3.4. Στροφορμή. Ομάδα Β.

1. Στροφορμή και άξονας περιστροφής

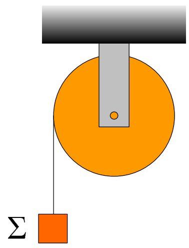
Έστω ένας οριζόντιος δίσκος μάζας m και ακτίνας R, ο οποίος στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω. Να υπολογίσετε την στροφορμή του δίσκου ως προς κατακόρυφο άξονα, όταν αυτός:

i) Περνά από το κέντρο Ο του δίσκου.

ii) Περνά από ένα σημείο Α της περιφέρειας του δίσκου.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που περνά από το κέντρο και είναι κάθετος στο επίπεδό του $I = ½\, m \cdot R^2$.

2. Στροφορμή κυλίνδρου και συστήματος



Ο κύλινδρος του σχήματος έχει τυλιγμένο γύρω του ένα αβαρές νήμα, στο ελεύθερο άκρο του οποίου είναι δεμένο ένα σώμα μάζας Σ μάζας m_1=2kg. Ο κύλινδρος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος ταυτίζεται με τον άξονά του που διέρχεται από τα κέντρα των δύο βάσεων. Σε μια στιγμή, t=0, αφήνουμε το σύστημα να κινηθεί. Δίνονται: Η ακτίνα του κυλίνδρου R=0,4m, η μάζα του κυλίνδρου M=4kg, τριβές δεν υπάρχουν, ενώ η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής $I= ½\, M \cdot R^2$ και g=10m/s^2.

Να βρεθούν:

i) Η επιτάχυνση που θα αποκτήσει το σώμα Σ.

ii) Το μέτρο της δύναμης που ασκεί ο άξονας στον κύλινδρο.

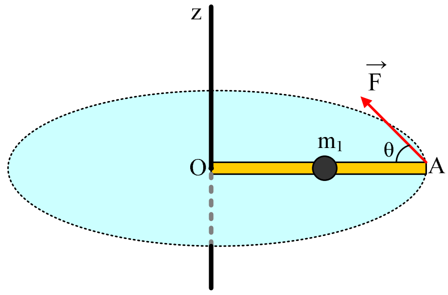
iii) Για τη χρονική στιγμή t=2s ζητούνται:

a) Η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου.

b) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του.

c) Ο ρυθμός μεταβολής της συνολικής στροφορμής του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του κυλίνδρου.

3. Στροφορμή και μεταβολή στροφορμής.



Η ομογενής ράβδος ΟΑ του σχήματος, έχει μήκος ℓ=2m και μάζα M=3kg και μπορεί να στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο άξονα z ο οποίος περνά από το άκρο της Ο. Στο μέσον της ράβδου έχει προσδεθεί ένα σώμα Σ που θεωρείται υλικό σημείο μάζας m_1=4kg. Το στερεό Π, που δημιουργήσαμε με τον τρόπο αυτό ηρεμεί. Για t=0 ασκείται στο άκρο Α της ράβδου μια οριζόντια σταθερού μέτρου δύναμη F=5N, που η διεύθυνσή της σχηματίζει γωνία θ=30° με τη ράβδο, όπως στο σχήμα, μέχρι τη χρονική στιγμή t=2s, όπου η δύναμη καταργείται.

i) Η στροφορμή που αποκτά το στερεό Π ως προς (κατά τον) άξονα περιστροφής z.

ii) Σε μια στιγμή t>2s, το σώμα Σ ξεκολλά από τη θέση του και γλιστρώντας κατά μήκος της ράβδου, καρφώνεται σε ένα μικρό καρφί που υπάρχει στο άκρο Α της ράβδου.

iii) Να βρεθούν για την παραπάνω μετακίνηση:

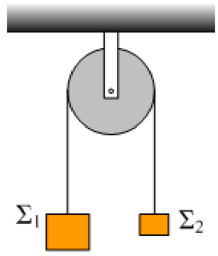
α) Η μεταβολή της στροφορμής του σώματος Σ ως προς το άκρο Ο.

β) Η αντίστοιχη μεταβολή της στροφορμής της ράβδου.

γ) Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα z $I=1/3\ M\ell^2$.

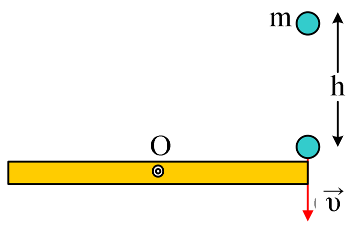
4. Στροφορμή συστήματος σωμάτων.



Τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$ με μάζες 4kg και 1kg αντίστοιχα είναι δεμένα στα άκρα νήματος το οποίο περνά από τροχαλία ακτίνας 0,2m και μάζας Μ. Για t=0 αφήνουμε τα σώματα ελεύθερα να κινηθούν. Να βρεθεί η στροφορμή του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας τη χρονική στιγμή t_1=4s.

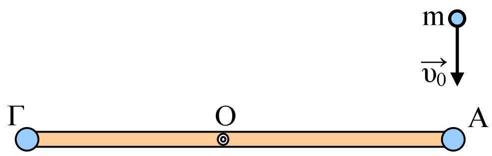
Δίνεται $g=10m/s^2$.

5. Διατήρηση στροφορμής σε κρούση υλικού σημείου-ράβδου.



Μια ομογενής ράβδος μάζας Μ=3kg και μήκους ℓ =4m μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το μέσον της Ο και ισορροπεί σε οριζόντια θέση. Από ύψος h=3,2m αφήνεται να πέσει μια σημειακή μάζα m=1kg η οποία κτυπά στο άκρο της ράβδου και προσκολλάται. Βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος, αμέσως μετά την πρόσκρουση. Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο σε αυτήν άξονα που περνά από το μέσον της I= 1/12M□ ^{2} και $g=10m/s^2$.

6. Διατήρηση Στροφορμής σε κρούση.



Ομογενής και ισοπαχής ράβδος ΑΓ με μήκος l=1m και μάζα M=1,2kg μπορεί να στρέφεται, χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που είναι κάθετος σε αυτή και διέρχεται από το μέσον της Ο. Στα δύο άκρα της ράβδου έχουμε στερεώσει δύο σφαιρίδια αμελητέων διαστάσεων, μάζας m=0,2kg το καθένα. Αρχικά η ράβδος ισορροπεί οριζόντια, όπως φαίνεται στο σχήμα. Βλήμα μάζας m=0,2kg αμελητέων διαστάσεων, κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα μέτρου $υ_0$= 10m/s και ενσωματώνεται ακαριαία στο σφαιρίδιο στο άκρο Α της ράβδου. Να υπολογίσετε:

i) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος, αμέσως μετά την κρούση.

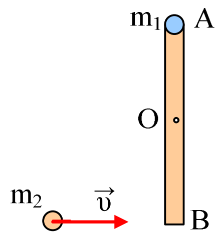
ii) Το κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος που χάθηκε κατά την κρούση.

iii) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του συστήματος, αμέσως μετά την κρούση.

iv) Το μέτρο της ταχύτητας του σφαιριδίου στο άκρο Γ της ράβδου, τη στιγμή που αυτή γίνεται κατακόρυφη.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο προς αυτήν άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm}= 1/12\ ml^2$ και $g=10m/s^2$.

7. Διατήρηση ορμής και στροφορμής

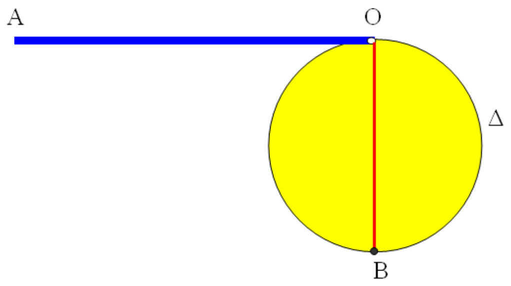


Πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια σανίδα ΑΒ μήκους l =4m και μάζας M=2,8kg, ενώ στο ένα της άκρο Α έχει στερεωθεί μια σημειακή μάζα m_1=0,1kg. Ένα βλήμα μάζας m_2=0,1kg κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ=30m/s και σφηνώνεται στο άλλο άκρο Β της σανίδας. Να βρεθούν:

i) Η ταχύτητα του κέντρου Ο της σανίδας μετά την κρούση.
ii) Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος μετά την κρούση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας σανίδας ως προς κάθετο σε αυτήν άξονα που περνά από το μέσον της I= 1/12 M·□ ^{2}.

8. Κρούση ράβδου – δίσκου



Η διάταξη του σχήματος, αποτελείται από μια λεπτή ομογενή ράβδο ΟΑ μάζας Μ μήκους ℓ = 0,3 m και ένα δίσκο Δ, μάζας m = 2M και ακτίνας R=ℓ/3.

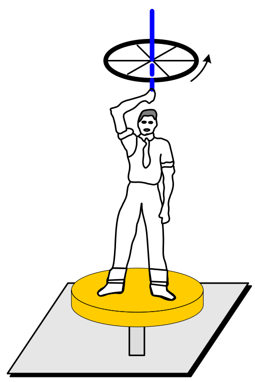
Τα σώματα αυτά, μπορούν να περιστρέφονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο και χωρίς τριβές, γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα, που περνά από το κοινό άκρο Ο της ράβδου και της διαμέτρου ΟΒ του δίσκου. Στο σημείο Β της κατακόρυφης διαμέτρου ΟΒ, είναι στερεωμένη μια μικρή ακίδα, αμελητέας μάζας.

Η ράβδος αφήνεται ελεύθερη από την οριζόντια θέση, και ο δίσκος ηρεμεί με το επίπεδό του κατακόρυφο. Την στιγμή που η ράβδος φτάνει στην κατακόρυφη θέση, καρφώνεται πάνω στην ακίδα. Να υπολογίσετε :

i) Την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου την στιγμή που φτάνει στο σημείο που είναι η ακίδα και λίγο πριν καρφωθεί πάνω της.
ii) Την γωνιακή ταχύτητα του συστήματος αμέσως μετά την κρούση.
iii) Την ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου αμέσως μετά την κρούση.
iv) Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της ράβδου λίγο πριν την κρούση που μετατρέπεται σε άλλες μορφές ενέργειας κατά την κρούση.

Δίνονται : Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I_{p(o)}=M\ell^2/3$, η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα κάθετο στο κέντρο μάζας του $I_{cm}= mR^2/2$, και $g=10m/s^2$.

9. Περιστροφή του τροχού.



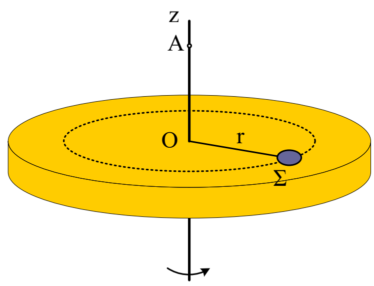
Πάνω σε ένα τραπεζάκι, που μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα χωρίς τριβές, βρίσκεται ένας άνθρωπος κρατώντας στο χέρι του ένα τροχό μάζας 5kg και ακτίνας 0,6m, η μάζα του οποίου θεωρείται συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του. Σε μια στιγμή ο άνθρωπος ασκώντας κατάλληλη ροπή στον τροχό τον θέτει σε περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα ω=40rad/s, όπως στο σχήμα.

i) Να αποδείξετε ότι ο άνθρωπος μαζί με το τραπέζι θα περιστραφούν αποκτώντας γωνιακή ταχύτητα αντίθετης φοράς, υπολογίζοντας και το μέτρο της.

ii) Πόση χημική ενέργεια του ανθρώπου μετετράπη σε μηχανική κατά τη διαδικασία περιστροφής του τροχού;

Δίνεται η ροπή αδράνειας ανθρώπου-τραπεζιού ως προς τον άξονα περιστροφής του τραπεζιού $I_1=8kgm^2$.

10. Στροφορμή. Μερικές περιπτώσεις.



1) Στο διπλανό σχήμα ένας οριζόντιος δίσκος στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από τον κατακόρυφο άξονά του, ενώ ένα υλικό σημείο Σ, μάζας m, απέχει απόσταση r από το κέντρο Ο του δίσκου.

i) Σημειώστε πάνω στο σχήμα τα διανύσματα:

α) Γωνιακή ταχύτητα του Σ.

β) Γραμμική ταχύτητα του Σ

γ) Στροφορμή του Σ ως προς το σημείο Ο.

δ) Στροφορμή του Σ ως προς (κατά) τον άξονα z.

ii) Τα μέτρα των αντίστοιχων μεγεθών είναι:

$υ_{γρ}$= ………… L_o=……………… L_z= ………..

2) Έστω ένα σημείο Α του άξονα z, όπου (ΑΟ)=r.

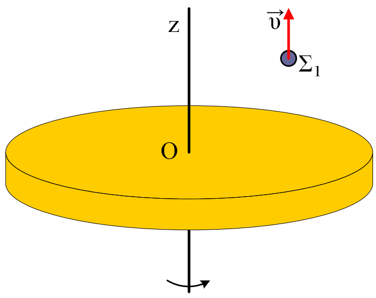
i) Σημειώστε στο σχήμα τη στροφορμή του υλικού σημείου Σ ως προς το Α και υπολογίστε το μέτρο της.

ii) Υπολογίστε το μέτρο της προβολής της στροφορμής του Σ ως προς το Α, πάνω στον άξονα z.

iii) Για τη στροφορμή του υλικού σημείου Σ ως προς το σημείο Α ισχύει:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

Όπου $I=m(ΑΣ)^2$ και ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου Είναι σωστή η παραπάνω σχέση;



3) Ένα άλλο υλικό σημείο $Σ_1$ μάζας m_1 κινείται κατακόρυφα και κάποια στιγμή έχει ταχύτητα υ, απέχοντας κατά r από τον άξονα περιστροφής του δίσκου.

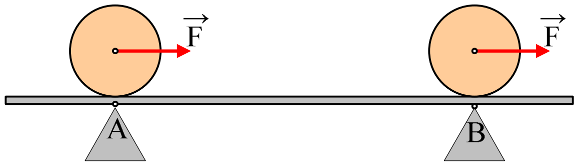
i) Σημειώστε στο σχήμα το διάνυσμα της στροφορμής του $Σ_1$ ως προς το σημείο Ο. Από ποια εξίσωση βρίσκουμε το μέτρο της;

ii) Πόση είναι η στροφορμή του $Σ_1$ ως προς (κατά) τον άξονα z;

iii) Να βρεθεί το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του $Σ_1$ ως προς το σημείο Ο. Να σχεδιάστε στο σχήμα το διάνυσμα του παραπάνω ρυθμού.

11. Στροφορμή και ρυθμός μεταβολής της.

Μια λεπτή δοκός μάζας m_1=10kg, ηρεμεί στηριζόμενη σε δύο τρίποδα Α και Β, τα οποία απέχουν εξίσου από τα άκρα της. Πάνω στη δοκό, στη θέση του τρίποδου Α ηρεμεί ένας κύλινδρος μάζας Μ=10kg και ακτίνας 0,4m. Σε μια στιγμή δέχεται την επίδραση οριζόντιας σταθερής δύναμης F=120N, όπως στο σχήμα, οπότε αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και μετά από 1s φτάνει στο άλλο τρίποδο Β. Στη διάρκεια της κίνησης η δοκός δεν κινείται.



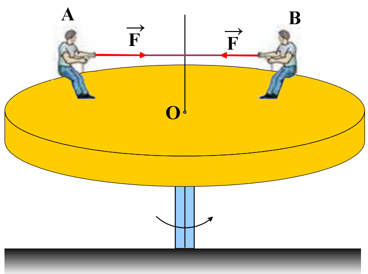
Να υπολογιστεί η απόσταση (ΑΒ)

i) Για τη στιγμή που ο κύλινδρος περνά από το Β να βρεθούν:
   α) Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του.
   β) Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς τον άξονα που περνά από το σημείο επαφής του κυλίνδρου με τη δοκό στην αρχική του θέση και είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος.

ii) Μεταξύ της δοκού και του Α τρίποδου δεν αναπτύσσεται τριβή.
   α) Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ δοκού και Β τρίποδου, ώστε η δικός να παραμένει ακίνητη στη διάρκεια του πειράματος;
   β) Ποιο είναι το μέγιστο μήκος της δοκού, ώστε κατά την κίνηση του κυλίνδρου κατά μήκος της, να μην ανατραπεί;

Δίνεται για τον κύλινδρο $I= ½ MR^2$ ως προς τον άξονα περιστροφής του και $g=10m/s^2$.

12. *Τάση νήματος και τριβή.*



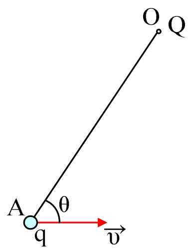
Μια κυκλική πλατφόρμα έχει τεθεί σε περιστροφή γύρω από κατακόρυφο άξονα με γωνιακή ταχύτητα $ω_1$=1rad/s. Πάνω στην πλατφόρμα βρίσκονται δυο παιδιά μάζας 50kg το καθένα, τα οποία εξασφαλίζουν την περιστροφή τους μαζί με την πλατφόρμα, τραβώντας ένα νήμα μήκους 4m, όπως στο σχήμα, με δύναμη μέτρου F=70N. Τα παιδιά βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις ως προς το κέντρο Ο της πλατφόρμας. Οι συντελεστές τριβής μεταξύ των υποδημάτων των παιδιών και της πλατφόρμας είναι $μ_s$=μ=0,3.

i) Να σχεδιάστε τις δυνάμεις τριβής που ασκούνται στα παιδιά και να υπολογίστε τα μέτρα τους.

ii) Σε μια στιγμή τα παιδιά τραβώντας το νήμα αρχίζουν να πλησιάζουν και σταματούν σε απόσταση 1m από το Ο. Στη θέση αυτή συνεχίζουν να τραβούν το νήμα με δύναμη του ίδιου μέτρου. Πόσο είναι τώρα το μέτρο της τριβής που ασκείται σε κάθε παιδί;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της πλατφόρμας ως προς τον άξονα περιστροφής της $I_π=200kg{\cdot}m^2$ και $g=10m/s^2$.

13. *Η στροφορμή ενός φορτίου στο χρόνο…*



Ένα σωματίδιο με φορτίο q=-1μC, μάζα 1g εκτοξεύεται για t=0 με αρχική ταχύτητα 10^5m/s, από ένα σημείο Α, το οποίο απέχει απόσταση r=0,3m, από ένα ακλόνητο σημειακό φορτίο Q=1μC, όπως στο σχήμα, όπου η γωνία θ=60°.

i) Να βρεθεί για t=0 η κεντρομόλος και η επιτρόχια επιτάχυνση του σωματιδίου.

ii) Να υπολογίσετε την στροφορμή του σωματιδίου ως προς το σημείο Ο, τη χρονική στιγμή t=4s.

Υπενθυμίζεται ότι το μέτρο της δύναμης μεταξύ σημειακών φορτίων δίνεται από το νόμο του Coulomb: $F = k\dfrac{|q \cdot Q|}{r^2}$ ενώ k=9·10^9N·C^2.

14. Τα δύο χελωνάκια

Στην ήρεμη επιφάνεια μιας λίμνης επιπλέει ένας ξύλινος δίσκος μάζας M=1kg και ακτίνας R=1m.

Ο δίσκος, εξ αιτίας ενός ανεμοστρόβιλου που προηγήθηκε, περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του με κυκλική συχνότητα $ω_0$=6rad/s.

Πάνω στον δίσκο και στα άκρα μιας διαμέτρου του κάθονται, "γαντζωμένα", δυο χελωνάκια μάζας m=0,2kg το κάθε ένα, τα οποία κάποια χρονική στιγμή ξεκινούν προς συνάντησή τους με ταχύτητες ίσου μέτρου.

Αν γνωρίζουμε ότι τα χελωνάκια ζαλίζονται και αποκοιμούνται όταν η κυκλική συχνότητα με την οποία περιστρέφονται γίνει ω=9rad/s:

Α. Να δικαιολογηθεί γιατί:

i) η κυκλική συχνότητα μεγαλώνει καθώς πλησιάζουν τα χελωνάκια

ii) τα χελωνάκια θα αποκοιμηθούν.

Β. Να βρεθούν:

iii) η απόσταση από το κέντρο του δίσκου στην οποία θα βρεθεί κάθε χελωνάκι τη στιγμή που θα αποκοιμηθεί

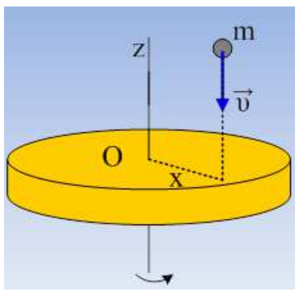
iv) η ενέργεια που δαπάνησε το κάθε ένα κατά τη μετακίνησή του.

Η ροπή αδράνειας του δίσκου δίδεται από τη σχέση: $I_δ$=MR^2/2.

Οι τριβές που συναντά ο δίσκος κατά την κίνησή του στο νερό θεωρούνται ασήμαντες.

Τα χελωνάκια θεωρούνται υλικά σημεία.

15. Στροφορμή και διατήρηση στροφορμής.



Ο οριζόντιος δίσκος του σχήματος στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα 2rad/s γύρω από έναν σταθερό κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του Ο και ως προς τον οποίο έχει ροπή αδράνειας I=9kg·m^2. Ένα σώμα Σ μάζας 1kg, που θεωρείται υλικό σημείο, πέφτει κατακόρυφα και κτυπά με ταχύτητα υ=1,8m/s σε σημείο που απέχει x=1m, από το κέντρο Ο του δίσκου, όπου και προσκολλάται.

i)Να σχεδιάστε στο σχήμα τη στροφορμή και να υπολογίστε το μέτρο της, ελάχιστα πριν την κρούση:

α) του δίσκου κατά (ως προς) τον άξονά του z.

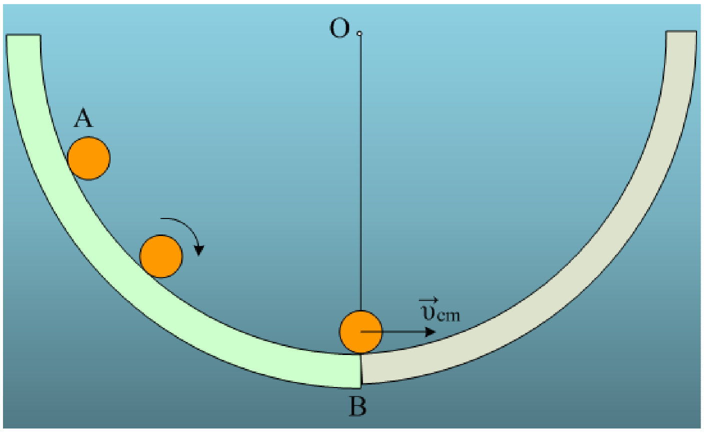
β) του σώματος Σ ως προς το κέντρο Ο του δίσκου.

ii) Να βρείτε την γωνιακή ταχύτητα του δίσκου μετά την κρούση.

iii) Να υπολογιστεί η μεταβολή της στροφορμής (μέτρο και κατεύθυνση) του σώματος Σ ως προς το σημείο Ο.

iv) Αν η διάρκεια της κρούσης είναι Δt=0,01s, να βρεθεί η μέση ροπή της δύναμης που ασκήθηκε στον δίσκο από το Σ, ως προς τον άξονα z.

16. Σφαίρα κατά μήκος δύο τεταρτοκυκλίων.



Μια σφαίρα μάζας 0,5kg και ακτίνας r=5cm, αφήνεται να κινηθεί στο σημείο Α του αριστερού τεταρτοκυκλίου με το οποίο παρουσιάζει μικρή τριβή, με αποτέλεσμα να κινηθεί προς τα κάτω στρεφόμενη μεν, αλλά και ολισθαίνοντας. Έτσι φτάνει στην βάση των τεταρτοκυκλίων Β έχοντας ταχύτητα κέντρου μάζας υ_{cm}=2m/s και γωνιακή ταχύτητα ω=20rad/s, όπου και συνεχίζει την κίνησή της στο δεξιό τεταρτοκύκλιο, με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ=0,4. Τα δύο τεταρτοκύκλια έχουν το ίδιο κέντρο Ο και ακτίνες R=1m, ενώ η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς μια διάμετρό της είναι $I=\frac{2}{5}mr^2$ και $g=10m/s^2$. Για τη θέση, αμέσως μόλις μπει στο δεξί τεταρτοκύκλιο, ζητούνται:

i) Η ιδιοστροφορμή (spin) της σφαίρας ως προς τον άξονά της.

ii) Η τροχιακή της στροφορμή ως προς οριζόντιο άξονα x που περνά από το κέντρο Ο του τεταρτοκυκλίου.

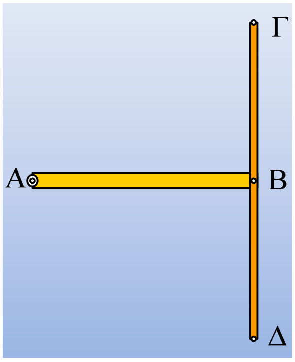
iii) Η (συνολική) στροφορμή της σφαίρας ως προς τον άξονα x.

iv) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας ως προς:

α) τον άξονα ιδιοπεριστροφής της

β) τον άξονα x.

17. Στροφορμή στερεού και γωνιακή ταχύτητα.



Στο άκρον Β μιας ομογενούς δοκού ΑΒ μήκους ℓ_1 =2m και μάζας M_1=3kg, έχει προσδεθεί το μέσον μιας δεύτερης ομογενούς δοκού ΓΔ, μήκους ℓ_2=4m και μάζας M_2=3kg, οπότε έχουμε δημιουργήσει ένα στερεό Σ, το οποίο μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος περνά από το άκρο

Α της πρώτης δοκού. Φέρνουμε το στερεό στη θέση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, έτσι ώστε η ράβδος ΑΒ να είναι οριζόντια και σε μια στιγμή το αφήνουμε να περιστραφεί.

i) Να βρεθεί η αρχική γωνιακή επιτάχυνση του στερεού, καθώς και οι επιταχύνσεις του κέντρου μάζας Κ του στερεού, καθώς και των σημείων Γ και Δ.

ii) Να υπολογιστεί η μέγιστη ταχύτητα του σημείου Γ.

iii) Τη στιγμή που το σημείο Γ έχει τη μέγιστη ταχύτητά του να βρεθούν:

α) Η στροφορμή του στερεού Σ ως προς (κατά) τον άξονα περιστροφής του στο Α.

β) Η στροφορμή της δοκού ΑΒ ως προς (κατά) τον άξονα περιστροφής της στο Α.

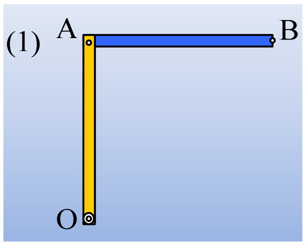
γ) Η στροφορμή της δοκού ΓΔ ως προς (κατά) τον άξονα περιστροφής της στο Α.

iv) Την παραπάνω στιγμή η δοκός ΓΔ λύνεται και κινείται πλέον ελεύθερα. Να βρεθεί η Κινητική ενέργεια της δοκού ΓΔ μετά από χρονικό διάστημα 1s.

Δίνεται $g=10m/s^2$ και η ροπή αδράνειας μιας δοκού ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της

$$I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2.$$

18. Μια ορθή γωνία στρέφεται.



Διαθέτουμε δύο όμοιες ομογενείς ράβδους με μήκος ℓ=1m και μάζα M=3kg η καθεμιά. Τις καρφώνουμε ενώνοντας το ένα τους άκρο Α σχηματίζοντας γωνία 90°, δημιουργώντας ένα στερεό Σ, το οποίο μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο Ο της ράβδου ΟΑ, όπως στο σχήμα, χωρίς τριβές. Φέρνουμε το στερεό Σ σε τέτοια θέση, ώστε η ράβδος ΑΒ να είναι οριζόντια και το αφήνουμε να κινηθεί.

i) Να βρεθεί η ροπή αδράνειας του στερεού Σ καθώς και η αρχική επιτάχυνση του άκρου Β της ράβδου ΑΒ.

ii) Για την θέση (2) που η ράβδος ΑΒ γίνεται ξανά οριζόντια, να υπολογιστούν:

α) η ταχύτητα του άκρου Β και ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητάς του.

β) η στροφορμή του στερεού Σ και η στροφορμή κάθε ράβδου, ως προς (κατά) τον άξονα περιστροφής.

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ως προς (κατά) τον άξονα περιστροφής του στερεού Σ και οι αντίστοιχοι ρυθμοί για κάθε ράβδο.

δ) Η ροπή που ασκείται στην ράβδο ΑΒ από την ράβδο ΟΑ ως προς τον άξονα περιστροφής στο Ο.

19. Η στροφορμή και μια κρούση.

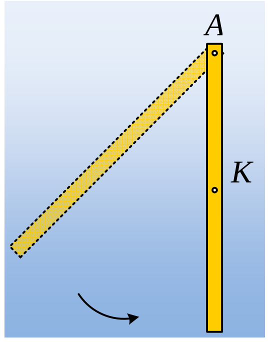
Μια ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους ℓ =2m μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το ένα άκρο της Α, σε κατακόρυφο επίπεδο. Η ράβδος αφήνεται από κάποια θέση και φτάνοντας στην κατακόρυφη θέση έχει γωνιακή ταχύτητα ω_1=3rad/s.

i) Δυο μαθητές συζητώντας για τη στροφορμή της ράβδου στη θέση αυτή, ως προς τον άξονα ο οποίος περνά από το άκρο Α, υποστηρίζουν:

α) Ο Α, η στροφορμή δίνεται από την εξίσωση $L_A=I_A\cdot\omega$.

β) Ο Β, η στροφορμή της ράβδου δίνεται από την εξίσωση $L_A=I_{cm}\cdot\omega + m\upsilon_m\cdot R$, όπου R= ½ℓ η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει το κέντρο μάζας Κ της ράβδου.

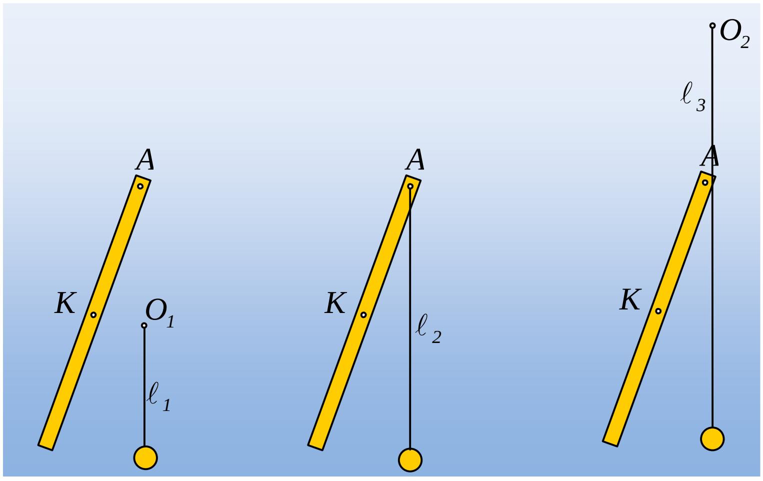
Ποιος έχει δίκιο;



ii) Στη θέση αυτή η ράβδος συγκρούεται με μια μικρή σφαίρα που θεωρείται υλικό σημείο μάζας ½ m, η οποία αμέσως μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα υ. Η σφαίρα κρέμεται από νήμα, σε τρεις διαφορετικές εκδοχές, που φαίνονται στο σχήμα, όπου για το μήκος του νήματος ισχύει:

α) ℓ_1= ½ ℓ β) ℓ_2= ℓ, γ) ℓ_3= 1,5 ℓ.

Σε ποια περίπτωση η σφαίρα αποκτά μεγαλύτερη ταχύτητα;



iii) Η σφαίρα αποκτά αμέσως μετά την κρούση ταχύτητα υ=3m/s. Θέλουμε να βρούμε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά την κρούση και μας προτείνονται οι απόψεις τριών μαθητών Α, Β και Γ:

Α) Να εφαρμόσουμε για την κρούση της αρχή διατήρηση της ορμής.

Β) Να εφαρμόσουμε και για τα τρία σχήματα την ΑΔΣ ως προς όποιο σημείο θέλουμε.

Γ) Να εφαρμόσουμε την αρχή διατήρηση της στροφορμής (ΑΔΣ) ως προς το σημείο Α.

Ποιος ή ποιοι μαθητές έχουν δίκιο;

iv) Να υπολογίσετε την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά την κρούση και στις τρεις παραπάνω περιπτώσεις.

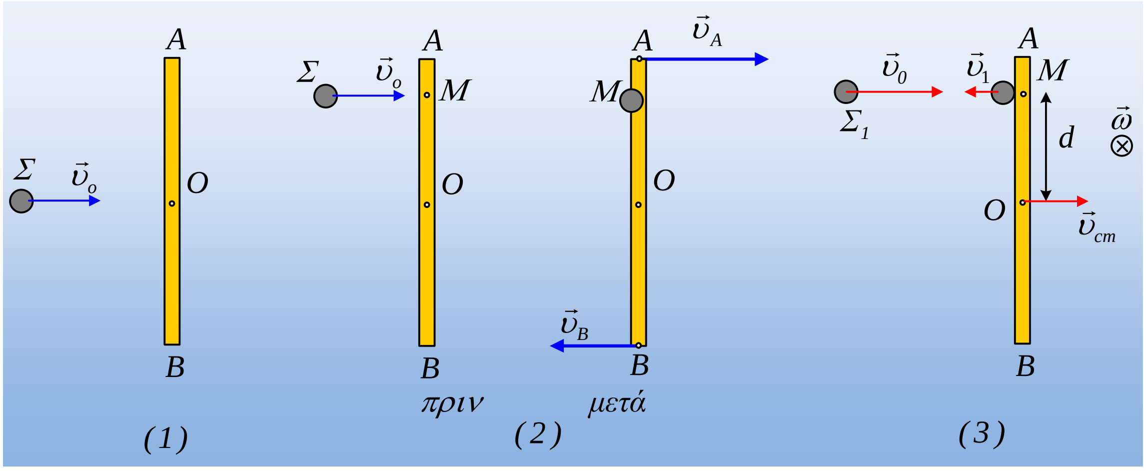
Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I= m\ell^2/12$.

20. Κρούση και κέντρο μάζας.

Μια ομογενής ράβδος μάζας 3m και μήκους ℓ =6m ηρεμεί σε οριζόντια θέση σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα σώμα Σ μάζας m που θεωρείται υλικό σημείο κινείται με ταχύτητα υ_0=8m/s, σε διεύθυνση κάθετη στη ράβδο και προσκολλάται σε αυτήν, στο μέσον της Ο.

i) Να βρεθεί το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμική κατά την κρούση.

Επαναλαμβάνουμε το πείραμα, αλλά τώρα το σώμα Σ προσκολλάται στο σημείο Μ της ράβδου δημιουργώντας έτσι ένα στερεό S. Αμέσως μετά την κρούση τα άκρα Α και Β της ράβδου έχουν ταχύτητες μέτρων υ_A=4,5m/s και υ_B=1,5m/s, όπως στο (2) σχήμα. Να βρεθούν:



ii) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας Κ και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του στερεού S.

iii) Η θέση του κέντρου μάζας Κ γύρω από το οποίο στρέφεται το σύστημα μετά την κρούση.

iv) Ποιο είναι στην περίπτωση αυτή, το αντίστοιχο ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμική κατά την κρούση;

Σε μια επανάληψη του πειράματος, το σώμα Σ αντικαθίσταται από άλλο Σ_1 ίδιας μάζας, το οποίο κτυπά ξανά τη ράβδο στο σημείο Μ, με την ίδια ταχύτητα υ_0. Μετά την κρούση το Σ_1, κινείται προς τ' αριστερά με ταχύτητα μέτρου υ_1=1m/s.

v) Ποιο είναι τώρα το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμική κατά την κρούση;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I = \frac{1}{12} m\ell^2$.