

**Μια «λυκειακή» ενεργειακή μελέτη
της εξαναγκασμένης ταλάντωσης, με τη βοήθεια και του graph
(και με ... κάμποσα «εκτός ύλης»!)**

Χρήση συμβόλων:

Για τις αρμονικές συναρτήσεις των μεγεθών $v(t)$, $a(t)$, $F(t)$, $F'(t)$, $U(t)$, $K(t)$, $P(t)$, $P'(t)$ θα χρησιμοποιούμε για τη μέγιστη τιμή (πλάτος) του μεγέθους το ίδιο σύμβολο με το δείκτη μηδέν. Δηλαδή:

v_0 , a_0 , F_0 , F'_0 , U_0 , K_0 , P_0 , P'_0 . (με εξαίρεση την απομάκρυνση $x(t)$, όπου $x_0 \rightarrow A$).

Εξαναγκασμένη ταλάντωση σταθεράς D , γίνεται με την επίδραση αρμονικής δύναμης διέγερσης F , πλάτους F_0 και κυκλικής συχνότητας ω , καθώς και δύναμης απόσβεσης που έχει τη μορφή $F' = -b \cdot v$.

Οι ανεξάρτητες φυσικές ποσότητες στο φαινόμενο είναι:

α) Η σταθερά D και η μάζα m , που καθορίζουν και την κυκλική ιδιοσυχνότητα, $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

β) Το πλάτος F_0 και η κυκλική συχνότητα ω της διεγείρουσας δύναμης, και

γ) Ο συντελεστής απόσβεσης b .

Ας θεωρήσουμε για απλότητα, ότι οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t) \quad , \quad v = \omega A \cdot \eta\mu(\omega t + \pi/2) \quad \text{και} \quad a = -\omega^2 \cdot x$$

Οι $F(t)$ και $x(t)$ διαφέρουν γενικά σε φάση κατά θ , άρα θα είναι:

$$F = F_0 \cdot \eta\mu(\omega t + \theta)$$

Από τον θεμελιώδη νόμο:

$$\Sigma F = m \cdot a \rightarrow F + F' + F_{\varepsilon\pi} = m \cdot a \quad (1)$$

Με αντικατάσταση:

$$F - b \cdot v - D \cdot x = -m \omega^2 \cdot x \rightarrow F = b \cdot v + m(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot x \quad (2)$$

$$\text{ή αλλιώς: } F = b \omega A \cdot \eta\mu(\omega t + \pi/2) + m(\omega_0^2 - \omega^2) A \cdot \eta\mu(\omega t) \quad (2a)$$

Από την (2) ή την (2a) φαίνεται ότι, αν η συχνότητα διέγερσης είναι $\omega = \omega_0$ τότε:

$$F = -F' = b \cdot v \rightarrow F = b \omega A \cdot \eta\mu(\omega t + \pi/2)$$

Δηλαδή τότε $\theta = \pi/2$ αλλά, γενικότερα, είναι: $0 < \theta < \pi$.

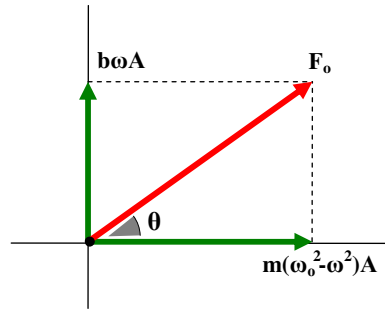
Εκτός ύλης 1:

Η διαφορά φάσης θ εξαρτάται από τις τιμές των D , m , b , ω και, με χρήση στρεφομένων στην (2α), υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Φαίνεται ότι, ανάλογα με τη σχέση των ω , ω_0 (και με $b \neq 0$), ισχύει:

$$0 < \theta < \pi$$

**Πολύ εκτός ύλης 2:**

Από το ίδιο διάγραμμα προκύπτει και η σχέση μεταξύ των πλάτων A και v_0 με το πλάτος F_0 :

$$F_0^2 = A^2 [b^2 \omega^2 + m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2]$$

και

$$F_0^2 = v_0^2 \left[b^2 + m^2 \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega} \right)^2 \right]$$

που είναι συναρτήσεις της ω .

Η τιμή της ω για την οποία μεγιστοποιείται το πλάτος v_0 είναι αυτή που ελαχιστοποιεί την αγκύλη, δηλαδή $\omega = \omega_0$ (συντονισμός) και είναι:

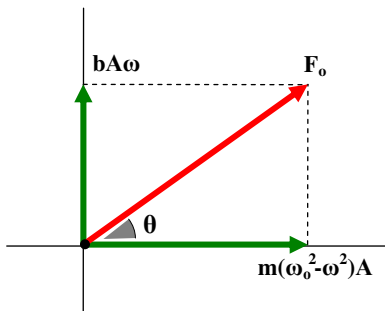
$$v_{0,\max} = \frac{F_0}{b}$$

(σε αντιστοιχία με τη σχέση $I_{0,\max} = \frac{V_0}{R}$ στα κυκλώματα RLC)

Το πλάτος A όμως, μεγιστοποιείται για κυκλική συχνότητα:

$$\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - A^2} < \omega_0 \quad \text{με} \quad A = \frac{b}{2m}$$

Αν η b είναι αρκετά μικρή ώστε να ισχύει $A^2 \ll \omega_0^2$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\omega'_0 \approx \omega_0$.



Εκτός ύλης 3 (περί συντονισμού):

Στο σχολικό αναφέρεται:

«Το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο όταν $f = f_0$. Τότε λέμε ότι έχουμε συντονισμό.»

Και πιο κάτω:

«Κατά το συντονισμό η ενέργεια μεταφέρεται στο σύστημα με τον βέλτιστο τρόπο, γι' αυτό και το πλάτος γίνεται μέγιστο.»

Πράγματι, όπως θα δούμε και πιο κάτω, όταν $f = f_0$ τότε «η ενέργεια μεταφέρεται στο σύστημα με τον βέλτιστο τρόπο», ή αλλιώς, μεγιστοποιείται η ανά περίοδο προσφερόμενη ενέργεια (και το πλάτος v_0 της ταχύτητας).

Και πράγματι, για μικρές τιμές της σταθεράς b , το πλάτος A μεγιστοποιείται πολύ κοντά στην f_0 , δηλαδή πρακτικά για $f \approx f_0$.

Διαβάζουμε όμως συχνά, ότι υπάρχουν «δύο είδη συντονισμού»:

Ο «συντονισμός πλάτους», για $\omega = \omega'_0$, και

ο «συντονισμός ταχύτητας», για $\omega = \omega_0$.

Αλλά τί σημαίνει η έκφραση «συντονισμός»;

Δεν σημαίνει κάποιο «συγχρονισμό» ανάμεσα σε δύο συμβάντα; Ανάμεσα στον διεγέρτη και στο ταλαντούμενο σύστημα; Ανάμεσα στο αίτιο και στο αποτέλεσμα; Δεν θα πρέπει τα σχετικά μεγέθη να μεταβάλλονται ταυτόχρονα, δηλαδή σε συμφωνία φάσης;

Όταν $\omega = \omega_0$, τότε πράγματι, οι $F(t)$ και $v(t)$ είναι συμφασικές και μεγιστοποιείται η απορρόφηση ενέργειας.

Όταν όμως $\omega = \omega'_0$, είναι τότε συμφασικές οι $F(t)$ και $x(t)$; Έχουμε μέγιστη απορρόφηση ενέργειας; Είναι «συντονισμός» αυτή η κατάσταση;

Πιστεύω με άλλα λόγια ότι δεν μπορούμε να μιλάμε για «δύο συντονισμούς».

Η κατάσταση συντονισμού είναι μία και εμφανίζεται όταν $\omega = \omega_0$.

Απλά για μικρές b το πλάτος A μεγιστοποιείται πρακτικά στο συντονισμό, ενώ για μεγαλύτερες b μεγιστοποιείται πριν από αυτόν.

Κινητική, Δυναμική και Ολική ενέργεια

$$K = \frac{1}{2}m \cdot v^2 \rightarrow K = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2(\omega t) \rightarrow K = K_0 \cdot \sigma\upsilon\nu^2(\omega t)$$

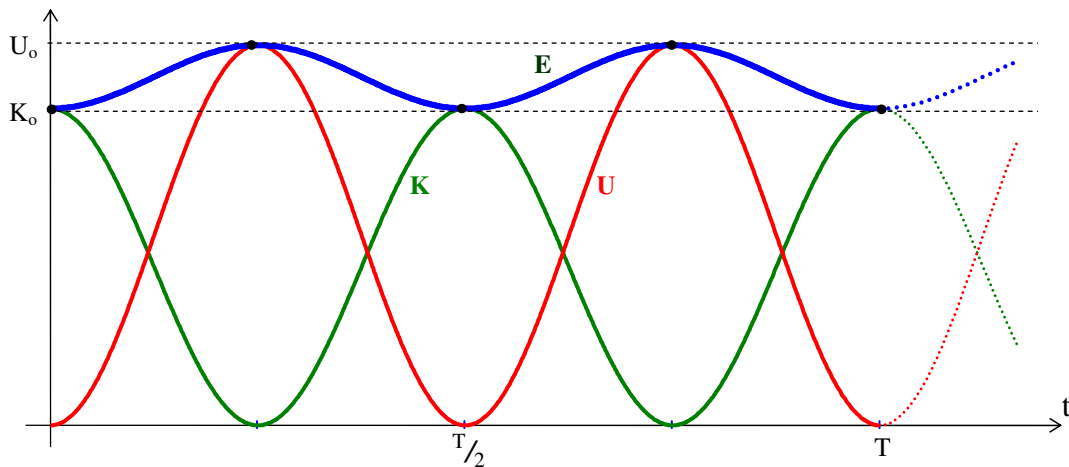
$$U = \frac{1}{2}D \cdot x^2 \rightarrow U = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \cdot \eta\mu^2(\omega t) \rightarrow U = U_0 \cdot \eta\mu^2(\omega t)$$

$$E = K + U \rightarrow E = K_0 \cdot \sigma\upsilon\nu^2(\omega t) + U_0 \cdot \eta\mu^2(\omega t)$$

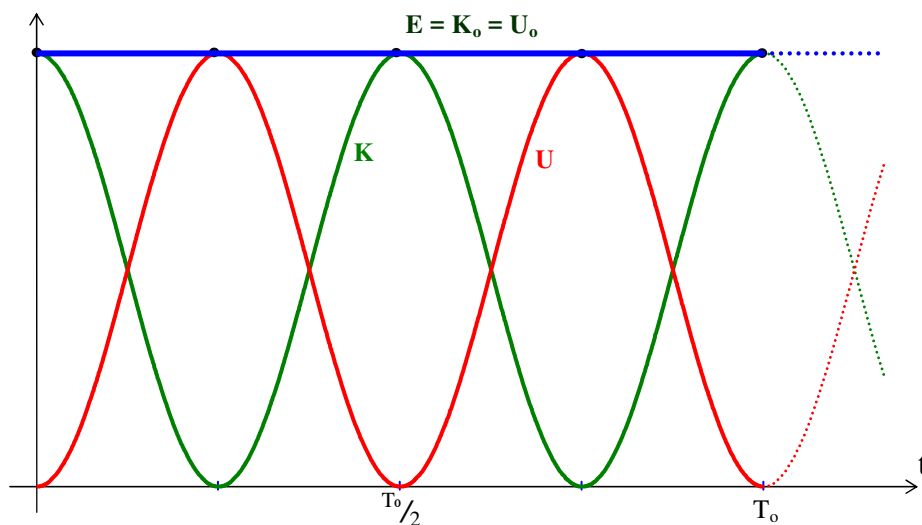
Οι $K(t)$ και $U(t)$ έχουν διαφορετικά μέγιστα, $K_0 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$ και $U_0 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2$, αφού γενικά είναι $\omega \neq \omega_0$.

Όταν η μία μηδενίζεται, η άλλη μεγιστοποιείται. Έτσι, η E δεν μένει σταθερή κατά τη διάρκεια μιας περιόδου, αλλά μεταβάλλεται περιοδικά μεταξύ των τιμών K_0 και U_0 .

Με χρήση του graph (για $\omega < \omega_0$):



Ενώ, για $\omega = \omega_0$:



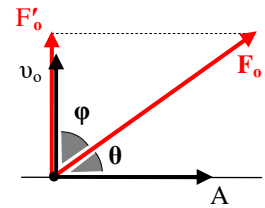
Ισχύς των δυνάμεων διέγερσης $F(t)$ και απόσβεσης $F'(t)$

Οι εξισώσεις $F = F_0 \cdot \eta\mu(\omega t + \theta)$ και $v = v_0 \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t)$ μπορούν να γραφούν ως:

$$F = F_0 \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t - \varphi) \quad \text{και} \quad v = v_0 \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t)$$

Όπου φ η διαφορά φάσης μεταξύ της δύναμης διέγερσης $F(t)$ και της ταχύτητας $v(t)$, δηλαδή:

$$\varphi = \pi/2 - \theta \quad \text{όπου} \quad \pi/2 < \varphi < \pi/2$$



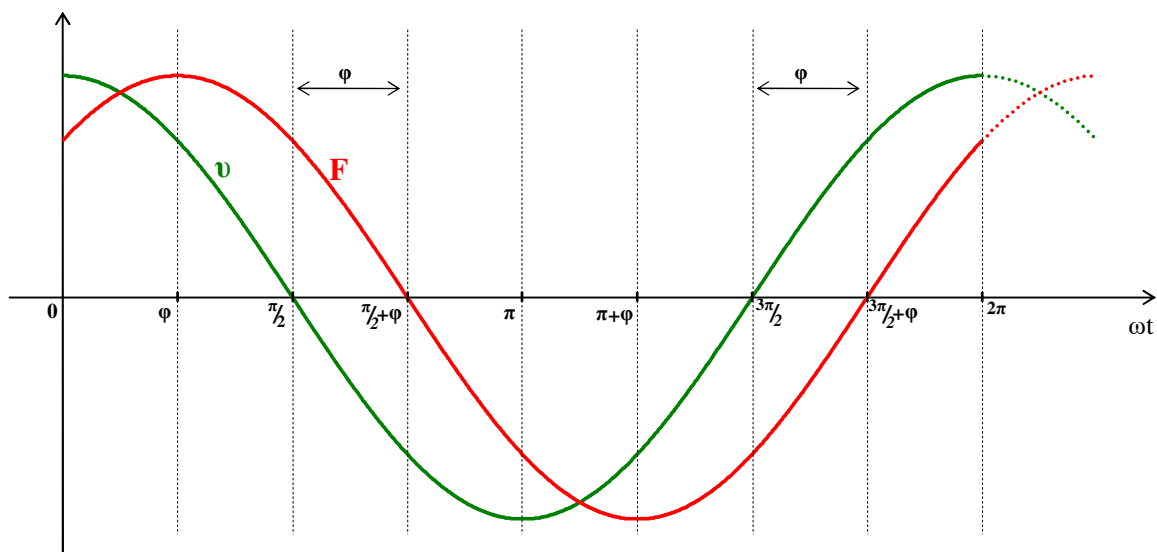
(Παρατηρήστε επίσης ότι $F'_0 = F_0 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$)

Έτσι, οι αντίστοιχες σχέσεις για την ισχύ κάθε δύναμης είναι:

$$P = F \cdot v \quad \text{ή και} \quad P = F_0 v_0 \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t - \varphi) \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t)$$

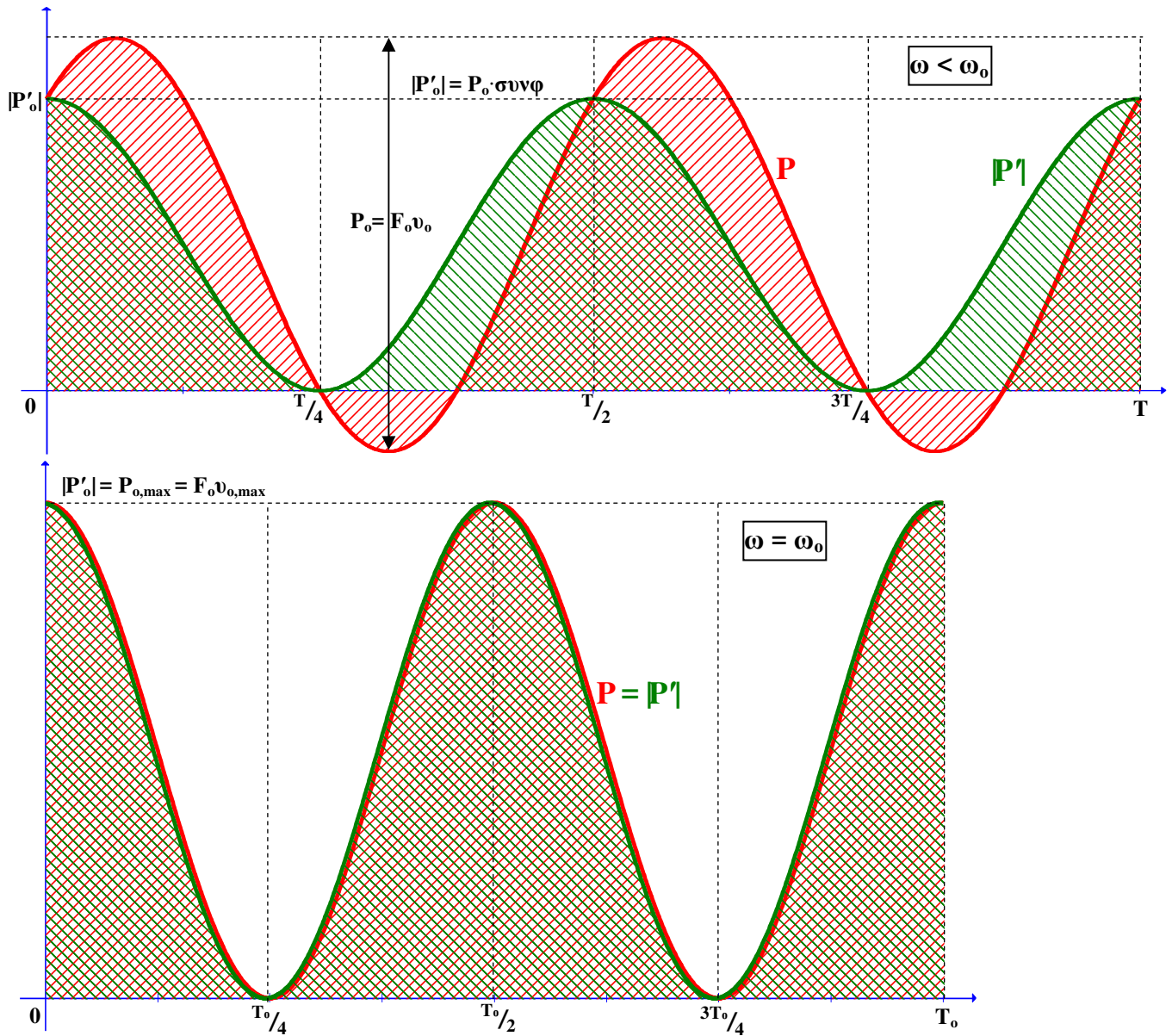
$$P' = F' \cdot v = -b \cdot v^2 \quad \text{ή και} \quad P' = -b v_0^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2(\omega t)$$

Από τα πιο κάτω διαγράμματα των $F(\omega t)$ και $v(\omega t)$ προκύπτει ότι, δύο φορές σε κάθε περίοδο και για χρονικό διάστημα Δt που αντιστοιχεί στη διαφορά φάσης τους φ ($\Delta t = \varphi/\omega$), οι F και v είναι ετερόσημες, οπότε $P = F \cdot v < 0$.



Όσο όμως η ω πλησιάζει την ω_0 , η φ μικραίνει. Κατά το **συντονισμό** ($\omega = \omega_0$) γίνεται $\varphi = 0$ και η ισχύς P έχει τότε μόνο θετικές τιμές. Έτσι, «βελτιστοποιείται η μεταφορά ενέργειας» από τον διεγέρτη προς το ταλαντούμενο σώμα.

Στα επόμενα διαγράμματα, βλέπουμε τις $P(t)$ και $|P'(t)|$, σχεδιασμένες με το graph, για δύο περιπτώσεις: $\omega < \omega_0$ και $\omega = \omega_0$.



Τα γραμμοσκιασμένα εμβαδά απεικονίζουν την προσφερόμενη ανά περίοδο ενέργεια (κόκκινο) και την εκλυόμενη θερμότητα (πράσινο).

Και στις δύο περιπτώσεις ισχύει $W_{\text{προσφ.}} = W_{\text{θερμ.}}$ (όπως φαίνεται και από μια προσεκτική σύγκριση των εμβαδών ☺)

Στη 2^η περίπτωση, η $W_{\text{προσφ.}}$ μεγιστοποιείται, αφού η $P(t)$ έχει μόνο θετικές τιμές και μέγιστο πλάτος $P_{0,max} = F_0 v_{0,max}$.

Εκτός ύλης 4 (υπολογισμοί):

Χρησιμοποιώντας τον τριγ. μετασχηματισμό:

$$2\sigma\eta\alpha\sigma\eta\beta = \sigma\eta\eta(\alpha - \beta) + \sigma\eta\eta(\alpha + \beta)$$

έχουμε:

$$P = F_o \cdot v_o \cdot \sigma\eta\eta(\omega t - \varphi) \cdot \sigma\eta\eta(\omega t) = \frac{1}{2} \cdot F_o \cdot v_o \cdot \sigma\eta\eta\varphi + \frac{1}{2} \cdot F_o \cdot v_o \cdot \sigma\eta\eta(2\omega t - \varphi)$$

Η, αν θέσουμε $P_o = F_o v_o$, τότε:

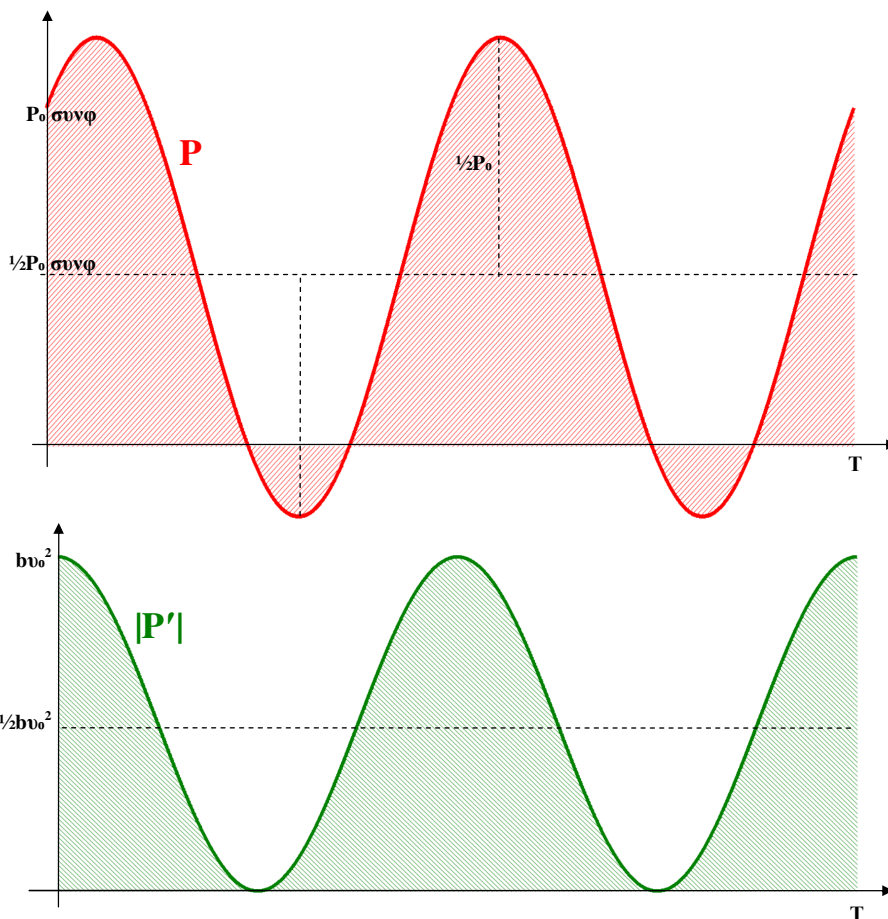
$$P = \frac{P_o \cdot \sigma\eta\eta\varphi}{2} + \frac{P_o}{2} \cdot \sigma\eta\eta(2\omega t - \varphi)$$

Επίσης:

$$|P'| = b \cdot v_o^2 \cdot \sigma\eta\eta^2(\omega t)$$

$$(\mu\epsilon \quad b \cdot v_o^2 = (b \cdot v_o) \cdot v_o = F'_o \cdot v_o = F_o \cdot \sigma\eta\eta\varphi \cdot v_o = P_o \cdot \sigma\eta\eta\varphi)$$

Τα αντίστοιχα διαγράμματα είναι:



Τετραγωνίζοντας το πράσινο εμβαδό, βρίσκουμε:

$$W_{\theta\epsilon\rho\mu.} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_o^2 \cdot T = \pi \cdot b \cdot v_o^2 / \omega$$

ή αλλιώς:

$$W_{\theta\epsilon\rho\mu.} = \pi \cdot b \cdot A^2 \cdot \omega$$