

Οι πλανήτες κινούνται σε ελλειπτικές τροχιές.



ΓΙΑΤΙ ΟΜΩΣ;

ΑΠΟΣΤΟΛΑΡΑΣ ΦΩΤΙΟΣ-ΦΟΙΒΟΣ
ΒΛΑΧΟΣ ΛΑΜΠΡΟΣ-ΧΡΗΣΤΟΣ
B1

ΠΛΑΝΟ

- **ΤΙ ΧΡΕΙΑΖΟΜΑΣΤΕ:**

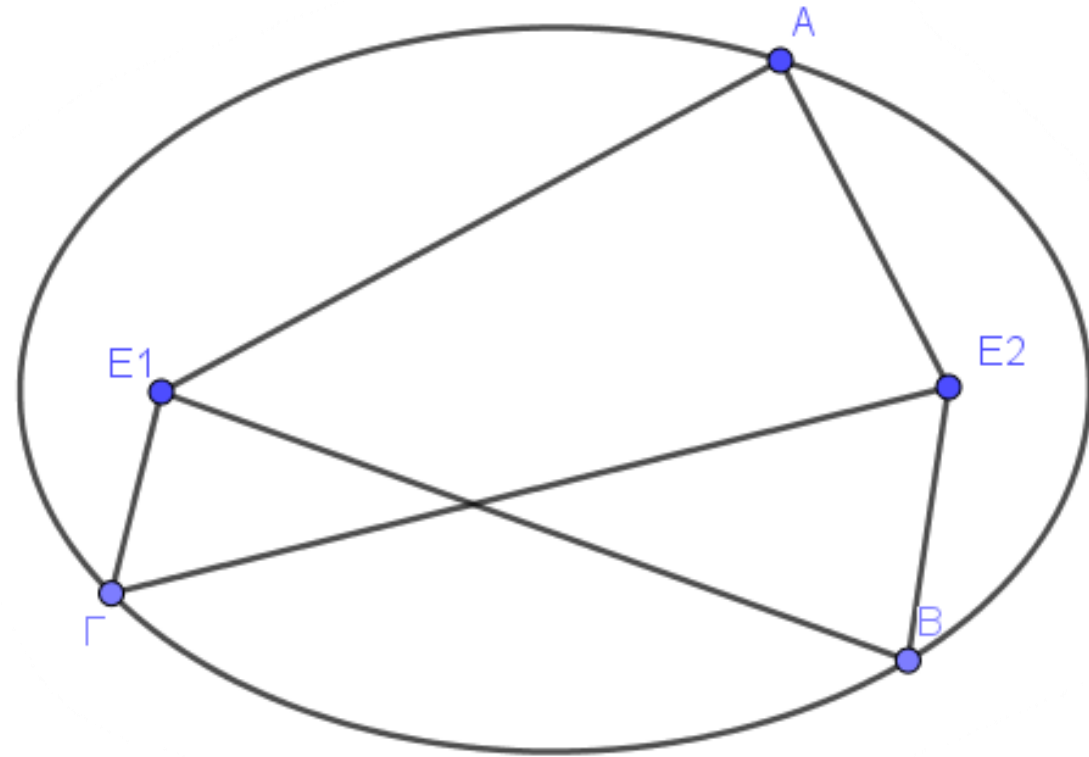
1. Ορισμός έλλειψης.
2. Σχετική γεωμετρική απόδειξη.
3. Στροφορμή - 2ος Νόμος Kepler.
4. Νόμος Παγκόσμιας έλξης.

- **ΤΕΛΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ:**

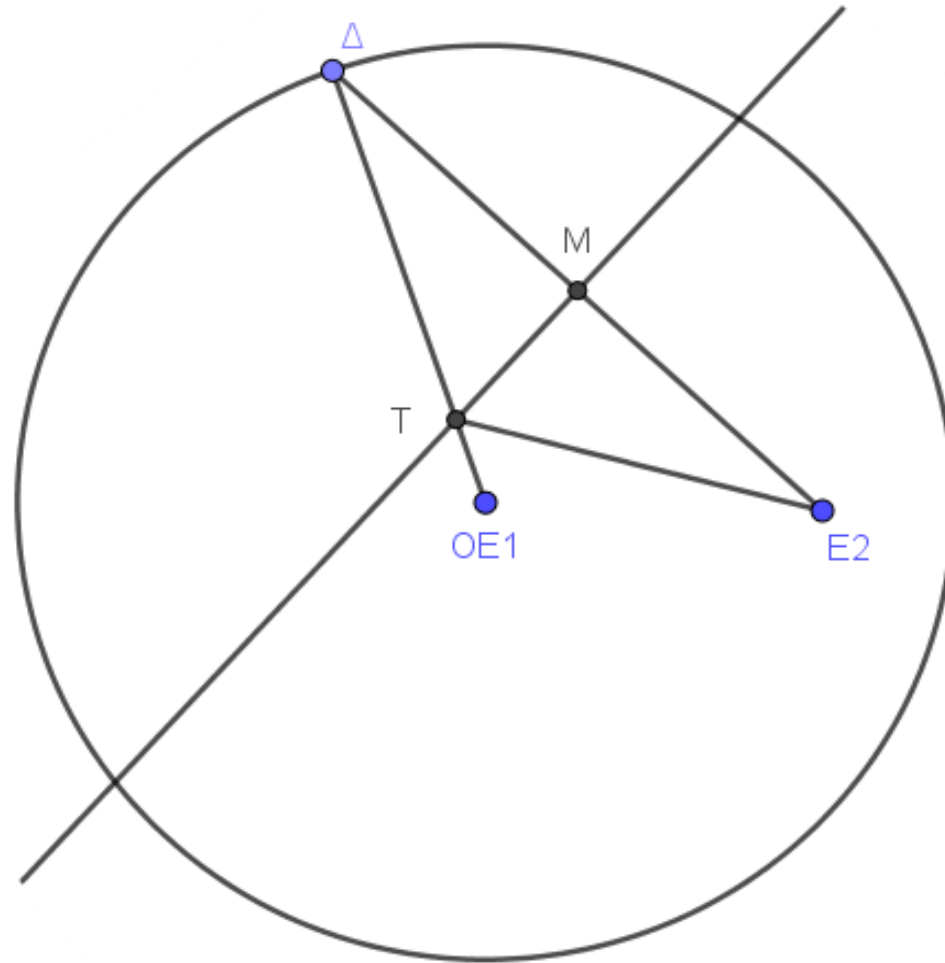
- Θα συσχετίσουμε τις ταχύτητες ενός σώματος με την τροχιά του.
- Να σημειωθεί πως η απόδειξη αν και είναι εκλαϊκευμένη, για να γίνει κατανοητή χρειάζεται πολλή προσοχή. Ρωτάτε τις απορίες σας.

Τι είναι έλλειψη;

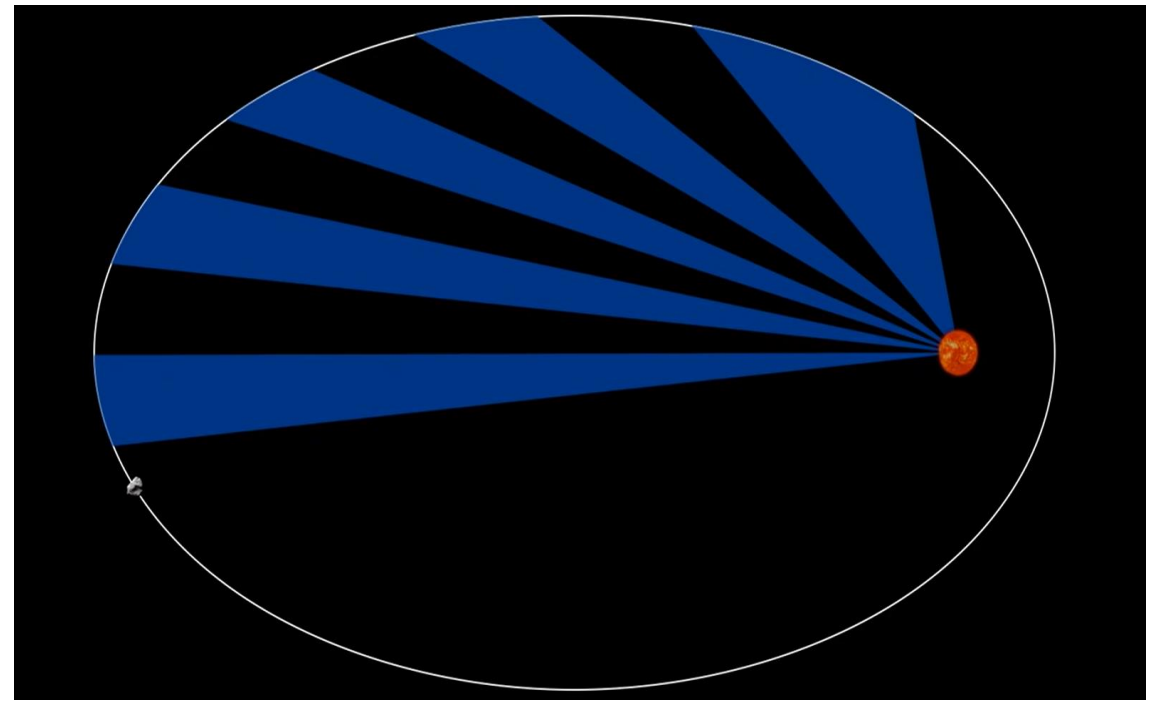
- Παίρνουμε 2 τυχαία σημεία του επιπέδου (2 εστίες) και από εκεί σχεδιάζουμε κάθε σημείο που το άθροισμα των αποστάσεών του από τις 2 εστίες είναι σταθερό.



Έλλειψη εκεί
που δεν το
περιμένεις!

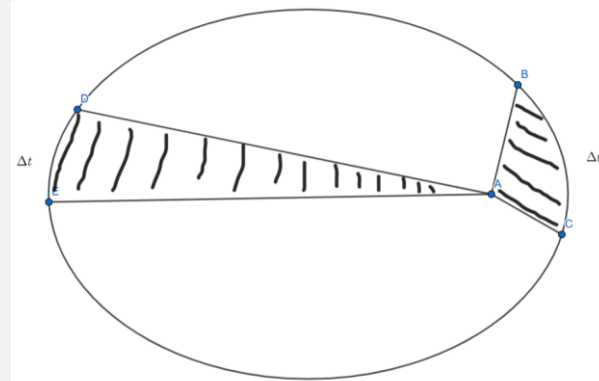


Αρχή διατήρησης της στροφορμής και 2ος Νόμος του Kepler



$$m_1 v_1 R_1 = m_2 v_2 R_2$$

Ίσα $\Delta t \Leftrightarrow$ ίσα εμβαδά



Στροφορμή

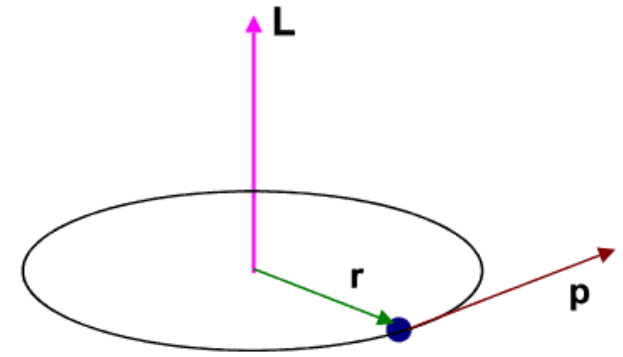
- Τι ορίζουμε ως στροφορμή ενός υλικού σημείου;
 - Θα ορίσουμε πρώτα τη στροφορμή ενός υλικού σημείου που κάνει κυκλική κίνηση και στη συνέχεια θα ορίσουμε την στροφορμή γενικότερα.
 - Ονομάζουμε στροφορμή του υλικού σημείου ως προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς το μέγεθος:

$$L = mur = pr$$

m : η μάζα του υλικού σημείου

u : η ταχύτητα του υλικού σημείου κάθετη στην ακτίνα

r : η ακτίνα



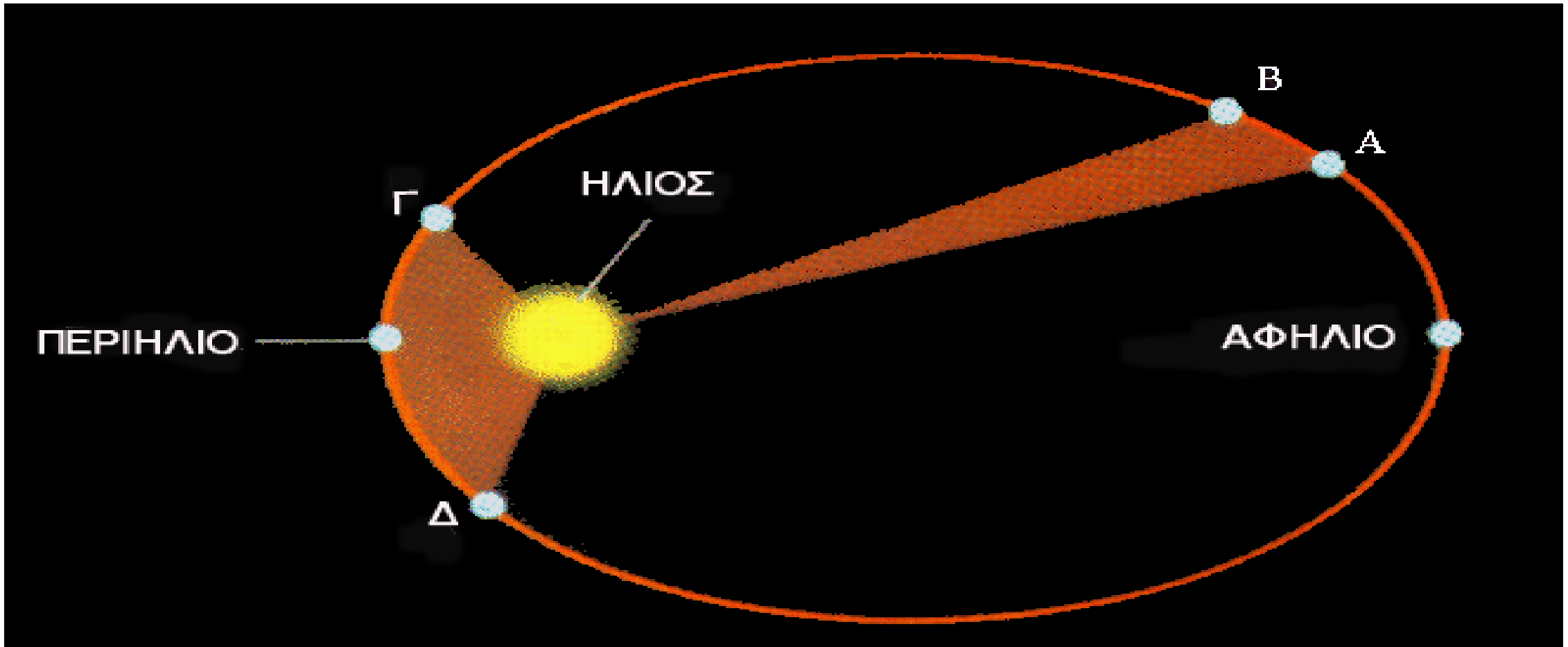
Γενικότερα: το ίδιο γινόμενο, όπου u συμβολίζει πάντα την ταχύτητα **κάθετη** στην ακτίνα του σώματος

Αρχή διατήρησης της στροφορμής:

Το μέγεθος L παραμένει σταθερό (όταν $\Sigma\tau=0$)
Μπορούμε δηλαδή να γράψουμε **$m\mathbf{ur}=L=\text{σταθερό}$**

Απόδειξη του 2ου Νόμου του Kepler

- Σε ίσους χρόνους οι πλανήτες διαγράφουν ίσα εμβαδά



Για μικρό Δt το εμβαδόν που διαγράφει το σώμα είναι ουσιαστικά ένα τρίγωνο



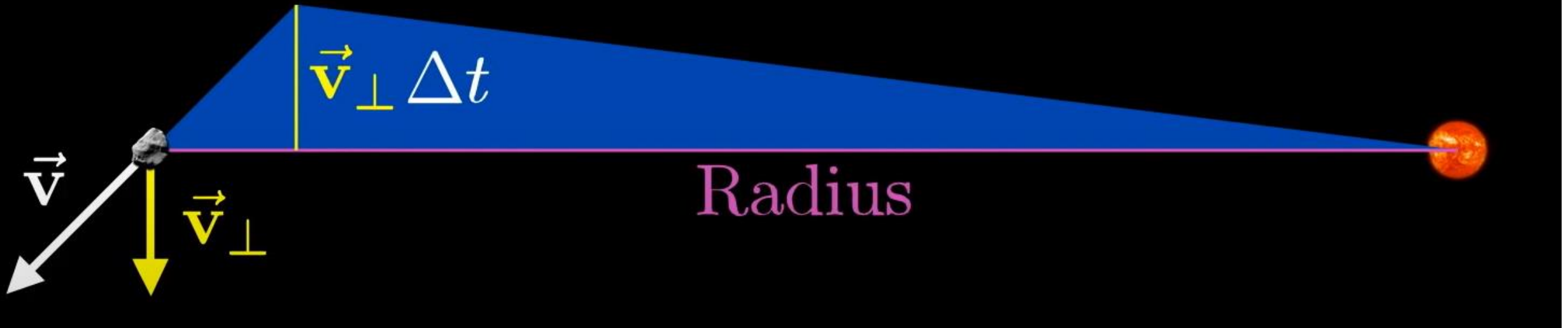
Το εμβαδόν είναι: $E = \frac{1}{2} R * h$
Όμως: $h = u(x) * \Delta t$



Άρα: $E = \frac{1}{2} R * u(x) * \Delta t$

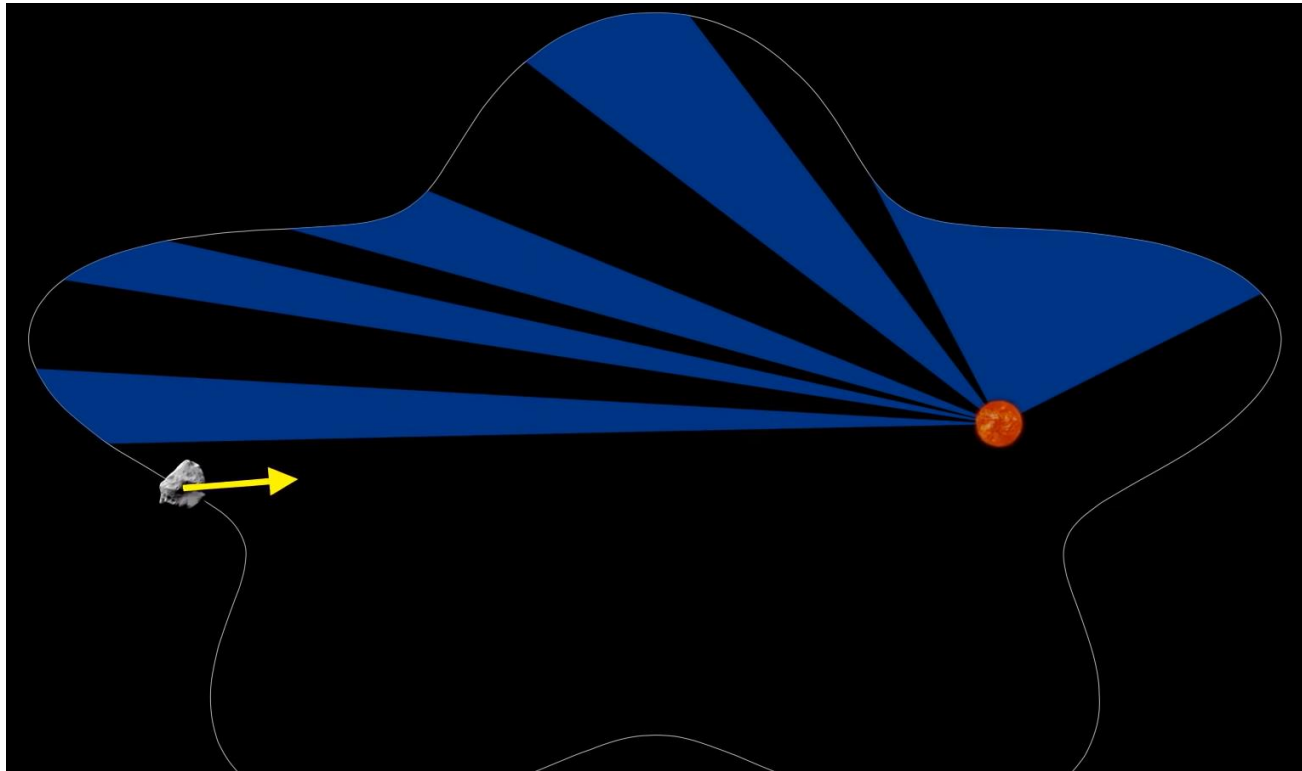
Όμως από την αρχή διατήρησης της στροφορμής:

$$L = R * u(x) * m$$



Συμπέρασμα:

$$\frac{E}{\Delta t} = \left(\frac{L}{2m} \right) = \text{σταθερό}$$

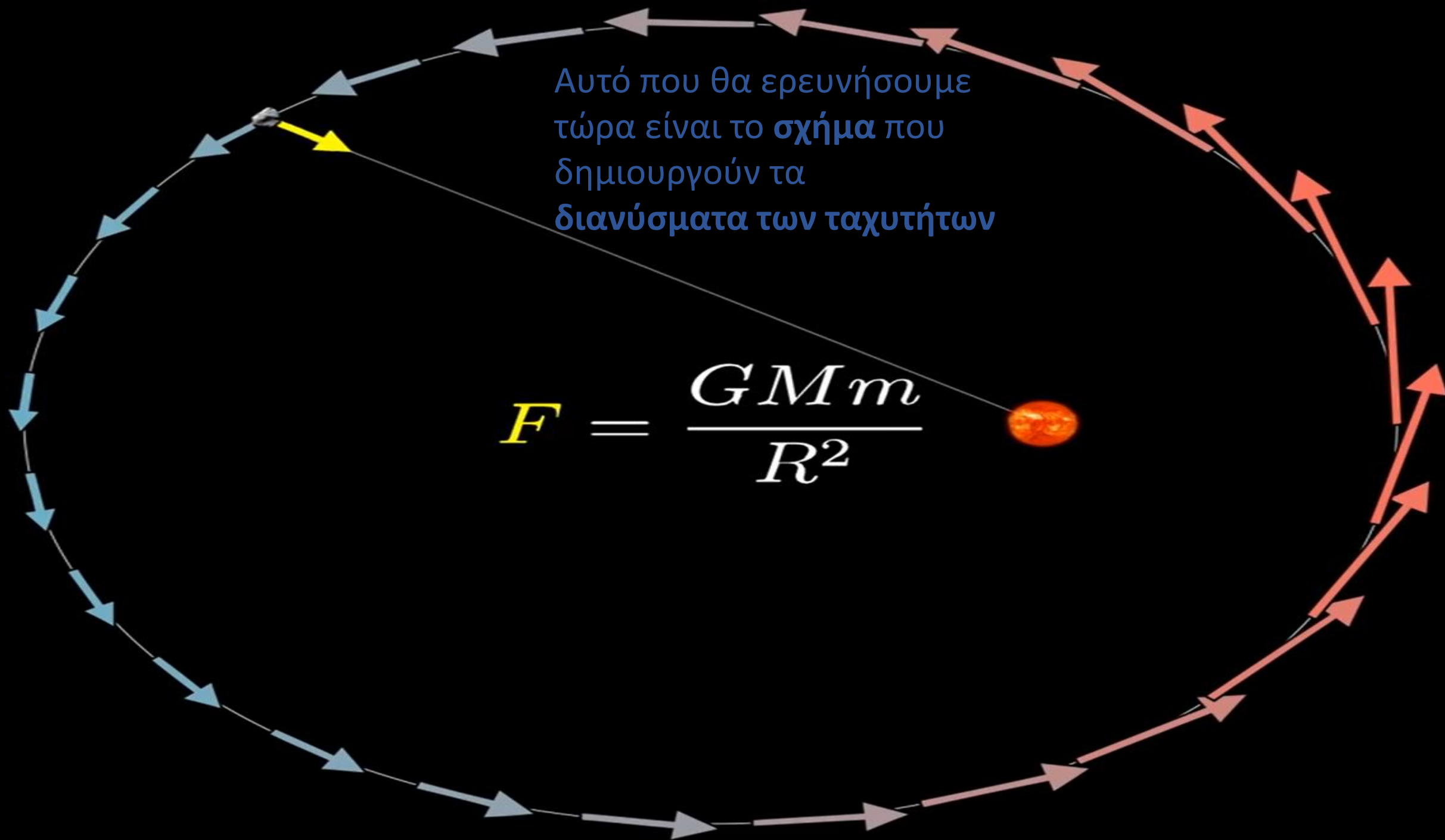


ΠΡΟΣΟΧΗ!

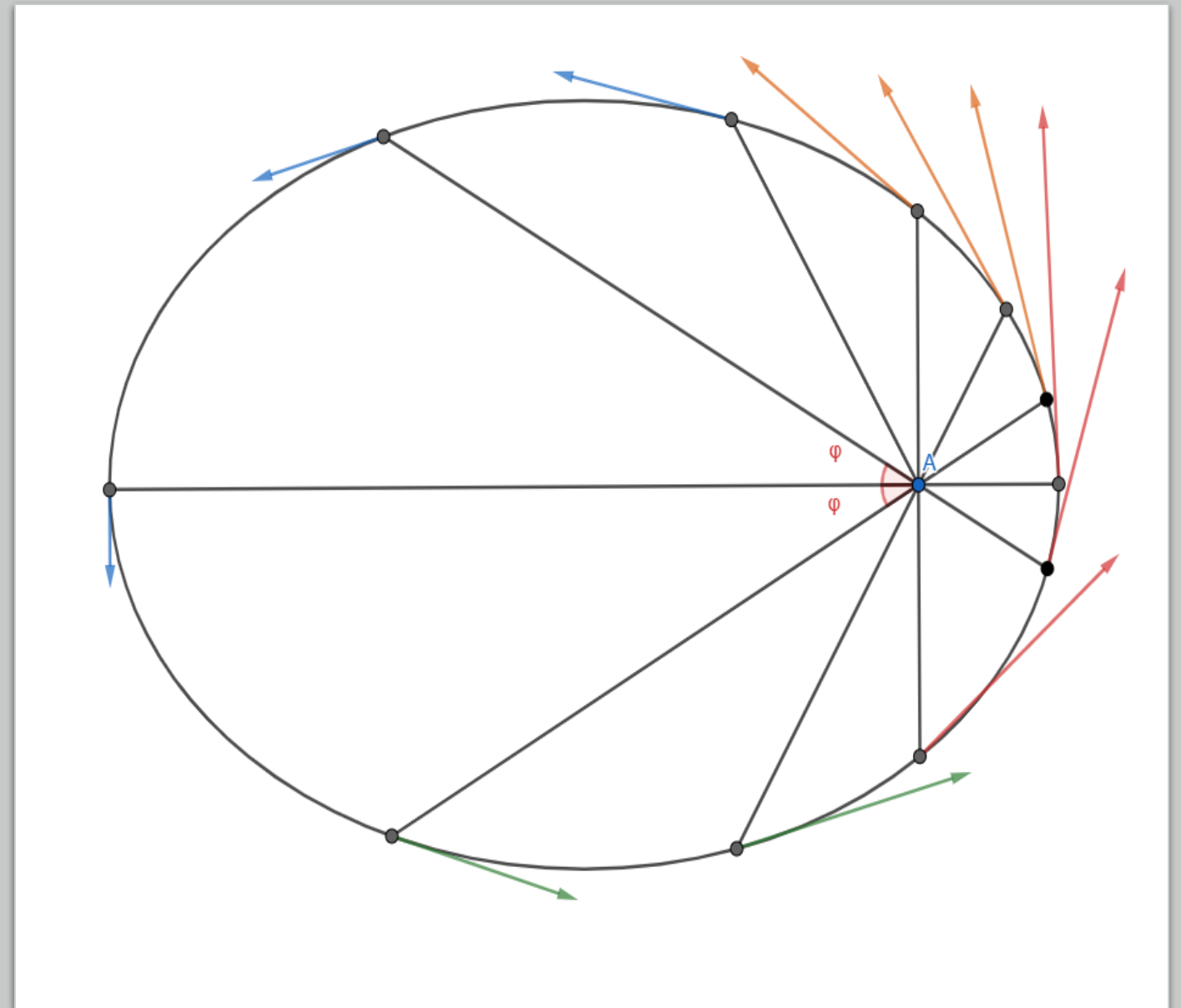
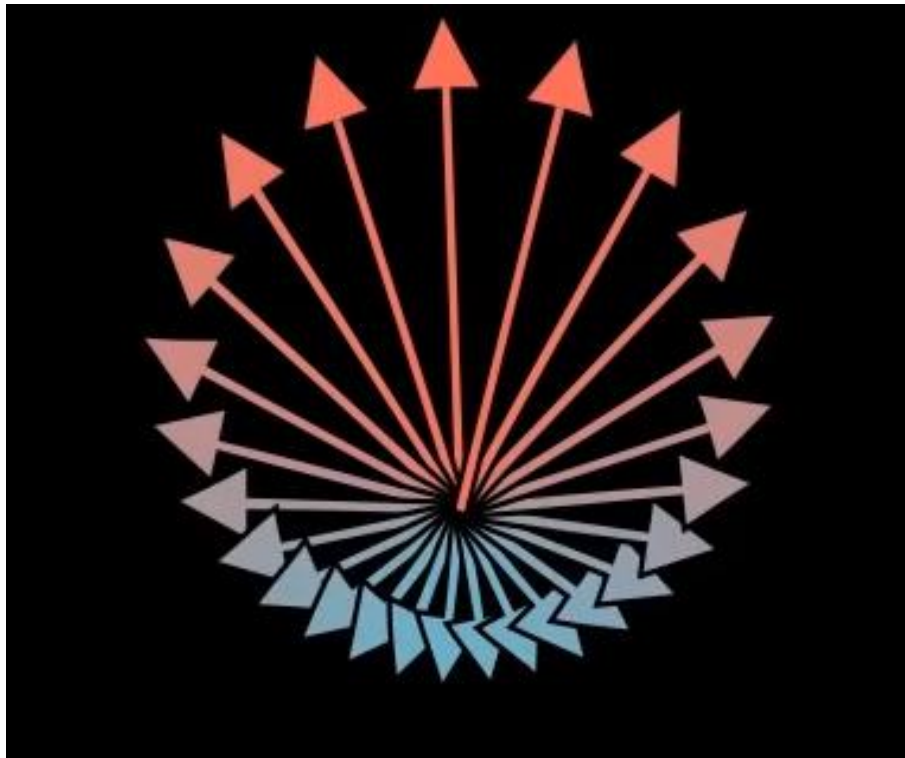
- Πουθενά δεν υποθέσαμε ότι οι τροχιές είναι ελλειπτικές. Χρησιμοποιήσαμε μόνο της αρχή διατήρησης της στροφορμής

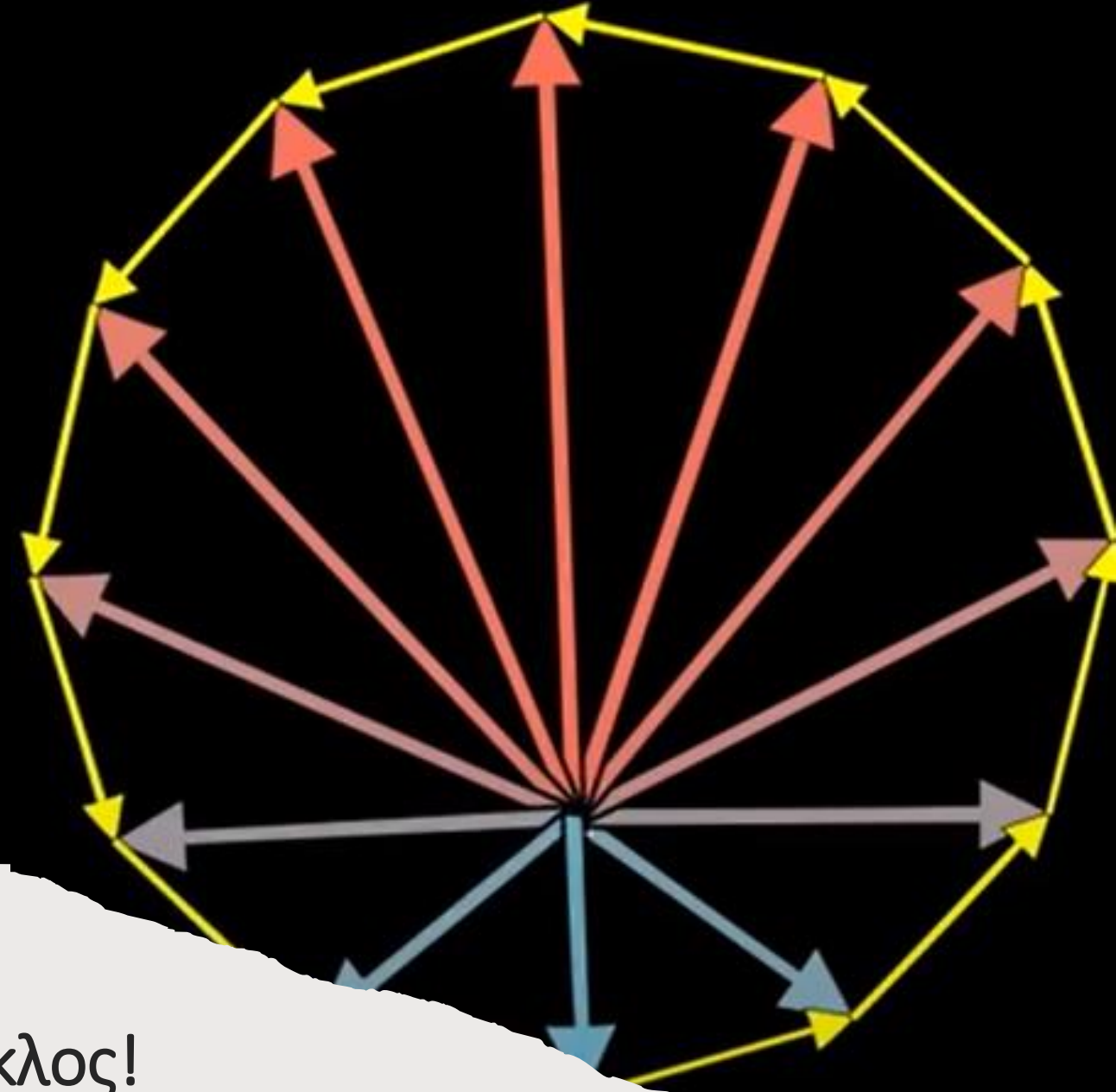
Αυτό που θα ερευνήσουμε
τώρα είναι το σχήμα που
δημιουργούν τα
διανύσματα των ταχυτήτων

$$F = \frac{GMm}{R^2}$$



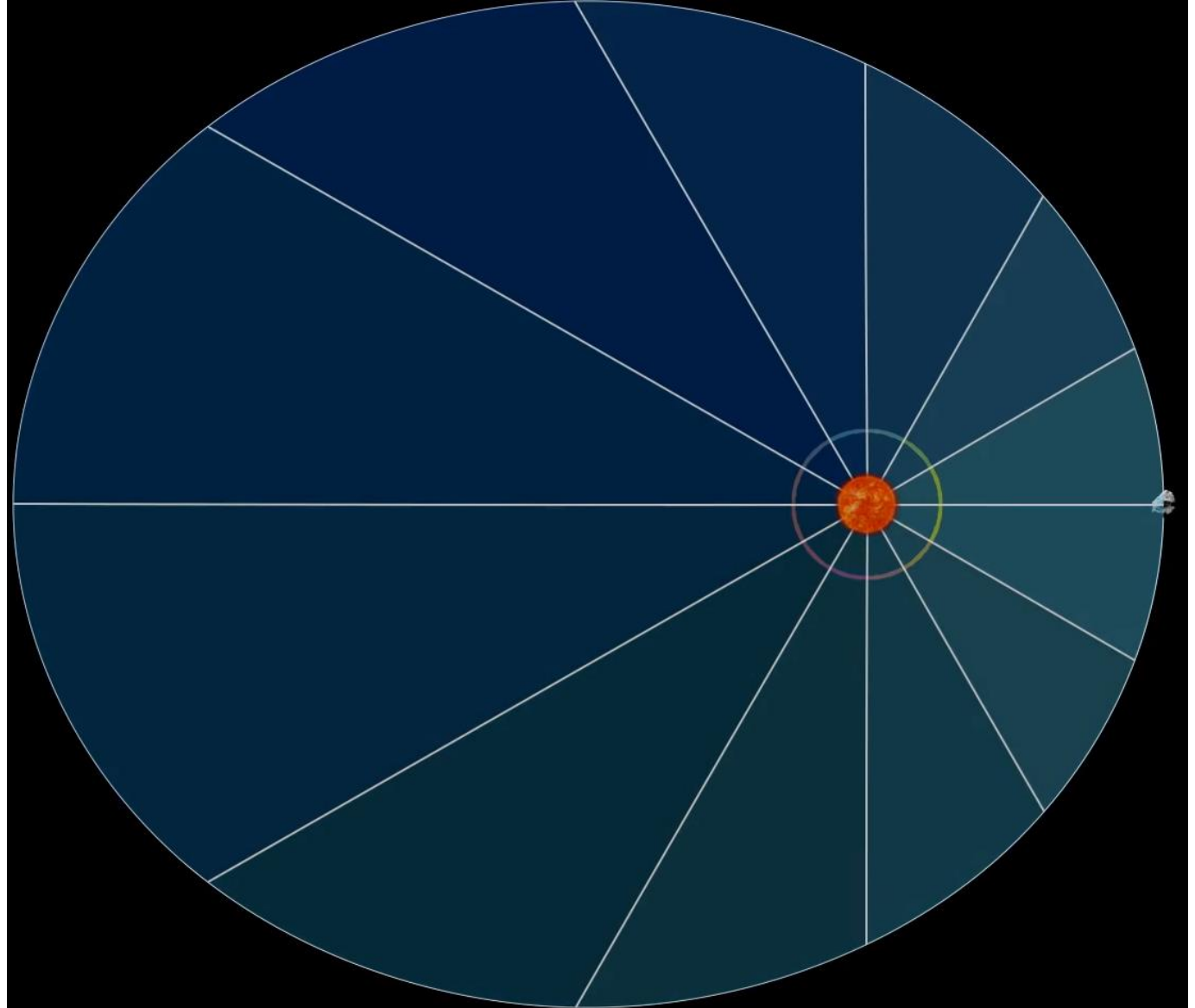
Σκοπός μας είναι να δείξουμε
ότι αυτό που σχηματίζουν
είναι ένα σχήμα με
συγκεκριμένες ιδιότητες και
στην συνέχεια να
συσχετίσουμε αυτό το σχήμα
με την τροχιά του σώματος





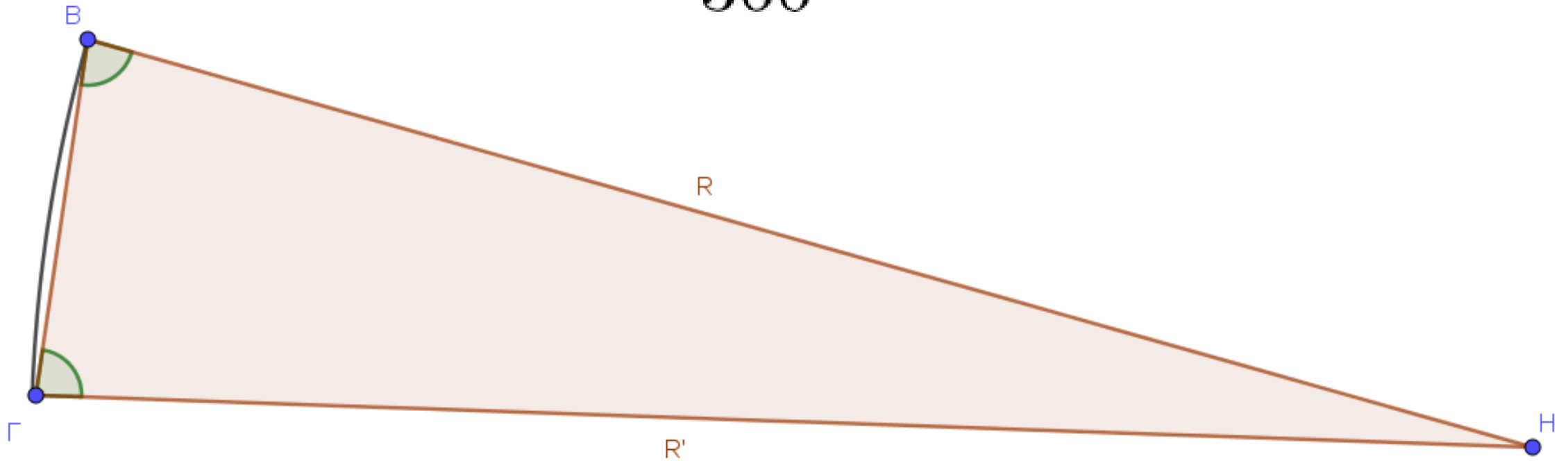
Και αυτό που θα δείξουμε ότι
σχηματίζουν είναι ένας τέλειος κύκλος!

Αρχίζουμε
χωρίζοντας
την τροχιά σε
ίσες γωνίες
 $\Delta\theta$



Σε κάθε στοιχειώδη γωνία $\Delta\theta$ που διαγράφει ο πλανήτης το εμβαδόν θα είναι:

$$\pi R^2 \frac{\theta}{360}$$



Επομένως για $\Delta\theta \rightarrow 0$

- Ε ανάλογο R^2
- Ε ανάλογο Δt
- $\Rightarrow \Delta t$ ανάλογο R^2
- F_G αντιστρόφως ανάλογο R^2
- F_G ανάλογο $\frac{\Delta v}{\Delta t}$
- $\Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t}$ αντιστρόφως ανάλογο R^2
- $\Rightarrow \Delta v$ **ΣΤΑΘΕΡΟ ΜΕΤΡΟ ΓΙΑ ΙΣΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ**

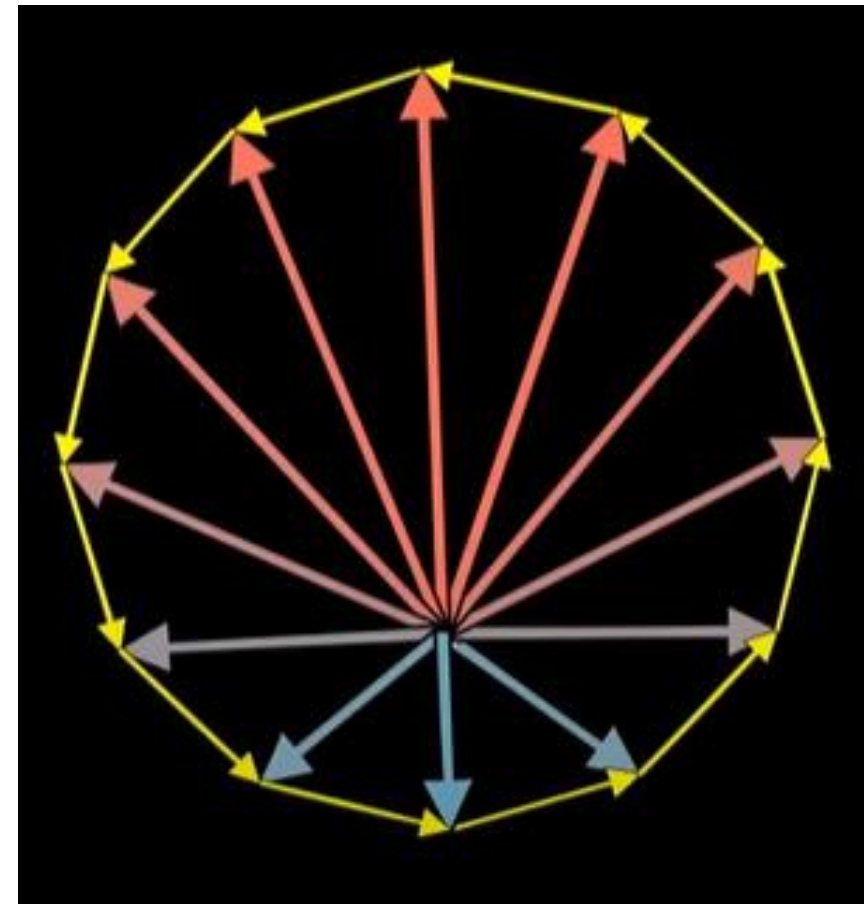
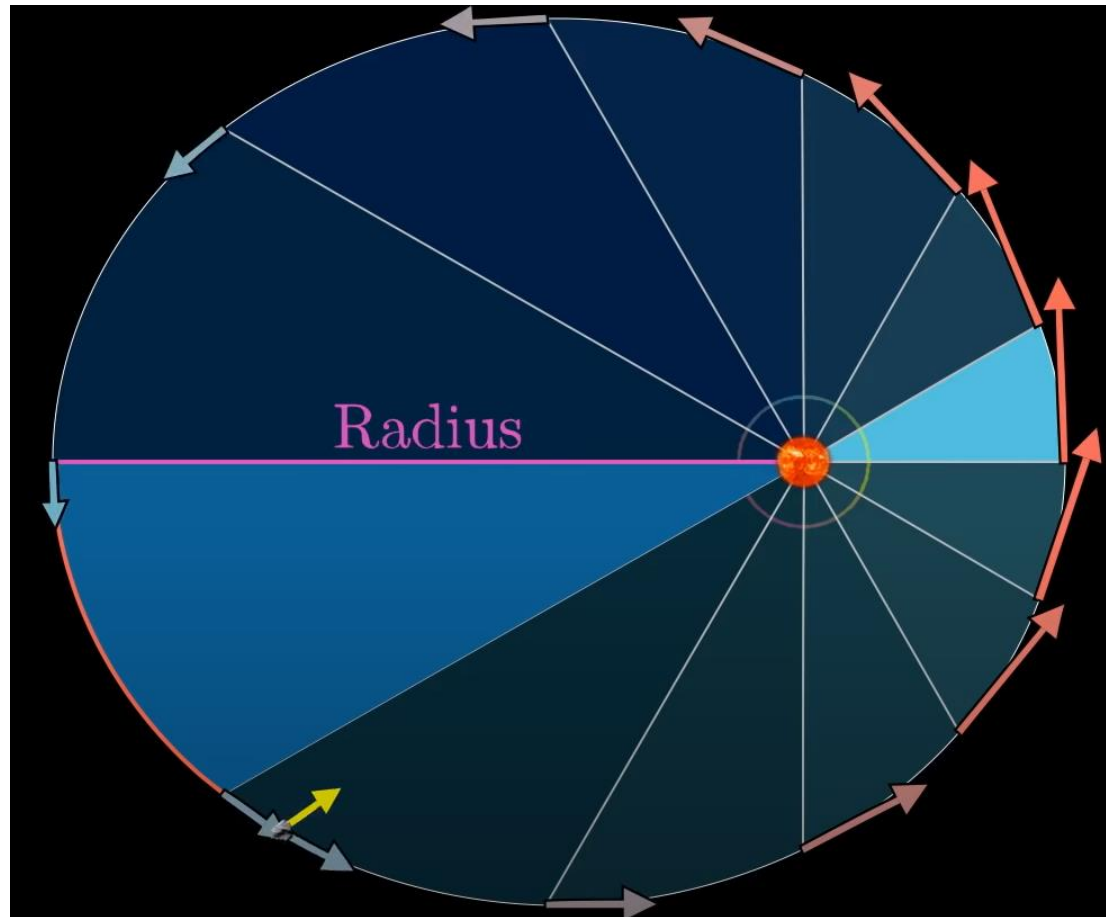
Με περισσότερα μαθηματικά:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{E}{\Delta t} = c \\ \frac{E}{R^2} = c' \end{array} \right\} \Delta t * c = R^2 * c'$$

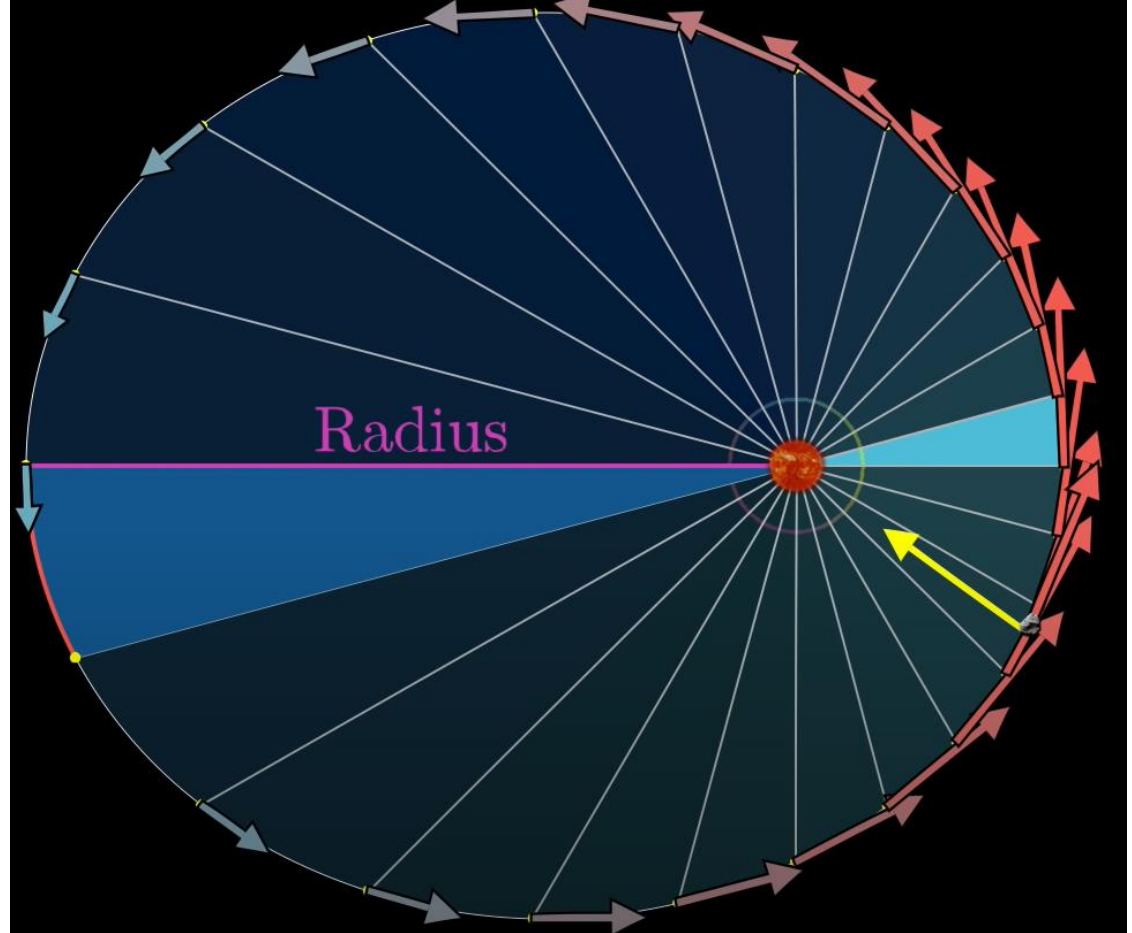
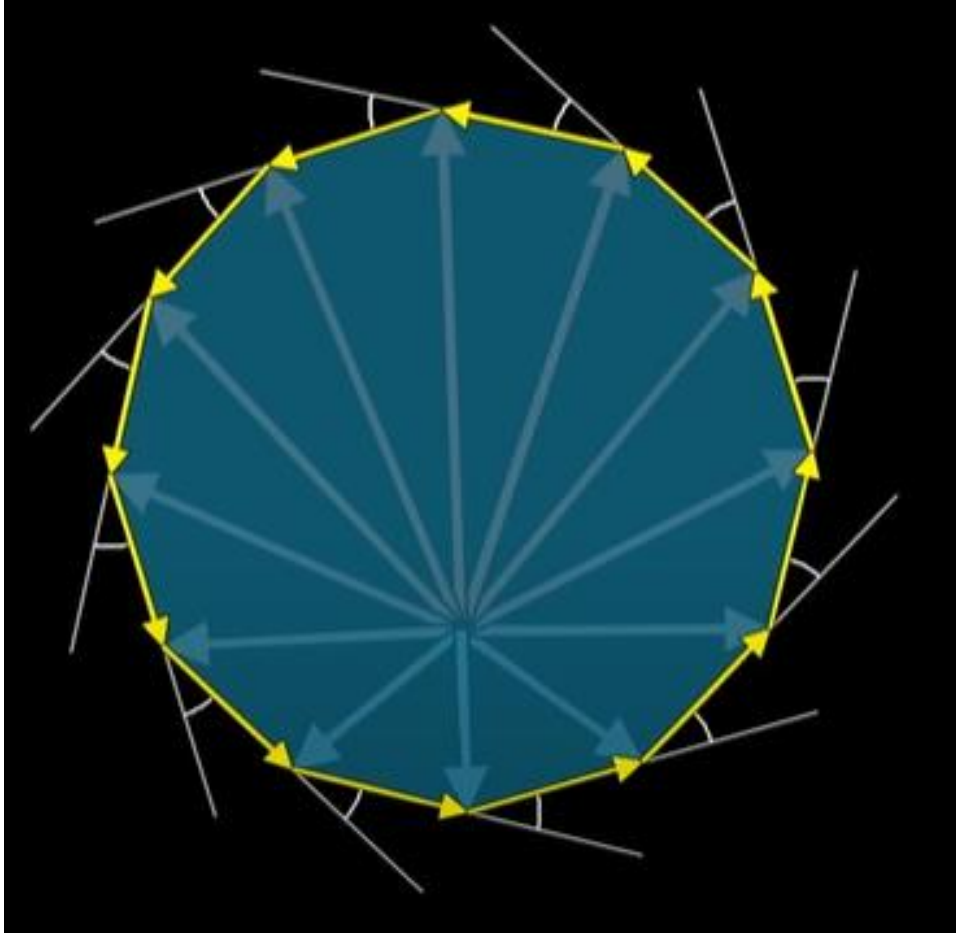
$$\left. \begin{array}{l} F = G \frac{mM}{R^2} \\ F = ma \end{array} \right\} G \frac{mM}{R^2} = ma \Leftrightarrow a = (GM) \frac{1}{R^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta u}{\Delta t} = (GM) \frac{1}{R^2} \\ \Delta t * c = R^2 * c' \end{array} \right\} \Delta u = \left(GM \frac{c'}{c} \right) = \text{σταθερό} \left. \right\}$$

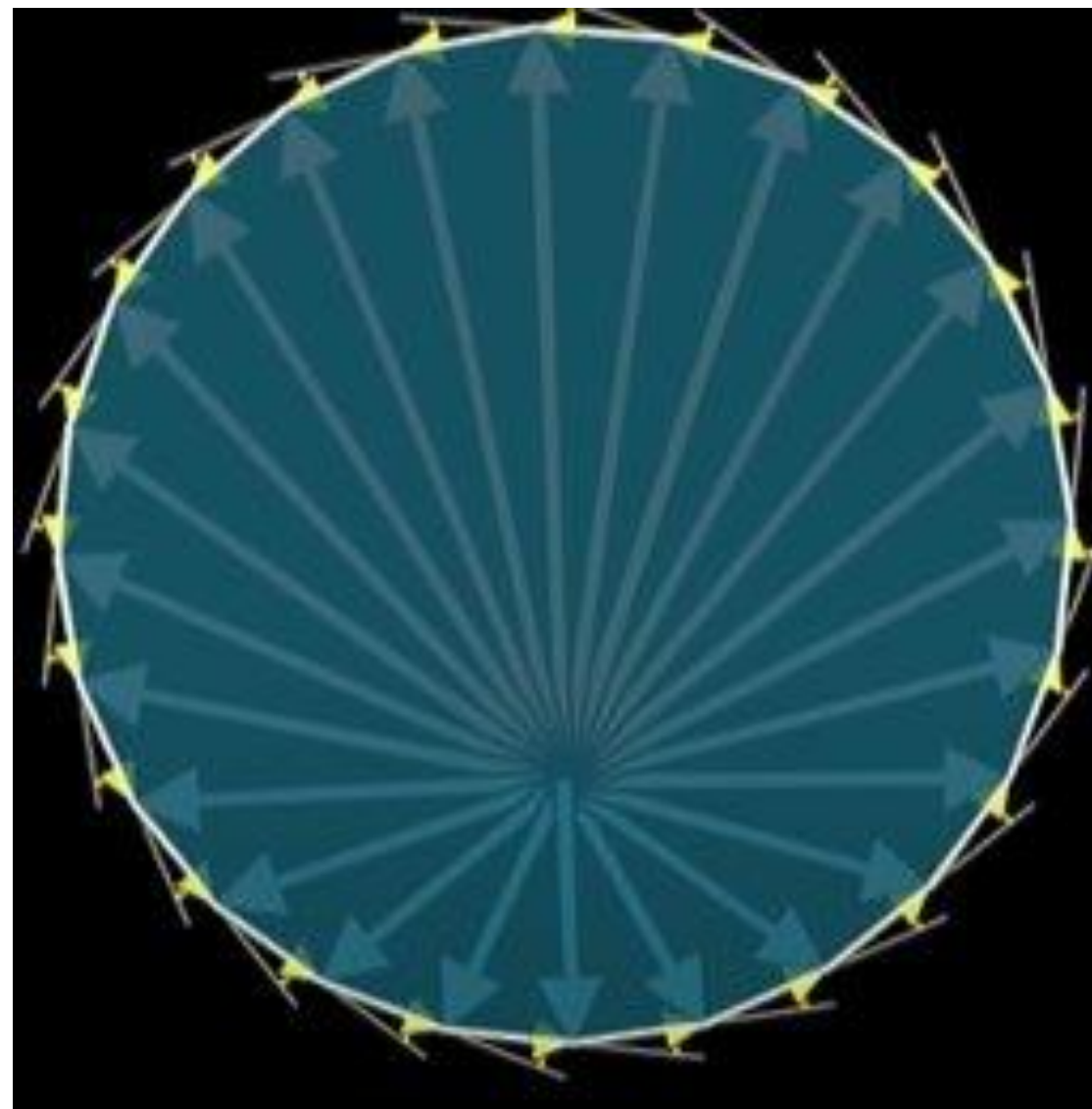
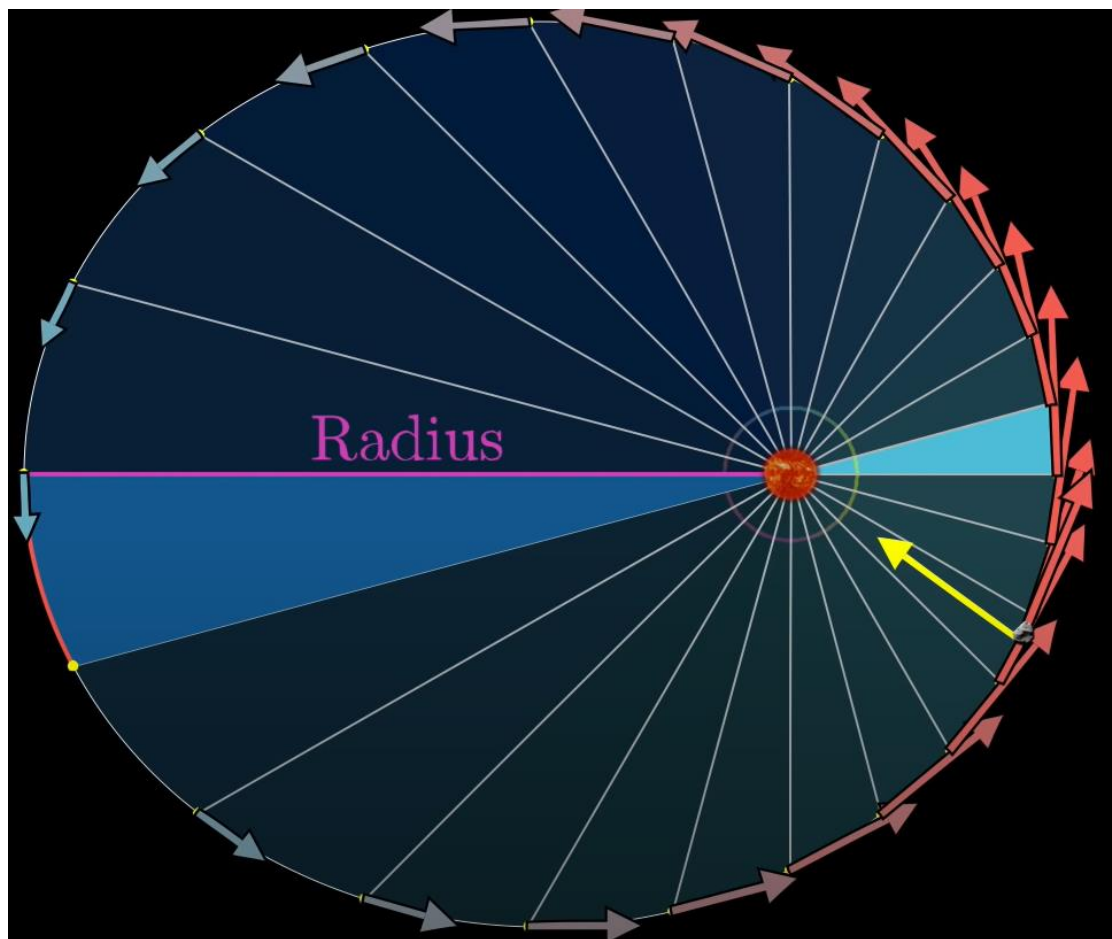
$$\left. \begin{array}{l} \Delta u = \left(GM \frac{c'}{c} \right) = \text{σταθερό} \\ c' = \pi \frac{\Delta \theta}{360^\circ} \\ c = \frac{L}{2m} \end{array} \right\} \Delta u = \frac{2GMm}{L} \frac{\pi \Delta \theta}{360^\circ}$$

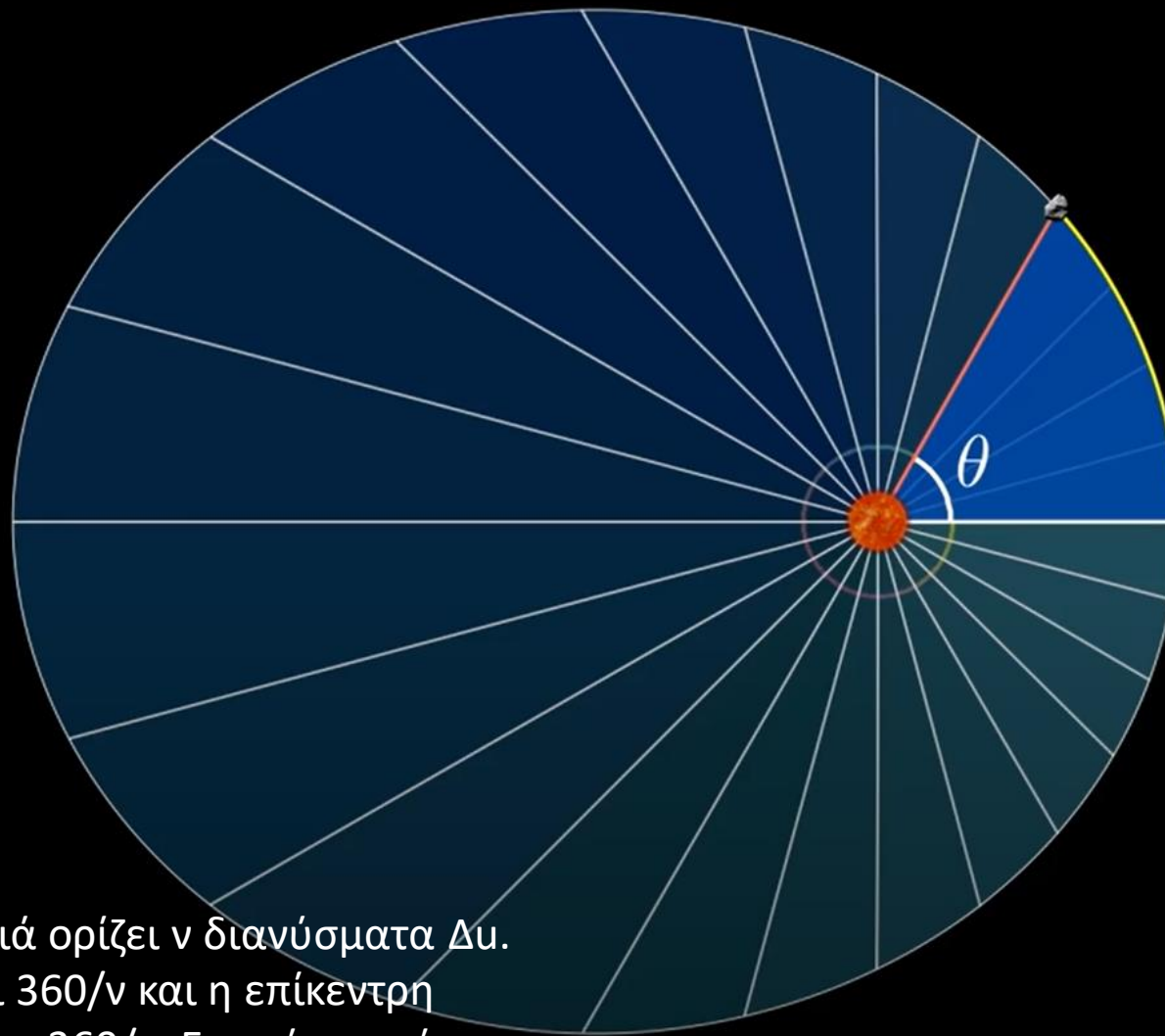
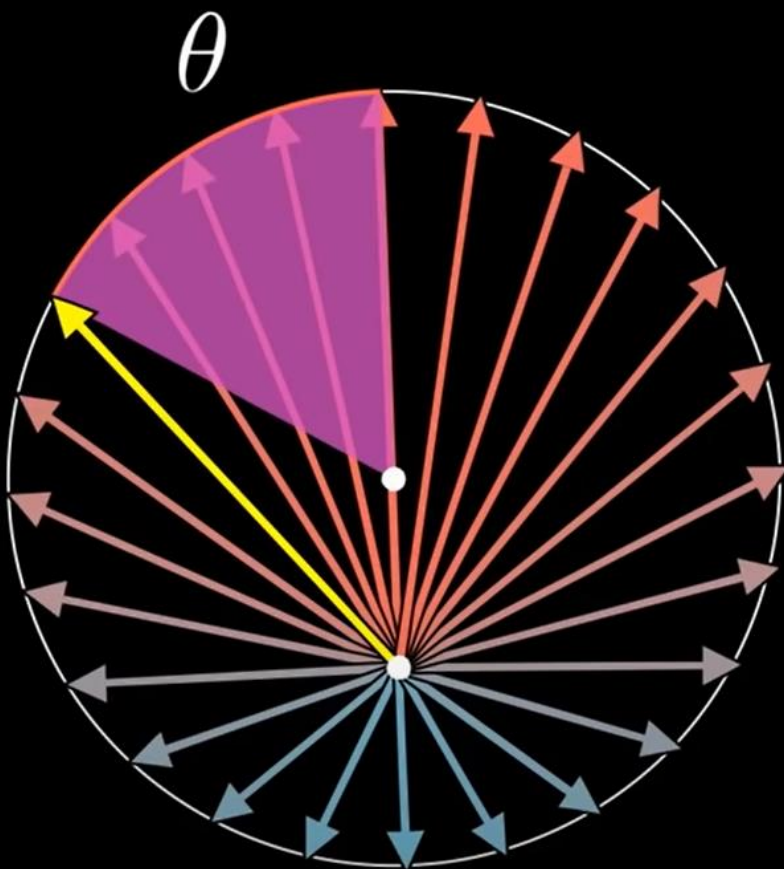
Ανεξάρτητα δηλαδή από το "κομμάτι" της τροχιάς το μέτρο του Δv είναι το ίδιο.



Επιπλέον: Τα διανύσματα Δu "στρέφονται" κάθε φορά $\Delta\theta$ γωνία και αυτά, αφού το διάνυσμα της επιτάχυνσης έχει την φορά της $F(g)$, δηλαδή προς τον Ήλιο



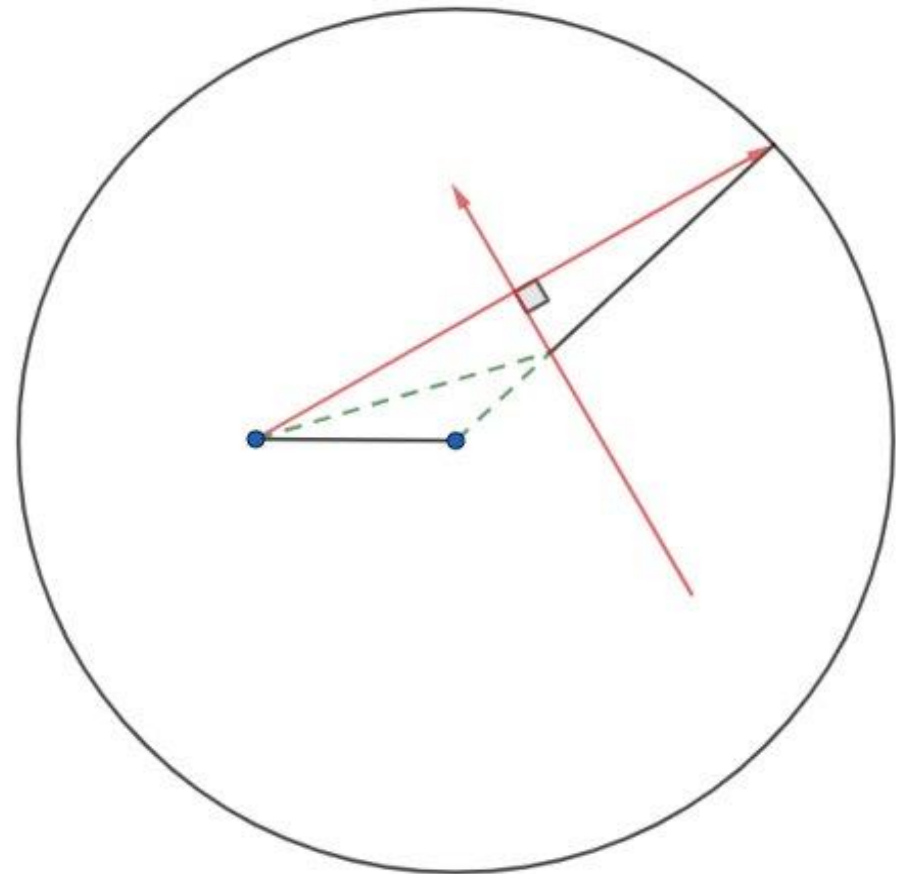
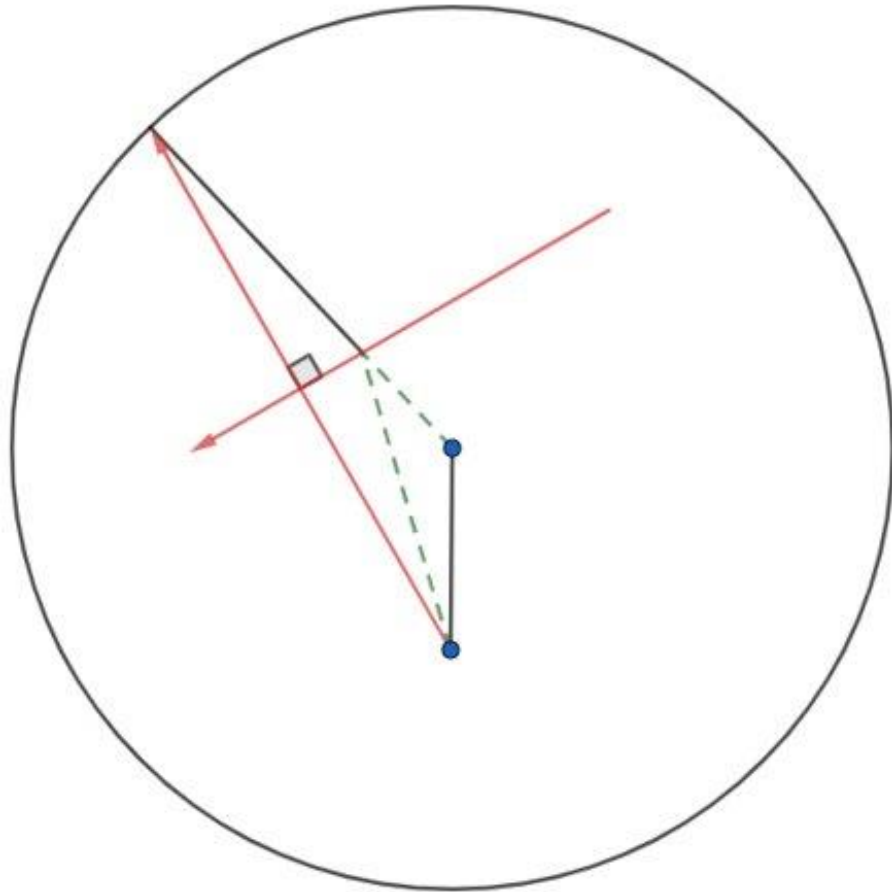




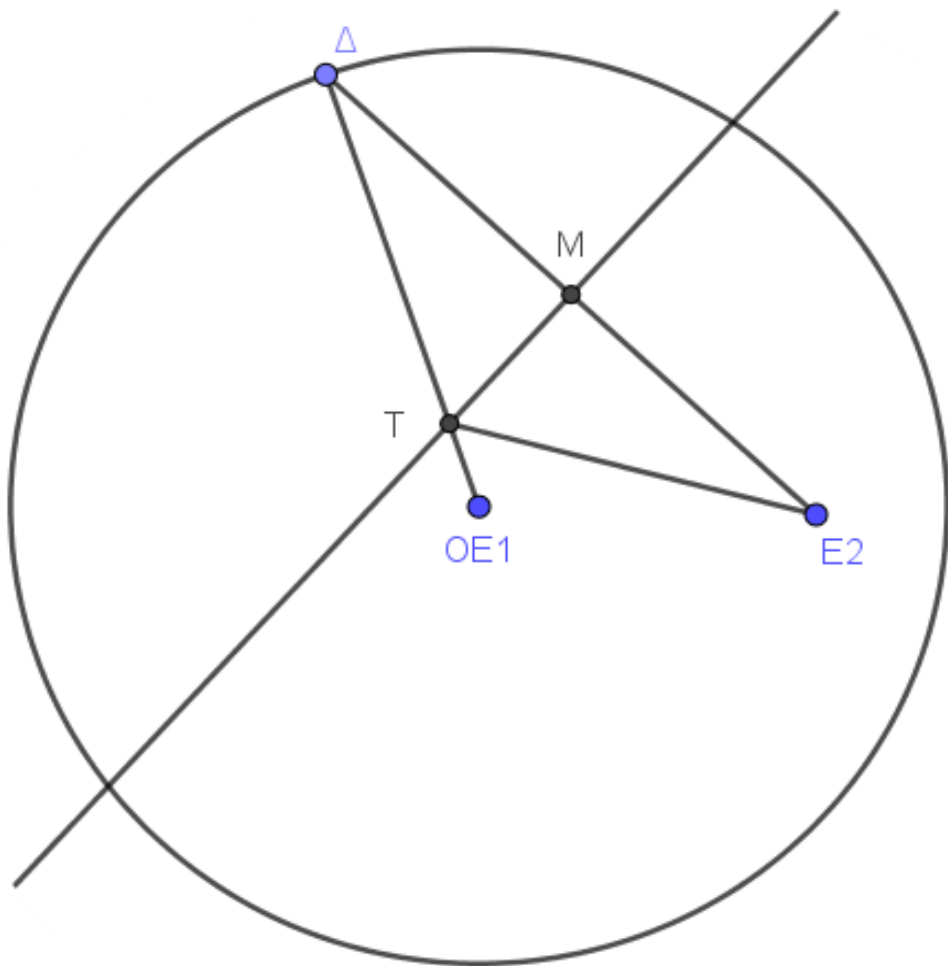
Το πλήθος n των κομματιών που χωρίζουμε την τροχιά ορίζει n διανύσματα Δu . Επομένως η γωνία κάθε κομματιού της τροχιάς είναι $360/n$ και η επίκεντρη γωνία του κύκλου (αφού όλα τα Δu είναι ίσα) θα είναι $360/n$. Επομένως, είναι ίσες. Δηλαδή όταν η Γη διαγράφει γωνία θ μοιρών αυτή αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία θ του κύκλου.

Ένα ακόμα βήμα:

- Στρέφουμε το διάνυσμα u αρχικά κατά γωνία 90 μοίρες αριστερόστροφα και στην συνέχεια το σχήμα 90 μοίρες δεξιόστροφα. Επομένως το τελικό διάνυσμα είναι παράλληλο με το αρχικό

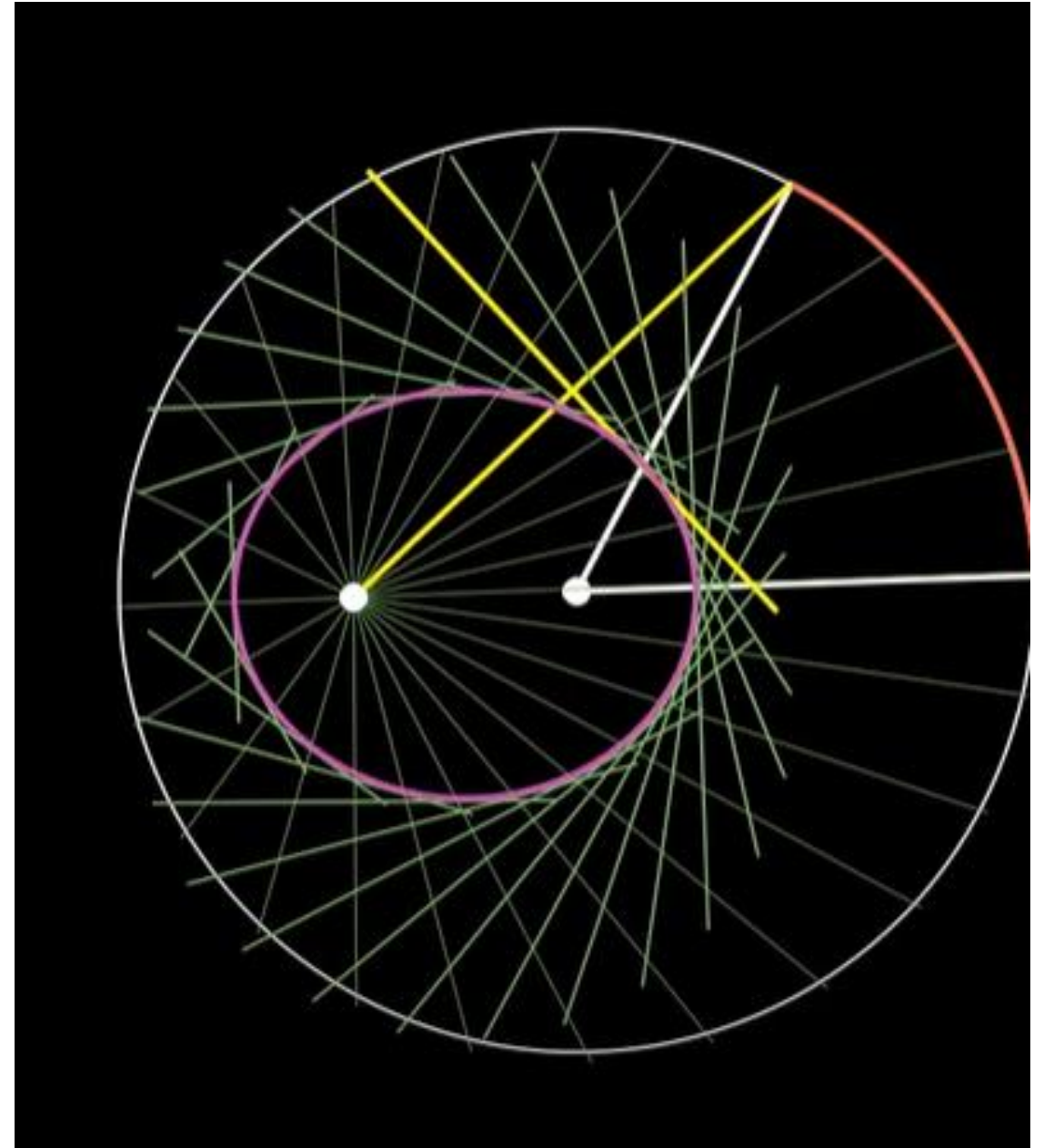
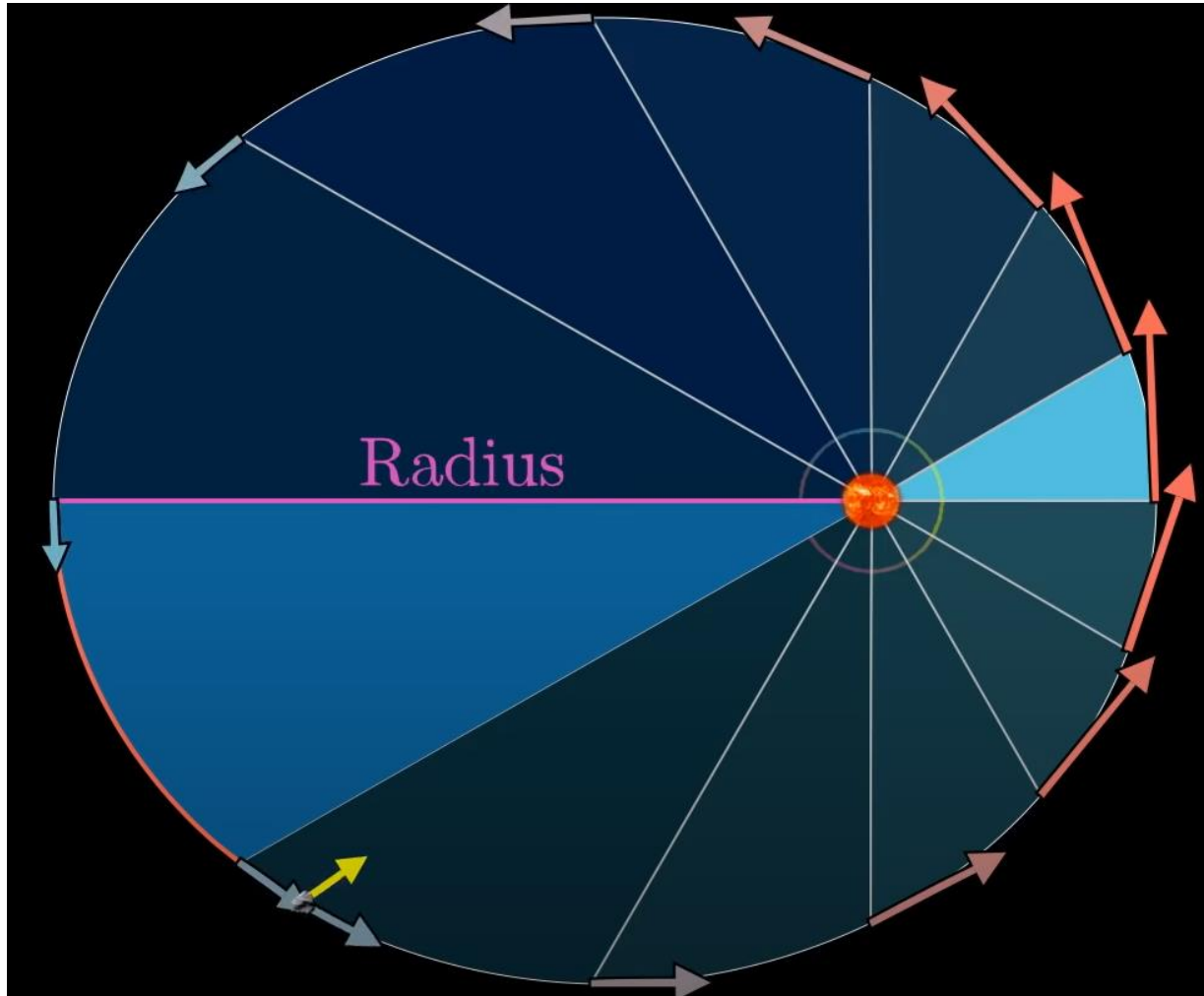


Σας θυμίζει κάτι;



Επομένως αν στρέψουμε
κάθε διάνυσμα ταχύτητας
αυτό που θα σχηματιστεί
είναι μία έλλειψη με
εφαπτόμενες που
αντιστοιχούν ακριβώς στις
εφαπτόμενες-διανύσματα
ταχυτήτων της τροχιάς.

- Το σχήμα με τις ιδιότητες της τροχιάς ενός σώματος γύρω από τον ήλιο έχει η νέα έλλειψη που σχηματίστηκε.
- Άρα η τροχιά του πρέπει να είναι ελλειπτική!





ΤΕΛΟΣ

Για περισσότερες
πληροφορίες:
[video](#)

