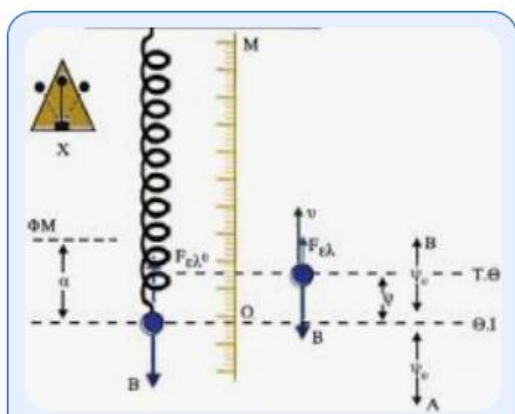


Γιατί είναι σημαντική η τριγωνομετρία;

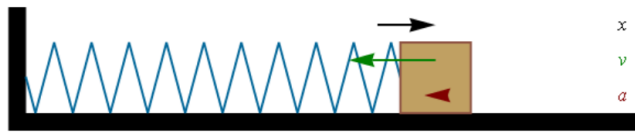
- **Σύνδεση γωνιών και πλευρών:** Η τριγωνομετρία μας επιτρέπει να συνδέσουμε τις γωνίες ενός τριγώνου με τα μήκη των πλευρών του. Αυτό είναι απαραίτητο σε πολλούς τομείς, από την αρχιτεκτονική μέχρι τη ναυσιπλοΐα.
- **Περιοδικές φαινόμενα:** Πολλά φαινόμενα στη φύση είναι περιοδικά, όπως τα κύματα, οι ταλαντώσεις και οι τροχιές των πλανητών. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις (ημίτονο, συνημίτονο) είναι ιδανικές για τη μοντελοποίηση αυτών των φαινομένων.
- **Γεωμετρικοί υπολογισμοί:** Η τριγωνομετρία είναι απαραίτητη για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων, όπως ο υπολογισμός αποστάσεων, υψομέτρων και γωνιών.

Εφαρμογές της τριγωνομετρίας

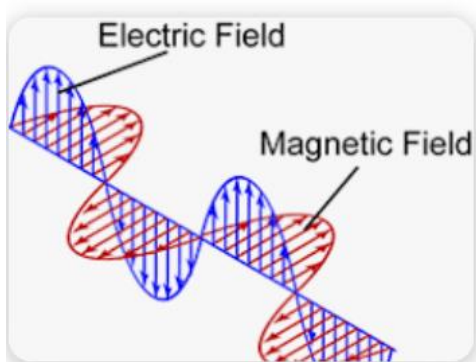
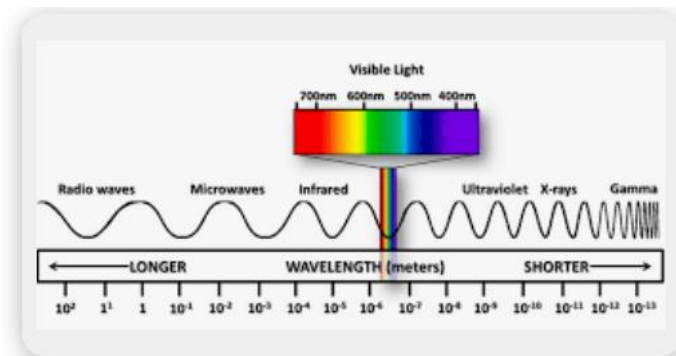
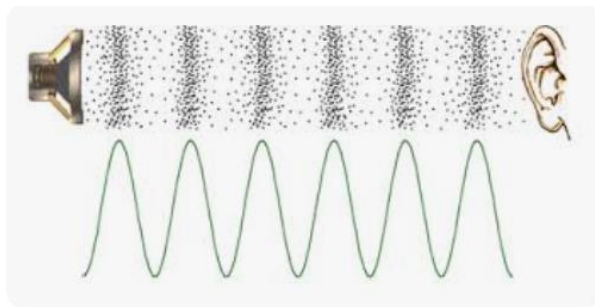
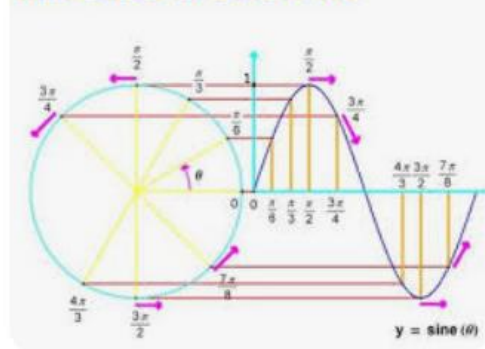
- **Φυσική:**
 - **Κίνηση:** Η τριγωνομετρία χρησιμοποιείται για την ανάλυση της κυκλικής κίνησης, των ταλαντώσεων και των κυμάτων.
 - **Οπτική:** Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι απαραίτητες για τον υπολογισμό της διάθλασης του φωτός και της σχεδίαση οπτικών συστημάτων.
 - **Ηλεκτρισμός:** Οι εναλλασσόμενες τάσεις και τα ρεύματα μπορούν να αναλυθούν με τη χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων.
- **Αστρονομία:**
 - **Απόσταση άστρων:** Οι αστρονόμοι χρησιμοποιούν τη τριγωνομετρία για τον υπολογισμό των αποστάσεων μεταξύ ουρανίων σωμάτων.
 - **Τροχιές πλανητών:** Οι τροχιές των πλανητών γύρω από τον Ήλιο μπορούν να περιγραφούν με τη χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων.
- **Μηχανική:**
 - **Ανάλυση δυνάμεων:** Η τριγωνομετρία χρησιμοποιείται για την ανάλυση δυνάμεων σε διάφορα συστήματα, όπως γέφυρες και κτίρια.
- **Γεωγραφία:**
 - **Χαρτογραφία:** Η τριγωνομετρία είναι απαραίτητη για την κατασκευή χαρτών και την μέτρηση αποστάσεων στη Γη.



ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

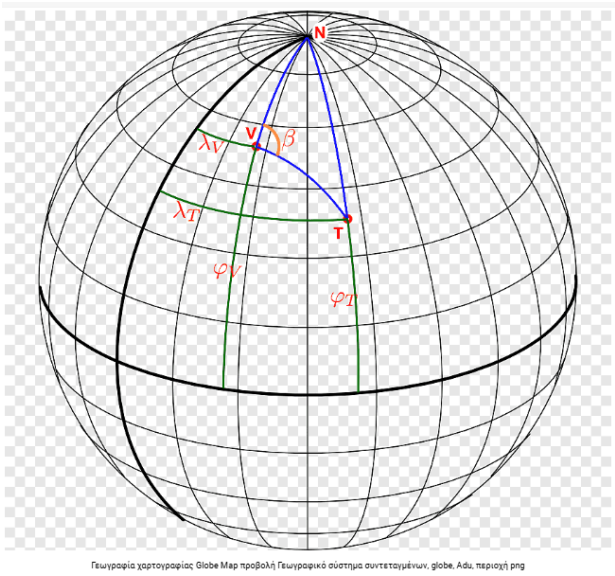
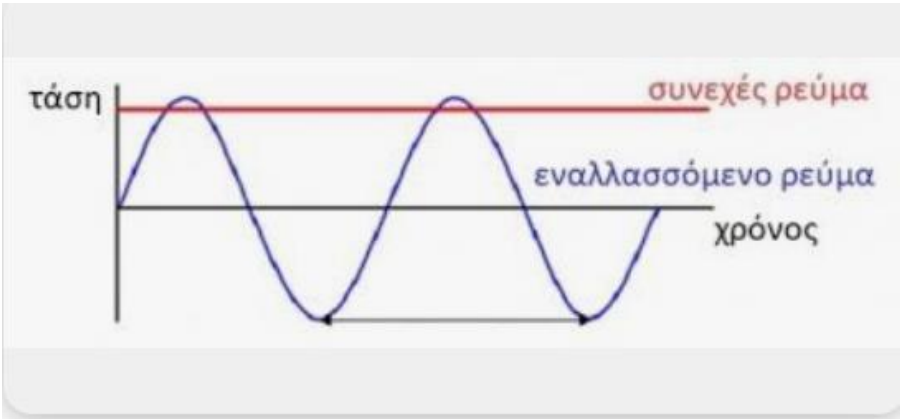


Unit Circle to Sine Wave

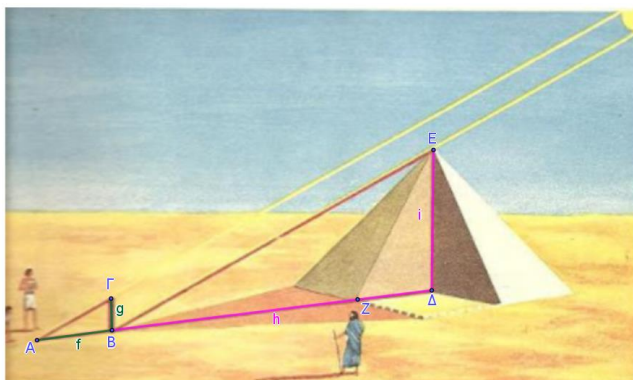


[Are light waves sinusoidal functions? - Physics Stack Exchange](#)

<https://physics.stackexchange.com/questions/259200/are-light-waves-sinusoidal-functions>



Τι θα συνέβαινε αν ο Θαλής είχε πίνακες με τις τιμές των εφαπτομένων των γωνιών;



Από αυτό το απλό για τα σημερινά δεδομένα πρόβλημα και από άλλα που έχουμε ασχοληθεί, επιβεβαιώνουμε ότι η τριγωνομετρία **συνδέει τις πλευρές και τις γωνίες ενός τριγώνου**.

Όπως πχ η άσκηση 1 της Β' ομάδας σελίδα 58. Η οποία αναφέρεται στην υλοποίηση του 2^{ου} στόχου αλλά και μας προϋδεάζει για την αναγκαιότητα των τριγωνομετρικών εξισώσεων στο υ) ερώτημα.

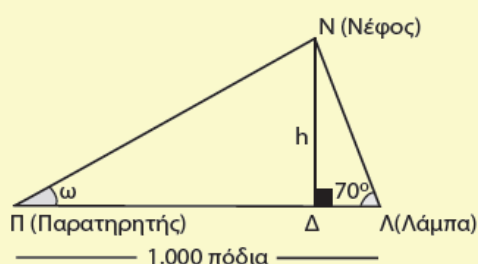
Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Σε μικρά αεροδρόμια υπολογίζουν το ύψος των νεφών με τη βοήθεια μιας ισχυρής λάμπας εντός παραβολικού κατόπτρου, η οποία βρίσκεται σε απόσταση 1000 πόδια ($1 \text{ πόδι} \approx 0,3 \text{ m}$) από το σημείο του παρατηρητή.

Η λάμπα είναι τοποθετημένη υπό σταθερή γωνία και ο παρατηρητής στρέφει το όργανο παρατήρησης στο σημείο ανάκλασης του φωτός από τα νέφη.

i) Να προσδιορίσετε το ύψος h για $\omega = 30^\circ, 45^\circ$ και 60° .

ii) Πόση είναι η γωνία ω , αν $h=1000$ πόδια;



Στο 2^ο ερώτημα μας εισάγει (μετά από πράξεις) στην επίλυση μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\varepsilon\varphi 70^\circ}{\varepsilon\varphi 70^\circ - 1} \cong 1.5723 \Rightarrow \omega \cong 58^\circ$$

Ένα άλλο παράδειγμα των τριγωνομετρικών εξισώσεων είναι η εύρεση της περιόδου, μιας σύνθετης τριγωνομετρικής συνάρτησης, όπως αυτή που αναφέρεται στη σελίδα 82.

2. Η παλίρροια σε μια θαλάσσια περιοχή περιγράφεται κατά προσέγγιση με τη συνάρτηση $y = 3 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$, όπου y το ύψος της στάθμης των υδάτων σε μέτρα και t ο χρόνος σε ώρες.

i) Να βρείτε την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην ψηλότερη πλημμυρίδα και τη χαμηλότερη άμπωτη.

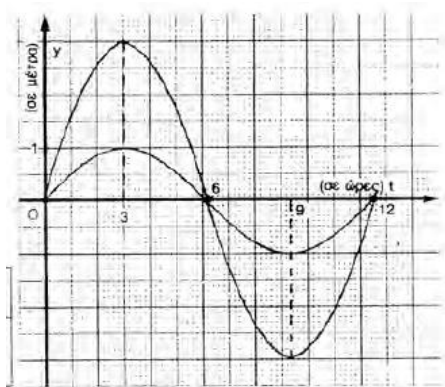
ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \leq t \leq 12$.

$$\text{Εκεί παίρνουμε τον τύπο } T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} \Rightarrow T = 12$$

Στη συνέχεια κάνουμε τη γραφική παράσταση σ' ένα διάστημα πλάτους 12h πχ $[0,12]$

Σύμφωνα με το πίνακάκι έχουμε τη γραφική παράσταση

t	0	3	6	9	12
$3\eta\mu \frac{\pi t}{6}$	0	3	0	-3	0



Δραστηριότητες από το αρχείο 03_sheet_work_01.ggb που είναι το ίδιο με λίγη διασκευή από τα εμπλουτισμένα βιβλία που υλοποιούν τους 3^ο , 5^ο στόχους:

Στο διπλανό γράφημα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος (Ο,1) και η γωνία $\widehat{AOM} = \hat{\omega}$, στο $[0, 2\pi)$ η οποία μεταβάλλεται από το σημείο Μ.

Δραστηριότητες ☒ 1η ☐ 2η ☐ 3η

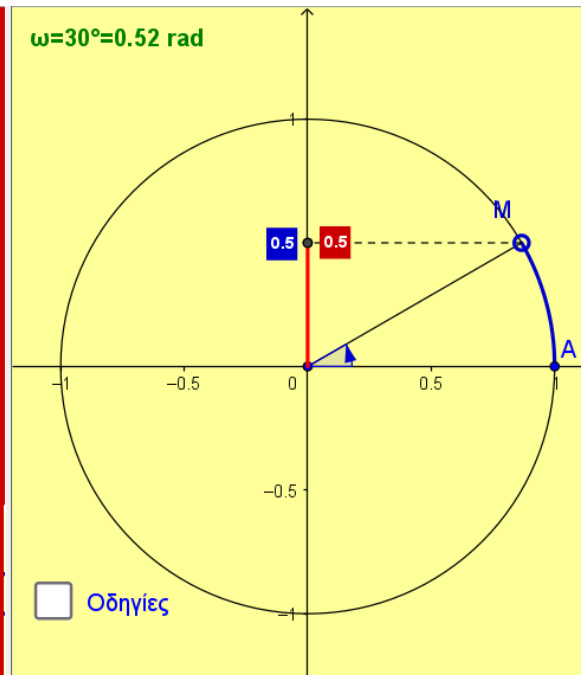
Βρείτε τις γωνίες του 1ου κύκλου που έχουν $\eta\mu\omega = 0.5$ παρατηρώντας το ημίτονο της γωνίας $\hat{\omega}$.

Πόσες λύσεις βρήκατε;

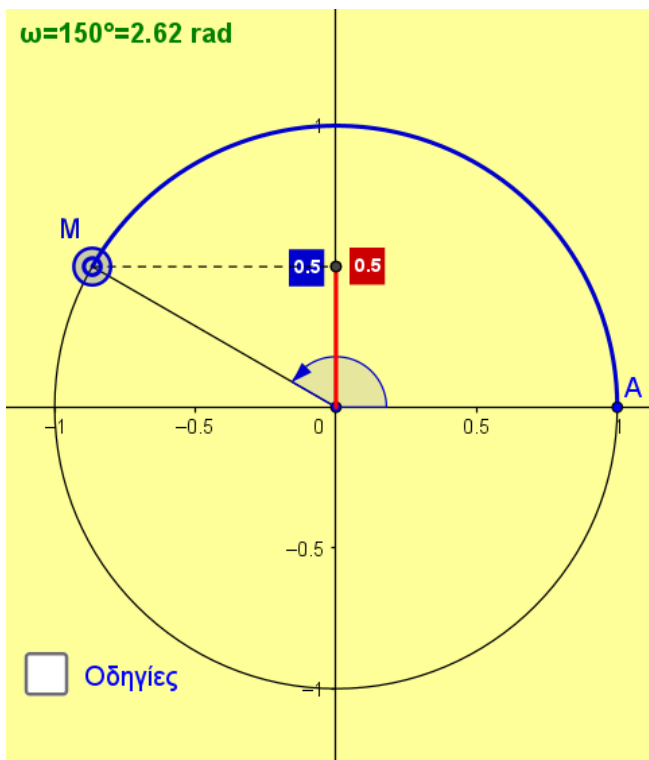
Ποια σχέση έχουν μεταξύ τους οι διαφορετικές λύσεις;

☐ Βοήθεια

$\omega = 30^\circ = 0.52 \text{ rad}$



$\omega = 150^\circ = 2.62 \text{ rad}$



Με αυτές τις δύο θέσεις του σημείου Μ – στιγμιότυπα της κίνησής του πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο, και την σχέση των δύο γωνιών μεταξύ τους, απαντήσαμε στα ερωτήματα της δραστηριότητας 1.

Δραστηριότητα 2

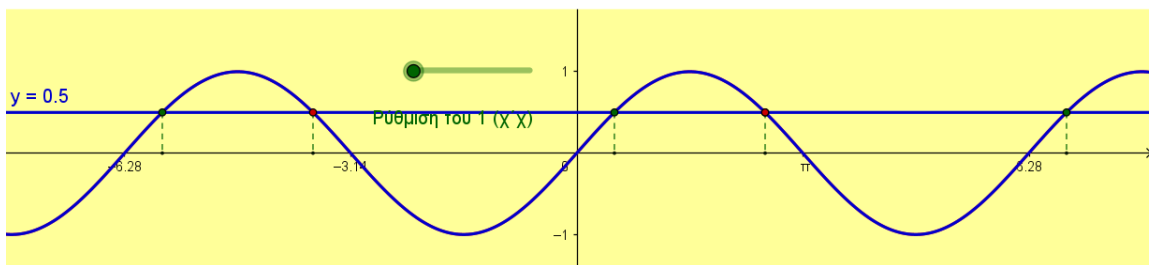
α) Μετακινήστε το σημείο M του κύκλου. Μπορείτε να εντοπίσετε τις λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu\chi=0,5$ για τη γωνία ω ;

β) Πόσες φορές τέμνει η ευθεία $\psi=0,5$ την συνάρτηση $\eta\mu\chi$; Τι σχέση έχουν οι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu\chi=0,5$ με τις λύσεις του (α) ερωτήματος;

γ) Μπορείτε να βρείτε τον γενικό τύπο των λύσεων της εξίσωσης $\eta\mu\chi=0,5$;

☐ Σημεία τομής

☐ Απάντηση



Γενικές λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu\chi=0,5$

$$\eta\mu\chi=0,5$$

$$\eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \text{ή} \\ \chi = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ή σε μοίρες

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 360^\circ \kappa + 30^\circ, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \text{ή} \\ \chi = 360^\circ \kappa + 180^\circ - 30^\circ = 360^\circ \kappa + 150^\circ, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Δραστηριότητα 3

Στο διπλανό γράφημα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος (Ο,1) και η γωνία $\widehat{AOM} = \hat{\omega}$, στο $[0, 2\pi)$ η οποία μεταβάλλεται από το σημείο Μ.

Δραστηριότητες ☐ 1η ☐ 2η ☒ 3η

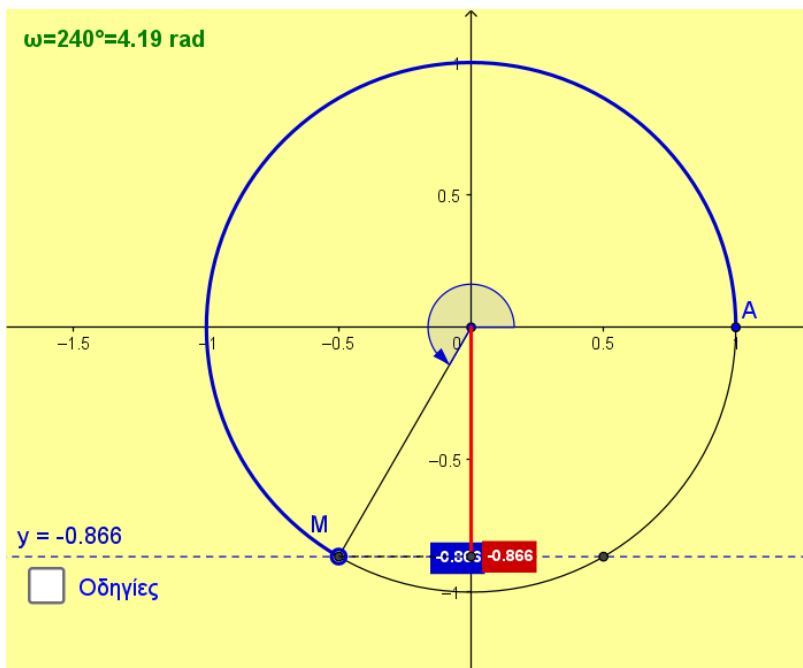
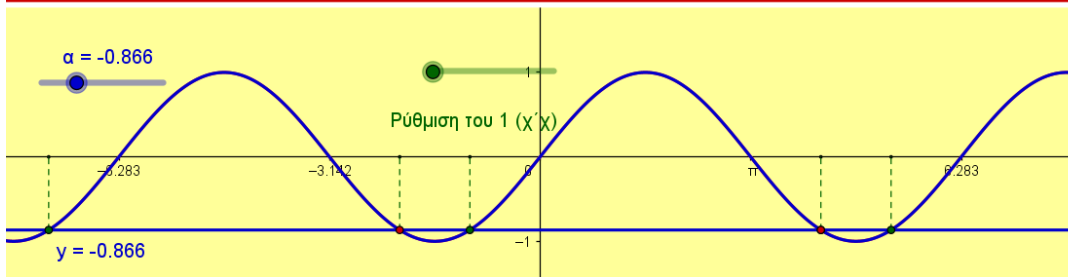
Λύστε την εξίσωση $\eta\mu x = a$ δίνοντας μια δική σας τιμή στο a από τον παρακάτω δρομέα.

Τι τιμές πρέπει να πάρει το a για να έχει λύση η εξίσωση;

Στα δύο γραφήματα απεικονίζεται η ευθεία $\psi = a$.

☐ Βοήθεια

☒ Σημεία τομής



$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \eta\mu x &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ x = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$

Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις στη γενική τους μορφή

Για να λύσουμε την εξίσωση $\eta\mu x = \theta$, βρίσκουμε μία γωνία α στο διάστημα $[0, 2\pi)$ της οποίας το ημίτονο είναι θ . Στη συνέχεια οι άπειρες λύσεις θα είναι η ίδια η γωνία α και διαφέρουσες κατά ακέραιο αριθμό περιφερειών ($k \cdot 2\pi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$) ή η παραπληρωματική της και ακέραιος αριθμός περιφερειών.

$$\bullet \quad \left. \begin{array}{l} \eta\mu x = \theta \\ \eta\mu \alpha = \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \eta\mu x = \eta\mu \alpha \Leftrightarrow x = 2k\pi + \alpha \text{ ή } x = 2k\pi + \pi - \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

Ίδια διαδικασία ακολουθούμε και για τη λύση της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \alpha$, μόνο που εδώ στον 2° τύπο θεωρούμε την αντίθετη γωνία (την $-\alpha$) αντί για την παραπληρωματική ($\pi - \alpha$) της πρώτης εξίσωσης (γιατί;)

$$\bullet \quad \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \alpha \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \quad \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \alpha \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \alpha \\ \text{ή} \\ x = 2k\pi + \pi + \alpha \end{array} \right\} \text{ (γιατί;) } \Leftrightarrow x = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

(Πως οι δύο προηγούμενοι τύποι συγχωνεύτηκαν σε έναν;)

Μπορούμε να σκεφθούμε παρόμοια και να βρούμε τις λύσεις για την εξίσωση $\sigma\phi x = \sigma\phi \alpha$;

$$\bullet \quad \sigma\phi x = \sigma\phi \alpha \Leftrightarrow x = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

Ειδικές περιπτώσεις τριγωνομετρικών Εξισώσεων

Τις παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις θα τις συναντάμε συχνά οπότε μπορούμε να χρησιμοποιούμε τις παρακάτω μορφές λύσεων για κάθε εξίσωση

- $\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + 0$
- $\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi + \pi/2$
- $\eta\mu x = -1 \Leftrightarrow x = 2k\pi - \pi/2$

- $\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \pi/2$
- $\sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$
- $\sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow x = 2k\pi + \pi$

όπου για κάθε εξίσωση είναι $k \in \mathbb{Z}$

Πως προκύπτουν οι συγχωνευμένοι τύποι των λύσεων των παραπάνω εξισώσεων από τις γενικές λύσεις των προηγούμενων βασικών μορφών;

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1^η

Να λυθούν οι εξισώσεις

$$\eta\mu x = \frac{1}{2}, \quad \eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \epsilon\phi x = 1$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2^η

Να λυθεί η εξίσωση $(1 - \eta\mu x)(2\eta\mu x - \sqrt{3}) = 0$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3^η

Να λυθεί η εξίσωση $(\sqrt{3} + \epsilon\phi x)(1 - \epsilon\phi x) = 0$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4^η

Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{2} \sigma\upsilon\nu 3x = 1$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5^η

Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Να λύσετε τις ασκήσεις 1ii, 1iii, 2i, 2ii, 3ii, 4ii, 5ii, 6ii, 8iii, 9ii στην σελίδα 88 του βιβλίου σας.

Αναφορά στο περιεχόμενο μελλοντικών μαθημάτων

Εξισώσεις που μετασχηματίζονται σε αλγεβρικές

Σε πολλές τριγωνομετρικές εξισώσεις για την επίλυσή τους χρειάζεται να εισάγουμε βοηθητικό άγνωστο, ώστε αυτές να μετασχηματιστούν σε αλγεβρικές. Στην περίπτωση αυτή επιλύουμε την αλγεβρική εξίσωση και στην συνέχεια βρίσκουμε τις τιμές που αληθεύουν την αρχική τριγωνομετρική εξίσωση.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1^η

Να λυθεί η εξίσωση: $2\eta\mu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$

$$2\omega^2 x + 5\omega x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \omega^2 x) + 5\omega x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 - 2\omega^2 x + 5\omega x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\omega^2 x - 5\omega x - 3 = 0$$

$$\text{Που έχει ρίζες } 3 \text{ και } -\frac{1}{2}$$

$$\bullet \omega x = 3 \text{ Αδύνατο}$$

$$\bullet \omega x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \omega x = -\omega \frac{1}{3} \Leftrightarrow \omega x = \omega \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\omega x = \omega \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \boxed{x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}}$$

Επίλυση εξίσωσης σε διάστημα

Αν αναζητάμε λύσεις τριγωνομετρικής εξίσωσης που βρίσκονται σε ένα διάστημα, τότε ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία

- Βρίσκουμε τους γενικούς τύπους που προσδιορίζουν τις λύσεις της εξίσωσης.
- Αν ζητείται να προσδιοριστούν οι λύσεις σε διάστημα της μορφής $[\lambda\pi, \mu\pi]$ λύνουμε την ανίσωση $\lambda\pi \leq x \leq \mu\pi$ και καταλήγουμε σε σχέση της μορφής $\gamma \leq k \leq \delta$ με k ακέραιος.
- Προσδιορίζουμε όλες τις ακέραιες τιμές του k που επαληθεύουν την παραπάνω ανίσωση και τις τιμές αυτές τις αντικαθιστούμε στους γενικούς τύπους που προσδιορίζουν τις λύσεις της εξίσωσης στο δοσμένο διάστημα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2^η

Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{2}\eta\mu x = 1$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$

$$\blacksquare \sqrt{2} \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\blacksquare -\pi \leq x < \pi \Leftrightarrow -\pi \leq 2k\pi + \frac{\pi}{4} < \pi \Leftrightarrow -1 \leq 2k + \frac{1}{4} < 1 \Leftrightarrow$$

$$-1 - \frac{1}{4} \leq 2k < 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{5}{4} \leq 2k < \frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{5}{8} \leq k < \frac{3}{8}$$

Επειδή δε $k \in \mathbb{Z}$ είναι $k=0$

$$\text{Για } k=0 \text{ έχουμε: } x = 2 \cdot 0 \cdot \pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}}$$

$\blacksquare$ Αναλόγη εργασία για των 2π άρα

$$-\pi \leq x \leq \pi \Leftrightarrow -\pi \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \leq \pi \Leftrightarrow -1 \leq 2k + \frac{3}{4} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$-1 - \frac{3}{4} \leq 2k \leq 1 - \frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{7}{4} \leq 2k \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{7}{8} \leq k \leq \frac{1}{8}$$

Επειδή $k \in \mathbb{Z}$ είναι $k=0$, τότε

$$\text{για } k=0 \text{ έχουμε } x = 2 \cdot 0 \cdot \pi + \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{3\pi}{4}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3^η

Η αξία της μετοχής μιας εισηγμένης εταιρείας στο Χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών δίνεται σε ευρώ από τη συνάρτηση : $f(t) = 10 + 4\eta\mu \frac{\pi \cdot t}{6}$ για $0 \leq t \leq 12$ (όπου t ο χρόνος σε μήνες) Να βρεθεί :

- α) Πότε πρέπει να πουλήσει κάποιος που κατέχει την παραπάνω μετοχή για πρώτη φορά ώστε να έχει το μεγαλύτερο περιθώριο κέρδους.
- β) Ποιά είναι η μεγαλύτερη ζημιά που μπορεί να έχει κάποιος ανά μετοχή.
- γ) Θα έχει κέρδος ή ζημιά κάποιος αν αγοράσει 1000 μετοχές της παραπάνω εταιρείας τον 7^ο μήνα του πρώτου έτους και τις πουλήσει τον 11^ο μήνα του ίδιου έτους.