

Τάξη Γ Λυκείου
Διαγώνισμα επανάληψης στο στερεό σώμα
Θέματα

ΘΕΜΑ Α

A1. Ένας δίσκος περιστρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του, με την γωνιακή του ταχύτητα να μειώνεται. Τα διανυσματικά μεγέθη που είναι ομόρροπα είναι:

- α. η γωνιακή ταχύτητα, και η γωνιακή επιτάχυνση
- β. η γωνιακή και η γραμμική ταχύτητα
- γ. η γραμμική ταχύτητα και η γωνιακή επιτάχυνση
- δ. κανένα από τα παραπάνω

A2. Ένας τροχός κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο με το κέντρο μάζας του να έχει ταχύτητα μέτρου v_{cm} . Ένα σημείο που βρίσκεται πάνω στην κατακόρυφη διάμετρο του τροχού που διέρχεται από το κέντρο μάζας του έχει συνισταμένη ταχύτητα που έχει μέτρο $0,25v_{cm}$. Η γραμμική ταχύτητα που έχει το σημείο αυτό εξαιτίας της περιστροφικής κίνησης του τροχού είναι

- α. $0,75v_{cm}$ και ομόρροπη της v_{cm}
- β. $0,75v_{cm}$ και αντίρροπη της v_{cm}
- γ. v_{cm} και αντίρροπη της v_{cm}
- δ. $1,25v_{cm}$ και αντίρροπη της v_{cm}

A3. Η ροπή μιας δύναμης $\vec{F}$ ως προς άξονα:

- α. είναι μηδέν, όταν ο φορέας της τέμνει τον άξονα.
- β. είναι μονόμετρο μέγεθος.
- γ. αλλάζει, όταν η δύναμη μετακινείται πάνω στο φορέα της.
- δ. έχει ως μονάδα μέτρησης στο σύστημα S.I. το 1 N/m .

A4. Η ολική στροφορμή ενός συστήματος σωμάτων παραμένει σταθερή:

- α. πάντοτε.
- β. όταν η συνολική ροπή των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική,
- γ. όταν η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική.
- δ. όταν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική.

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με το γράμμα Σ αν είναι σωστή ή με το γράμμα Λ αν είναι λανθασμένη.

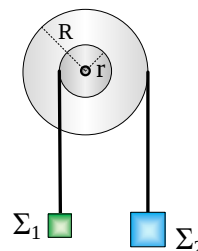
- α. Η φορά της ροπής δύναμης ως προς άξονα προσδιορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού.
- β. Στη μεταφορική κίνηση, κάθε στιγμή όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα.
- γ. Το μέτρο της ροπής ενός ζεύγους δυνάμεων εξαρτάται από τη θέση του άξονα περιστροφής του σώματος, στο οποίο δρουν οι δύο δυνάμεις του ζεύγους.
- δ. Ζεύγος δυνάμεων είναι το σύστημα δύο οποιονδήποτε παράλληλων και αντίρροπων δυνάμεων.
- ε. Η δύναμη του βάρους ενός στερεού σώματος δεν δημιουργεί ποτέ ροπή.

ΘΕΜΑ Β

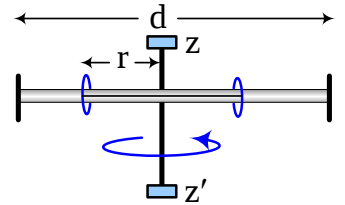
Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση αιτιολογώντας την επιλογή σας.

B1. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε ένα σύστημα διπλής τροχαλίας με σχέση ακτίνων $R = 3r$. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 αρχικά βρίσκονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο. Κάποια στιγμή αφήνουμε το σύστημα τροχαλία – Σ_1 – Σ_2 ελεύθερο να κινηθεί και η τροχαλία αποκτά γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_\gamma = 5 \text{ rad/s}^2$ ωρολογιακής φοράς. Η στιγμή που τα σώματα απέχουν κατακόρυφα απόσταση $s = 10r$, θα είναι:

- α. $t = 5 \text{ s}$
- β. $t = 1 \text{ s}$
- γ. $t = 0,2 \text{ s}$



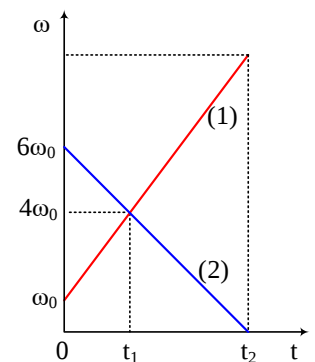
B2. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται μια αβαρής και λεπτή ράβδος ΑΓ, μήκους d , η οποία περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο ακλόνητο άξονα (z/z') που διέρχεται από το μέσο της Μ. Δύο δακτυλίδια ίσης μάζας m είναι δεμένα με αβαρές και μη εκτατό νήμα στον άξονα και βρίσκονται σε απόσταση $r = d/4$ από αυτόν. Το σύστημα των δύο δακτυλιδιών έχει κινητική ενέργεια K_1 . Κάποια χρονική στιγμή κόβουμε ταυτόχρονα τα νήματα που συγκρατούν τα δύο δακτυλίδια, οπότε αυτά κινούνται χωρίς τριβές προς τα άκρα της ράβδου και καρφώνονται σε αυτά. Η κινητική ενέργεια των δύο δακτυλιδιών γίνεται ίση με K_2 . Ο λόγος $\frac{K_1}{K_2}$ είναι ίσος με:



- α. $\frac{K_1}{K_2} = 4$ β. $\frac{K_1}{K_2} = \frac{3}{4}$ γ. $\frac{K_1}{K_2} = 2$

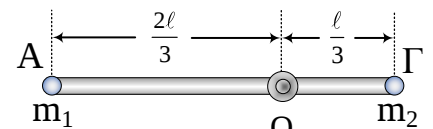
Δίνεται ότι η αβαρής κινούμενη ράβδος δεν έχει στροφορμή ούτε κινητική ενέργεια.

B3. Δύο τροχοί T_1 και T_2 κυλίνουν χωρίς να ολισθαίνουν, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο. Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται η γραφική παράσταση του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας του κάθε τροχού, σε συνάρτηση με το χρόνο. Τη χρονική στιγμή t_2 , ο λόγος $\frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2}$ της γωνιακής μετατόπισης που έχει διαγράψει ο τροχός T_1 προς την αντίστοιχη γωνιακή μετατόπιση που έχει διαγράψει ο τροχός T_2 , θα είναι ίσος με:



- α. $\frac{16}{5}$ β. $\frac{11}{6}$ γ. $\frac{6}{11}$

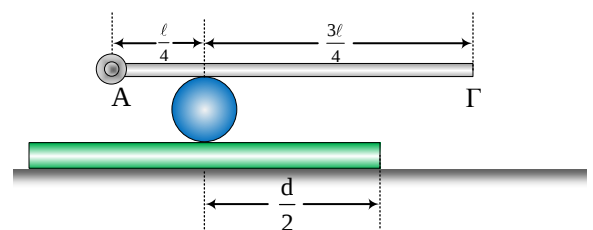
B4. Στο διπλανό διάγραμμα τα δύο σφαιρίδια που τα θεωρούμε σημειακά αντικείμενα είναι κολλημένα στα άκρα Α και Γ αβαρούς ράβδου έχουν μάζες $m_1 = 2m$ και $m_2 = m$ αντίστοιχα. Η ράβδος που τα συγκρατεί είναι αβαρής και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από το σημείο Ο. Η απόσταση του άκρου Α από το Ο είναι $2\ell/3$ και του Γ από το Ο, $\ell/3$, όπου ℓ το μήκος της ράβδου. Αρχικά με την βοήθεια κάποιας εξωτερικής δύναμης συγκρατούμε τη ράβδο σε οριζόντια θέση και την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αφήνουμε το σύστημα να κινηθεί. Τη στιγμή $t_0 = 0$ ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι ίσος με:



- α. $2mg\ell$ β. $\frac{5mg\ell}{3}$ γ. $mg\ell$

ΘΕΜΑ Γ

Μία λεπτή ομογενής ράβδος (ρ_1) μήκους $\ell = (ΑΓ) = 4 \text{ m}$ και βάρους $w_1 = 10 \text{ N}$, είναι αρθρωμένη στο σημείο Α και ισορροπεί οριζόντια ακουμπώντας πάνω σε μία ομογενή σφαίρα ακτίνας $R = 20 \text{ cm}$ βάρους $w_2 = 20 \text{ N}$. Το σημείο επαφής σφαίρας ράβδου απέχει απόσταση $\ell/4$ από το σημείο Α. Η σφαίρα βρίσκεται πάνω σε άλλη ομογενή ράβδο μήκους d και ακουμπά ακριβώς στο μέσο της, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



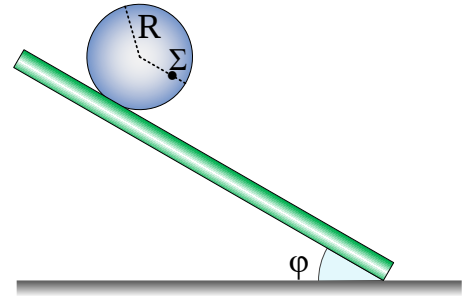
α. Να βρείτε τη δύναμη που δέχεται η κάτω ράβδος (ρ_2) από τη σφαίρα.

- Κάποια στιγμή δίνουμε στην κάτω ράβδο (ρ_2) ταχύτητα μέτρου v και η σφαίρα δεν ολισθαίνει με καμία ράβδο.

β. Να βρείτε το μήκος d της ράβδου ρ_2 , αν η σφαίρα χάνει ταυτόχρονα την επαφή της και με τις δύο ράβδους.
 γ. Να βρείτε τον αριθμό των περιστροφών που έχει κάνει η σφαίρα ως τότε.

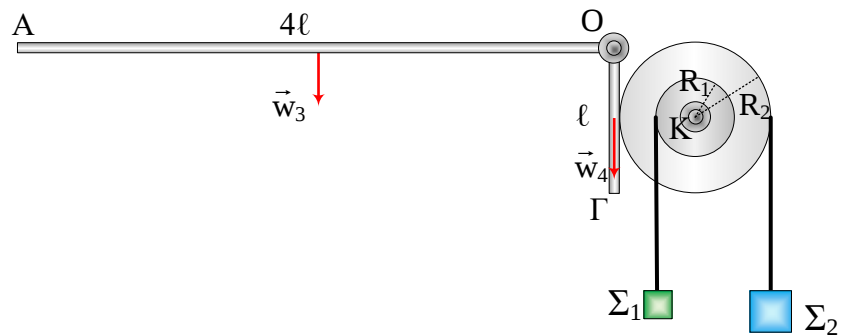
- Με την ίδια ράβδο (ρ_2) και τη σφαίρα φτιάχνουμε ένα κεκλιμένο επίπεδο τέτοιο ώστε μόλις αφήσουμε την σφαίρα να κυλίσει (χωρίς ολίσθηση) πάνω σε αυτό να αποκτά επιτάχυνση μέτρου $a_{cm} = 5 \text{ m/s}^2$.

δ. Να βρείτε ποια χρονική στιγμή (μετά την εκκίνηση) το σημείο Σ της σφαίρας που βρίσκεται σε μία ακτίνα παράλληλη με το κεκλιμένο επίπεδο και απέχει $r = 5 \text{ cm}$ από την περιφέρεια θα αποκτήσει ταχύτητα μέτρου $v = 2,5 \text{ m/s}$.



ΘΕΜΑ Δ

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε μία διπλή τροχαλία με ακτίνες R_1 και $R_2 = 2R_1$. Στους δύο δίσκους έχουμε δέσει μέσω αβαρών μη εκτατών νημάτων τα σώματα Σ_1 μάζας m_1 και Σ_2 μάζας $m_2 = 5 \text{ kg}$. Το σύστημα τροχαλία, Σ_1 , Σ_2 ισορροπεί εξαιτίας της δύναμης τριβής $T_{στ} = 40 \text{ N}$ (που έχει ίδια φορά με το βάρος) που δέχεται από τις δύο ομογενείς ράβδους με βάρη $\vec{w}_3$ και $\vec{w}_4$ αντίστοιχα. Ο



συντελεστής οριακής τριβής μεταξύ ράβδου και τροχαλίας είναι $\mu = 0,5$. Αν κόψουμε το νήμα που συγκρατεί το Σ_1 τότε το σύστημα των τροχαλιών μόλις που δεν ολισθαίνει στην επαφή ράβδου τροχαλίας. Οι δύο ράβδοι (κάθετα συγκολλημένες στο O), όπως φαίνονται στο σχήμα έχουν, η δε κατακόρυφη μήκος ℓ και η οριζόντια μήκος 4ℓ όπως φαίνεται στο σχήμα.

α. Να βρείτε τη μάζα m_1 του σώματος Σ_1

β. Να βρείτε την κάθετη δύναμη $\vec{N}$ που ασκεί στις ράβδους η τροχαλία.

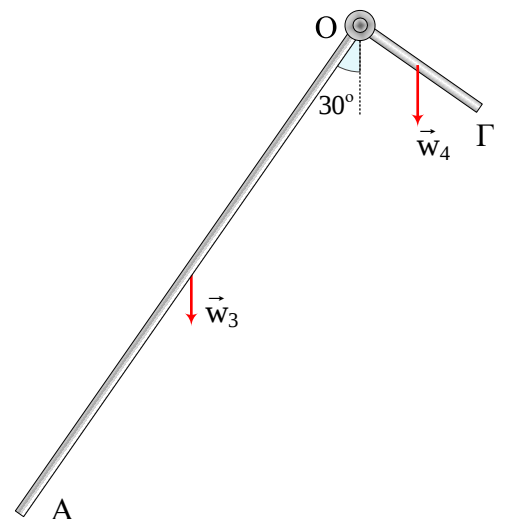
γ. Να βρείτε το βάρος w_3 της αρχικά οριζόντιας ράβδου.

- Απομακρύνουμε τη διπλή τροχαλία και το σύστημα των δύο ράβδων ισορροπεί σε τέτοια θέση όπου η μακρύτερη ράβδος σχηματίζει με την κατακόρυφο που περνά από τον άξονα O , σχηματίζει γωνία $\theta = 30^\circ$.

δ. Να δείξετε ότι οι δύο ράβδοι δεν είναι κατασκευασμένες από το ίδιο υλικό.

Σημείωση: Σε ένα ομογενές σώμα, το βάρος του είναι ανάλογο του μήκους του.

Δίνεται ότι $g = 10 \text{ m/s}^2$. Θεωρείστε αμελητέο το πάχος των ράβδων.



ΘΕΜΑ Α

A1. δ, A2. β, A3. α, A4. γ, A5. Σ, Σ, Λ, Λ, Λ.

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστό το β.

Αφού το Σ_2 κατεβαίνει και το Σ_1 ανεβαίνει θα ισχύει:

$$s = s_1 + s_2 = r\theta + R\theta = r\theta + 3r\theta = 4r\theta \Rightarrow 10r = 4r\theta \Rightarrow \theta = 2,5 \text{ rad} \Rightarrow \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2 = 2,5 \Rightarrow t = 1 \text{ s.}$$

B2. Σωστή απάντηση το α.

Στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές οπότε:

$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow 2mvr = 2mv'\frac{d}{2} \Rightarrow v\frac{d}{4} = v'\frac{d}{2} \Rightarrow v = 2v'$$

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{2\frac{1}{2}mv^2}{2\frac{1}{2}mv'^2} = \frac{v^2}{v'^2} = \frac{4v'^2}{v'^2} \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = 4$$

B3. Σωστή απάντηση το β.

Για την γωνιακή επιτάχυνση του T_2 ισχύει:

$$\alpha_{\gamma 2} = \frac{0 - 6\omega_0}{t_2} \text{ αλλά και } \alpha_{\gamma 2} = \frac{4\omega_0 - 6\omega_0}{t_1} \text{ άρα:}$$

$$\frac{0 - 6\omega_0}{t_2} = \frac{4\omega_0 - 6\omega_0}{t_1} \Rightarrow \frac{-6\omega_0}{t_2} = \frac{-2\omega_0}{t_1} \Rightarrow t_2 = 3t_1$$

$$\text{Για τον τροχό } T_1 \text{ έχουμε: } \alpha_{\gamma 1} = \frac{4\omega_0 - \omega_0}{t_1} = \frac{3\omega_0}{t_1} = \frac{9\omega_0}{t_2}$$

και η τελική του γωνιακή ταχύτητα είναι:

$$\omega_1 = \omega_0 + \alpha_{\gamma 1}t_2 = \omega_0 + \frac{9\omega_0}{t_2}t_2 \Rightarrow \omega_1 = 10\omega_0.$$

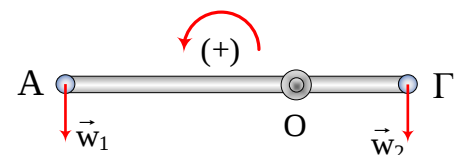
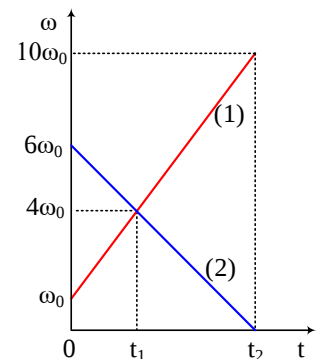
Η γωνιακή μετατόπιση είναι ίση με το εμβαδόν της συνάρτησης και του άξονα των χρόνων.

$$\frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2} = \frac{E\mu\beta_1}{E\mu\beta_2} = \frac{\frac{\omega_0 + 10\omega_0}{2}t_2}{\frac{6\omega_0 t_2}{2}} \Rightarrow \frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2} = \frac{11}{6}$$

B4. Σωστή απάντηση το γ.

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι ίσος με:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau_{\epsilon\varsigma} = m_1g\frac{2\ell}{3} - m_2g\frac{\ell}{3} = 2mg\frac{2\ell}{3} - mg\frac{\ell}{3} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = mg\ell$$



ΘΕΜΑ Γ

α. Για την ισορροπία της ράβδου:

$$\Sigma \tau_A = 0 \Rightarrow N_1 \frac{\ell}{4} - w_1 \frac{\ell}{2} = 0 \Rightarrow N_1 = 2w_1 \Rightarrow N_1 = 20 \text{ N}.$$

Η σφαίρα δέχεται από τη ράβδο δύναμη ίσου μέτρου και αντιθέτου φοράς $N'_1 = N_1 = 20 \text{ N}$

Για την ισορροπία της σφαίρας:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow N'_1 + w_2 = N_2 \Rightarrow N_2 = 40 \text{ N}.$$

Η ράβδος ρ_2 δέχεται από τη σφαίρα δύναμη ίσου μέτρου και αντιθέτου φοράς $N'_2 = N_2 = 40 \text{ N}$

β. Εφόσον η σφαίρα δεν ολισθαίνει σε καμία ράβδο, πρέπει τα σημεία επαφής να έχουν ίδια ταχύτητα με αυτά των ράβδων.

Ανώτερο σημείο:

$$v_{av} = 0 \Rightarrow v_{cm} - v_{\gamma\rho} = 0$$

$$\Rightarrow v_{cm} = v_{\gamma\rho}$$

$$\text{Κατώτερο σημείο } v_{κατ} = v \Rightarrow v_{cm} + v_{\gamma\rho} = v \Rightarrow v_{cm} + v_{cm} = v \Rightarrow 2v_{cm} = v$$

Για τις αποστάσεις $s_{\sigma\phi}$ της σφαίρας και s_ρ της ράβδου 2 ισχύει:

$$\frac{s_{\sigma\phi}}{s_\rho} = \frac{v_{cm} t}{v t} = \frac{v_{cm}}{2v_{cm}} = \frac{1}{2} \Rightarrow s_\rho = 2s_{\sigma\phi}, \text{ αλλά η σφαίρα φτάνει στο άκρο της πάνω ράβδου, οπότε } s_{\sigma\phi} = 3\ell/4$$

$$\text{άρα } s_\rho = 2s_{\sigma\phi} = 3\ell/2 = 6 \text{ m}.$$

$$\text{Σύμφωνα με το σχήμα } s_\rho = d/2 + 3\ell/4 \Rightarrow d = 2s_\rho - 3\ell/2 \Rightarrow d = 6 \text{ m}.$$

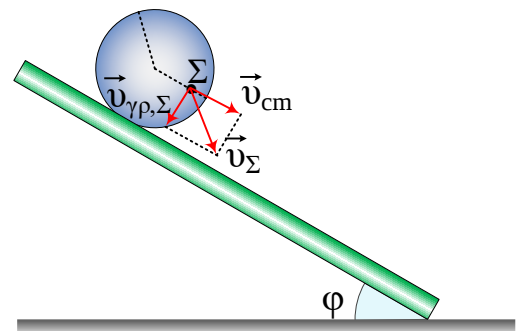
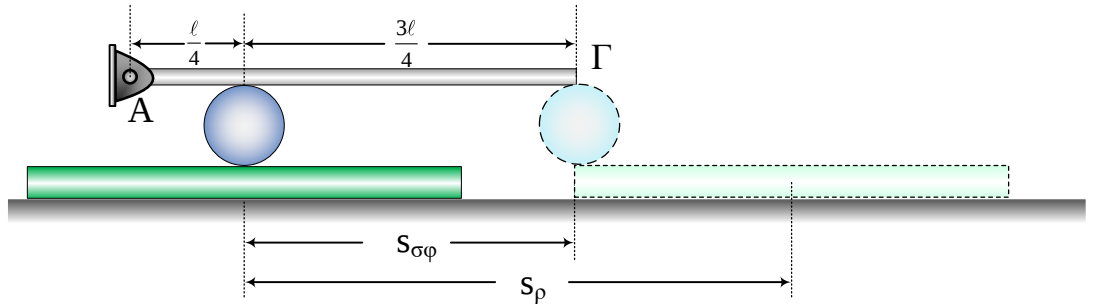
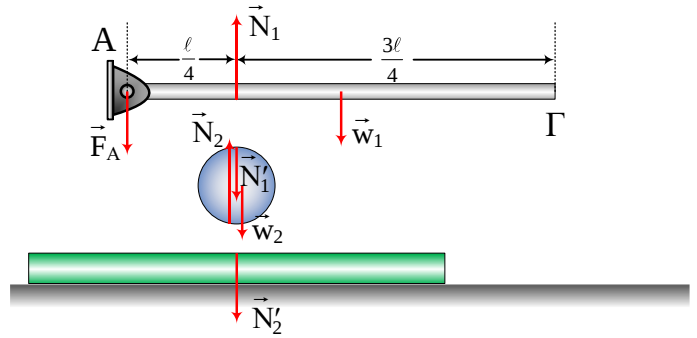
$$\gamma. \text{ Για τη σφαίρα ισχύει: } s_{\sigma\phi} = N \cdot 2\pi R \Rightarrow N = \frac{s_{\sigma\phi}}{2\pi R} \Rightarrow N = \frac{3}{2\pi \cdot 0,2} \Rightarrow N = \frac{7,5}{\pi} \text{ περ.}$$

δ. Η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο, άρα: $v_{cm} = v_{\gamma\rho(R)}$ όπου $v_{\gamma\rho(R)}$ η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας.

$$\frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{dv_{\gamma\rho(R)}}{dt} \Rightarrow \alpha_{cm} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha_\gamma$$

Για την ταχύτητα του Σ έχουμε:

$$\begin{aligned} \vec{v}_\Sigma &= \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma\rho,\Sigma} \Rightarrow v_\Sigma = \sqrt{v_{cm}^2 + (\omega(R-r))^2} = \\ &= \sqrt{v_{cm}^2 + \left(\frac{v_{cm}}{R}(R-r)\right)^2} = \sqrt{v_{cm}^2 + \frac{9}{16}v_{cm}^2} = \sqrt{\frac{25}{16}v_{cm}^2} = \frac{5}{4}v_{cm} \Rightarrow \\ v_\Sigma &= \frac{5}{4}\alpha_{cm}t \Rightarrow t = \frac{4v_\Sigma}{5\alpha_{cm}} \Rightarrow t = 0,4 \text{ s}. \end{aligned}$$



ΘΕΜΑ Δ

α. Από τις ισορροπίες του Σ_1 και Σ_2 έχουμε: $T'_1 = w_1 = T_1$ και $T'_2 = w_2 = T_2$

Η τροχαλία δε στρέφεται άρα

$$\Sigma \tau_K = 0 \Rightarrow T_1 R_1 - T_2 R_2 + T_{\sigma\tau} R_2 = 0 \Rightarrow m_1 g R_1 - m_2 g 2R_1 + T_{\sigma\tau} 2R_1 = 0 \Rightarrow$$

$$m_1 g = 2m_2 g - 2T_{\sigma\tau} \Rightarrow \mathbf{m_1 = 2 \text{ kg.}}$$

β. Για την διπλή τροχαλία χωρίς το Σ_2 ισχύει:

$$\Sigma \tau_K = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau, \max} R_2 - m_2 g R_2 = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau, \max} = m_2 g \Rightarrow \mathbf{T_{\sigma\tau, \max} = 50 \text{ N.}}$$

$$\text{Αλλά } T_{\sigma\tau, \max} = \mu N \Rightarrow \mathbf{N = 100 \text{ N.}}$$

Η τροχαλία ασκεί – ως δράση αντίδραση – μία δύναμη ίσου μέτρου και αντιθέτου φοράς στο σύστημα των ράβδων. $\mathbf{N' = N = 100 \text{ N.}}$

γ. Το σύστημα των ράβδων ισορροπεί. Άρα

$$\Sigma \tau_O = 0 \Rightarrow w_3 2\ell - N' \ell / 2 = 0 \Rightarrow w_3 = N' / 4 \Rightarrow \mathbf{w_3 = 25 \text{ N.}}$$

δ. Για τη νέα ισορροπία έχουμε:

$$\Sigma \tau_O = 0 \Rightarrow w_3 \eta \mu 30^\circ \cdot 2\ell - w_4 \eta \mu 60^\circ \cdot \ell / 2 = 0 \Rightarrow$$

$$w_3 \frac{1}{2} 2\ell = w_4 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\ell}{2} \Rightarrow$$

$$w_3 = w_4 \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow w_4 = \frac{4w_3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \mathbf{w_4 = \frac{100\sqrt{3}}{3} \text{ N.}}$$

Αν οι δύο ράβδοι ήταν κατασκευασμένες από το ίδιο υλικό θα έπρεπε

$$w_4 = \frac{w_3}{4} \text{ (αφού έχει μήκος το } \frac{1}{4} \text{ της οριζόντιας ράβδου). Άρα άτοπο,}$$

οπότε είναι κατασκευασμένες από διαφορετικό υλικό.

