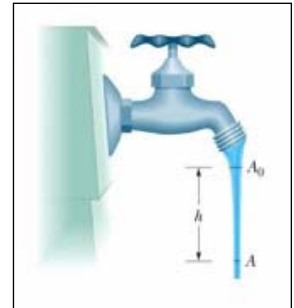
$$dm_1 = dm_2 \rightarrow \rho dV_1 = \rho dV_2 \rightarrow A_1 dx_1 = A_2 dx_2 \rightarrow A_1 v_1 dt = A_2 v_2 dt \rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$$



Πρακτικό αποτέλεσμα: Όπου ο σωλήνας στενεύει, οι ρευματικές γραμμές πυκνώνουν και η ταχύτητα ροής αυξάνεται. Δηλαδή με $\Pi = \text{σταθερό}$ όταν το A μειώνεται η v αυξάνεται.

Το ρηχό τμήμα ενός ποταμού σταθερού πλάτους έχει μικρότερη εγκάρσια διατομή και γρηγορότερο ρεύμα από το βαθύ τμήμα αφού η παροχή είναι ίδια και στα δύο. Επομένως, το νερό "τρέχει" γρηγορότερα εκεί που το ποτάμι είναι ρηχό και βραδύτερα (πιο σιγανά) εκεί όπου είναι βαθύ. Τα σιγανά (που είναι τα βαθύτερα) ποτάμια να φοβάσαι...

Η φλέβα του νερού που τρέχει από τη βρύση στενεύει καθώς κατεβαίνει αφού λόγω της βαρύτητας η ταχύτητα της φλέβας αυξάνεται.



Θέμα 4^ο

Ο σωλήνας του νερού στην περιοχή (2) έχει τριπλάσια διατομή από αυτή που έχει στη περιοχή (1). Από την περιοχή (1) διέρχονται 30cm^3 κάθε 1s και η πυκνότητα του νερού είναι $\rho = 1000\text{kg/m}^3$ ή $\rho = 10^{-3}\text{kg/cm}^3$.

4.1 Πόσα cm^3 νερού διέρχονται από τη περιοχή (2) κάθε 10s ;

Αφού η παροχή είναι σταθερή θα περνάνε και από την περιοχή (2) 30cm^3 κάθε 1s άρα 300cm^3 κάθε 10s .

4.2 Αν στην περιοχή (1) η ταχύτητα του νερού είναι 120cm/s πόση θα είναι η ταχύτητα στην περιοχή (2);

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2} \rightarrow v_2 = 40\text{cm/s}$$

4.3. Πόσα kg/min διέρχονται από οποιαδήποτε διατομή του σωλήνα;

$$\frac{dm}{dt} = \rho \cdot \Pi = 10^{-3}\text{kg/cm}^3 \cdot 30\text{cm}^3/\text{s} = 0,03\text{kg/s} = 1,8\text{kg/min}$$

4.4 Αν μετά την περιοχή (2) το νερό συναντήσει μια διακλάδωση και μοιραστεί σε τρεις σωλήνες ίδιου εμβαδού διατομής $A_2/3$ πόση θα είναι η ταχύτητα του νερού σε κάθε ένα από τους τρεις σωλήνες;

$$\Pi_2 = 3\Pi_3 \rightarrow A_2 v_2 = 3 \cdot \frac{A_2}{3} \cdot v_3 \rightarrow v_3 = v_2 = 40\text{cm/s}$$

Θέμα 5°

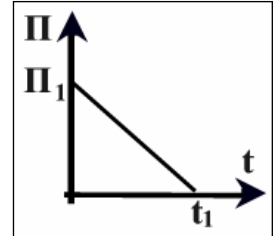
Μια δεξαμενή έχει κοντά στον πάτο της δυο βρύσες. Η παροχή της κάθε βρύσης μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο σύμφωνα με το διάγραμμα (Π-t). Αν ανοίξω την μία βρύση η δεξαμενή αδειάζει σε $t_1=30\text{min}$. Αν ανοίξω την άλλη αδειάζει σε $t_2=60\text{min}$. Σε πόσο χρόνο θα αδειάσει αν ανοίξω και τις δύο μαζί;

Στο διάγραμμα (Π-t) το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα των χρόνων ισοδυναμεί με τον όγκο, V του νερού της δεξαμενής.

Για την 1^η βρύση ισχύει: $V=\frac{1}{2}\Pi_1 t_1 \rightarrow \Pi_1=2V/t_1$ (1)

Για την 2^η βρύση ισχύει: $V=\frac{1}{2}\Pi_2 t_2 \rightarrow \Pi_2=2V/t_2$ (2)

Για τις δύο βρύσες μαζί: $V=\frac{1}{2}\Pi t \rightarrow \Pi=2V/t$ (3)



Προφανώς: $\Pi=\Pi_1+\Pi_2 \rightarrow \frac{2V}{t}=\frac{2V}{t_1}+\frac{2V}{t_2} \rightarrow \frac{1}{t}=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2} \rightarrow t=\frac{t_1 \cdot t_2}{t_1+t_2} \rightarrow t=20\text{min}$

Θέμα 6°

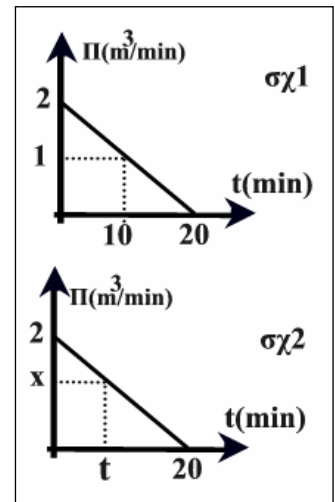
Μια δεξαμενή χωράει 20 m^3 νερό και αδειάζει σε 20 min από βρύση κοντά στον πάτο της. Η παροχή της βρύσης μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο σύμφωνα με το διάγραμμα του σχήματος 1. Δίνεται $\sqrt{2}=1,4$.

6.1 Πόσο νερό θα απομείνει σε 10 min ;

Αφού η παροχή μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο είναι ευνόητο και φαίνεται και από τη γραφική παράσταση ότι σε 10min η παροχή θα έχει πέσει στη μισή δηλαδή θα είναι $\Pi=1\text{m}^3/\text{min}$.

Στα 10min ο όγκος του νερού που θα έχει αδειάσει ισούται αριθμητικά με το εμβαδόν του τραπεζίου: $V_1=\frac{2+1}{2} \cdot 10\text{ m}^3=15\text{m}^3$.

Συνεπώς θα έχουν απομείνει μόνο 5m^3 .



6.2 Σε πόσα min θα έχει αδειάσει ο μισός όγκος του νερού;

Ζητάμε τώρα τον άγνωστο χρόνο t ώστε το αντίστοιχο εμβαδόν του τραπεζίου να είναι 10m^3 . Τη χρονική στιγμή t η παροχή θα έχει μια άγνωστη όμως τιμή $\Pi=x$. Το εμβαδόν θα είναι:

$$E=\frac{2+x}{2}t=10\text{m}^3 \quad (1).$$

Τώρα χρειαζόμαστε μια σχέση της παροχής x με το χρόνο t. Από τα όμοια τρίγωνα που σχηματίζονται στο σχήμα (2) και το λόγο ομοιότητας έχουμε:

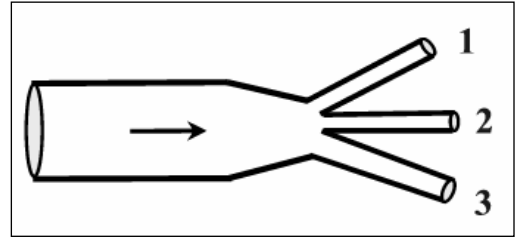
$$\frac{20-t}{t}=\frac{x}{2-x} \rightarrow (20-t)(2-x)=x \cdot t \rightarrow 40-20x-2t+tx=xt \rightarrow 20x=40-2t \rightarrow x=2-0,1t \quad (2)$$

Από (1)(2) $\rightarrow \frac{4-0,1t}{2}t=10 \rightarrow 0,1t^2-4t+20=0 \rightarrow$ από τη λύση της β/βαθμίου εξίσωσης προκύπτουν

δύο τιμές η μια $t_1=6\text{min}$ και η άλλη $t_2=34\text{min}$ που και απορρίπτεται. Άρα τα 10m^3 θα έχουν αδειάσει σε 6min .

Θέμα 7^ο

Στο σχήμα βλέπουμε την κάτοψη ενός τμήματος οριζόντιου συστήματος ύδρευσης που καταλήγει σε τρεις διαφορετικούς σωλήνες, από τους οποίους το νερό εκρέει με την ίδια ταχύτητα $v=4\text{m/s}$. Το νερό θεωρείται ιδανικό ρευστό και η ροή μόνιμη και στρωτή, σε όλο το μήκος της σωληνώσεως. Ο σωλήνας (1) έχει διατομή $A_1=2\text{cm}^2$. Από τον σωλήνα (2) εξέρχονται 20L νερού σε 100s, ενώ η παροχή του σωλήνα (3), είναι ίση με το άθροισμα των παροχών των δύο άλλων σωλήνων.



7.1 Να βρεθούν οι παροχές των τριών σωλήνων.

$$\text{Η παροχή (2): } \Pi_2 = \frac{20\text{L}}{100\text{s}} = \frac{20 \cdot 10^{-3} \text{m}^3}{10^2 \text{s}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{m}^3/\text{s}$$

$$\text{Η παροχή (1): } \Pi_1 = A_1 \cdot v = 8 \cdot 10^{-4} \text{m}^3/\text{s}$$

$$\text{Η παροχή (3): } \Pi_3 = \Pi_1 + \Pi_2 \rightarrow \Pi_3 = 10^{-3} \text{m}^3/\text{s}$$

7.2 Να βρεθούν τα εμβαδά διατομής των δύο άλλων σωλήνων.

$$\text{Από την παροχή } \Pi_2 \text{ έχουμε: } \Pi_2 = A_2 v \rightarrow A_2 = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{m}^2 = 0,5 \text{cm}^2$$

$$\text{Από την παροχή } \Pi_3 \text{ έχουμε: } \Pi_3 = A_3 \cdot v \rightarrow A_3 = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{m}^2 = 2,5 \text{cm}^2$$

Θέμα 8^ο

Μια βρύση έχει εσωτερική διάμετρο $d_1=1\text{cm}$ και το νερό βγαίνει από αυτή με ταχύτητα v_1 . Σε απόσταση $h=1,8\text{m}$ κάτω από το στόμιο της βρύσης η διάμετρος της στήλης του νερού είναι $d_2=0,4\sqrt{5}\text{cm}$. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

8.1 Πόσο είναι η ταχύτητα v_1 και η παροχή της βρύσης;

$$\text{Εξίσωση της συνέχειας: } A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow \frac{\pi d_1^2}{4} v_1 = \frac{\pi d_2^2}{4} v_2 \rightarrow v_2 = 5v_1/4 \quad (1)$$

$$\text{ΑΔΜΕ για μια μάζα νερού } \Delta m: \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 + \Delta m g h = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 \rightarrow v_2^2 = v_1^2 + 2gh$$

Με την προϋπόθεση βέβαια ότι ασκείται παντού ίδια ατμοσφαιρική πίεση.

$$\text{Από (1)(2)} \rightarrow v_1 = \frac{4}{3} \sqrt{2gh} \rightarrow v_1 = 8\text{m/s}$$

$$\text{Η παροχή είναι } \Pi = A_1 v_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} v_1 \rightarrow \Pi = 2\pi \cdot 10^{-4} \text{m}^3/\text{s}.$$

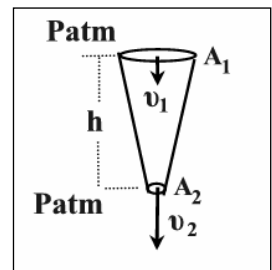
8.2 Πόσο είναι ο όγκος του νερού που περιέχεται σε μήκος στήλης 1,8m κάτω από τη βρύση.

Το νερό πέφτει με την επιτάχυνση της βαρύτητας, συνεπώς μια στοιχειώδης μάζα νερού χρειάζεται χρόνο t για να διανύσει την απόσταση h .

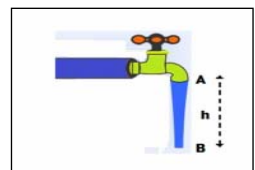
$$v_2 = v_1 + g\Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{v_2 - v_1}{g} \rightarrow \Delta t = 0,2\text{s}$$

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} \rightarrow \Delta V = \Pi \cdot \Delta t \rightarrow \Delta V = 12,56 \cdot 10^{-5} \text{m}^3 \rightarrow \Pi = 0,1256 \text{L}$$

• Με το νόμο της συνέχειας και τις γνώσεις της μηχανικής της Α λυκείου δουλεύεις μια χαρά.



(2)



Θέμα 9^ο

9.1 Τι μας λέει η εξίσωση Bernoulli;

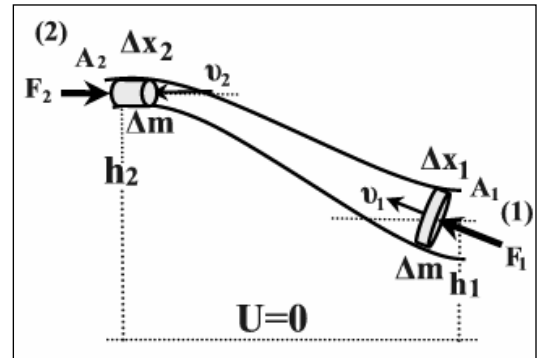
Κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής το άθροισμα της πίεσης (p), της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου ($\frac{1}{2}\rho v^2$) και της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου (ρgy) διατηρείται σταθερό.

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gy = \text{σταθερό}$$

$$\text{ή} \quad p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2$$

(p) η στατική πίεση, ($\frac{1}{2}\rho v^2$) η δυναμική πίεση και (ρgh) η υψομετρική πίεση.

Η εξίσωση του Bernoulli συσχετίζει την πίεση, την ταχύτητα ροής και το ύψος κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής. Είναι συνέπεια της **αρχής διατήρησης της ενέργειας** (ΑΔΕ).



9.2 Πως από τη διατήρηση της ενέργειας φτάνουμε στην εξίσωση του Bernoulli.

Θα γράψουμε μια βολική μορφή της ΑΔΕ, το περίφημο ΘΜΚΕ για μια στοιχειώδη μάζα ιδανικού ρευστού, Δm , όγκου ΔV (όπου $\Delta m = \rho \cdot \Delta V$). Η Δm μετακινείται μέσα στον σωλήνα χωρίς τριβές, από τη θέση (1) στη θέση (2) που βρίσκεται ψηλότερα κατά $\Delta h = h_2 - h_1$. Η Δm δέχεται τη συνισταμένη δύναμη $F = F_1 - F_2$ που οφείλεται στη διαφορά πίεσης $p_1 - p_2$ και την ωθεί προς τα πάνω και τη δύναμη του βάρους, $\Delta m \cdot g$. Το συνολικό έργο ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας: $W_F + W_{mg} = \Delta K$.

Το έργο της δύναμης που οφείλεται στη διαφορά πίεσης μεταξύ των (1) και (2):

$$W_F = F_1 \Delta x_1 - F_2 \Delta x_2 = p_1 A_1 \Delta x_1 - p_2 A_2 \Delta x_2 = (p_1 - p_2) \Delta V \quad (1)$$

$$\text{Το έργο του βάρους: } W_{mg} = U_{(1)} - U_{(2)} = \Delta m g h_1 - \Delta m g h_2 = \rho g \Delta V (h_1 - h_2) \quad (2)$$

Τα έργα αυτά μεταβάλλουν την κινητική ενέργεια της μάζας Δm , κατά

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2) \quad (3)$$

Από το ΘΜΚΕ και τις (1)(2)(3):

$$W_F + W_{mg} = \Delta K \rightarrow (p_1 - p_2) \Delta V + \rho g \Delta V (h_1 - h_2) = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2)$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 \quad (4)$$

• Αν ο σωλήνας είναι **οριζόντιος** η εξίσωση γράφεται: $p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$

Τότε μόνο, όπου οι ρευματικές γραμμές πυκνώνουν και η ταχύτητα αυξάνεται, η πίεση μειώνεται. Όταν υπάρχει υψομετρική διαφορά τα πράγματα είναι πιο σύνθετα.

•• Η μαθηματική έκφραση του νόμου του Bernoulli: **$p + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{σταθερό}$** μας λέει ότι: το έργο ανά μονάδα όγκου που δίνει μια διαφορά πίεσης σε μια μάζα ιδανικού ρευστού ισούται με τη μεταβολή της μηχανικής ενέργειας της μάζας αυτής.

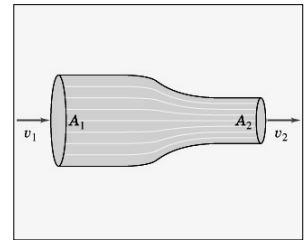
9.3 Η χρήση της εξίσωσης Bernoulli προϋποθέτει

- α. Η ροή πρέπει να είναι στρωτή.
- β. Το ρευστό να είναι ασυμπίεστο. Ισχύει για υγρά αλλά και για αέρια αν οι διαφορές πιέσεων δεν είναι πολύ μεγάλες.
- γ. Να μην υπάρχουν τριβές μεταξύ των μορίων του ρευστού ή μεταξύ των μορίων του ρευστού και των τοιχωμάτων του σωλήνα, δηλαδή να είναι ιδανικό.
- δ. Οι κάθετες αποστάσεις να μετρώνται πάντα σε σχέση με το μέσον της διατομής της φλέβας.
- ε. Να αναφέρεται σε σημεία που ανήκουν στην ίδια ρευματική γραμμή.

Θέμα 10°

Στο σχήμα φαίνεται ένας οριζόντιος σωλήνας μεταβλητής διατομής στον οποίο ρέει ιδανικό ρευστό. Μπορούμε να παρατηρήσουμε τα εξής, με προσοχή στο «οριζόντιο»:

- α. Η ταχύτητα αυξάνεται εκεί που η διατομή μειώνεται, διότι η παροχή $\Pi = A \cdot v$ είναι σταθερή.
- β. Η πίεση μειώνεται εκεί που η ταχύτητα αυξάνεται διότι πρέπει το άθροισμα $p + \frac{1}{2}\rho v^2$ να είναι σταθερό.
- γ. Η πίεση μειώνεται εκεί που η διατομή μειώνεται, αφού εκεί αυξάνεται η ταχύτητα.
- δ. Το έργο λόγω διαφορά πίεσης $(p_1 - p_2)$ μετατρέπεται σε μεταβολή της κινητικής ενέργειας για να ισχύει η διατήρηση της ενέργειας
- ε. Από τη θέση (1) στη θέση (2) η μηχανική ενέργεια μιας μάζας νερού, αυξάνεται αφού η δυναμική ενέργεια μένει σταθερή και η κινητική αυξάνεται.

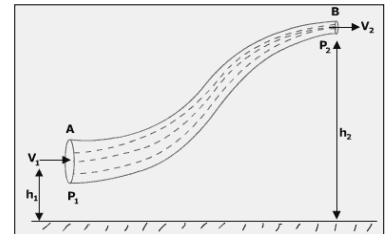


Θέμα 11°

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε μια φλέβα ενός ιδανικού υγρού. Η φλέβα ανεβαίνει από το σημείο A στο B ενώ ο σωλήνας στενεύει.

11.1 Ας δούμε τι ισχύει από δυναμική και κινηματική σκοπιά.

- α. Η πυκνότητα του υγρού είναι ίδια στις περιοχές A και B, αφού τα υγρά είναι πρακτικώς ασυμπίεστα.
- β. Τα kg/s που περνούν από τη διατομή A είναι ίδια με αυτά που περνούν από τη B σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ύλης.
- γ. Η παροχή στην περιοχή A είναι ίση με την παροχή στην περιοχή B ως συμπέρασμα του (β).
- δ. Η ποσότητα $\rho A v$ εκφράζει το χρονικό ρυθμό της διέλευσης μάζας του ρευστού από μια επιφάνεια A.



$$\text{Διότι: } \Delta m / \Delta t = \rho \Delta V / \Delta t = \rho \Pi = \rho A v$$

- ε. Η ταχύτητα ροής στην περιοχή B είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα στην περιοχή A αφού η παροχή είναι $\Pi = A \cdot v$, η $\Pi = \text{σταθ}$ και η διατομή A μειώνεται.
- στ. Η πίεση στην περιοχή B είναι μικρότερη της πίεσης στην περιοχή A. Διότι σύμφωνα με τον Bernoulli ισχύει

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{σταθ.}$$

Το ύψος h αυξάνεται, η ταχύτητα v αυξάνεται κάτι πρέπει να μειώνεται για να μένει το άθροισμα σταθερό, και το μόνο που απομένει είναι η πίεση p.

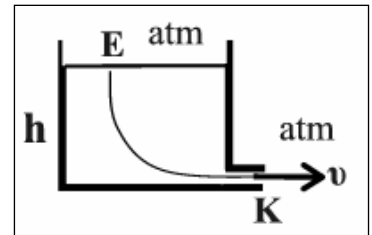
11.2 Ας δούμε τι ισχύει από ενεργειακή σκοπιά.

- α. Το έργο λόγω διαφοράς πίεσης μεταξύ των περιοχών A και B είναι $W=(p_1-p_2)\Delta V$.
- β. Γι αυτό λέμε ότι η διαφορά πίεσης $(p_1-p_2)=W/\Delta V$ εκφράζει το έργο ανά μονάδα όγκου που προσφέρει στη μάζα του υγρού η διαφορά πίεσης, με άλλα λόγια, το έργο ανά μονάδα όγκου της συνισταμένης δύναμης που ασκεί το περιβάλλον υγρό.
- γ. Το έργο λόγω διαφοράς πίεσης μεταξύ των περιοχών A και B μετατρέπεται σε αύξηση της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας της μάζας του υγρού, προφανώς για να διατηρείται η ενέργεια.
- δ. Η μηχανική ενέργεια της μάζας του υγρού δεν διατηρείται. Διότι ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις μη συντηρητικές από το περιβάλλον υγρό. Εξ άλλου τόσο η δυναμική όσο και η κινητική ενέργεια της μάζας του υγρού αυξάνονται.
- ε. Αν για παράδειγμα η διαφορά πίεσης μεταξύ των περιοχών A και B προσφέρει σε μια στοιχειώδη μάζα του υγρού 200J ενώ η δυναμική της ενέργεια αυξάνεται κατά 150J, αυτό σημαίνει ότι πρέπει και η κινητική ενέργεια να αυξάνεται κατά 50J/s ώστε να ισχύει η Αρχή διατήρησης της ενέργειας. Άρα η ταχύτητα αυξάνεται, άρα η περιοχή B είναι στενότερη της A.

Θέμα 12°

12.1 Τι μας προσφέρει το θεώρημα του Torricelli που δεν μας το προσφέρει η διατήρηση της ενέργειας;

Ο Torricelli δίνει την ταχύτητα εκροής υγρού από τρύπα που βρίσκεται σε βάθος h κάτω από την επιφάνεια του ρευστού. Με δεδομένα ότι (α) το υγρό στην επιφάνεια του δοχείου είναι σχεδόν ακίνητο ($v_E=0$), αφού το εμβαδόν διατομής του δοχείου είναι πολύ μεγαλύτερο της οπής στο K και (β) ότι η επιφάνεια, E όσο και το σημείο εκροής, K βρίσκονται υπό την ίδια ατμοσφαιρική πίεση, $p_E=p_K=p_{atm}$. Πάντοτε για ένα ιδανικό ρευστό με στρωτή ροή, χωρίς τριβές.



Αν γράψουμε την ΑΔΜΕ για μια μάζα νερού Δm : $U=K \rightarrow \Delta mgh = \frac{1}{2}\Delta mv^2 \rightarrow v=\sqrt{2gh}$

Αν γράψουμε το νόμο του Bernoulli κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής από το E έως το K με στάθμη δυναμικής ενέργειας, $U_K=0$ και $p_K=p_E=p_{atm}$ τότε έχουμε:

$$p_E + \rho gh = p_K + \frac{\rho v^2}{2} \rightarrow v=\sqrt{2gh}$$

- Η ταχύτητα αυτή είναι ίση με την ταχύτητα που θα είχε το υγρό αν έπεφτε ελεύθερα από το ίδιο ύψος h .

12.2 Πόση θα ήταν η ταχύτητα εκροής αν τα E και K δεν είχαν την ίδια πίεση;

Αν στο σημείο E η πίεση είναι μεγαλύτερη της ατμοσφαιρικής που έχει το K κατά $\Delta p=p_E-p_K$, τότε η ΑΔΜΕ δεν ισχύει λόγω του εξωτερικού έργου που κάνει η δύναμη της διαφοράς πίεσης. Τότε ο Bernoulli σώζει και η ταχύτητα εκροής γίνεται:

$$p_E + \rho gh = p_K + \frac{\rho v^2}{2} \rightarrow v=\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho} + 2gh}$$

12.3 Πότε η εκροή θα σταματήσει, δηλαδή $v=0$;

Θα χρησιμοποιήσω τον προηγούμενο τελικό τύπο με $v=0$:

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho} + 2gh} = 0 \rightarrow \frac{2\Delta p}{\rho} + 2gh = 0 \rightarrow \Delta p = -\rho gh \rightarrow p_E - p_K = -\rho gh \rightarrow p_K - p_E = \rho gh$$

Δηλαδή στην επιφάνεια του υγρού, στο E, να υπάρχει υποπίεση σε σχέση με την έξοδο. Λογικό.

12.4 Πόση θα είναι η ταχύτητα εκροής v_2 αν η διατομή του δοχείου A_1 σε σχέση με τη διατομή της τρύπας, A_2 ήταν $A_2/A_1 = \lambda < 1$, με $p_E = p_K$.

Τότε στην επιφάνεια του δοχείου η ταχύτητα δεν είναι μηδέν απλά είναι μικρότερη της v_2 και ισχύει ο νόμος της συνέχειας :

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow v_1 = \lambda v_2 \quad (1)$$

Από το νόμο του Bernoulli έχουμε:

$$p_E + \rho gh + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_K + \frac{\rho v_2^2}{2} \quad (2)$$

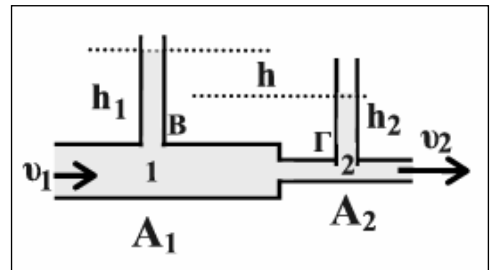
Από (1) και (2) υπολογίζουμε την ταχύτητα εκροής στο K:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1-\lambda^2}}$$

Θέμα 13°

Η μείωση της πίεσης συνοδεύεται με αύξηση της ταχύτητας. Ventouri (1791). Τι κάνει το ροόμετρο Ventouri ή επί το ελληνικότερον «βεντρουρίμετρο»; Και κυρίως πως το κάνει;

Είναι διάταξη με την οποία μετράμε την ταχύτητα ροής σε ένα σωλήνα μεταβλητής διατομής. Με τη βοήθεια δύο μανόμετρων B και Γ που μετρούν τη διαφορά της πίεσης στη ροή των δύο σωλήνων. Αν είναι γνωστά τα εμβαδά διατομής A_1 και A_2 και η υψομετρική διαφορά $h_1 - h_2 = h$ μεταξύ των δύο σταθμών των σωλήνων B και Γ τότε με τη βοήθεια της εξίσωσης Bernoulli και της εξίσωσης της συνέχειας μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα ροής σε κάποιο σημείο. Από τις εξισώσεις:



Bernoulli μεταξύ των σημείων (1) και (2) :

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (1)$$

Τα μανόμετρα γράφουν :

$$p_1 = p_{atm} + \rho gh_1 \quad p_2 = p_{atm} + \rho gh_2 \quad \text{άρα } p_1 - p_2 = \rho gh \quad (2)$$

Ο νόμος συνέχειας:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (3)$$

Από (1) με (2)(3) έχουμε:

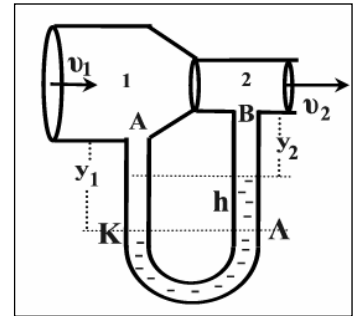
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \rightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) \rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2ghA_2^2}{A_1^2 - A_2^2}}$$

• Αν $A_1 = 2A_2$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ και $h = 5,6 \text{ cm}$ τότε $v_1 = 0,6 \text{ m/s}$

Θέμα 14^ο

Σε οριζόντιο βεντουρίμετρο ρέει αέριο πυκνότητας ρ_1 . Για τις διατομές του ροομέτρου ισχύει $A_1=2A_2$. Στα σημεία A και B έχει προσαρμοστεί μανόμετρο υγρού με πυκνότητα $\rho_2=14,5\rho_1$. Η υψομετρική διαφορά της στάθμης του υγρού στο μανόμετρο είναι $h=0,4\text{m}$ και το $g=10\text{m/s}^2$. Ένας τρόπος να μετρήσουμε την ταχύτητα ροής v_2 του αέρα στην έξοδο του μανομέτρου



Από το νόμο της συνέχειας $A_1v_1=A_2v_2 \rightarrow v_2=2v_1$ (1)

Από το νόμο Bernoulli κατά μήκος μιας οριζόντιας αέριας ρευματικής γραμμής:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho_1 v_2^2 \rightarrow p_1 - p_2 = \frac{3}{2} \rho_1 v_1^2 \quad (2)$$

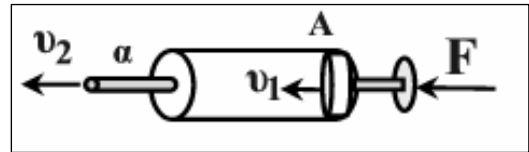
Από την ισορροπία του υγρού του μανομέτρου και με δεδομένο ότι $p_A=p_1$ και $p_B=p_2$:

$$p_K=p_A \rightarrow p_A + \rho_1 g y_1 = p_B + \rho_1 g y_2 + \rho_2 g h \rightarrow p_1 - p_2 = \rho_1 g (y_2 - y_1) + \rho_2 g h \rightarrow p_1 - p_2 = \rho_2 g h - \rho_1 g h \rightarrow p_1 - p_2 = g h (\rho_2 - \rho_1) \rightarrow p_1 - p_2 = 13,5 \rho_1 g h \quad (3)$$

$$\text{Από (2)(3)} \rightarrow \frac{3}{2} \rho_1 v_1^2 = 13,5 \rho_1 g h \rightarrow v_1 = 3\sqrt{gh} \rightarrow v_2 = 6\sqrt{gh} \rightarrow v_2 = 12\text{m/s}$$

Θέμα 15^ο

Στη σύριγγα που φαίνεται στο σχήμα το εμβαδόν της μεγάλης διατομής του σωλήνα είναι $A=2 \cdot 10^{-4}\text{m}^2$ και της μικρής a έτσι ώστε $A/a=10$. Η σύριγγα περιέχει υγρό πυκνότητας $\rho=10^3\text{kg/m}^3$. Δύναμη $F=9,9\text{N}$ πιέζει το αβαρές έμβολο και αποκαθίσταται μια σταθερή ροή στην έξοδο του μικρού σωλήνα με ταχύτητα v_2 . Η εξωτερική πίεση τόσο αριστερά από το σημείο εκροής όσο και δεξιά από το έμβολο είναι ατμοσφαιρική, $p_{\text{ατμ}}=10^5\text{N/m}^2$.



15.1 Θα υπολογίσουμε την ταχύτητα εκροής v_2 του υγρού.

$$\text{Από νόμο συνέχειας: } A \cdot v_1 = a v_2 \rightarrow v_2 = 10 v_1 \rightarrow v_1 = v_2 / 10 \quad (1)$$

Μέσα στο σύριγγα και πίσω από το έμβολο επικρατεί πίεση p που σχετίζεται με τη δύναμη F και την ατμόσφαιρα. Επειδή το έμβολο κινείται με σταθερή ταχύτητα:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F + F_{\text{atm}} - F_{\text{υγρ}} = 0 \rightarrow F = pA - p_{\text{atm}}A \rightarrow F = (p - p_{\text{atm}}) \cdot A \rightarrow p - p_{\text{atm}} = \frac{F}{A} \quad (2)$$

$$\text{Γράφω Bernoulli: } p + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_{\text{ατμ}} + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \rightarrow (p - p_{\text{ατμ}}) = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) \rightarrow \frac{F}{A} = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - \frac{v_2^2}{100}) \rightarrow \dots$$

$$F = 99 \cdot 10^{-3} v_2^2 \rightarrow v_2 = 10\text{m/s}$$

15.2 Θα υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκεί το υγρό στο έμβολο κατά τη διάρκεια της σταθερής εκροής.

$$\Sigma F=0 \rightarrow F + F_{\text{atm}} - F_{\text{υγρ}} = 0 \rightarrow F_{\text{υγρ}} = F + p_{\text{atm}} \cdot A \rightarrow F_{\text{υγρ}} = 29,9\text{N}$$

15.3 Θα υπολογίσουμε το έργο της δύναμης F για εκροή μάζας υγρού $\Delta m=10\text{mg}$ υπό τη σταθερή ταχύτητα v_2 :

Η εξωτερική δύναμη επιταχύνει τη μάζα Δm από την ταχύτητα v_1 που έχει στον κύλινδρο της σύριγγας στην v_2 που έχει όταν βγαίνει από την βελόνα. Μπορούμε να βρούμε το έργο με ΘΜΚΕ.

$$W_F = \Delta K = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 \rightarrow W_F = \frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2) \rightarrow \mathbf{W_F = 49,5 \cdot 10^{-5} J}$$

Στο μέτρο που η δύναμη αυτή είναι σταθερή μπορούμε να βρούμε το έργο και αλλιώς αν λάβουμε υπόψη ότι η μάζα Δm αντιστοιχεί σε μετατόπιση Δx : $\Delta m = \rho \cdot \Delta V = \rho A \Delta x \rightarrow \Delta x = \frac{\Delta m}{\rho \cdot A}$

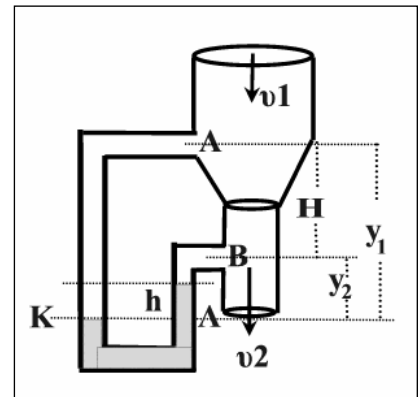
$$\text{Άρα } W_F = F \cdot \Delta x = F \cdot \frac{\Delta V}{A} = F \cdot \frac{\Delta m}{\rho \cdot A} \rightarrow W_F = 49,5 \cdot 10^{-5} J$$

15.4 Θα υπολογίσουμε και το χρονικό διάστημα που απαιτείται για την εκροή μάζας $\Delta m = 10 mg$ υπό τη σταθερή ταχύτητα, v_2 .

$$\Delta m = \rho \cdot \Delta V \rightarrow \Delta m = \rho A \cdot \Delta x \rightarrow \Delta m = \rho A v_1 \Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta m}{\rho A v_1} = \frac{10 \cdot 10^{-6} kg}{10^3 kg/m^3 \cdot 2 \cdot 10^{-4} m^2 \cdot 1 m/s} \rightarrow \mathbf{\Delta t = 5 \cdot 10^{-5} s}$$

Θέμα 16^ο

Σε κατακόρυφο ροόμετρο Ventouri το αέριο πυκνότητας ρ_1 ρέει στρωτά. Στα σημεία A και B είναι προσαρμοσμένο μανόμετρο που περιέχει υγρό πυκνότητας $\rho_2 = 5\rho_1$. Η υψομετρική διαφορά της στάθμης του υγρού στους δύο σωλήνες του ροομέτρου είναι h . Ζητάμε την μεταβολή της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου του αερίου καθώς κινείται από το A στο B.



Η κινητική ενέργεια του αερίου ανά μονάδα όγκου είναι $\frac{1}{2} \rho_1 v^2$. Συνεπώς η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου από το A στο B που οι ταχύτητες είναι v_1 και v_2 αντιστοίχως, θα είναι: $\frac{\Delta K}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho_1 v_2^2 - \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2$.

Γράφω την εξίσωση Bernoulli για μια ρευματική γραμμή από το A στο B με στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας στο οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το K

$$p_A + \rho_1 g y_1 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 = p_B + \rho_1 g y_2 + \frac{1}{2} \rho_1 v_2^2 \rightarrow \frac{1}{2} \rho_1 v_2^2 - \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 = p_A - p_B + \rho_1 g (y_1 - y_2) \rightarrow$$

$$\frac{\Delta K}{\Delta V} = p_A - p_B + \rho_1 g H \quad (1)$$

Λόγω ισορροπίας μέσα στο σωλήνα, στο οριζόντιο επίπεδο KΛ οι πιέσεις είναι ίσες:

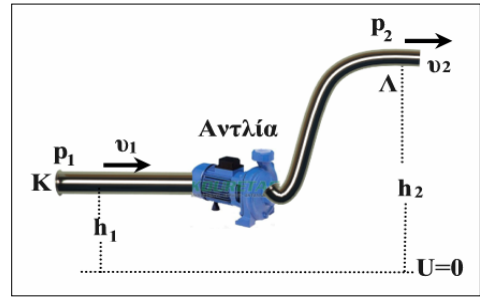
$$p_K = p_A \rightarrow p_A + \rho_1 g y_1 = p_B + \rho_1 g (y_2 - h) + \rho_2 g h \rightarrow p_A - p_B = \rho_2 g h - \rho_1 g h + \rho_1 g y_2 - \rho_1 g y_1 \rightarrow p_A - p_B = (\rho_2 - \rho_1) g h - \rho_1 g (y_1 - y_2) \rightarrow$$

$$p_A - p_B = (\rho_2 - \rho_1) g h - \rho_1 g H \quad (2)$$

$$\text{Από (1) και (2)} \rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta V} = (\rho_2 - \rho_1) g h - \rho_1 g H + \rho_1 g H \rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta V} = (\rho_2 - \rho_1) g h \rightarrow \mathbf{\frac{\Delta K}{\Delta V} = 4 \rho_1 g h}$$

Θέμα 17°

Η αντλία και η ισχύς της. Στο σχήμα βλέπουμε το τμήμα ΚΛ ενός σωλήνα ροής στον οποίο παρεμβάλλεται μια αντλία. Το ιδανικό ρευστό πυκνότητας ρ πριν την αντλία ρέει σε ύψος h_1 πάνω από το οριζόντιο επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας βαρύτητας, με ταχύτητα v_1 και έχει πίεση p_1 . Η αντλία το βοηθάει να ανέβει στο σημείο Λ σε αντίστοιχο ύψος h_2 , με ταχύτητα v_2 και πίεση p_2 . Αν η παροχή Π είναι σταθερή μπορούμε να υπολογίσουμε την ωφέλιμη ισχύ $P_{αντ}$ της αντλίας.



Ακολουθώ ακριβώς τη λογική της απόδειξης της εξίσωσης Bernoulli: Πάνω σε μια στοιχειώδη ποσότητα νερού μάζας Δm και όγκου ΔV που κάνει αυτήν τη διαδρομή ΚΛ παράγονται τα εξής έργα:

Το έργο της συνισταμένης δύναμης F που οφείλεται στη διαφορά πίεσης μεταξύ των Κ και Λ:

$$W_F = F_1 \Delta x_1 - F_2 \Delta x_2 = p_1 A_1 \Delta x_1 - p_2 A_2 \Delta x_2 = (p_1 - p_2) \Delta V \quad (1)$$

Το έργο του βάρους: $W_{mg} = U_K - U_\Lambda = \Delta m g h_1 - \Delta m g h_2 = \rho g \Delta V (h_1 - h_2)$ (2)

και το ζητούμενο έργο της αντλίας $W_{αντ}$. (3)

Τα έργα αυτά μεταβάλλουν την κινητική ενέργεια της μάζας Δm κατά ΔK

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2) \quad (4)$$

Από το ΘΜΚΕ και τις (1)(2)(3)(4): $W_{\Delta p} + W_{mg} + W_{αντ} = \Delta K \rightarrow$

$$(p_1 - p_2) \Delta V + \rho g \Delta V (h_1 - h_2) + W_{αντ} = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2)$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 + \frac{W_{αντ}}{\Delta V} = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 \quad (5)$$

Η σχέση (5) είναι μια μεταλλαγμένη έκφραση της εξίσωσης Bernoulli αφού στο πρώτο μέλος παρεμβάλλεται και το έργο της αντλίας ανά μονάδα όγκου $\frac{W_{αντ}}{\Delta V}$.

Επειδή ωφέλιμη ισχύς της αντλίας είναι:

$$P_{αντ} = \frac{W_{αντ}}{\Delta t} \rightarrow W_{αντ} = P_{αντ} \Delta t \rightarrow \frac{W_{αντ}}{\Delta V} = \frac{P_{αντ} \Delta t}{\Delta V} \rightarrow \frac{W_{αντ}}{\Delta V} = \frac{P_{αντ}}{\Pi} \quad (6)$$

όπου Π η παροχή $\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t}$

Από (5)(6) $\rightarrow$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 + \frac{P_{αντ}}{\Pi} = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 \quad (7)$$

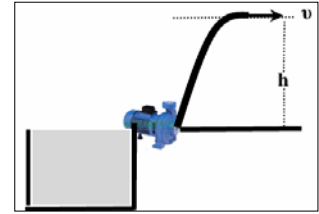
ή

$$P_{αντ} = \Pi (p_2 - p_1) + \Pi \left(\frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 \right) + \Pi (\rho g h_2 - \rho g h_1) \quad (8)$$

Όπου τα στοιχεία με δείκτη (1) αφορούν την είσοδο του υγρού στην αντλία και τα (2) την έξοδο. Την εξίσωση (7) ή (8) θα τη λέμε «εξίσωση ισχύος αντλίας». Ωφέλιμη είναι η ισχύς που αντιστοιχεί σε αποτέλεσμα για το οποίο δουλεύει η μηχανή αυτή δηλαδή να δίνει ενέργεια στο ρευστό. Προφανώς η αντλία δουλεύει με τριβές και έχει θερμικές απώλειες ενέργειας που δεν ανήκουν στην ωφέλιμη.

Θέμα 18°

Για να μεταφέρουμε μια ποσότητα νερού, από μια ανοικτή δεξαμενή χρησιμοποιούμε μια αντλία που τραβάει νερό από την επιφάνειά της και το μεταφέρει με σωλήνα σταθερής διατομής. Το νερό έχει πυκνότητα $\rho=10^3 \text{ kg/m}^3$, η μεταφορά γίνεται με σταθερή παροχή $\Pi=10 \text{ L/s}$, και το νερό ανεβαίνει σε ύψος $h=10 \text{ m}$ και εκρέει από το σωλήνα με ταχύτητα $v=20 \text{ m/s}$ σε ατμοσφαιρική πίεση.



18.1 Θα υπολογίσουμε την ωφέλιμη ισχύ της αντλίας

Το νερό στην είσοδο της αντλίας βρίσκεται σε ύψος $h_1=0$, έχει ταχύτητα $v_1=0$, και πίεση $p_1=p_{\text{atm}}$ στην επιφάνεια της δεξαμενής. Στην τελική βρίσκεται σε ύψος $h_2=h$ με ταχύτητα $v_2=v$ και εκρέει στον αέρα υπό πίεση και πάλι $p_2=p_{\text{atm}}$. Με εφαρμογή της σχέσης (8) του θέματος 17, η ωφέλιμη ισχύς της αντλίας είναι:

$$P_{\text{avt}} = \Pi(p_2 - p_1) + \Pi\left(\frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2\right) + \Pi(\rho g h_2 - \rho g h_1) \rightarrow P_{\text{avt}} = \Pi(\rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2) \rightarrow P_{\text{avt}} = 3 \text{ kW}$$

• Πρακτικά η αντλία βοήθησε το νερό να ανέβει σε ύψος h και να αποκτήσει ταχύτητα v αλλά δεν επηρέασε την πίεσή του αφού τόσο στην επιφάνεια της δεξαμενής όσο και στην εκροή του από το σωλήνα έχει ατμοσφαιρική πίεση.

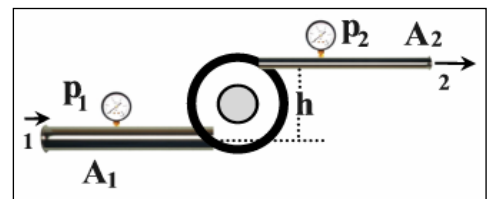
18.2 Πόσο είναι το ωφέλιμο έργο που κάνει η αντλία για να ανεβάσει υπό αυτές τις συνθήκες μάζα νερού $\Delta m = 1 \text{ tn}$ από τη δεξαμενή στο ύψος h με ταχύτητα v .

$$\text{Από την παροχή: } \Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} \rightarrow \Pi = \frac{\Delta m}{\rho \Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta m}{\rho \Pi}$$

$$P_{\text{avt}} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \rightarrow \Delta W = P_{\text{avt}} \cdot \Delta t \rightarrow \Delta W = P_{\text{avt}} \cdot \frac{\Delta m}{\rho \Pi} \rightarrow \Delta W = 3 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Θέμα 19°

Στο σχήμα βλέπουμε ένα τμήμα δικτύου ύδρευσης νερού πυκνότητας $\rho=10^3 \text{ kg/m}^3$, που με τη βοήθεια μιας αντλίας το νερό μεταβαίνει από το σημείο (1) στο σημείο (2) που βρίσκεται ψηλότερα κατά $h=0,5 \text{ m}$. Η παροχή του νερού είναι $\Pi=0,1 \text{ m}^3/\text{s}$, η διαφορά πιέσεων μετά και πριν την αντλία είναι $\Delta p = p_2 - p_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, το εμβαδόν διατομής του σωλήνα εισόδου $A_1 = 10^{-2} \text{ m}^2$ και του σωλήνα εξόδου $A_2 = \frac{1}{2} A_1$. Ζητάμε την ωφέλιμη ισχύ της αντλίας P_{avt} .



Η ταχύτητα εισόδου είναι: $v_1 = \Pi / A_1 = 10 \text{ m/s}$

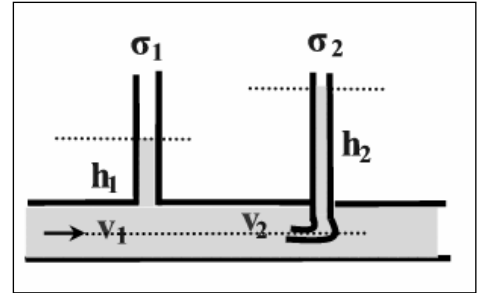
Ο νόμος της συνέχειας στηρίζεται στην αρχή διατήρησης της ύλης και η αντλία ούτε προσθέτει νερό ούτε το εξαφανίζει. Συνεπώς ισχύει και πριν και μετά την αντλία: $A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow v_2 = 20 \text{ m/s}$.

Αν γράψουμε την εξίσωση της ισχύος για δύο σημεία (1)(2) πριν και μετά την αντλία θα έχουμε

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \left[\frac{P_{\text{avt}}}{\Pi}\right] = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h \rightarrow P_{\text{avt}} = \Pi[\Delta p + \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g h] \rightarrow P_{\text{avt}} = 4 \text{ kW}$$

Θέμα 20°

Προκειμένου να μετρήσουμε την ταχύτητα ροής ιδανικού ρευστού σε ένα οριζόντιο σωλήνα, Σ , σταθερής διατομής και σταθερής παροχής συνδέουμε κάθετα σε αυτόν δύο λεπτούς σωλήνες. Ο σωλήνας σ_1 όπως φαίνεται στο σχήμα συνδέεται σε μια οπή του κεντρικού σωλήνα Σ , ενώ ο σωλήνας σ_2 που παρουσιάζει μια μικρή κάμψη στο κάτω άκρο του βυθίζεται μέσα σε αυτόν. Παρατηρούμε ότι το ρευστό ανεβαίνει σε ύψος $h_1=70\text{cm}$ στον σωλήνα σ_1 και ύψος, $h_2=150\text{cm}$ στο σωλήνα σ_2 . Στο άκρο του σ_2 δημιουργείται ένα σημείο αποκοπής στο οποίο θεωρούμε ότι η ταχύτητα του ρευστού είναι μηδέν, $v_2=0$. Με αυτές τις μετρήσεις και θεωρώντας το $g=10\text{m/s}^2$ μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του ρευστού v_1 κάτω από το σωλήνα σ_1 .



Οι δύο κατακόρυφοι σωλήνες λειτουργούν σαν βαρόμετρα μετρώντας τις πιέσεις στα σημεία (1) και (2).

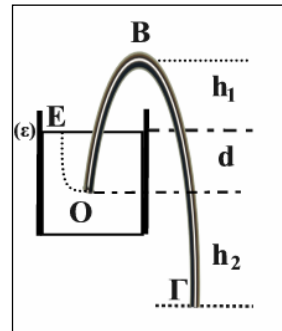
Στη θέση (1) η πίεση του ρευστού είναι $p_1 = p_{\text{ατμ}} + \rho gh_1$ και στη θέση (2) $p_2 = p_{\text{ατμ}} + \rho gh_2$

Από το νόμο Bernoulli για μια ρευματική γραμμή από τη θέση (1) στη θέση (2)

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \rightarrow \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \xrightarrow{v_2=0} v_1 = \sqrt{2g(h_2 - h_1)} \rightarrow v_1 = 4\text{m/s}$$

Θέμα 21°

Το σχήμα δείχνει ένα σωλήνα αναρρόφησης, μια απλή συσκευή για να τραβήξουμε υγρό από ένα μεγάλο δοχείο. Ο σωλήνας $OB\Gamma$ πρέπει να είναι αρχικά γεμάτος ώστε το υγρό να ρέει μέσα από αυτόν έως ότου η επιφάνεια του υγρού στο δοχείο ισοσταθμιστεί με το άκρο O του σωλήνα. Το υγρό θεωρείται ιδανικό και έχει πυκνότητα $\rho=10^3\text{kg/m}^3$. Το υγρό στην επιφάνεια θεωρείται ακίνητο και η πίεση ατμοσφαιρική $p_{\text{ατμ}}=10^5\text{Pa}$. Οι αποστάσεις που φαίνονται στο σχήμα είναι $h_1=25\text{cm}$, $d=10\text{cm}$ και $h_2=35\text{cm}$.



21.1 Για να δούμε ποιες από τις αποστάσεις καθορίζουν και την ταχύτητα της εκροής του υγρού από το άκρο Γ κάτι που μας ενδιαφέρει πρακτικά.

Γράφω το νόμο Bernoulli για μια ρευματική γραμμή από την επιφάνεια του υγρού E έως το σημείο Γ . Διαλέγω το (E) γιατί εκεί η ταχύτητα είναι $v=0$ και η πίεση ατμοσφαιρική.

$$p_{\text{ατμ}} + \rho g(d+h_2) = p_{\text{ατμ}} + \frac{1}{2}\rho v^2 \rightarrow v = \sqrt{2g(d+h_2)} \rightarrow v = 3\text{m/s}$$

Η ταχύτητα μεγαλώνει όταν μεγαλώνει και η απόσταση του σημείου εκροής από την επιφάνεια του υγρού. Δεν παίζει ρόλο πόσο μέσα στο υγρό θα μπει το άλλο άκρο.

21.2 Πόση είναι η πίεση στο υγρό στο πιο ψηλό σημείο B της διαδρομής ;

Γράφω το νόμο Bernoulli για μια ρευματική γραμμή από το σημείο B έως το σημείο Γ .

Η ταχύτητα είναι παντού ίδια $v_B = v = 3 \text{ m/s}$ αφού η διατομή του σωλήνα είναι σταθερή.

$$p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g(h_1 + d + h_2) = p_{\text{ατμ}} + \frac{1}{2}\rho v^2 \rightarrow p_B = p_{\text{ατμ}} - \rho g(h_1 + d + h_2) \rightarrow p_B = 0,930 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

21.3 Πόσο είναι το μέγιστο δυνατό ύψος h_1 στο οποίο ένας σωλήνας αναρρόφησης μπορεί να ανυψώσει το νερό ;

Γράφω το νόμο Bernoulli για μια ρευματική γραμμή από το σημείο E έως το σημείο B.

$$p_{\text{ατμ}} + 0 + 0 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_1$$

Για να είναι μέγιστο το ύψος h_1 που ανεβαίνει το υγρό πρέπει να είναι ελάχιστη η πίεση στο B δηλαδή μηδενική $p_B = 0$, και μηδενική η ελάχιστη ταχύτητα $v_B = 0$. Συνεπώς

$$h_{1\text{max}} = \frac{p_{\text{ατμ}}}{\rho g} \rightarrow h_{1\text{min}} = 10 \text{ m}$$

► 10 μέτρα είναι και το πιο μακρύ καλαμάκι που μπορεί να λειτουργεί

Θέμα 22°

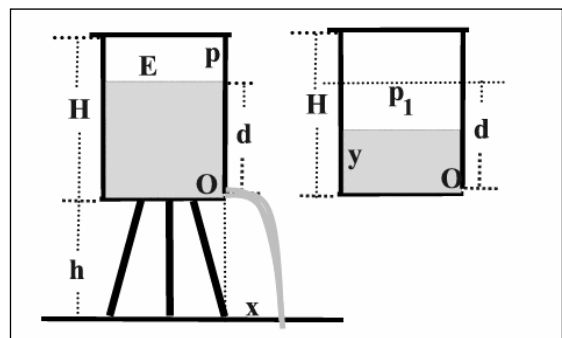
Σε ένα τρίποδο σε ύψος $h = 1,8 \text{ m}$ από το έδαφος, έχουμε στερεώσει ένα δοχείο το οποίο είναι αεροσταγώς κλεισμένο και το οποίο περιέχει νερό μέχρι ύψος $d = 0,8 \text{ m}$ και από πάνω αέρα. Το δοχείο, κυλινδρικού σχήματος, έχει εμβαδόν βάσεως $A = 0,3 \text{ m}^2$ και ύψος $H = 1 \text{ m}$. Ανοίγουμε μια μικρή τρύπα εμβαδού $A_1 = 0,2 \text{ cm}^2$, κοντά στη βάση του δοχείου, και τα χρονική στιγμή $t = 0$ το νερό πετάγεται, φτάνοντας μετά χρόνο t_1 σε οριζόντια απόσταση $x = 12 \text{ m}$, ενώ σιγά-σιγά η φλέβα εξασθενεί και μετά από λίγο, το νερό σταματά να τρέχει. Το νερό να θεωρηθεί ιδανικό ρευστό, με πυκνότητα $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$, η ατμοσφαιρική πίεση είναι ίση με $p_{\text{ατμ}} = 10^5 \text{ N/m}^2$, ενώ η θερμοκρασία στη διάρκεια του πειράματος παραμένει σταθερή. Η ταχύτητα στην επιφάνεια του νερού μέσα στο δοχείο είναι μηδενική και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$. Δίνεται ακόμα $\sqrt{104,36} = 10,2$.

22.1 Να βρεθεί η πίεση του αέρα πάνω από την επιφάνεια του νερού, τη στιγμή που αρχίζει η εκροή του νερού.

Από τα στοιχεία της βολής θα υπολογίσω την ταχύτητα εκροής του νερού από την τρύπα

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \sqrt{2h/g} \rightarrow t = 0,6 \text{ s} \text{ και}$$

$$x = v_1 t \rightarrow v_1 = x/t \rightarrow v_1 = 20 \text{ m/s.}$$



Γράφω το νόμο Bernoulli για μια ρευματική γραμμή από το E στην ακίνητη επιφάνεια του νερού της δεξαμενής μέχρι την έξοδο στο σημείο O υπό ατμοσφαιρική πίεση:

$$p + \rho g d = p_{\text{ατμ}} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \rightarrow \dots p = p_{\text{ατμ}} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \rho g d \rightarrow p = 2,92 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

22.2 Να βρεθεί το εμβαδόν διατομής, A_2 της φλέβας του νερού που εκτοξεύεται από την τρύπα, όταν αυτή φτάνει, τη χρονική στιγμή t , στο έδαφος.

Η ταχύτητα του νερού όταν φτάνει στο έδαφος είναι:

$$v_2 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \rightarrow v_2 = \sqrt{v_1^2 + g^2 t^2} \rightarrow v_2 = \sqrt{436} \text{ m/s} \approx 21 \text{ m/s}$$

Και η διατομή της φλέβας: $A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow A_2 = A_1 v_1 / v_2 \rightarrow A_2 = 0,19 \text{ cm}^2$

22.3 Να υπολογιστεί το ύψος, y , της στήλης του νερού και η πίεση του αέρα μέσα στο δοχείο, όταν σταματήσει η εκροή του νερού.

Όταν σταματήσει η εκροή τότε ο αέρας πάνω από την επιφάνεια του νερού θα έχει πιο χαμηλή πίεση p_1 και με $v_1 = 0$ στο σημείο Ο θα ισχύει $p_1 + \rho g y = p_{\text{atm}} \rightarrow p_1 = p_{\text{atm}} - \rho g y$ (1)

Αφού η θερμοκρασία του αέρα είναι σταθερή ισχύει ο νόμος του Boyle για την ποσότητα του εγκλωβισμένου αέρα. Από αρχικό όγκο $V = (H-d)A$ και πίεση p πήγε σε όγκο $V_1 = (H-y)A$ και πίεση $p_1 = p_{\text{atm}} - \rho g y$

Άρα: $pV = p_1 V_1 \rightarrow p(H-d)A = (p_{\text{atm}} - \rho g y)(H-y)A \rightarrow pH - pd = p_{\text{atm}}H - p_{\text{atm}}y - \rho g yH + \rho g y^2$
 $\rho g y^2 - (\rho g H + p_{\text{atm}})y + p(d-H) + p_{\text{atm}}H = 0$ (2)

Μετά από αντικατάσταση προκύπτει μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς y δηλαδή η $y^2 - 11y + 4,16 = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = 104,36$ και αποδεκτή ρίζα $y = 0,4 \text{ m}$

Για την πίεση του αέρα: $p_1 = p_{\text{atm}} - \rho g y \rightarrow p_1 = 0,96 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$

22.4 Και ποιος είναι ο όγκος νερού που βγήκε από την τρύπα που ανοίξαμε;

$d - y = 0,8 \text{ m} - 0,4 \text{ m} = 0,4 \text{ m}$ και άρα $\Delta V = (d-y)A \rightarrow \Delta V = 0,12 \text{ m}^3$

Θέμα 23^ο

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε ένα δοχείο και δύο μικρές πλευρικές οπές σε ύψη h_1 και h_2 από τον πυθμένα του δοχείου. Οι δύο φλέβες νερού που εκρέουν από τις οπές πέφτουν στο ίδιο σημείο. Αναζητώ τη σχέση που πρέπει να συνδέει τα h_1 , h_2 και το ύψος H του δοχείου.

Το νερό εκρέει από την οπή που είναι σε βάθος h_1 (οπή 1) με ταχύτητα: $v_1 = \sqrt{2gy_1} = \sqrt{2g(H-h_1)}$

Ο χρόνος πτώσης είναι t_1 όπου $h_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 \rightarrow t_1 = \sqrt{2h_1/g}$

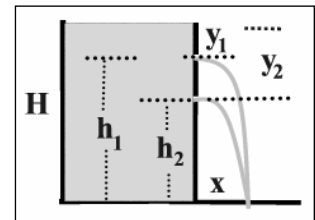
και το βεληνεκές $x_1 = v_1 t_1 \rightarrow x_1 = \sqrt{4g(H-h_1)h_1}$ (1)

Το νερό εκρέει από την οπή που είναι σε βάθος h_2 (οπή 2) με ταχύτητα:

$$v_2 = \sqrt{2gy_2} = \sqrt{2g(H-h_2)}$$

Ο χρόνος πτώσης είναι t_2 όπου $h_2 = \frac{1}{2}gt_2^2 \rightarrow t_2 = \sqrt{2h_2/g}$

και το βεληνεκές $x_1 = v_1 t_1 \rightarrow x_2 = \sqrt{4g(H-h_2)h_2}$ (2)



Επειδή $x_1 = x_2 \xrightarrow{(1)} 4g(H-h_1)h_1 = 4g(H-h_2)h_2 \rightarrow Hh_1 - h_1^2 = Hh_2 - h_2^2 \rightarrow H(h_1 - h_2) = h_1^2 - h_2^2 \rightarrow$

$$\rightarrow h_1 + h_2 = H$$

Θέμα 24^ο

Κυλινδρικό δοχείο ύψους H είναι γεμάτο με υγρό που θεωρείται ιδανικό. Αναζητώ το ύψος, h από το έδαφος που πρέπει να ανοίξουμε μια τρύπα έτσι ώστε το υγρό που εκρέει να φτάσει στην μέγιστη δυνατή απόσταση από την κατακόρυφο που περνάει από την τρύπα Δ .

Γράφω το νόμο Bernoulli για μια ρευματική γραμμή από το B έως το Δ με στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το ϵ . $p_B = p_\Delta = p_{atm}$ και $v_B = 0$.

$$p_B + \rho g H + 0 = p_\Delta + \rho g h + \frac{\rho v^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{2g(H-h)} \quad (1)$$

Μελετώ την οριζόντια βολή μια στοιχειώδους μάζας νερού από το Δ μέχρι το έδαφος

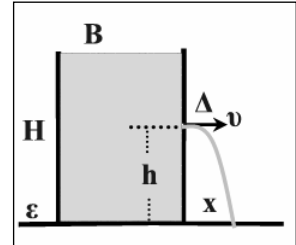
$$x = vt \quad (2) \quad \text{και} \quad h = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (3)$$

$$\text{Από (1)(2)(3)} \rightarrow x = \sqrt{2g(H-h)} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} \rightarrow x^2 = 4h(H-h) \rightarrow x^2 = 4hH - 4h^2 \rightarrow 4h^2 - 4Hh + x^2 = 0 \quad (4)$$

Για να έχει η δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς h πραγματικές ρίζες πρέπει:

$$\Delta \geq 0 \rightarrow (4H)^2 - 4 \cdot 4x^2 \rightarrow 16H^2 - 16x^2 \geq 0 \rightarrow x \leq H \rightarrow x_{\max} = H$$

$$\text{Από την (4)} \rightarrow 4h^2 - 4Hh + H^2 = 0 \rightarrow (2h - H)^2 = 0 \rightarrow h = \frac{1}{2}H$$



Θέμα 25°

Μια αντλία τραβάει νερό από την ήρεμη επιφάνεια λίμνης υπό ατμοσφαιρική πίεση. Η αντλία τροφοδοτεί με νερό ένα τεράστιο σιντριβάνι. Ο κεντρικός σωλήνας έχει εμβαδόν διατομής $A = 100 \text{ cm}^2$ και διαχωρίζεται σε κάποιο σημείο σε δύο σωλήνες με εμβαδά $A_1 = A_2 = 50 \text{ cm}^2$. Στο σημείο B του σωλήνα που βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με το έδαφος αλλά αμέσως μετά την αντλία η πίεση μετρήθηκε $p_B = 4,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ και η ταχύτητα του νερού $v = 20 \text{ m/s}$. Δίνονται $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ και $p_{atm} = 10^5 \text{ N/m}^2$.

25.1 Η ωφέλιμη ισχύς της αντλίας

Η παροχή είναι $\Pi = A \cdot v_B = 2 \text{ m}^3/\text{s}$

Η εξίσωση της αντλίας μεταξύ των σημείων A και B όπου $p_A = p_{atm}$ και $v_A = 0$

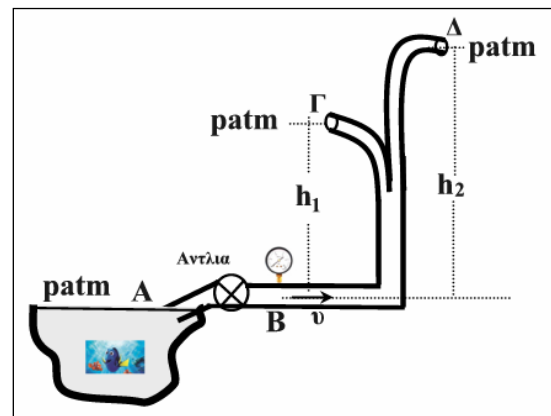
$$p_{atm} + 0 + 0 + \frac{P_{αντλ}}{\Pi} = p_B + \frac{1}{2}\rho v^2 + 0 \rightarrow$$

$$P_{αντλ} = \Pi(p_B - p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v^2) \rightarrow P_{αντλ} = 110 \text{ kW}$$

25.2 Η ταχύτητα v_1 με την οποία εκρέει το νερό υπό ατμοσφαιρική πίεση από την πρώτη διακλάδωση, στο σημείο Γ, σε ύψος $h_1 = 10 \text{ m}$.

Γράφω Bernoulli για μια ρευματική γραμμή από το B στο Γ:

$$p_B + \frac{1}{2}\rho v^2 + 0 = p_{atm} + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \rightarrow v_1 = 30 \text{ m/s}$$



25.3 Το ύψος h_2 στο οποίο εκρέει το νερό υπό ατμοσφαιρική πίεση από τη δεύτερη διακλάδωση. Στην διακλάδωση ισχύει για την παροχή:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 \rightarrow \Pi = A_1 v_1 + A_2 v_2 \rightarrow v_2 = \frac{\Pi - A_1 v_1}{A_2} \rightarrow v_2 = 10 \text{ m/s}$$

Γράφω Bernoulli για μια ρευματική γραμμή από το Β στο Δ:

$$p_B + \frac{1}{2} \rho v^2 + 0 = p_{\text{ατμ}} + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \rightarrow h_2 = 50 \text{ m}$$

25.4 Το ωφέλιμο έργο που κάνει η αντλία για να ανεβάσει 1000kg συνολικά με αυτόν τον τρόπο.

$$P_{\text{αντλ}} = \frac{W_{\text{αντλ}}}{\Delta t} \rightarrow W_{\text{αντλ}} = P_{\text{αντλ}} \Delta t \quad (1)$$

Για να ανέβει μια μάζα $\Delta m = 10^3 \text{ kg}$ με παροχή $\Pi = 0,2 \text{ m}^3/\text{s}$ απαιτείται κάποιος χρόνος που υπολογίζεται ως εξής

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \Pi \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta m}{\rho \Pi} \rightarrow \Delta t = 5 \text{ s} \quad (2)$$

Από (1)(2) $\rightarrow W_{\text{αντλ}} = 550.000 \text{ J}$

★Υπάρχει και άλλος τρόπος να βρούμε το ωφέλιμο έργο της αντλίας, φυσικά πιο περίπλοκος αλλά διδακτικός. Τι κάνει η αντλία. Παίρνει μια ακίνητη μάζα νερού $\Delta m = 1000 \text{ kg}$ υπό ατμοσφαιρική πίεση και ένα μέρος της Δm_1 το ανεβάζει σε ύψος $h_1 = 10 \text{ m}$ με ταχύτητα $v_1 = 30 \text{ m/s}$ υπό $p_{\text{ατμ}}$ και ένα μέρος Δm_2 σε ύψος $h_2 = 50 \text{ m}$ με $v_2 = 10 \text{ m/s}$ υπό $p_{\text{ατμ}}$ και πάλι. Συνεπώς το έργο της γίνεται κινητική και δυναμική ενέργεια του νερού μιας και η πίεση είναι η ίδια αρχικά και τελικά. **Επειδή το $\Delta p = 0$ μπορούμε να πούμε:**

$$W_{\text{αντ}} = U_1 + K_1 + U_2 + K_2 \rightarrow W_{\text{αντ}} = (\Delta m_1 g h_1 + \frac{1}{2} \Delta m_1 v_1^2) + (\Delta m_2 g h_2 + \frac{1}{2} \Delta m_2 v_2^2)$$

Αλλά ποιες είναι οι μάζες Δm_1 και Δm_2 αν $\Delta m = \Delta m_1 + \Delta m_2 = 10^3 \text{ kg}$ που όπως δείξαμε θέλουν 5s για να μεταφερθούν.

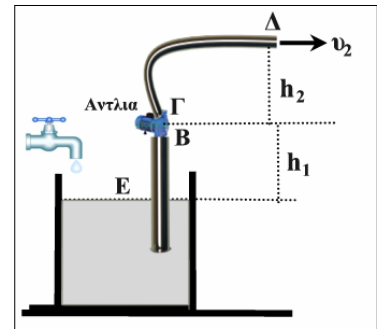
$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \rho \cdot \Pi_1 = \rho A_1 v_1 \rightarrow \Delta m_1 = \rho A_1 v_1 \cdot \Delta t = 750 \text{ kg} \quad \text{άρα } \Delta m_2 = 250 \text{ kg}$$

$$W_{\text{αντ}} = (\Delta m_1 g h_1 + \frac{1}{2} \Delta m_1 v_1^2) + (\Delta m_2 g h_2 + \frac{1}{2} \Delta m_2 v_2^2) = 750 \cdot 550 \text{ J} + 250 \cdot 550 \text{ J} = 550.000 \text{ J}$$

► Προσοχή αν υπάρχει διαφορά πίεσης μεταξύ αρχικής και τελικής κατάστασης ο τρόπος αυτός δεν πιάνει. Η αύξηση της πίεσης είναι πρόσθετη ενέργεια άρα χρειάζεται και δαπάνη έργου.

Θέμα 26°

Μία αντλία νερού, A , βρίσκεται σε ύψος $h_1=4\text{m}$ πάνω από την επιφάνεια του νερού μιας μεγάλης δεξαμενής. Τραβάει νερό από τη δεξαμενή με σωλήνα διατομής A_1 και παροχή $\Pi=2\cdot 10^{-4}\text{m}^3/\text{s}$ και καταναλώνει ωφέλιμη ισχύ $P_{\text{αντ}}=80\text{W}$. Στην έξοδο της αντλίας (σημείο Γ) υπάρχει άλλος σωλήνας διατομής A_2 με $A_1=2A_2$ ο οποίος ανεβάζει το νερό σε ύψος $h_2=16\text{m}$ πάνω από την αντλία, A και το εκτοξεύει στην ατμόσφαιρα με ταχύτητα v_2 (σημείο Δ). Στην επιφάνεια της δεξαμενής επικρατεί ατμοσφαιρική πίεση, $p_{\text{atm}}=10^5\text{N/m}^2$ το νερό είναι ακίνητο, η πυκνότητα του νερού είναι $\rho=10^3\text{kg/m}^3$ και το $g=10\text{m/s}^2$. Κρουνός παροχής νερού φροντίζει ώστε η επιφάνεια του νερού να παραμένει στο ίδιο επίπεδο.



26.1 Θα βρω την ταχύτητα v_2 με τη βοήθεια της εξίσωσης της αντλίας για μια διαδρομή από το E στο Δ .

$$p_{\text{atm}} + 0 + 0 + \frac{P_{\text{αντ}}}{\Pi} = p_{\text{atm}} + \rho g(h_1 + h_2) + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \rightarrow \dots \rightarrow v_2 = 20\text{m/s}$$

26.2 Θα βρω την πίεση P_B στο σημείο B του σωλήνα κοντά στην είσοδο του νερού στην αντλία και την πίεση P_Γ στο σημείο Γ του σωλήνα, κοντά στην έξοδο του νερού από την αντλία.

Γράφω Bernoulli για μια ρευματική γραμμή από το E έως το B . Στο B η ταχύτητα είναι v_1 και τη υπολογίζω από την εξίσωση της συνέχειας:

$$\Pi = A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow v_1 = \frac{A_2 v_2}{A_1} \rightarrow v_1 = 10\text{m/s} \quad (1)$$

$$p_{\text{atm}} + 0 + 0 = p_B + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \xrightarrow{(1)} p_B = 10^4 \text{ Pa}$$

Γράφω Bernoulli για μια ρευματική γραμμή από το Γ έως το Δ : Η ταχύτητα στο Δ είναι $v_2=20\text{m/s}$ αφού από το Γ μέχρι το Δ ο σωλήνας έχει την ίδια διατομή.

$$p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_1 = p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g(h_1 + h_2) \rightarrow p_\Gamma = p_{\text{atm}} + \rho g h_2 \rightarrow p_\Gamma = 2,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

26.3 Η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του νερού ανά μονάδα όγκου από την επιφάνεια της δεξαμενής μέχρι την έξοδο στο σημείο, Δ .

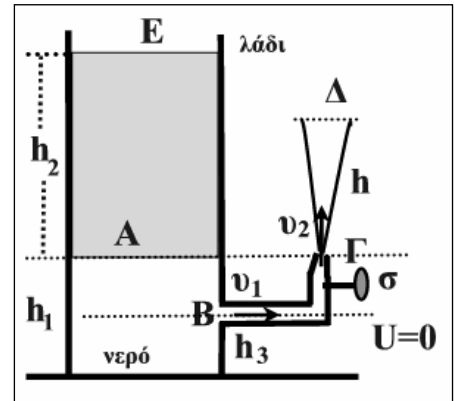
Αυτήν την μεταβολή της μηχανικής ενέργειας την προκάλεσε η αντλία, οπότε ισούται με το έργο της αντλίας

$$\frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{\Delta W_{\text{αντλ}}}{\Delta V} = \frac{P_{\text{αντλ}} \Delta t}{\Delta V} = \frac{P_{\text{αντλ}}}{\Pi} = \frac{80\text{W}}{2 \cdot 10^{-4}\text{m}^3/\text{s}} \rightarrow \frac{\Delta E}{\Delta V} = 4 \cdot 10^5 \text{ J/m}^3$$

$$\text{άλλος τρόπος: } \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{\Delta K}{\Delta V} + \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{1}{2} \frac{\Delta m}{\Delta V} v_2^2 + \frac{\Delta m}{\Delta V} g(h_1 + h_2) = 4 \cdot 10^5 \text{ J/m}^3$$

Θέμα 27^ο

Μια δεξαμενή ανοικτή στην ατμόσφαιρα περιέχει δύο στρώματα διαφορετικών υγρών. Ένα στρώμα νερού ύψους $h_1 = 2\text{ m}$ και ένα στρώμα λαδιού ύψους $h_2 = 4\text{ m}$. Η δεξαμενή φέρει, σε ύψος $h_3 = 1\text{ m}$ από το οριζόντιο έδαφος, πλευρικό οριζόντιο σωλήνα με κατακόρυφο στόμιο, η έξοδος του οποίου βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με τη διαχωριστική επιφάνεια των δύο υγρών, όπως στο σχήμα. Η στρόφιγγα, σ, είναι αρχικά κλειστή. Η διάμετρος του οριζόντιου σωλήνα είναι $d_1=0,2\text{m}$ και του άκρου του στομίου $d_2=0,1\text{m}$.



Δίνονται $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_l = 800 \text{ kg/m}^3$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, η
 διάμετρος της δεξαμενής πολύ μεγαλύτερη από αυτές των σωλήνων, τα υγρά θεωρούνται
 ιδανικά. Ανοίγουμε τη στρόφιγγα και αναζητούμε μεγέθη τη στιγμή ακριβώς που την ανοίγουμε
 ώστε οι στάθμες των υγρών να είναι αυτές που δίνονται.

27.1 Υπολογίζω την πίεση στη διαχωριστική γραμμή των δύο υγρών, σημείο A , και την αρχική ταχύτητα του νερού στο άκρο, Γ , του κατακόρυφου στομίου.

Να προσέξουμε εδώ ότι οι ταχύτητες στο E και στο A θεωρούνται μηδενικές λόγω της πολύ μεγάλης επιφάνειας σε σχέση με τους σωλήνες. Επίσης όταν γράφουμε εξίσωση Bernoulli αναφερόμαστε σε μια ρευματική γραμμή του ίδιου ρευστού, προφανώς.

Γράφω την εξίσωση Bernoulli για μια ρευματική γραμμή από το σημείο E, $p_E = p_{atm}$ που βρίσκεται στην επιφάνεια του λαδιού έως το σημείο A στη διαχωριστική επιφάνεια των υγρών

$$p_E + \rho_{\lambda} g h_2 = p_A \rightarrow p_E = 1,32 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad (1)$$

Το νερό εισέρχεται στον οριζόντιο σωλήνα με ταχύτητα v_1 και εκρέει με ταχύτητα v_2 από το άκρο του στομίου, Γ. Γράφω την εξίσωση Bernoulli για μια ρευματική γραμμή από το σημείο Α που βρίσκεται στην επιφάνεια του νερού έως το σημείο Γ, όπου $p_Γ = p_{ατμ}$.

$$p_A = p_\Gamma + \frac{1}{2} \rho_v v_2^2 \quad (2)$$

$$A\pi_0(1)(2) \rightarrow p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho_v v_2^2 = p_{\text{atm}} + \rho_\lambda g h_2 \rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2\rho_\lambda g h_2}{\rho_v}} \rightarrow v_2 = 8 \text{ m/s}$$

27.2 Υπολογίζω την αρχική ταχύτητα του νερού v_1 , και την κινητική ενέργεια αυτού ανά μονάδα όγκου στον οριζόντιο σωλήνα.

Από το νόμο της συνέχειας: $v_1 A_1 = v_2 A_2 \rightarrow v_1 \cdot \frac{\pi d_1^2}{4} = v_2 \frac{d_2^2}{4} \rightarrow v_1 = \frac{v_2}{4} \rightarrow v_1 = 2 \text{ m/s}$

Η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου είναι: $\frac{K}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho v_1^2 = 2 \cdot 10^3 \text{ J/m}^3$

27.3 Υπολογίζω το αρχικό ύψος h του πίδακα νερού.

Το νερό εκρέει από το Γ με ταχύτητα v_2 και φτάνει σε ύψος h.

Η εξίσωση Bernoulli από το Γ στο Δ με $p_{\Gamma}=p_{\Delta}=p_{atm}$: $p_{\Gamma} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_{\Delta} + \rho gh \rightarrow h = \frac{v_2^2}{2g} \rightarrow \mathbf{h=3,2m}$

(ή και από την κατακόρυφη βολή προς τα πάνω)

27.4 Τέλος υπολογίζω την πίεση στο σημείο B του οριζόντιου σωλήνα και την ολική πίεση στον πυθμένα του δοχείου.

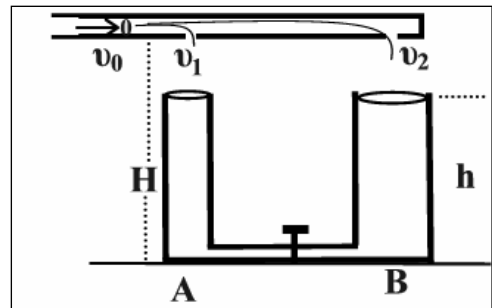
Από την εξίσωση Bernoulli για μια ρευματική γραμμή από ένα σημείο B του οριζόντιου σωλήνα μέχρι το Γ, με $U_B=0$ το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από το B.

$$p_B + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho v g h_3 \rightarrow \dots \rightarrow p_B = 1,4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Η πίεση εδώ είναι στατική: $p_{ολ} = p_{ατμ} + \rho v g h_1 + \rho_\lambda g h_2 \rightarrow p_{ολ} = 1,52 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

Θέμα 28°

Ένας μακρύς οριζόντιος σωλήνας με εμβαδόν διατομής $A=0,06\text{m}^2$ βρίσκεται σε ύψος H πάνω από οριζόντιο δάπεδο, διαρρέεται από νερό και το δεξιό του άκρο είναι κλειστό. Ο σωλήνας έχει στο τέλος του δύο οπές με εμβαδά $A_1=10\text{cm}^2$, $A_2=20\text{cm}^2$ κάτω από τις οποίες υπάρχουν δύο κυλινδρικά δοχεία με εμβαδά βάσης A_α και $A_\beta=1,5A_\alpha$ αντίστοιχα και ύψος h . Οι βάσεις των δύο δοχείων συνδέονται μεταξύ τους με λεπτό οριζόντιο σωλήνα, ο οποίος διαθέτει διακόπτη, δ , που αρχικά είναι κλειστός με στρόφιγγα, σ . Η ταχύτητα εκροής του νερού από την οπή (1) εμβαδού A_1 είναι $v_1=10\text{m/s}$. Δίνονται ακόμα η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$, η ατμοσφαιρική πίεση $P_{ατμ}=10^5\text{N/m}^2$ και η πυκνότητα του νερού $\rho=10^3\text{kg/m}^3$. Θεωρούμε ότι το νερό είναι ιδανικό ρευστό.



28.1 Θα βρω την ταχύτητα εκροής του νερού από την οπή (2) εμβαδού $A_2=20\text{cm}^2$.

Γράφοντας δύο εξισώσεις Bernoulli για δυο ρευματικές γραμμές από το σημείο (0) έως τα σημεία (1) και (2) αντίστοιχα έχω

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = p_{ατμ} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \quad (1) \quad \text{και} \quad p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = p_{ατμ} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (2)$$

Από (1)(2) $\rightarrow v_1=v_2=10\text{m/s}$

28.2 Θα βρω το μέτρο της ταχύτητας του νερού στον οριζόντιο σωλήνα καθώς και την πίεση σε ένα εσωτερικό σημείο της περιοχής (0), αυτού.

Με σταθερή παροχή στο σωλήνα γράφω την εξίσωση της συνέχειας:

$$\Pi_0 = \Pi_1 + \Pi_2 \rightarrow A v_0 = A_1 v_1 + A_2 v_2 \rightarrow v_0 = \frac{A_1 v_1 + A_2 v_2}{A} \rightarrow v_0 = 0,5\text{m/s}$$

$$(1) \rightarrow p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = p_{ατμ} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \rightarrow p_0 = p_{ατμ} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_0^2 \rightarrow p_0 = 149,875 \text{ kPa}$$

28.3 Όταν το ύψος του νερού στο πρώτο δοχείο είναι $h_A=1,2\text{m}$ διακόπτουμε την παροχή νερού και ανοίγουμε τον διακόπτη. Θα βρω σε ποιο τελικό ύψος θα φτάσει το νερό σε κάθε δοχείο.

Αν στο πρώτο δοχείο το νερό ανέβηκε σε ύψος $h_A=1,2\text{m}$ όγκος του νερού είναι $V_A=A_A h_A$.
Στον ίδιο χρόνο t ανέβηκε και στο δοχείο B σε ύψος h_B και ο αντίστοιχος όγκος είναι $V_B=A_B h_B$.
Οι όγκοι αυτοί πέρασαν από τις οπές εμβαδών A_1 και A_2 με παροχές Π_1 και Π_2 στο χρόνο t . Θα υπολογίσω πρώτα το h_B με τη βοήθεια της παροχής.

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{\Pi_1 t}{\Pi_2 t} = \frac{A_1 v_1}{A_2 v_2} \rightarrow \frac{A_A h_A}{A_B h_B} = \frac{A_1 v_1}{A_2 v_2} \rightarrow \frac{h_A}{1,5 h_B} = \frac{1}{2} \rightarrow h_B = 4h_A/3 \rightarrow h_B = 1,6\text{m}$$

Όταν ανοίξω τη στρόφιγγα οι δύο ποσότητες νερού θα ενωθούν και σύμφωνα με την αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων οι επιφάνειες στα δύο δοχεία θα βρεθούν στο ίδιο ύψος d . Όμως ο αρχικός όγκος θα παραμείνει ίδιος αφού και οι πυκνότητες είναι ίδιες.

$$V_A + V_B = V_A' + V_B' \rightarrow A_A h_A + A_B h_B = A_A d + A_B d \rightarrow d = \frac{A_A h_A + A_B h_B}{A_A + A_B} \rightarrow d = 1,44\text{m}$$

Θέμα 29°

Μια μεγάλη δεξαμενή έχει στη βάση της μια τρύπα διατομής $A=10\text{cm}^2$ που αρχικά είναι ταπωμένη. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ που το ύψος του νερού είναι $H=1,8\text{m}$ ανοίγουμε την τρύπα και ταυτόχρονα τροφοδοτούμε τη δεξαμενή με νερό από τη βρύση με σταθερή παροχή, $\Pi = 0,01\text{m}^3/\text{s}$. Δίνεται ότι $g=10\text{m/s}^2$.

29.1 Ποια είναι τη χρονική στιγμή $t_0=0$ η ταχύτητα εκροής του νερού από τη τρύπα;

Bernoulli για μια ρευματική γραμμή από το E $v_E=0$ και $p_E=p_{\text{ατμ}}$ έως την τρύπα δηλαδή το σημείο B, $p_B=p_{\text{ατμ}}$

$$p_E + \rho g H = p_B + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \rightarrow v_1 = \sqrt{2gH} \rightarrow v_1 = 6\text{m/s}$$

29.2 Σε ποιο ύψος θα σταθεροποιηθεί η στάθμη του νερού στην δεξαμενή;

Όταν η στάθμη σταθεροποιηθεί τότε η παροχή της βρύσης Π θα είναι ίση με την παροχή της τρύπας B, δηλαδή $\Pi_B = \Pi \rightarrow A v_1' = \Pi \rightarrow v_1' = \Pi/A \rightarrow v_1' = 10\text{m/s}$.

Ξαναγράφω την εξίσωση Bernoulli από το E στο B για να βρω τώρα το νέο ύψος H'

$$p_E + \rho g H' = p_B + \frac{1}{2} \rho v_1'^2 \rightarrow H = \frac{v_1'^2}{2g} \rightarrow H' = 5\text{m}$$

29.3 Αν ο πάτος της δεξαμενής μας βρίσκεται σε ύψος $h=5\text{m}$ από το έδαφος να βρεθεί το μήκος της γραμμής AG που αντιστοιχεί σε βρεγμένο έδαφος και η ταχύτητα όταν το νερό φτάνει στο έδαφος, με αρχική $v_1=10\text{m/s}$.

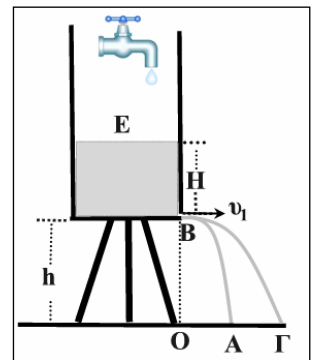
Ο χρόνος βολής μέχρι το έδαφος: $h = \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow t = \sqrt{2h/g} \rightarrow t = 1\text{s}$

με $v_1=6\text{m/s}$ το βεληνεκές είναι $OA = x_1 = v_1 t = 6\text{m}$

με $v_1'=10\text{m/s}$ το βεληνεκές είναι $OG = x_1' = v_1' t = 10\text{m}$

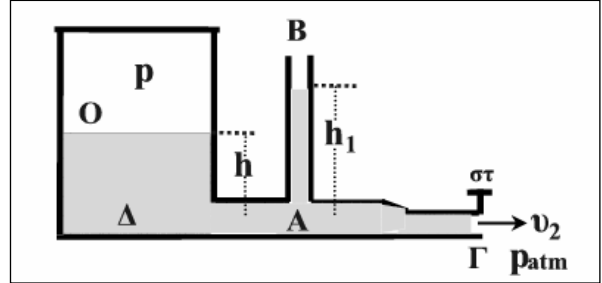
$$\text{Άρα: } \Delta x = x_1' - x_1 = 4\text{m}$$

Η ταχύτητα του νερού: $p_B + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_\Gamma + \frac{1}{2} \rho v_\Gamma^2 \rightarrow v_\Gamma = \sqrt{v_1^2 + 2gh} \rightarrow v_\Gamma = 10\sqrt{2}\text{m/s}$



Θέμα 30°

Το κλειστό δοχείο περιέχει νερό πυκνότητας $\rho=10^3 \text{ kg/m}^3$ και πάνω από την ελεύθερη επιφάνεια αυτού η πίεση του αέρα είναι $p=1,62 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. Το δοχείο καταλήγει σε πλευρικό σωλήνα του οποίου το εμβαδόν διατομής στο σημείο Α είναι $A_1=6 \text{ cm}^2$ και στην έξοδο, Γ, στενεύει και γίνεται $A_2=2 \text{ cm}^2$. Πάνω από το σημείο Α υπάρχει ανοικτός κατακόρυφος σωλήνας ΑΒ. Δίνονται, $p_{\text{atm}}=10^5 \text{ Pa}$ και $g=10 \text{ m/s}^2$.



30.1 Αν η στρόφιγγα στο σημείο Γ είναι κλειστή και το ύψος της δεξαμενής του νερού είναι $h=1 \text{ m}$ πόσο είναι το ύψος h_0 της στήλης του νερού στον σωλήνα ΑΒ.

Με τη στρόφιγγα στο Γ κλειστή το σύστημα ισορροπεί άρα οι πιέσεις στα Α και Δ είναι ίσες.
Όπου: $p_{\Delta}=p+\rho gh$ και $p_A=p_{\text{atm}}+\rho gh_0$.

$$\text{Με } p_{\Delta}=p_A \rightarrow p+\rho gh = p_{\text{atm}}+\rho gh_0 \rightarrow h_0 = \frac{p - p_{\text{atm}} + \rho gh}{\rho g} \rightarrow h_0 = 7,2 \text{ m.}$$

30.2 Ανοίγουμε τη στρόφιγγα στο σημείο Γ και το νερό αρχίζει να εκρέει υπό ατμοσφαιρική πίεση. Τη χρονική στιγμή $t=0$ που το ύψος του νερού στο δοχείο, είναι $h=1 \text{ m}$ και η πίεση του αέρα είναι $p=1,62 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ αναζητούμε (α) την ταχύτητα του νερού v_1 στο σημείο Α, (β) την πίεση του υγρού στο σημείο Α, (γ) το ύψος h_1 του νερού στο σωλήνα, ΑΒ, (δ) την παροχή του πλευρικού σωλήνα.

(α) Γράφω την εξίσωση Bernoulli για μια ρευματική γραμμή από το Ο στην επιφάνεια του νερού της δεξαμενής έως το σημείο Γ με $U_{\text{βαρ}}=0$ το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το Γ.

$$p+\rho gh = p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \rightarrow v_2 = 12 \text{ m/s}$$

$$\text{και από εξίσωση συνέχειας: } A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow v_1 = 4 \text{ m/s.}$$

(β) Γράφω την εξίσωση Bernoulli για μια ρευματική γραμμή από το Ο στην επιφάνεια του νερού της δεξαμενής έως το σημείο Α με $U_{\text{βαρ}}=0$ το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το Α.

$$p+\rho gh = p_A + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \rightarrow p_A = 1,64 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

(γ). Η πίεση στο Α ισούται με το άθροισμα της πίεσης που ασκεί η στήλη νερού h_1 και η ατμοσφαιρική:

$$p_A = p_{\text{atm}} + \rho gh_1 \rightarrow h_1 = \frac{p_A - p_{\text{atm}}}{\rho g} \rightarrow h_1 = 6,4 \text{ m.}$$

$$\text{(δ)} \quad \text{Η παροχή: } \Pi = A_1 v_1 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 4 \text{ m/s} \rightarrow \Pi = 24 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s.}$$

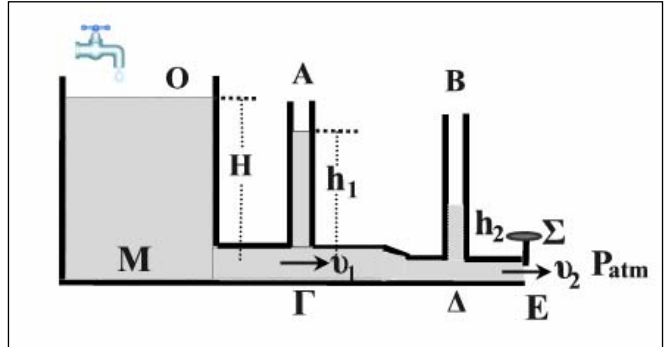
► Ας υποθέσουμε ότι μια μάζα νερού $\Delta m=1 \text{ kg}$ κάνει τη διαδρομή από το Ο στο Γ. Ξεκινάει με δυναμική ενέργεια $U=\Delta mgh=10 \text{ J}$ και βγαίνει στο Γ με κινητική ενέργεια $K=\frac{1}{2}\Delta m v_2^2=72 \text{ J}$. Που βρέθηκαν τα 62J διαφορά; Μα είναι το έργο της διαφοράς πίεσης $\Delta p=p-p_{\text{atm}}=0,62 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.

$$W=F_{\Delta p} \cdot \Delta x = \Delta p \cdot A \cdot \Delta x = \Delta p \cdot \Delta V = \Delta p \cdot (\Delta m/\rho) \rightarrow W_{\Delta p}=62 \text{ J}$$

Θέμα 31°

Ένας οριζόντιος σωλήνας συνδέεται κοντά στον πυθμένα μιας μεγάλης δεξαμενής σε βάθος $H=10m$, όπως στο διπλανό σχήμα. Αρχικά ο σωλήνας έχει διατομή A_1 , ενώ στη συνέχεια στενεύει αποκτώντας διατομή $A_2=0,4A_1$. Οι διατομές αυτές είναι πολύ μικρότερες από τη διατομή της δεξαμενής.

31.1 Αν η στρόφιγγα Σ στο άκρο του σωλήνα είναι ανοικτή και το νερό θεωρηθεί ιδανικό ρευστό, ενώ η ροή μόνιμη και στρωτή, θα υπολογίσω το ύψος h_2 της στήλης στο σωλήνα B και το ύψος h_1 της στήλης στο σωλήνα A . Με τη βοήθεια μιας βρύσης το ύψος της στήλης $H=10m$ διατηρείται σταθερό.



Από το σημείο Δ έως το σημείο εκροής E η διατομή είναι ίδια άρα και η ταχύτητα του υγρού v_2 . Γράφω την εξίσωση Bernoulli για μια οριζόντια ρευματική γραμμή από το Δ έως το E

$$P_{\Delta} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = P_E + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \rightarrow P_{\Delta} = P_E = P_{atm}$$

$$\text{Αλλά τότε } P_{\Delta} = P_{atm} + \rho g h_2 \rightarrow h_2 = 0$$

Από το νόμο της συνέχειας υπολογίζω τη σχέση ταχυτήτων του υγρού στα σημεία Γ και Δ
 $A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow v_1 = 0,4 v_2$ (1)

Γράφω την εξίσωση Bernoulli για μια οριζόντια ρευματική γραμμή από το O έως το E με $U_b=0$ το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το E .

$$P_O + \rho g H = P_E + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \rightarrow v_2 = \sqrt{2gH} \rightarrow v_2 = 10\sqrt{2} \text{ m/s} \quad (2)$$

$$\text{Από (1) και (2)} \rightarrow v_1 = 4\sqrt{2} \text{ m/s}$$

Η πίεση στο σημείο Γ , στη βάση του κατακόρυφου σωλήνα A είναι $P_{\Gamma} = P_{atm} + \rho g h_1$ (3)

Γράφω την εξίσωση Bernoulli για μια ρευματική γραμμή από το Γ στο Δ

$$P_{\Gamma} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_{\Delta} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (4)$$

$$\text{Από (3) και (4)} \rightarrow P_{atm} + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \rightarrow h_1 = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \rightarrow h_1 = 8,4 \text{ m}$$

31.2 Κλείνουμε τη στρόφιγγα Σ . Να υπολογιστούν ξανά τα ύψη h_1 και h_2 στους σωλήνες A και B αν $H=10m$.

Αν η στρόφιγγα στο E είναι κλειστή τότε το σύστημα ισορροπεί οπότε: στα σημεία M , Γ , Δ επικρατεί η ίδια πίεση:

$$P_M = P_{\Gamma} = P_{\Delta}, \quad P_M = P_{atm} + \rho g H, \quad P_{\Gamma} = P_{atm} + \rho g h_1, \quad P_{\Delta} = P_{atm} + \rho g h_2$$

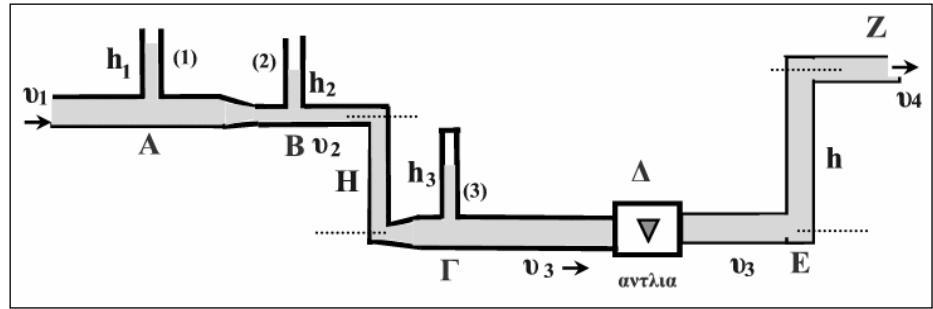
$$\text{Άρα } H = h_1 = h_2 = 10 \text{ m}$$

31.3. Αν η στρόφιγγα Σ στο άκρο του σωλήνα είναι ανοικτή και το νερό θεωρηθεί πραγματικό ρευστό, με αποτέλεσμα να εμφανίζονται εσωτερικές τριβές. Θα ανέβει ή όχι το νερό στη στήλη B ;

Αν το υγρό είναι πραγματικό και η παροχή είναι σταθερή τότε λόγω τριβής η πίεση κατά μήκος του στενού σωλήνα θα μειώνεται οπότε η $P_E < P_{\Delta} \rightarrow P_{\Delta} > P_{atm}$. Συνεπώς το νερό θα ανέβει στη στήλη B .

Θέμα 32^ο

Στο σχήμα βλέπουμε ένα τμήμα ενός δικτύου σωληνώσεων στο οποίο ρέει νερό. Ο οριζόντιος σωλήνας του σχήματος έχει στο σημείο Α διατομή $A_1=20\text{cm}^2$ και το ύψος



του νερού στο σωλήνα (1) είναι $h_1=23\text{cm}$. Σε μια περιοχή, Β, παρουσιάζει ένα στένωμα διατομής $A_2=5\text{cm}^2$, όπου η ταχύτητα του νερού είναι $v_2=0,8\text{m/s}$. Το ύψος του νερού, στο σωλήνα (2) είναι h_2 . Στη συνέχεια ο σωλήνας κάμπτεται κατεβαίνει κατακόρυφα κατά $H=0,5\text{m}$ και γίνεται πάλι οριζόντιος με διατομή $A_3=A_1$ και συνεχίζει. Η ροή να θεωρηθεί μόνιμη και στρωτή ροή ιδανικού ρευστού, ενώ η πυκνότητα του νερού είναι ίση με 1.000kg/m^3 . Δίνεται $p_{\text{ατμ}}=10^5\text{N/m}^2$.

32.1 Θα υπολογίσω την πίεση του νερού στο σημείο Α το ύψος του νερού, h_2 .

Η πίεση στο σημείο Α: $p_A = p_{\text{ατμ}} + \rho gh_1 \rightarrow p_A = 1,023 \cdot 10^5 \text{Pa}$

Η ταχύτητα v_1 : $A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow v_1 = 0,2 \text{m/s}$

Η πίεση στο σημείο Β με εξίσωση Bernoulli $A \rightarrow B$: $p_A + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \rightarrow p_B = 1,02 \cdot 10^5 \text{Pa}$

Το ύψος h_2 : $p_B = p_{\text{ατμ}} + \rho gh_2 \rightarrow h_2 = 20 \text{cm}$

32.2 Θα υπολογίσω την πίεση του νερού και την παροχή, στο σημείο Γ. Με δεδομένο ότι το ύψος της στήλης του νερού στον κλειστό σωλήνα (3) είναι $h_3=20\text{cm}$ θα βρω και την πίεση του αέρα, p , επάνω από το νερό, μέσα στο σωλήνα.

Η ταχύτητα είναι $v_3=v_1=0,2\text{m/s}$ αφού η διατομή είναι και πάλι $A_3=A_1$.

Η πίεση p_Γ με εξίσωση Bernoulli $B \rightarrow \Gamma$: $p_B + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho gH = p_\Gamma + \frac{1}{2} \rho v_3^2 \rightarrow p_\Gamma = 1,073 \cdot 10^5 \text{Pa}$

Η παροχή: $\Pi_\Gamma = A_3 \cdot v_3 \rightarrow \Pi_\Gamma = 4 \cdot 10^{-4} \text{m}^3/\text{s}$

Η πίεση p : $p_\Gamma = p + \rho gh_3 \rightarrow p = 1,053 \cdot 10^5 \text{Pa}$

32.3 Αναζητώ το έργο που παρήγαγε η υπόλοιπη μάζα νερού σε μια στοιχειώδη μάζα $\Delta m=0,2\text{kg}$ από το Α στο Β και από το Β στο Γ.

Από το Α στο Β το έργο αυτό που οφείλεται στη διαφορά πίεσης και προκαλεί απλώς μεταβολή στην κινητική ενέργεια της μάζας Δm . Γραφοντας ΘΜΚΕ για τη μάζα Δm βλέπω ότι:

$$W_{\Delta p(AB)} = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 \rightarrow W_{\Delta p(AB)} = 0,06 \text{J}$$

Από το Β στο Γ γράφω και πάλι ΘΜΚΕ, τώρα υπάρχει και ένα έργο βάρους:

$$W_{\Delta p(B\Gamma)} + \Delta m g H = \frac{1}{2} \Delta m v_3^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 \rightarrow W_{\Delta p(B\Gamma)} = -1,06 \text{J}$$

32.4 Μετά το σημείο Γ υπάρχει αντλία στο σημείο Δ του ίδιου σωλήνα που ανεβάζει το νερό σε ύψος $h=10\text{m}$ πάνω από το Δ και το εκτοξεύει στην ατμόσφαιρα με ταχύτητα v_4 χωρίς ο σωλήνας να αλλάξει πουθενά διατομή. Αναζητώ την ωφέλιμη ισχύ της αντλίας αυτής.

Ο νόμος της συνέχεις που αναφέρεται στη διατήρηση της μάζας ισχύει και για πριν και μετά την αντλία. Και αφού η διατομή του σωλήνα έμεινε ίδια δηλαδή A_3 η ταχύτητα πριν και μετά την αντλία αλλά και στο σημείο εκροής Z θα είναι ίδια με τη v_3 δηλαδή $v_4=v_3=0,2\text{m/s}$

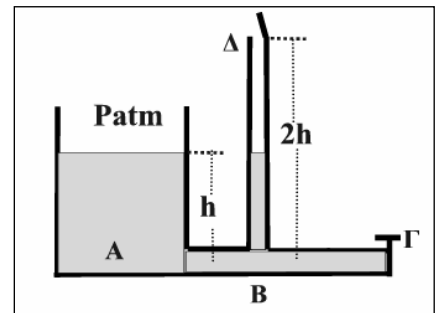
Γράφω την εξίσωση της αντλίας από το Γ μέχρι το Z.

$$p_{\Gamma} + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \frac{P_{\text{αντλ}}}{\Pi} = \rho gh + p_{\text{ατμ}} + \frac{1}{2}\rho v_4^2 \rightarrow P_{\text{αντλ}} = \Pi \cdot (\rho gh + p_{\text{ατμ}} - p_{\Gamma}) \rightarrow P_{\text{αντλ}} = 37,08\text{W}$$

► Παρατηρείστε ότι η ωφέλιμη ισχύς της αντλίας είναι μικρή παρόλο που το νερό ανεβαίνει σε ύψος 10m. Και αυτό διότι ήδη στο Γ υπάρχει υπερπίεση (πάνω από την ατμοσφαιρική) και το νερό θα βγει στο Z με ατμοσφαιρική και χωρίς να έχει επιταχυνθεί.

Θέμα 33°

Η ορθογώνια δεξαμενή περιέχει νερό πυκνότητας $\rho=10^3\text{kg/m}^3$ σε ύψος $h=3,75\text{m}$. Στο κάτω μέρος της δεξαμενής υπάρχει οριζόντιος σωλήνας σταθερής διατομής, $A_1=4\text{cm}^2$ κλειστός με στρόφιγγα στο άκρο του Γ. Στο σημείο B του πλευρικού σωλήνα υπάρχει ανοικτός κατακόρυφος σωλήνας, ΒΓ μήκους $2h$, εμβαδού διατομής A_2 , στον οποίο το νερό ανεβαίνει στο ίδιο ύψος, h , με αυτό της δεξαμενής. Δίνονται $g=10\text{m/s}^2$ και $P_{\text{ατμ}}=10^5\text{N/m}^2$.



33.1 Να εξηγήσουμε γιατί το νερό ανεβαίνει στο ίδιο ύψος στον σωλήνα.

Λόγω ισορροπίας των ρευστών στα σημεία A και B πρέπει να επικρατεί η ίδια πίεση. Άρα ισχύει, $P_A = P_B = P_{\text{ατμ}} + \rho gh$.

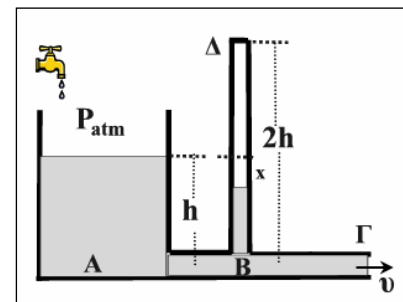
33.2 Ταπνώνουμε τον κατακόρυφο σωλήνα ΒΔ και ανοίγουμε τη στρόφιγγα στο σημείο Γ και το νερό αρχίζει να εκρέει. Με τη βοήθεια μιας βρύσης διατηρούμε σταθερή τη στάθμη της δεξαμενής στο ύψος h . Αναζητάμε την παροχή της βρύσης και την πίεση του νερού στη βάση B του κατακόρυφου σωλήνα;

Για να διατηρείται η στάθμη στο ίδιο επίπεδο πρέπει η παροχής εκροής από το σημείο, Γ να είναι ίση με την παροχή της βρύσης. Άρα $\Pi = A_1 v$.

Η ταχύτητα εκροής από το Γ υπολογίζεται από εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων (O) και (Γ):

$$P_{\text{ατμ}} + \rho gh = P_{\text{ατμ}} + \frac{1}{2}\rho v^2 \rightarrow v = \sqrt{2gh} \rightarrow v = 5\sqrt{3}\text{m/s}$$

$$\text{Άρα: } \Pi = A_1 v = 4 \cdot 10^{-4} \text{m}^2 \cdot 5\sqrt{3}\text{m/s} \rightarrow \Pi = 20\sqrt{3} \cdot 10^{-4} \text{m}^3/\text{s}$$



Γράφω την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των B και Γ. Λόγω της σταθερής διατομής η ταχύτητα στο σημείο B είναι ίση με την ταχύτητα v στο σημείο, Γ:

$$P'_B + \frac{1}{2}\rho v^2 = P_{\Gamma} + \frac{1}{2}\rho v^2 \rightarrow P'_B = P_{\Gamma} = P_{\text{ατμ}} \rightarrow P'_B = 10^5\text{Pa}.$$

33.3 Κατά πόσο θα κατέβει η στάθμη του νερού και πόση θα γίνει η πίεση του αέρα στον κατακόρυφο σωλήνα; Η θερμοκρασία του αέρα να θεωρηθεί σταθερή.

Ο αέρας που είναι εγκλωβισμένος στον κατακόρυφο σωλήνα, υφίσταται μια ισόθερμη μεταβολή, λόγω πτώσης της στάθμης του νερού κατά, x . Η πίεση του αέρα από P_{atm} γίνεται P' , και ο όγκος του από $V_0 = A_2 \cdot h$, γίνεται $V_0' = A_2(h+x)$. Από το νόμο του Boyle:

$$P_{atm} V_0 = P' \cdot V_0' \rightarrow P_{atm} \cdot A_2 \cdot h = P' A_2 (h+x) \rightarrow P' = \frac{P_{atm} h}{h+x} \quad (1)$$

Η νέα τιμή της πίεσης στο σημείο, B, πρέπει να ισούται με $P'_B = P' + \rho g(h-x)$ (2)

Από (1) και (2) :

$$P'_B = P_{atm} \rightarrow P' + \rho g(h-x) = P_{atm} \rightarrow \frac{P_{atm} h}{h+x} + \rho g(h-x) = P_{atm} \rightarrow \dots \rightarrow \rho g x^2 + P_{atm} \cdot x - \rho g h^2 = 0 \rightarrow x = 1,25m$$

$$\text{Από την (1)} \rightarrow P' = \frac{P_{atm} h}{h+x} \rightarrow P' = 0,75 \cdot 10^5 Pa$$