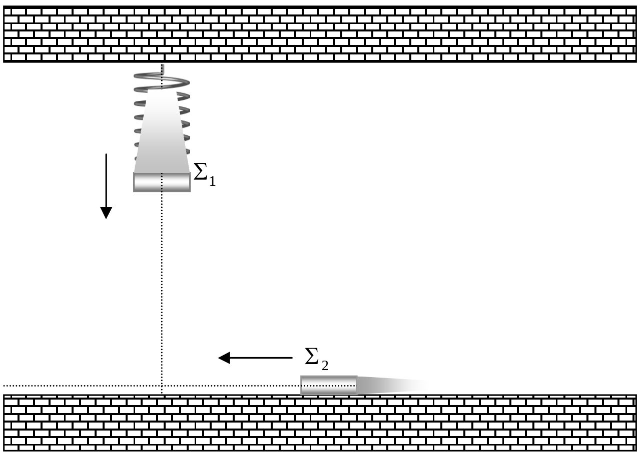
1.1. Μηχανικές Ταλαντώσεις. Ομάδα Γ.

1.1.21. ΑΑΤ και συνάντηση κινητών

Σημειακό σώμα Σ_1 μάζας $m = 1kg$ ισορροπεί δεμένο στο ελεύθερο άκρο ιδανικού ελατήριου σταθεράς $K = 100N/m$ το άλλο άκρο του οποίο είναι ακλόνητα στερεωμένο σε οροφή. Το σώμα Σ_1 απέχει από το έδαφος $d = 0,2m$. Σημειακό σώμα Σ_2 μάζας $m = 1kg$ ισορροπεί στο οριζόντιο δάπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = \pi/5$. Κάποια χρονική στιγμή εκτοξεύουμε τα σώματα Σ_1 και Σ_2 κατακόρυφα προς τα κάτω και οριζόντια προς τα αριστερά αντίστοιχα. Τα σώματα συναντώνται με μηδενική ταχύτητα και προσκολλώνται ακαριαία. Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10m/s^2$. Για τις πράξεις θεωρείστε $\pi^2 = 10$.



Να υπολογίσετε

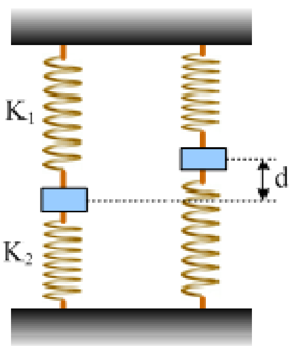
i) Την ταχύτητα εκτόξευσης του σώματος Σ_1

ii) Την ταχύτητα εκτόξευσης του σώματος Σ_2

iii) Την εξίσωση ταλάντωσης του συσσωματώματος θεωρώντας τη θετική φορά κατακόρυφα προς τα κάτω και αρχή του χρόνου τη στιγμή της συγκόλλησης

iv) Ποια θα ήταν η περίοδος της κίνησης του σώματος Σ_1 αν το εκτοξεύαμε από τη θέση ισορροπίας του με ταχύτητα $u_0 = 4m/s$. Θεωρείστε την κρούση με το δάπεδο ελαστική

1.1.22. Δυο ελατήρια και ενέργεια ταλάντωσης



Ένα σώμα μάζας 4kg ηρεμεί δεμένο στα άκρα δύο κατακόρυφων ελατηρίων με σταθερές K_1=100N/m και K_2=200N/m, όπως στο διπλανό σχήμα, όπου το κάτω ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Εκτρέπουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα πάνω κατά d=0,5m και το αφήνουμε να κινηθεί.

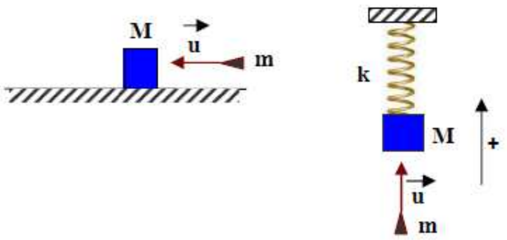
Να αποδείξετε ότι η κίνηση του σώματος είναι απλή αρμονική ταλάντωση.

i) Πόση ενέργεια προσφέραμε στο σώμα για την παραπάνω εκτροπή;

ii) Μόλις μηδενισθεί για πρώτη φορά η ταχύτητα του σώματος, το πάνω ελατήριο λύνεται με αποτέλεσμα το σώμα να ταλαντώνεται στο άκρο μόνο του κάτω ελατηρίου. Να υπολογιστεί η ενέργεια της νέας ταλάντωσης του σώματος.

1.1.23. Δυο κρούσεις και μια ταλάντωση

Ένα σώμα μάζας Μ, ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Ένα βλήμα μάζας m, κινείται οριζόντια και συγκρούεται κεντρικά πλαστικά με το σώμα. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ συσσωματώματος και οριζόντιου επίπεδου είναι μ = 0,1 και το συνολικό διάστημα που διανύει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση είναι S = 1,5m.



Η ίδια κρούση, πραγματοποιείται με το σώμα μάζας Μ, δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου , με το βλήμα να κινείται κατακόρυφα προς τα επάνω, κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου.

Το πάνω άκρο του ελατηρίου, είναι ακλόνητα στερεωμένο.

Μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης χρόνου $x = Αημ(5t+π/6)$ SI, θετική φορά προς τα επάνω και D = k.

Αν το κλάσμα της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου όταν το συσσωμάτωμα ηρεμεί στιγμιαία στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του, προς την ολική ενέργεια της ταλάντωσης, ισούται με 4 να υπολογίσετε:

Την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

i) Την μέγιστη ταχύτητα του συσσωματώματος, κατά την διάρκεια της ταλάντωσης.

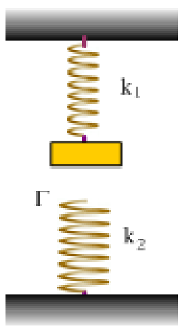
ii) Την τιμή του λόγου m/M.

iii) Την χρονική στιγμή που ξαναπερνά για πρώτη φορά το συσσωμάτωμα που ταλαντώνεται, από το σημείο που έγινε η κρούση.

iv) Το κλάσμα της ενέργειας του βλήματος, τη στιγμή της σύγκρουσης , που μετατράπηκε σε ενέργεια του ταλαντωτή.

Η χρονική διάρκεια των κρούσεων να θεωρηθεί αμελητέα.

1.1.24. Ένα σώμα δύο ταλαντώσεις.



Ένα σώμα, μάζας 2kg, ηρεμεί στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k_1=200N/m, όπως στο σχήμα, απέχοντας κατά 10cm, από ένα δεύτερο κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k_2=200N/m που στηρίζεται στο έδαφος.

Μετακινούμε το σώμα κατακόρυφα προς τα πάνω, μέχρι να συσπειρωθεί το ελατήριο κατά d=0,2m και σε μια στιγμή, το αφήνουμε να ταλαντωθεί.

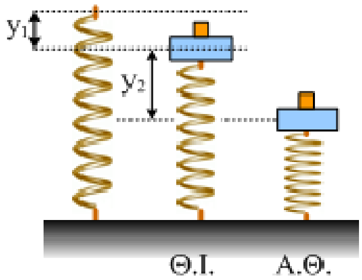
Με ποια ταχύτητα φτάνει το σώμα στη θέση Γ;

i) Μόλις το σώμα φτάσει στο Γ, το πάνω ελατήριο λύνεται, οπότε το σώμα ταλαντώνεται στο πάνω άκρο του ελατηρίου σταθεράς k_2. Να υπολογιστεί το πλάτος ταλάντωσης.

ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της δύναμης που δέχεται το σώμα από το πάνω ελατήριο, σε συνάρτηση με την απομάκρυνση, θεωρώντας θετική, την προς τα κάτω φορά.

Θεωρείστε ότι και στις δύο περιπτώσεις το σώμα εκτελεί α.α.τ. με σταθερά επαναφοράς, ίση με την εκάστοτε σταθερά του ελατηρίου και $g=10m/s^2$.

1.1.25. Πότε το σώμα χάνει την επαφή;



Το ένα άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου είναι στερεωμένο σε οριζόντιο επίπεδο. Στο άλλο άκρο του συνδέεται σταθερά σώμα Α μάζας M=3kg. Πάνω στο σώμα Α είναι τοποθετημένο σώμα Β μάζας m=1kg και το σύστημα ισορροπεί με το ελατήριο συσπειρωμένο από το φυσικό του μήκος κατά $y_1=0,4m$. Στη συνέχεια εκτρέπουμε το σύστημα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά $y_2=0,8m$ από τη θέση ισορροπίας του και το αφήνουμε ελεύθερο τη χρονική στιγμή t=0.

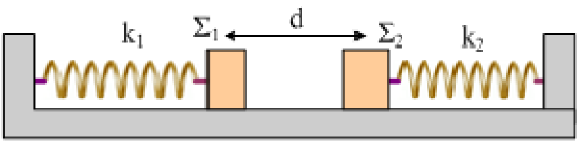
i) Να υπολογίσετε την κυκλική συχνότητα ω της ταλάντωσης του συστήματος και τη σταθερά επαναφοράς D κάθε μιας μάζας ξεχωριστά.

ii) Να δείξετε ότι το σώμα Β θα εγκαταλείψει το σώμα Α και να βρείτε τη θέση και την ταχύτητα του τότε.

Δίνεται $g=10m/s^2$.

1.1.26. Δυο ταλαντώσεις και δυο ελατήρια.

Τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$, που θεωρούνται υλικά σημεία, με μάζες $m_1=1kg$ και $m_2=2kg$ ηρεμούν σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένα στα άκρα δύο οριζοντίων ελατηρίων με σταθερές $k_1=100N/m$ και $k_2=300N/m$ αντίστοιχα, όπως στο σχήμα, απέχοντας μεταξύ τους κατά d=0,4m.



Εκτρέπουμε το σώμα $Σ_1$ προς τ' αριστερά κατά 0,5m και για t=0, το αφήνουμε να εκτελέσει ΑΑΤ.

Ποια χρονική στιγμή το σώμα $Σ_1$ θα αποκτήσει για πρώτη φορά μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα; Να υπολογιστεί το μέτρο της ταχύτητας αυτής.

i) Πόση ταχύτητα θα έχει το σώμα $Σ_1$ πριν τη πλαστική κρούση του με το σώμα $Σ_2$;

ii) Να βρεθεί η θέση, ως προς το φυσικό μήκος του ελατηρίου σταθεράς k_1, γύρω από την οποία θα ταλαντωθεί το συσσωμάτωμα μετά την κρούση.

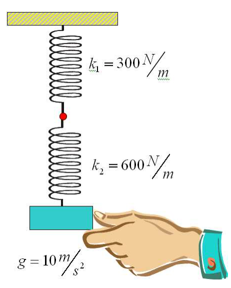
iii) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης επαναφοράς που ασκείται στο συσσωμάτωμα.

1.1.27. Ταλάντωση, γραφικές παραστάσεις και ρυθμοί μεταβολής

Σώμα μάζας m=2Kg ισορροπεί δεμένο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=200 N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο ακλόνητα στο έδαφος. Απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του (Θ.Ι) προς τα πάνω μέχρι το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό του μήκος και από τη θέση αυτή εκτοξεύουμε το σώμα με ταχύτητα μέτρου $\upsilon = \sqrt{3}\, m/s$ και με φορά προς τα κάτω. Η αντίσταση από τον αέρα θεωρείται αμελητέα, αρχή μέτρησης του χρόνου (t=0) λαμβάνουμε τη στιγμή της εκτόξευσης, θετική φορά λαμβάνουμε προς τα πάνω (τη φορά της αρχικής εκτροπής από τη Θ.Ι) και $g = 10\, m/s^2$. Το σώμα αμέσως μετά την εκτόξευσή του εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς ίση με τη σταθερά σκληρότητας του ελατηρίου.

i) Να βρείτε το μέτρο της μέγιστης δύναμης επαναφοράς καθώς και το μέτρο της μέγιστης δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο σώμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης.
ii) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα της φάσης της ταλάντωσης σε συνάρτηση με το χρόνο.
iii) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις απομάκρυνσης, ταχύτητας, επιτάχυνσης σε σχέση με το χρόνο: x-t , υ-t , α-t.
iv) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν η απομάκρυνσή του από τη Θ.Ι είναι
$$x_1 = -0,1\sqrt{3} m / s$$
v) Να βρείτε το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το σώμα για να μεταβεί για 1η φορά μετά από τη στιγμή t=0, σε ακραία θέση της ταλάντωσής του.
vi) Στο παραπάνω χρονικό διάστημα να βρείτε τη μεταβολή της ορμής του σώματος, το έργο της δύναμης επαναφοράς καθώς και το έργο της δύναμης του ελατηρίου.
vii) Τη χρονική στιγμή t_2 κατά την οποία για πρώτη φορά, μετά τη στιγμή t=0, η κινητική ενέργεια του σώματος γίνεται τριπλάσια της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης, να βρείτε:
   a) το ρυθμό μεταβολής της ορμής
   b) το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος
   c) το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης
   d) το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας βαρύτητας
   e) το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου.

1.1.28. *Δυο ελατήρια συνδεδεμένα.*



Σε ακλόνητο σημείο στερεώνεται ελατήριο σταθεράς $k_1 = 300\, N/m$ και στο άκρο αυτού ελατήριο σταθεράς $k_2 = 600\, N/m$. Στο άλλο άκρο του δεύτερου κρεμάμε σώμα μάζας $m = 0,6 kg$ το οποίο κρατάμε έτσι ώστε τα ελατήρια να έχουν το φυσικό τους μήκος. Κάποια στιγμή αφήνουμε το σώμα να κινηθεί.

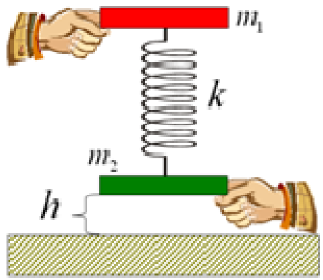
i) Δείξατε ότι εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και προσδιορίσατε τη θέση ισορροπίας.
ii) Υπολογίσατε το πλάτος της ταλάντωσης και γράψτε την εξίσωση της θέσης με δεδομένο το ότι θετική φορά είναι η προς τα πάνω και χρονική στιγμή μηδέν η στιγμή που αφήνουμε το χέρι μας.

1.1.29. Από ποιο ύψος πρέπει να αφεθεί προκειμένου να αναπηδήσει;

Αφήνω ταυτόχρονα και τα δυο σώματα να πέσουν. Το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και το πράσινο σώμα ακινητοποιείται στο δάπεδο.

Από ποιο ύψος πρέπει να αφεθεί το σύστημα ώστε το πράσινο να αναπηδήσει ;

Εφαρμογή: $m_1 = m_2 = 1kg$, $k = 100\, N/m$ και $g = 10\, m/s^2$



1.1.30. Για ποια πλάτη το νήμα παραμένει τεντωμένο.

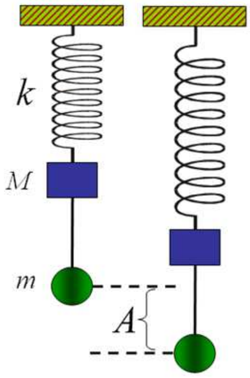
Το σύστημα του σχήματος ισορροπεί όπως φαίνεται στην αριστερή θέση. Το νήμα που συνδέει τα δύο σώματα έχει αμελητέα μάζα.

Εκτρέπω τα σώματα προς τα κάτω κατά Α.

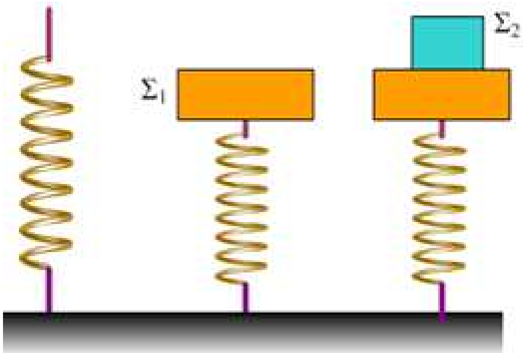
i) Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή του Α ώστε το νήμα να παραμείνει τεντωμένο ;

ii) Να παρασταθεί γραφικά η τάση του νήματος για την περίπτωση όπου : $A = \Delta\ell/2$.

iii) Αν $A = 2\Delta\ell$ βρείτε την ταχύτητα των σωμάτων όταν η τάση του νήματος μηδενίζεται..



1.1.31. Ταλάντωση συστήματος σωμάτων.



Το σώμα Σ_1 μάζας m_1=5kg ηρεμεί στο πάνω άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου στηρίζεται στο έδαφος, προκαλώντας του συσπείρωση κατά 0,25m. Για t=0 αφήνουμε πάνω στο σώμα Σ_1 ένα δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας m_2=3kg.

i) N' αποδειχθεί ότι το σύστημα των δύο σωμάτων θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

ii) Να βρεθεί η περίοδος και το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος.

iii) Να γίνει η γραφική παράσταση σε συνάρτηση με το χρόνο, της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ_2 από το Σ_1, αν η προς τα πάνω κατεύθυνση θεωρηθεί θετική.

Δίνεται g=10m/s^2.

1.1.32. Bungee jumping

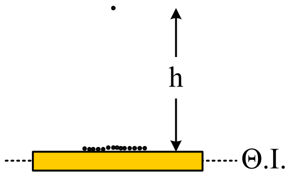
Ένα άτομο, μάζας $m = 100kg$, κάνοντας bungee jumping πηδάει από την εικονιζόμενη γέφυρα . Το λάστιχο έχει μήκος $\ell = 30m$ και έχει σταθερά $k = 50\,N/m$.

i) Ποια πρέπει να είναι η ελάχιστη απόσταση από το νερό ;
ii) Πόσο διαρκεί η πτώση συνολικά ;
iii) Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα που θ' αποκτήσει ;
iv) Ποια είναι η μέγιστη δύναμη που θα δεχτεί ο άνθρωπος από το λάστιχο;
v) Την στιγμή που έχει πέσει κατά $70m$ από την κορυφή του πύργου με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται η κινητική του ενέργεια και με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται η ορμή του;

$g = 10\,m/s^2$

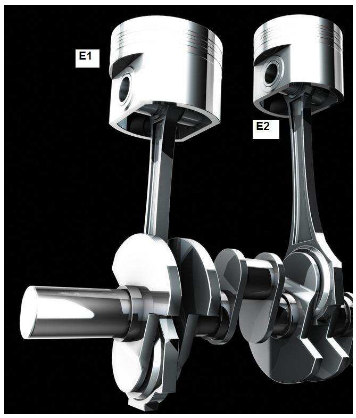
1.1.33. Εκτίναξη κόκκων άμμου.

Πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια που ταλαντώνεται κατακόρυφα με συχνότητα f από εξωτερικό αίτιο, βρίσκονται μικροί κόκκοι άμμου. Παρατηρούμε ότι μερικοί κόκκοι εκτινάσσονται σε ύψος h πάνω από τη θέση ισορροπίας x=0 .



Βρείτε μια σχέση που συνδέει τα μεγέθη : h, f, g, A, όπου A το πλάτος ταλάντωσης, και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.
Εφαρμογή: h=0,2m, g=10m/s^2, f=5/π Hz

1.1.34. Ταλάντωση των εμβόλων μιας μηχανής



Το έμβολο E1 μιας μηχανής εσωτερικής καύσης, κινείται κατακόρυφα, εκτελώντας 300 απλές αρμονικές ταλαντώσεις ανά λεπτό της ώρας.
Τη χρονική στιγμή t = 0, η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του είναι $x_0 = +0{,}1m$, και η αλγεβρική τιμή της ταχύτητάς του είναι $υ_0 = -\pi$ m/s.

A. Να αποδείξετε ότι η απομάκρυνση x_1 του εμβόλου E1 από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο t δίνεται από τη σχέση

$$x_1 = 0{,}1\cdot\sqrt{2}\cdot ημ\left(10\pi t + \frac{3\pi}{4}\right) \text{ στο SI .}$$

B. Ένα δεύτερο έμβολο E2 της ίδιας μηχανής που ταλαντώνεται κατακόρυφα με ίδιο πλάτος και με την ίδια συχνότητα με το E1, προηγείται σε φάση απ' αυτό κατά π/2 rad.
Αν οι θέσεις ισορροπίας των δυο εμβόλων βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο να υπολογίσετε :

B1. τη συνάρτηση απομάκρυνσης – χρόνου $x_2 = f(t)$ για το έμβολο E2
B2. τη μέγιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των δυο εμβόλων
B3. τις χρονικές στιγμές που τα έμβολα E1 , E2 θα βρίσκονται στο ίδιο ύψος
B4. τις χρονικές στιγμές που η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των E1 , E2 θα είναι μέγιστη

B5. τη συνάρτηση d = f(t) όπου d η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των εμβόλων, και να την παραστήσετε γραφικά. Επιβεβαιώστε τις απαντήσεις στα ερωτήματα B2 , B3 , B4 με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης.

Δίνεται $\pi^2 = 10$ και

$$\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta = 2\eta\mu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

1.1.35. *Ελεύθερη Αρμονική Ταλάντωση*

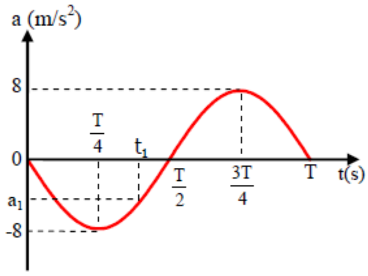
Δύο σημεία K και H βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και απέχουν μεταξύ τους απόσταση d=10m. Πάνω στη γραμμή που τα ενώνει μπορεί να κινείται χωρίς τριβή υλικό σημείο N μάζας m=1Kg, το οποίο δέχεται από τα σημεία K και H ελκτικές δυνάμεις που έχουν μέτρα F_1 =10(KN) (SI) και F_2 =15(HN) (SI) όπου (KN) και (HN) οι αποστάσεις του υλικού σημείου N από τα K, H αντίστοιχα.

i) Να δείξετε ότι το υλικό σημείο N εκτελεί Απλή (ή Ελεύθερη) Αρμονική Ταλάντωση.

ii) Αν το υλικό σημείο N περνάει από το σημείο K με ταχύτητα μέτρου υ_1 =40 m/s, ποιο είναι το πλάτος της ταλάντωσης;

1.1.36. *Άσκηση 2η στις θεμελιώδεις έννοιες της ΑΑΤ.*

Σώμα μάζας m=0,4kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και σε χρόνο t=10πs διέρχεται από ακραία θέση της τροχιάς του N=20 φορές έχοντας εκτελέσει ακέραιο πλήθος πλήρων ταλαντώσεων. Αν η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο είναι όπως στο διάγραμμα του σχήματος και τη χρονική στιγμή t_1 η επιτάχυνση έχει αριθμητική τιμή a_1= -ωυ_1 όπου ω= η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης και υ_1= η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t_1:



i) Να υπολογιστεί η κυκλική συχνότητα ω της απλής αρμονικής ταλάντωσης.

ii) Να υπολογιστεί η απομάκρυνση του σώματος x_1, η ταχύτητά του υ_1 και η επιτάχυνσή του a_1 τη χρονική στιγμή t_1.

iii) Να γίνει η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης και της συνισταμένης δύναμης σε συνάρτηση με το χρόνο.

iv) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνισταμένης δύναμης σε συνάρτηση με την ταχύτητα ΣF=ΣF(υ).

v) Να υπολογιστεί το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σώματος στο χρονικό διάστημα Δt= $\frac{3T}{4} - t_1$

1.1.37. *Άσκηση 3η στις θεμελιώδεις έννοιες της ΑΑΤ.*

Σώμα μάζας m=1kg εκτελεί α.α.τ με εξίσωση ταλάντωσης της μορφής $x=A\eta\mu(\omega t+\frac{\pi}{6})$ (S.I). Σε χρόνο Δt=π s το σώμα εκτελεί ακέραιο πλήθος πλήρων ταλαντώσεων και η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης γίνεται μέγιστη 10 φορές. Η κινητική ενέργεια γίνεται ίση με τη δυναμική σε δύο θέσεις της τροχιάς που απέχουν απόσταση $d=0{,}4\sqrt{2}$ m.

i) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο x=x(t).

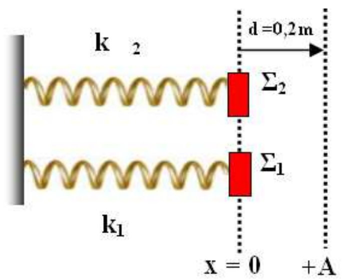
ii) Να υπολογίσετε τη Δυναμική και την Κινητική ενέργεια της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_1=\frac{T}{4}$

iii) Να υπολογίσετε τη μεταβολή της Δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης ΔU από τη χρονική στιγμή $t_1=\frac{T}{4}$ έως τη χρονική στιγμή $t_2=\frac{T}{2}$. Στο χρονικό διάστημα $\Delta t=t_2-t_1$ το σώμα πλησιάζει ή απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας του;

iv) Να υπολογιστεί ο ρυθμός παραγωγής ή κατανάλωσης έργου της δύναμης επαναφοράς της ταλάντωσης $\frac{dW_{F_{\varepsilon\pi}}}{dt}$, όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση $x=+\frac{A}{2}$.

v) Να υπολογιστούν οι ρυθμοί μεταβολής της Δυναμικής και της Κινητικής ενέργειας $\frac{dU}{dt}$ και $\frac{dK}{dt}$ αντίστοιχα τη χρονική στιγμή $t_1=\frac{T}{4}$.

1.1.38. Δυο ταλαντώσεις χρονικά διαφέρουσες



Τα σώματα Σ_1 , Σ_2 του σχήματος, έχουν μάζες m_1 = 1kg , m_2 = 4kg αντίστοιχα και ηρεμούν σε ισορροπία πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τα σώματα αυτά , είναι δεμένα στα άκρα δυο οριζόντιων ιδανικών ελατηρίων με σταθερές k_1 = k_2 =100 N/m και παράλληλους άξονες, που βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος. Τα άλλα άκρα των ελατηρίων είναι ακλόνητα. Μετατοπίζουμε τα σώματα κατά μήκος της διεύθυνσης των ελατηρίων, προς την ίδια κατεύθυνση κατά d = 0,2 m, και την χρονική στιγμή t = 0, αφήνουμε ελεύθερο το Σ_1.

i) Να βρείτε και να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα αξόνων τις εξισώσεις απομάκρυνσης – χρόνου για τις ταλαντώσεις των δυο σωμάτων, αν το σώμα Σ2 αφήνετε ελεύθερο τη χρονική στιγμή που το Σ1 :

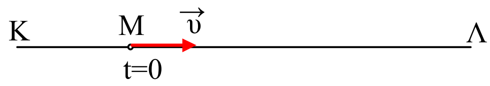
ii) περνά για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας του

iii) σταματά στιγμιαία για πρώτη φορά

iv) επιστρέφει στη θέση x = +A για τρίτη φορά

1.1.39. Μερικές γραφικές παραστάσεις στην απλή αρμονική ταλάντωση.

Ένα σημειακό αντικείμενο εκτελεί απλά αρμονική ταλάντωση, μεταξύ δύο ακραίων θέσεων Κ και Λ, όπου (ΚΛ)=0,4m και τη χρονική στιγμή $t_0=0$, περνά από το σημείο Μ, το οποίο απέχει κατά 0,3m από το Λ, κατευθυνόμενο προς τα δεξιά, όπου παίρνουμε την θετική κατεύθυνση.



Τη στιγμή αυτή δέχεται δύναμη επαναφοράς μέτρου F=10N. Τη χρονική στιγμή $t_1=\pi/30s$ η ταχύτητα του σώματος γίνεται μέγιστη για πρώτη φορά.

i) Να κάνετε το διάγραμμα της φάσης ταλάντωσης, σε συνάρτηση με το χρόνο σε βαθμολογημένους άξονες.

ii) Να κάνετε επίσης τη γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης σε συνάρτηση με την ταχύτητα του σώματος σε βαθμολογημένους άξονες.

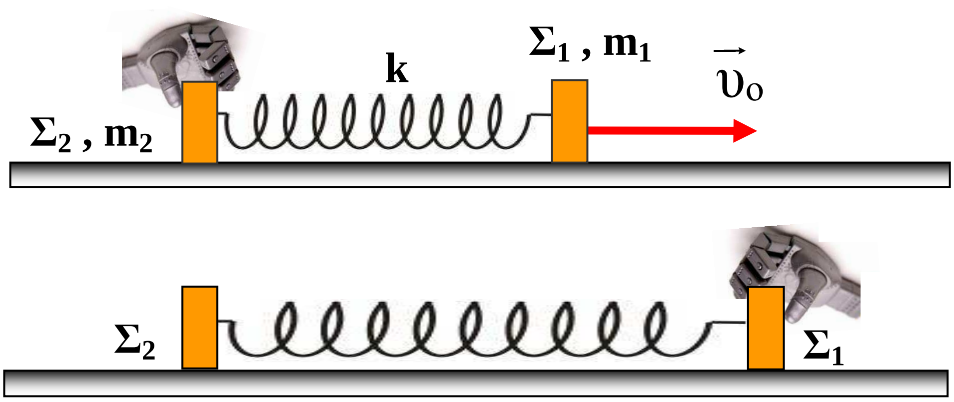
iii) Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης που ασκείται στο σώμα, από τη στιγμή $t_0=0$, έως τη στιγμή $t_1=\pi/15s$.

1.1.40. Ελατήριο ανάμεσα σε δυο σώματα και δυο διαδοχικές ταλαντώσεις

Το οριζόντιο ελατήριο του σχήματος σταθεράς $k = 200$ N/m, έχει στα δυο του άκρα δεμένα δυο σώματα $Σ_1$, $Σ_2$ που έχουν μάζες $m_1 = 0,32$ kg και $m_2 = 1,28$ kg αντίστοιχα.

Τα σώματα αυτά, που μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές πάνω στο οριζόντιο επίπεδο, αρχικά ηρεμούν με το ελατήριο στο φυσικό του μήκος και, με το χέρι ενός ρομπότ, να κρατά ακίνητο το $Σ_2$. Την χρονική στιγμή $t = 0$ εκτοξεύουμε το $Σ_1$ με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $\upsilon_o = 10$ m / s στην διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου έτσι ώστε να απομακρύνεται από το $Σ_2$ όπως δείχνει το σχήμα.

Την χρονική στιγμή $t = T_1/4$, όπου T_1 η περίοδος της ταλάντωσης του συστήματος όταν κινείται το $Σ_1$, αφήνεται ελεύθερο το $Σ_2$, και κρατείται από το ρομπότ μόνιμα ακίνητο το $Σ_1$.



Να υπολογίσετε

i) Το διάστημα S_2 που θα διανύσει το $Σ_2$ από τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερο , μέχρι να σταματήσει για πρώτη φορά.

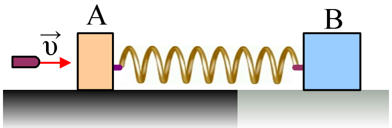
ii) Το λόγο των μέγιστων ταχυτήτων $\upsilon_{1max} / \upsilon_{2max}$, των σωμάτων $Σ_1$, $Σ_2$.

iii) Τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του κάθε σώματος αμέσως μετά την ελευθέρωση του $Σ_2$.

iv) Την συνάρτηση θέσης – χρόνου x = f(t), του $Σ_2$ με x = 0 το σημείο στο οποίο αφήνεται ελεύθερο το $Σ_2$ και θετική τη φορά της αρχικής ταχύτητας $\boldsymbol{υ_0}$ που φαίνεται στο σχήμα. Να παρατήσετε γραφικά την συνάρτηση αυτή.

v) Τη συνάρτηση ταχύτητας – χρόνου υ = f(t) , του $Σ_2$, και να την παραστήσετε γραφικά.

1.1.41. Θα μετακινηθεί το σώμα μετά την κρούση;



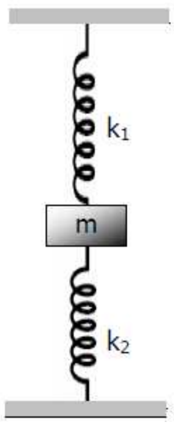
Ένα βλήμα μάζας 0,1kg κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ=60m/s και σφηνώνεται σε σώμα Α, μάζας m=0,9kg, το οποίο ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=400N/m, όπως στο σχήμα. Στο άλλο άκρο του ελατηρίου είναι δεμένο δεύτερο σώμα Β, μάζας Μ= 20kg, το οποίο παρουσιάζει με το επίπεδο συντελεστή οριακής στατικής τριβής $μ_s$=0,8.

i) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της δύναμης τριβής που ασκείται στο σώμα Β.

ii) Θεωρώντας την κρούση στιγμιαία και t=0 τη στιγμή της κρούσης, να κάνετε τη γραφική παράσταση της τριβής που ασκείται στο σώμα Β, σε συνάρτηση με το χρόνο, λαμβάνοντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική.

iii) Ποια μπορεί να είναι η μέγιστη τιμή της ταχύτητας του βλήματος, ώστε να μην προκληθεί μετακίνηση του σώματος Β;

1.1.42. Δυο ελατήρια, δυνάμεις και ενέργειες.



Το σώμα μάζας m=1kg του σχήματος ισορροπεί στη θέση του σχήματος, όπου το ιδανικό ελατήριο σταθεράς k_1=100N/m είναι επιμηκυμένο κατά $Δl_1$=0,07m και το ιδανικό ελατήριο σταθεράς K_2 είναι παραμορφωμένο κατά $Δl_2$=0,01m.

i) Να υπολογίσετε την σταθερά του ελατηρίου k_2.

ii) Εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του και το αφήνουμε ελεύθερο. Να δείξετε ότι το σύστημα θα εκτελέσει α.α.τ και να υπολογίσετε την συχνότητά της.

iii) Ανυψώνουμε το σώμα κατά d=0,05m προς τα πάνω και τη χρονική στιγμή t=0 το αφήνουμε ελεύθερο.

iv) Να υπολογίσετε σε συνάρτηση με το χρόνο τις αριθμητικές τιμές της δύναμης επαναφοράς της α.α.τ, $F_{επ}= F_{επ}(t)$ και των δυνάμεων των ελατηρίων $F_{ελ1}= F_{ελ1}(t)$ και $F_{ελ2}= F_{ελ2}(t)$

v) Να υπολογίστε το έργο W_F της δύναμης $\vec{F}$ που ασκούμε για να μετακινήσουμε το σώμα κατά d=0,05m i) πάνω από την αρχική θέση ισορροπίας του και ii) κάτω από την αρχική θέση ισορροπίας του. Δίνεται g=10m/s^2. Να θεωρήσετε ως θετική φορά για την απομάκρυνση της α.α.τ την αντίθετη του βάρους του σώματος.

1.1.43. Ταλάντωση δύο σωμάτων και … τελικά ενός.

Σώμα μάζας m_1=1kg είναι συνδεδεμένο στο ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=400 N/m το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Μετατοπίζουμε το σώμα μάζας m_1 στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και το συνδέουμε μέσω αβαρούς νήματος με σώμα μάζας m_2. Τη χρονική στιγμή t=0 αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο οπότε εκτελεί α.α.τ με περίοδο $\mathbf{T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}}$. Η κινητική ενέργεια του συστήματος μεταβάλλεται σε συνάρτηση με χρόνο σύμφωνα με τη σχέση K=1-συν20t (S.I). Θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή t=0 η απομάκρυνση της α.α.τ είναι y=+A όπου A το πλάτος της.

i) Να υπολογίσετε τη μάζα m_2 και το πλάτος A της α.α.τ που εκτελεί το σύστημα και να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης της α.α.τ σε συνάρτηση με το χρόνο y=y(t).

ii) Να γράψετε την έκφραση της δύναμης που ασκεί το νήμα στο σώμα μάζας m_2 σε συνάρτηση με το χρόνο και να την απεικονίσετε γραφικά.

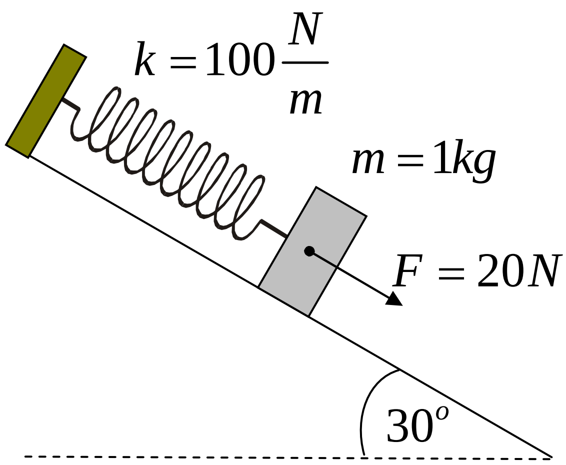
iii) Τη χρονική στιγμή που το ταλαντευόμενο σύστημα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, κόβουμε το νήμα. Να υπολογίσετε το πλάτος της νέας α.α.τ που θα εκτελέσει το σύστημα ελατήριο – σώμα μάζας m_1.

Δίνεται $g=10m/s^2$.

1.1.44. Ταλάντωση σε κεκλιμένο επίπεδο

Το σώμα του σχήματος ηρεμεί σε λείο κεκλιμένο επίπεδο , το οποίο σχηματίζει με το οριζόντιο γωνία 30^o , κρεμασμένο από το ιδανικό ελατήριο του σχήματος.

Κάποια χρονική στιγμή δέχεται δύναμη 20 N σταθερή και παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο με διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου και φορά προς τα κάτω.



i) Δείξατε ότι εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

ii) Ποιο είναι το πλάτος της ταλάντωσης;

iii) Σε πόσο χρόνο το σώμα έχει μετατοπιστεί κατά 30 cm ;

iv) Ποιο είναι το έργο του ελατηρίου μέχρι εκείνη τη στιγμή;

v) Υπολογίσατε την στιγμή εκείνη την ταχύτητα του σώματος.

vi) Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται τη στιγμή εκείνη η ορμή του;

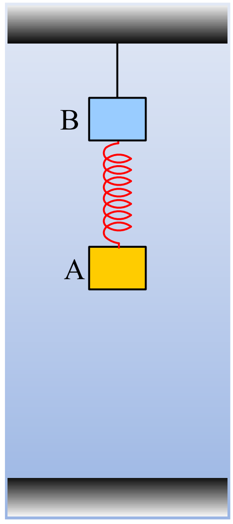
vii) Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται τη στιγμή εκείνη η κινητική του ενέργεια;

viii) Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται τη στιγμή εκείνη η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου;

ix) Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται τη στιγμή εκείνη η λόγω βάρους δυναμική του ενέργεια;

($g=10\ m/s^2$, θετική φορά προς τα δεξιά)

1.1.45. Μια ταλάντωση, πτώση και μετά μια δεύτερη.



Τα δυο σώματα Α και Β με ίσες μάζες m_1=m_2=m=1kg, ηρεμούν όπως στο σχήμα, όπου το ελατήριο έχει σταθερά k=100N/m, ενώ το Α βρίσκεται σε ύψος h=0,2m από το έδαφος. Απομακρύνουμε κατακόρυφα προς τα πάνω το σώμα Α, κατά y_1=0,1m και σε μια στιγμή που θεωρούμε t=0, το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί εκτελώντας ΑΑΤ.

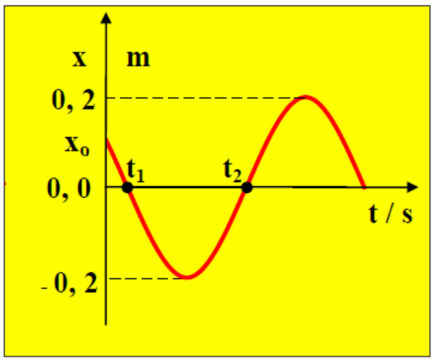
i) Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσής του σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση θετική.
ii) Να βρεθεί η εξίσωση της τάσης του νήματος σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.
iii) Τη στιγμή που η τάση του νήματος γίνεται ελάχιστη για τρίτη φορά, το νήμα κόβεται και τα σώματα πέφτουν. Με την κρούση με το έδαφος το σώμα Α προσκολλάται. Να βρεθεί η ενέργεια της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το Β σώμα.

Δίνεται g=10m/s^2.

1.1.46. Διάγραμμα απομάκρυνσης – χρόνου, εξισώσεις κίνησης και αρχικές τιμές

Το ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου είναι ακλόνητο. Στο άλλο άκρο του , είναι δεμένο σώμα μάζας m = 1 kg, το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σταθερού πλάτους. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με τον χρόνο όπου t_1= π/72 s και t_2 = 7π/72 s .

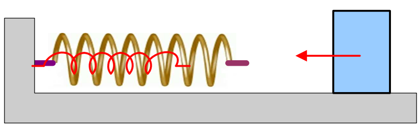
Να βρεθούν:



i) Η συνάρτηση απομάκρυνσης - χρόνου x = f(t)
ii) Η συνάρτηση ταχύτητας – χρόνου υ = f(t) και να παρασταθεί γραφικά.
iii) Η αρχική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου
iv) Η αρχική κινητική ενέργεια του σώματος.

1.1.47. Το σώμα πέφτει σε δύο ελατήρια

Δύο οριζόντια ελατήρια έχουν σταθερές K_1=100N/m και K_2=300N/m και έχουν φυσικό μήκος l_1=1m και l_2=0,8m. Το ένα ελατήριο βρίσκεται μέσα στο άλλο και το ένα άκρο τους είναι στερεωμένο σε ακλόνητο τοίχωμα. Ένα σώμα μάζας m=4Kg κινείται με σταθερή ταχύτητα u=2m/s πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με κατεύθυνση προς τα δύο ελατήρια. Τη στιγμή t=0 το σώμα ακουμπά το πρώτο ελατήριο και συνδέεται με αυτό χωρίς απώλεια ενέργειας. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και μετά από λίγο μόλις το σώμα ακουμπήσει και το δεύτερο ελατήριο.Να βρεθούν:



i) Ποια χρονική στιγμή το σώμα θα ακουμπήσει το δεύτερο ελατήριο;

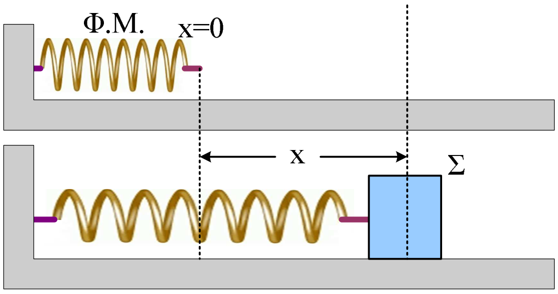
ii) Αν το σύστημα θα εκτελέσει γ.α.τ. και αν εκτελεί γ.α.τ. , να βρεθεί η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσή του συστήματος

iii) Το πλάτος της τελικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα

1.1.48. Άλλη μια άσκηση Α.Α.Τ. με …ελατήριο

Πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο ταλαντώνεται ένα σώμα (Σ) στερεωμένο στην άκρη ιδανικού ελατηρίου σταθεράς (Κ). Το άλλο άκρο του είναι ακλόνητα στερεωμένο σε κατακόρυφο τοίχο. Θεωρούμε ότι η θέση (x=0) αντιστοιχεί στη θέση του ελεύθερου άκρου του ελατήριου όταν είναι στο φυσικό μήκους του.

Η θέση του (Σ) κάθε στιγμή είναι : **x = 10+4ημ(2 t)** (S.I) και η μάζα του **m=0,5kg**.

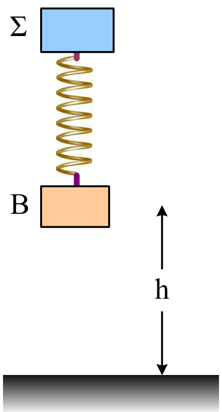


i) Να δείξετε ότι το σώμα κάνει **Γ.Α.Τ**.

ii) Να δείξετε ότι στο σώμα ασκείται και άλλη δύναμη εκτός την δύναμη του ελατήριου να υπολογίσετε το μέτρο της και την σταθερά του ελατήριου (**Κ**).

iii) Να γίνει η γραφική παράσταση **: x – t** .

1.1.49. Πτώση και ΑΑΤ.



Τα σώματα Σ και Β αφήνονται να πέσουν ελεύθερα δεμένα στα άκρα ενός ελατηρίου που έχει το φυσικό του μήκος l_0=0,8m και σταθερά Κ=100Ν/m. Το Β απέχει αρχικά κατά h= 15cm από το έδαφος. Η κρούση του σώματος Β με το έδαφος είναι πλαστική και το σώμα κολλά στο έδαφος, ενώ το σώμα Σ που έχει μάζα m=1kg, αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Να βρείτε:

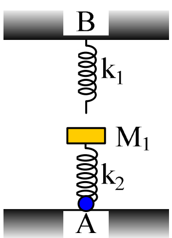
i) Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος Σ.

ii) Την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων.

iii) Τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος Σ τη στιγμή της ελάχιστης απόστασης.

Δίνεται g=10m/s^2.

1.1.50. Διπλή αλλαγή θέσης ισορροπίας



Τα ελατήρια στο παρακάτω σχήμα έχουν ίδιο φυσικό μήκος Lo=0,6m έχουν σταθερές K_1 = K_2=200N/m και είναι στερεωμένα στην ίδια κατακόρυφο στα σημεία Α και Β και σε απόσταση ΑΒ=1,2m.

Πάνω στο ελατήριο με σταθερά K_1 ισορροπεί δεμένο σημειακό σώμα μάζας M_1=2Kg. Από τη θέση Α εκτοξεύουμε κατακόρυφα δεύτερο σημειακό μάζας M_2=2Kg με αρχική ταχύτητα

$υ_ο$=4 m/s με αποτέλεσμα τα δύο σώματα να συγκρουστούν πλαστικά. Αν μετά την πλαστική κρούση το σύστημα των δύο σωμάτων ενώνεται ακαριαία και χωρίς απώλεια ενέργειας με το δεύτερο ελατήριο σταθεράς K_1 να βρεθούν:

i) Η απώλεια ενέργειας κατά την πλαστική κρούση

ii) Η ενέργεια ταλάντωσης που θα εκτελέσει τελικά το σύστημα

iii) Ο χρόνος μετά την κρούση που θα χρειασθεί το σύστημα των δύο σωμάτων μέχρι να αποκτήσει για πρώτη φορά την μέγιστη ταχύτητά του.