

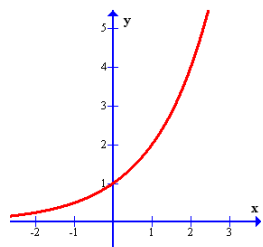
ΜΑΘΗΜΑ 2° Ο ΑΡΙΘΜΟΣ e – ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (Μέρος 1°)

Γνωρίζουμε ότι Έστω $a > 0$ με $a \neq 1$. Ονομάζουμε **εκθετική** συνάρτηση με βάση a την συνάρτηση $f(x) = a^x$.

Αν $a > 1$

- Έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$.
- Έχει σύνολο τιμών $f(A) = (0, +\infty)$
- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ δηλαδή ισχύει η συνεπαγωγή $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

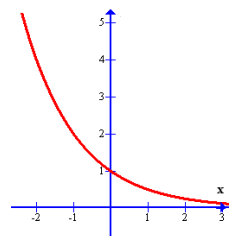
Η γραφική της παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a^x$ με $a > 1$ είναι:



Αν $0 < a < 1$

- Έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$.
- Έχει σύνολο τιμών $f(A) = (0, +\infty)$
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ δηλαδή ισχύει η συνεπαγωγή $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Η γραφική της παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a^x$ με $0 < a < 1$ είναι:



Ο ΑΡΙΘΜΟΣ e

Ο Ελβετός μαθηματικός Euler θεωρώντας την ακολουθία (a_n) με νιοστό όρο $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

υπολογίζοντας τους όρους της διαπίστωσε ότι:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2,25$$

$$a_{10} = 2,5937$$

.....

$$a_{100} = 2,7048$$

$$a_{1000} = 2,7169$$

$$a_{10000} = 2,7181$$

.....

$$a_{100000} = 2,7182$$

$$a_{1000000} = 2,7182$$

$$a_{10000000} = 2,7182$$

.....

Δηλαδή το όριο της ακολουθίας καθώς το n αυξάνεται απεριόριστα προσεγγίζει τον άρρητο αριθμό 2,7182.... που τον συμβόλισαν προς τιμή του με το γράμμα e

Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι μια εκθετική συνάρτηση με βάση τον αριθμό e με πολλές πρακτικές εφαρμογές. Η εκθετική αυτή συνάρτηση περιγράφει αρκετά επιστημονικά μοντέλα σχεδόν σε όλους τους επιστημονικούς κλάδους όπως την Βιολογία την Στατιστική, την Ιατρική και την Οικονομία.

ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Βασικό σχόλιο: Από την μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = a^x$ με $0 < a \neq 1$ αποδεικνύεται ότι ισχύει η ισοδυναμία: $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ χρήσιμη για την επίλυση εκθετικών εξισώσεων.

Εκθετική ονομάζεται η εξίσωση όπου ο άγνωστος εμφανίζεται ως εκθέτης.

1^η Μορφή: Εξισώσεις της μορφής: $a^{\varphi(x)} = \beta$ με $0 < a \neq 1$

Αντιμετώπιση: Η εξίσωση έχει λύση μόνο όταν $\beta > 0$, μετασχηματίζουμε τον αριθμό β ως δύναμη με βάση a οπότε παίρνουμε $a^{\varphi(x)} = \beta \Leftrightarrow a^{\varphi(x)} = a^k \Leftrightarrow \varphi(x) = k$ και στην συνέχεια επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1^η

Να λυθούν οι εξισώσεις: $2^x = 32$, $3^{x^2-5x+6} = 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{27}{8}$, $3^{x+1} - 45 = 4 \cdot 3^{x-1}$

2^η Μορφή: Εξισώσεις που έχουν η μπορεί να πάρουν την μορφή: $Aa^{2x} + Ba^x + \Gamma = 0$

Αντιμετώπιση: Θέτουμε $a^x = \omega > 0$ και προκύπτει αλγεβρική εξίσωση.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Να λυθεί η εξίσωση $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$,

3^η Μορφή: Εξισώσεις που έχουν η μπορεί να πάρουν την μορφή: $A \cdot a^x = B \cdot \beta^x$, δηλαδή εξισώσεις που παρουσιάζονται δυνάμεις με διαφορετικές βάσεις οι οποίες δεν μπορούν να μετασχηματιστούν σε δυνάμεις με βάση τον ίδιο ακέραιο αριθμό.

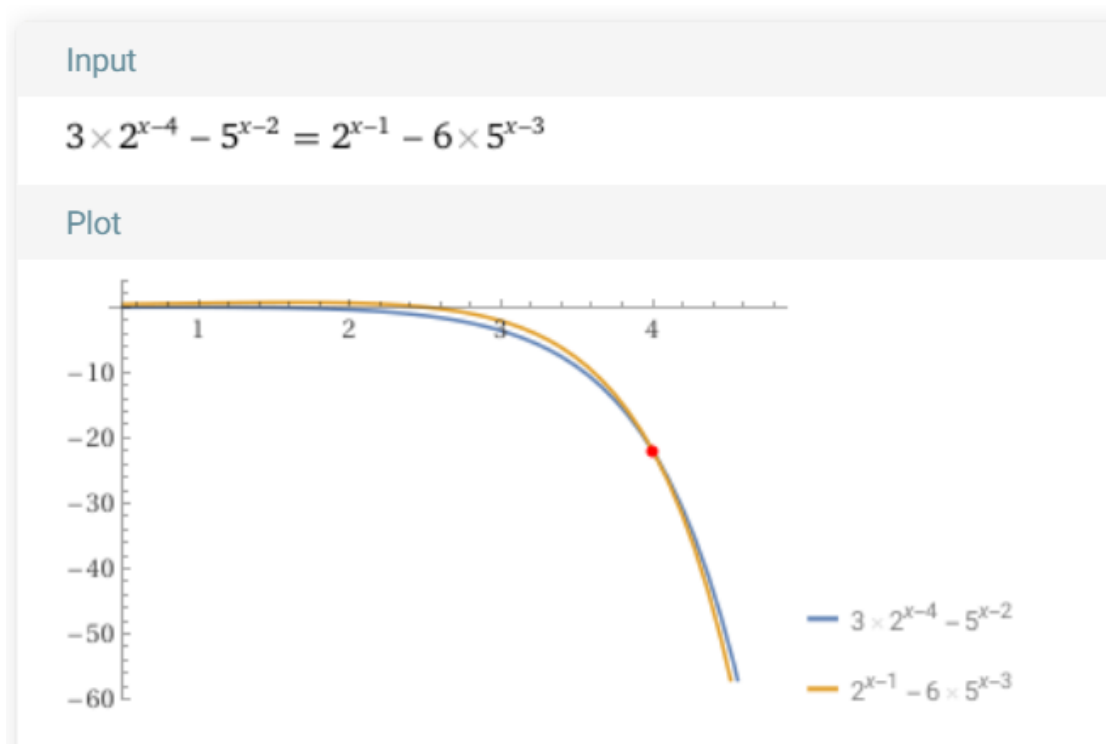
Αντιμετώπιση: Χωρίζουμε τις ίδιες βάσεις σε διαφορετικά μέλη και χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των αναλογίων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Να λυθεί η εξίσωση: $3 \cdot 2^{x-4} - 5^{x-2} = 2^{x-1} - 6 \cdot 5^{x-3}$

Η τετμημένη του σημείου τομής των δύο εκθετικών συναρτήσεων δίνει τη λύση της εξίσωσης (γιατί;)

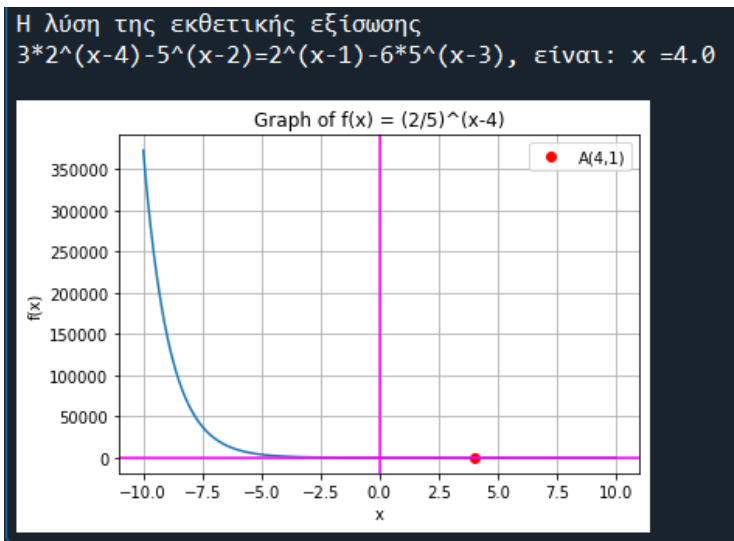
Εικόνα από την ιστοσελίδα: <https://www.wolframalpha.com/>



Ερωτήματα:

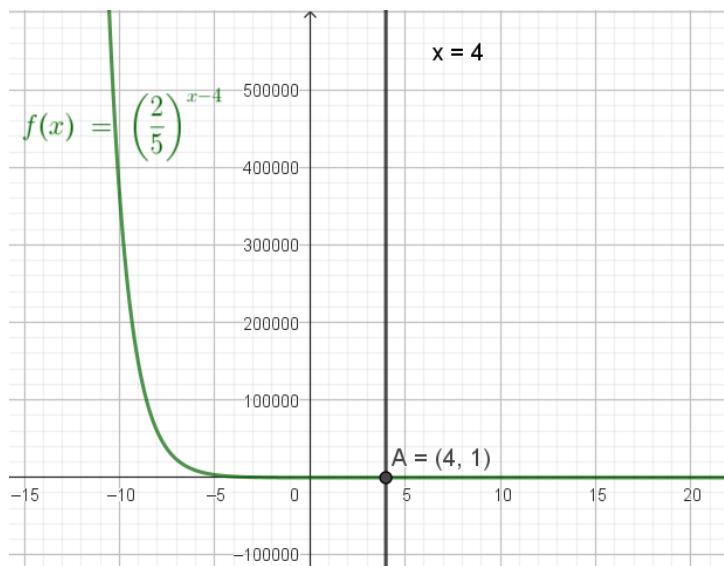
Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί παρουσιάζουμε αυτές τις τρεις εικόνες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{x-4}$, σχεδιασμένη σε διαφορετικές κλίμακες και ιδιαίτερα το σημείο $A(4,1)$ με την τετμημένη του να έχει πρωτεύοντα ρόλο;

Τι σχέση μπορεί να έχει η τετμημένη του σημείου $A(4,1)$ που ανήκει στη γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης (γιατί;) με τη λύση της παραπάνω εξίσωσης;

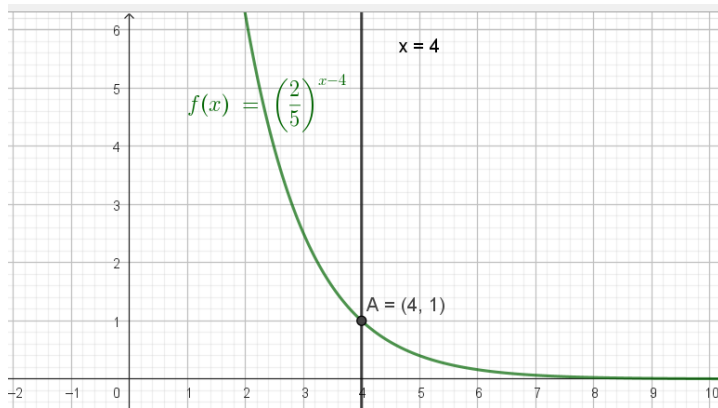


Εικόνα από την εκτέλεση προγράμματος στην Python. Το σύστημα των αξόνων δεν είναι κανονικό (ίδια μονάδα μέτρησης στους δύο άξονες)

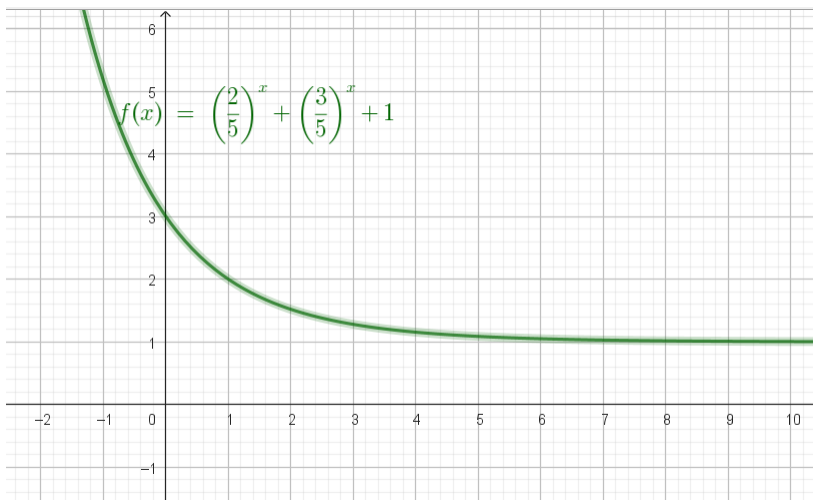
Για να δούμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης για μεγάλες τιμές, αλλάξαμε τη κλίμακα στον y και η γραφική παράσταση της συνάρτησης φαίνεται ότι είναι μετατοπισμένη πιο αριστερά σε σχέση με τον κατακόρυφο άξονα, δηλαδή όπως στην προηγούμενη εικόνα.



Η γραφική παράσταση της ίδιας συνάρτησης, στο Geogebra σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.



ΕΡΩΤΗΜΑ Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $2^x + 3^x + 5^x = 0$;



ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

Να λύσετε τις ασκήσεις 2, 3 της σελίδας 170 και 2 βii, iii, σελίδα 171