

ΑΠΟΛΥΤΑ



ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

Λέγοντας απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού a εννοούμε τον αριθμό a χωρίς το πρόσημό του. (Αυτός βέβαια είναι ένας απλοϊκός αλλά πρακτικός ορισμός). Η απόλυτη τιμή του a συμβολίζεται $|a|$
π.χ. $|-2| = 2$ και $|+5| = 5$

Ορισμός της απόλυτης τιμής του a

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

(η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός αν αυτός είναι θετικός ή 0, και ο αντίθετός του αν αυτός είναι αρνητικός)

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΟΡΙΣΜΟΥ- ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ

- $|a| \geq 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ (όλες οι απόλυτες τιμές είναι θετικές ή μηδέν)
- $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- $|a| \geq a$ και $|a| \geq -a$ (γιατί η $|a|$ είναι ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς a και $-a$)
- $|a| = |-a|$ (οι αντίθετοι αριθμοί έχουν την ίδια απόλυτη τιμή)
- $-|a| \leq a \leq |a|$
- $|x|^2 = x^2$

7. Αν $\theta > 0$, $a \in \mathbb{R}$ τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$\begin{cases} |x| = \theta & \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta \\ |x| = |a| & \Leftrightarrow x = a \text{ ή } x = -a \end{cases}$$

ΣΧΟΛΙΟ: Με την ιδιότητα αυτή λύνουμε εξισώσεις με απόλυτα αφού πρώτα τις φέρουμε στην μορφή $|x| = \theta$ ή $|x| = |a|$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

1. Απόλυτη τιμή γινομένου

Η απόλυτη τιμή του γινομένου δύο αριθμών ισούται με το γινόμενο των απολύτων τιμών τους.

$$\text{Δηλαδή } |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}\text{Έχουμε : } |a\beta| &= |a| \cdot |\beta| \Leftrightarrow |a\beta|^2 = (|a| \cdot |\beta|)^2 \\ \Leftrightarrow |a\beta|^2 &= |a|^2 \cdot |\beta|^2 \Leftrightarrow (a\beta)^2 = a^2\beta^2, \text{ που ισχύει.}\end{aligned}$$

2. Απόλυτη τιμή πηλίκου

Η απόλυτη τιμή του πηλίκου δύο αριθμών ισούται με το πηλίκο των απολύτων τιμών τους.

$$\text{Δηλαδή } \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \text{ με } \beta \neq 0$$

Απόδειξη Όμοια

3. Απόλυτη τιμή αθροίσματος

Η απόλυτη τιμή του αθροίσματος δύο αριθμών είναι μικρότερη ή ίση από το άθροισμα των απολύτων τιμών τους.

$$\text{Δηλαδή } |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Απόδειξη

Επειδή οι $|\alpha + \beta|$ και $|\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά :

$$\begin{aligned}|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| &\Leftrightarrow |\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \\ &\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha||\beta| \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha||\beta| \\ &\Leftrightarrow 2\alpha\beta \leq 2|\alpha||\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta \leq |\alpha\beta|, \text{ που ισχύει.}\end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι η ισότητα ισχύει μόνο, όταν $\alpha\beta = |\alpha\beta|$, δηλαδή όταν $\alpha\beta \geq 0$.

Παρατηρήσεις:

Η ιδιότητα αυτή ισχύει και για περισσότερους προσθετέους, π.χ. $|\alpha + \beta + \gamma| \leq |\alpha| + |\beta| + |\gamma|$
Γενικότερα ισχύει: $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

4. Απόλυτη τιμή διαφοράς

Η απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο αριθμών είναι μικρότερη ή ίση από το άθροισμα των απολύτων τιμών τους.

$$\text{Δηλαδή } |\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Παρατήρηση : Η ιδιότητες 1. και 3. ισχύουν και για περισσότερους όρους:

$$1\alpha) |x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_n|$$

$$3\alpha) |x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot |x_3| \dots |x_n|$$

$$3\beta) |x^n| = |x|^n \quad (\text{απόλυτη τιμή δύναμης})$$

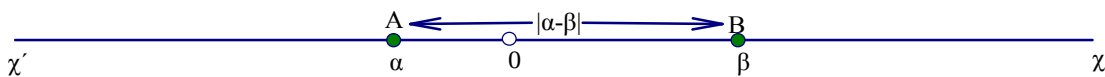
ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ

Αν οι αριθμοί α, β παριστάνονται στον άξονα $x'x$ με τα σημεία A, B αντίστοιχα τότε:

Απόσταση των αριθμών α, β λέγεται το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB

και συμβολίζεται $d(\alpha, \beta)$

$$d(\alpha, \beta) = AB$$



Αποδεικνύεται ότι η απόσταση των αριθμών α , β ισούται με την απόλυτη τιμή της διαφοράς

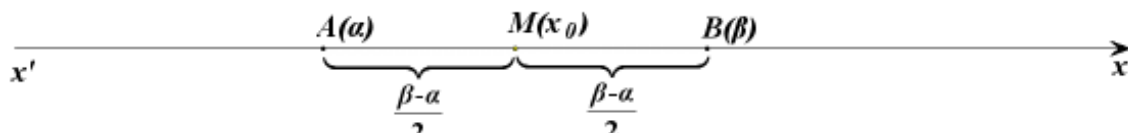
τους :

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$$

**ΜΕΣΟ (ΚΕΝΤΡΟ)
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ**

$$M(x_0) = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Απόδειξη



Αν $M(x_0)$ είναι το μέσο του AB , έχουμε $(MA) = (MB) \Leftrightarrow d(x_0, \alpha) = d(x_0, \beta) \Leftrightarrow |x_0 - \alpha| = |x_0 - \beta|$

Όμως $\alpha < x_0 < \beta \Leftrightarrow x_0 - \alpha > 0$ και $x_0 - \beta < 0$. Κατά συνέπεια ισοδύναμα έχουμε

$$x_0 - \alpha = \beta - x_0 \Leftrightarrow 2x_0 = \alpha + \beta \Leftrightarrow x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

**ΑΚΤΙΝΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ
ΤΜΗΜΑΤΟΣ**

$$\rho = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

**Αριθμοί που απέχουν
από το x_0 , απόσταση
μικρότερη της ακτίνας**

Αν $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, τότε ισχύει

$$|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \\ \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$$

**Αριθμοί που απέχουν
από το x_0 , απόσταση
μεγαλύτερη της ακτίνας**

Αν $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$,
τότε ισχύει

$$|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty) \\ \Leftrightarrow x < x_0 - \rho \text{ ή } x > x_0 + \rho$$

Συνέπειες

$$|x| < \rho \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$$

και $|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \text{ ή } x > \rho$ για $x_0 = 0$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ - ΜΕΘΟΔΟΙ - ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή ως λάθος (Λ).

1

α) $|-a| = |a|$

β) $|a-2| = |2-a|$

γ) Αν $|a| > |b| \Leftrightarrow a^2 > b^2$

δ) Αν a, b ετερόσημοι τότε $|a^{2009}b^{2011}| = a^{2009}b^{2011}$

ε) Αν a, b ομόσημοι τότε $|\frac{a}{b}| = -\frac{a}{b}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Σ

β) Σ

γ) Σ

δ) Λ

ε) Λ

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί a, b .

2

α) Τι συμπεραίνετε για τους a, b αν $|a| + |b-1| \neq 0$;

β) Τι συμπεραίνετε για τους a, b αν $|a-1| + |b| = 0$;

γ) Να βρείτε τις τιμές των a, b αν $|a-2| + |3-b| = 0$.

δ) Να βρείτε τις τιμές των a, b αν $|a-5| \leq -|4-b|$.

ε) Τι συμπεραίνετε για τους a, b αν $|a \cdot b| = -ab$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) $a \neq 0$ ή $b \neq 1$

β) $a = 1$ και $b = 0$

γ) $a = 2$ και $b = 3$

δ) $a = 5$ και $b = 4$

ε) a, b ετερόσημοι

3

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |\sqrt{3}-3| - |\pi-3|$

ΛΥΣΗ

➤ Είναι $\sqrt{3} < 3 \Leftrightarrow \sqrt{3}-3 < 0 \Leftrightarrow |\sqrt{3}-3| = -(\sqrt{3}-3) = 3-\sqrt{3}$

➤ $\pi > 3 \Leftrightarrow \pi-3 > 0 \Leftrightarrow |\pi-3| = \pi-3$

Κατά συνέπεια έχουμε $A = |\sqrt{3}-3| - |\pi-3| = 3-\sqrt{3} + \pi-3 = \pi-\sqrt{3}$

ΣΧΟΛΙΟ

Αν η παράσταση μέσα στο απόλυτο διατηρεί **σταθερό πρόσημο**, τότε για να απαλοίσουμε τα απόλυτα, κάνουμε χρήση του ορισμού

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a \leq 0 \end{cases}$$

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ $A = |f(x)| + |g(x, \psi)|$ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ - 1

Γενικά εργαζόμαστε ως εξής :

Εξετάζουμε αν η παράσταση f, g μέσα στο απόλυτο έχει **σταθερό πρόσημο**

1. Αν το **πρόσημο είναι σταθερό**, κάνουμε χρήση του ορισμού $|a| = \begin{cases} a, & \alpha \nu a \geq 0 \\ -a, & \alpha \nu a \leq 0 \end{cases}$,

όπως αναφέραμε στο προηγούμενο σχόλιο. Για τον έλεγχο του προσήμου της παράστασης μέσα στο απόλυτο :

- Αν η παράσταση είναι **αριθμητική**, μπορούμε απλά να παρατηρήσουμε το πρόσημο της
- Αν η παράσταση είναι **αλγεβρική** (περιέχει μεταβλητή) τότε :
 - ✓ Ελέγχουμε αν είναι **ανάπτυγμα τετραγώνου** $(\alpha \pm \beta)^2$
 - ✓ Ελέγχουμε αν είναι **άθροισμα θετικών ή αρνητικών όρων** (πχ $x^4 + 3x^2 + 5 > 0$)
 - ✓ Ελέγχουμε αν οι παραστάσεις μέσα στα απόλυτα, παράγονται από την σχέση $-|x| \leq x \leq |x| \Leftrightarrow \begin{cases} x + |x| \geq 0 \\ x - |x| \leq 0 \end{cases}$.
 - ✓ Ελέγχουμε αν από **δοσμένη συνθήκη** προκύπτει το πρόσημο των παραστάσεων στα απόλυτα (πχ $\alpha \nu 1 < x < 3 \Rightarrow x > 1$ και $x < 3 \Rightarrow x - 1 > 0$ και $x - 3 < 0$)

ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΠΟΛΥΤΟΥ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

4

$$A = |4x^2 - 4x + 1| \quad \text{και} \quad B = |x^6 - 6x^3 + 13|$$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι

➤ $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 \geq 0$, οπότε η παράσταση A γράφεται

$$A = |4x^2 - 4x + 1| = |(2x - 1)^2| = (2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$$

➤ $x^6 - 6x^3 + 13 = (x^6 - 6x^3 + 9) + 4 = (x^3 - 3)^2 + 4 > 0$, οπότε η παράσταση B γράφεται

$$B = |x^6 - 6x^3 + 13| = |(x^3 - 3)^2 + 4| = (x^3 - 3)^2 + 4 = x^6 - 6x^3 + 13$$

ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΠΟΛΥΤΟΥ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

5

$$A = |-x^4 - x^2 - 3|, \quad B = |-x^2 + 2x - 5|$$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι

➤ $-x^4 - x^2 - 3 = -(x^4 + x^2 + 3) < 0$, οπότε η παράσταση A γράφεται

$$A = |-x^4 - x^2 - 3| = |-(x^4 + x^2 + 3)| = x^4 + x^2 + 3$$

- $-x^2 + 2x - 5 = -(x^2 - 2x + 5) = -[(x^2 - 2x + 1) + 4] = -[(x-1)^2 + 4] < 0$, οπότε η παράσταση B γράφεται

$$B = |-x^2 + 2x - 5| = | -[(x-1)^2 + 4] | = (x-1)^2 + 4 = x^2 - 2x + 5$$

ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΠΟΛΥΤΟΥ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

6 Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = |4 - |-x^2 + 2x - 1|| - |x^2 + 4| + 4x|$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι

- $-x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2 \leq 0$, οπότε $4 - |-x^2 + 2x - 1| = 4 + |-(x-1)^2| = 4 + (x-1)^2 > 0$ και κατά συνέπεια

$$|4 - |-x^2 + 2x - 1|| = |4 + (x-1)^2| = 4 + (x-1)^2 = x^2 - 2x + 5$$

- $x^2 + 4 > 0$, οπότε $|x^2 + 4| + 4x = |x^2 + 4x + 4| = |(x+2)^2| = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$.

Άρα η παράσταση A γράφεται $A = (x^2 - 2x + 5) - (x^2 + 4x + 4) = -6x + 1$

ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

7 Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = |2^{x+3} - 2^x| + |x + |x|| - ||x| - x|$ $x \in \mathbb{Z}$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι

- $2^{x+3} - 2^x = 2^x \cdot 2^3 - 2^x = 2^x(2^3 - 1) = 7 \cdot 2^x > 0$, οπότε $|2^{x+3} - 2^x| = |7 \cdot 2^x| = 7 \cdot 2^x$

- Από την ιδιότητα $|x| \geq -x$ προκύπτει $x + |x| \geq 0$, οπότε $|x + |x|| = x + |x|$

- Από την ιδιότητα $x \leq |x|$ προκύπτει $|x| - x \geq 0$, οπότε $||x| - x| = |x| - x$

Άρα η παράσταση A γράφεται $A = 7 \cdot 2^x + (x + |x|) - (|x| - x) = 7 \cdot 2^x + x + |x| - |x| + x = 7 \cdot 2^x + 2x$

ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΡΟΣΗΜΟ ΑΠΟ ΔΟΣΜΕΝΗ ΣΥΝΘΗΚΗ

8 Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = |x-1| + |x-3|$ όπου $1 < x < 3$

ΛΥΣΗ

Από υπόθεση έχουμε $1 < x < 3$, οπότε

- $x > 1 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow |x-1| = x-1$

- $x < 3 \Leftrightarrow x-3 < 0 \Leftrightarrow |x-3| = -(x-3) = -x+3$.

- Κατά συνέπεια η παράσταση A γράφεται

$$A = |x-1| + |x-3| = x-1-x+3 = 2$$

ΣΧΟΛΙΟ

Βρήκαμε ότι $A=2$

Στην περίπτωση αυτή

ισοδύναμα λέμε ότι

η παρασταση είναι

ανεξάρτητη του x (δηλαδή σταθερή).

ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΡΟΣΗΜΟ ΑΠΟ ΔΟΣΜΕΝΗ ΣΥΝΘΗΚΗ

9 Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = |a-\beta| + |2\gamma-2\beta| - |\beta+\gamma-2\alpha| + \left| a - \frac{a+\beta}{2} \right|$

ΛΥΣΗ

Από υπόθεση έχουμε $\alpha < \beta < \gamma$, οπότε

- $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0 \Leftrightarrow |\alpha - \beta| = -(\alpha - \beta) = -\alpha + \beta$
- $\gamma > \beta \Leftrightarrow \gamma - \beta > 0 \Leftrightarrow 2\gamma - 2\beta > 0 \Leftrightarrow |2\gamma - 2\beta| = 2\gamma - 2\beta$
- $\left. \begin{matrix} \beta > \alpha \\ \gamma > \alpha \end{matrix} \right\} \Rightarrow \beta + \gamma > 2\alpha \Rightarrow \beta + \gamma - 2\alpha > 0 \Rightarrow |\beta + \gamma - 2\alpha| = \beta + \gamma - 2\alpha$

$$\text{➤ } \alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} \Leftrightarrow \alpha - \frac{\alpha + \beta}{2} < 0 \Leftrightarrow \left| \alpha - \frac{\alpha + \beta}{2} \right| = -\left(\alpha - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = -\alpha + \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Κατά συνέπεια η παράσταση A γράφεται

$$A = (-\alpha + \beta) + (2\gamma - 2\beta) - (\beta + \gamma - 2\alpha) + \left(-\alpha + \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = -\alpha + \beta + 2\gamma - 2\beta - \beta - \gamma + 2\alpha - \alpha + \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\text{Οπότε } A = \frac{\alpha}{2} - \frac{3\beta}{2} + \gamma$$

ΣΧΟΛΙΟ

Υπενθυμίζουμε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha + \beta}{2}$ είναι η κεντρική τιμή (μέσο) των αριθμών α, β .

$$\text{Άρα } \alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$$

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ $A = |f(x)| + |g(x, \psi)|$ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ - 2

2. Αν το πρόσημο της παράστασης στο απόλυτο δεν είναι σταθερό, τότε

- Αν η παράσταση είναι της μορφής $A = |\varphi(x)|$ (με ένα απόλυτο) όπου $\varphi(x) = \alpha x + \beta$ τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις: $\varphi(x) \geq 0$ και $\varphi(x) < 0$ και στη συνέχεια κάνουμε χρήση του ορισμού $|a| = \begin{cases} a, & \alpha \nu \ a \geq 0 \\ -a, & \alpha \nu \ a < 0 \end{cases}$
- Αν η παράσταση είναι της μορφής $A = |\varphi(x)| \pm |\sigma(x)|$ (με δύο ή περισσότερα απόλυτα) όπου $\varphi(x), \sigma(x)$ είναι δυνάμεια της μορφής $\alpha x + \beta$ τότε απαλοψουμε τις απόλυτες τιμές σύμφωνα με την διαδικασία:
 - ✓ Βρίσκουμε τις λύσεις των εξισώσεων $\varphi(x) = 0$ και $\sigma(x) = 0$
 - ✓ Τοποθετούμε τις τιμές αυτές σε άξονα και κάτω από αυτόν σχηματίζουμε πίνακα με τα πρόσημα των παραστάσεων $\varphi(x), \sigma(x)$
 - ✓ Διακρίνουμε τόσες περιπτώσεις για τις τιμές της μεταβλητής, όσα είναι τα διαστήματα στα οποία έχει χωριστεί ο άξονας
 - ✓ Το πρόσημο κάθε παράστασης $\alpha x + \beta$ με $\alpha \neq 0$, φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{\alpha}$	$+\infty$
$\alpha x + \beta$	ετερόσημο του α	ομόσημο του α	ετερόσημο του α

- Αν η παράσταση είναι της μορφής $A = |\varphi(x)| \pm |\sigma(x)|$, όπου $\varphi(x), \sigma(x)$ είναι πολυώνυμα, τότε ελέγχουμε αν με παραγοντοποίηση και χρήση των ιδιοτήτων $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ και $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ αναγόμεσμε στις προηγούμενες περιπτώσεις.

10

ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΠΟΛΥΤΟΥ ΜΕ ΜΗ ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΡΟΣΗΜΟ (ΔΙΑΚΡΙΣΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ)

Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = 2 + x - |x - 1|$ όπου $x \in \mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- Αν $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ τότε $|x - 1| = x - 1$ και η παράσταση γράφεται
 $A = 2 + x - |x - 1| = 2 + x - (x - 1) = 3$
- Αν $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ τότε $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$ και η παράσταση γράφεται
 $A = 2 + x - |x - 1| = 2 + x - (-x + 1) = 2x + 1$

$$\text{Άρα } A = \begin{cases} 3 & \text{αν } x \geq 1 \\ 2x + 1 & \text{αν } x < 1 \end{cases}$$

11

ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΜΕ ΜΗ ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΡΟΣΗΜΟ (ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΡΟΣΗΜΩΝ)

Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = 2x - |x - 2| + |x + 1|$ όπου $x \in \mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

- Βρίσκουμε τους αριθμούς που μηδενίζουν τα απόλυτα
 - $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
 - $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- Βρίσκουμε τα πρόσημα των διωνύμων $x + 1$, $x - 2$ στον πίνακα προσήμων

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x + 1$		-	+	
$x - 2$		-	-	+

- Διακρίνουμε τις περιπτώσεις
 - Αν $x < -1$ είναι $x + 1 < 0$ και $x - 2 < 0$, οπότε έχουμε
 $A = 2x - |x - 2| + |x + 1| = 2x + (x - 2) - (x + 1) = 2x - 3$
 - Αν $-1 \leq x \leq 2$ είναι $x + 1 \geq 0$ και $x - 2 \leq 0$, οπότε έχουμε
 $A = 2x - |x - 2| + |x + 1| = 2x + (x - 2) + (x + 1) = 4x - 1$
 - Αν $x > 2$ είναι $x + 1 > 0$ και $x - 2 > 0$, οπότε έχουμε
 $A = 2x - |x - 2| + |x + 1| = 2x - (x - 2) + (x + 1) = 2x + 3$

$$\text{Άρα } A = \begin{cases} 2x - 3, & x < -1 \\ 4x - 1, & -1 \leq x \leq 2 \\ 2x + 3, & x > 2 \end{cases}$$

12

ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΟ ΘΕΜΑ

Να απλοποιηθεί η παράσταση $\Gamma = |-x^2 + 2x - 1| + |x^2 + x + |x||$ όπου $x \in \mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι

$$-x^2 + 2x - 1 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x-1)^2 \leq 0 \text{ και } x^2 + x + |x| \geq 0$$

οπότε η παράσταση Γ γράφεται

$$\Gamma = |-x^2 + 2x - 1| + |x^2 + x + |x|| = (x-1)^2 + x^2 + x + |x| = 2x^2 - x + |x|$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- Αν $x \geq 0$ είναι $|x| = x$ οπότε $\Gamma = 2x^2 - x + |x| = 2x^2 - x + x = 2x^2$.
- Αν $x < 0$ είναι $|x| = -x$ οπότε $\Gamma = 2x^2 - x + |x| = 2x^2 - x - x = 2x^2 - 2x$.

$$\text{Άρα } \Gamma = \begin{cases} 2x^2 & \text{αν } x \geq 0 \\ 2x^2 - 2x & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

ΣΧΟΛΙΟ

$$\begin{cases} x^2 \geq 0 \\ x + |x| \geq 0 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Leftrightarrow} x^2 + x + |x| \geq 0$$

ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΟ ΘΕΜΑ-ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

13

Να απλοποιηθεί η $A = |x-5| + |10-2x| - |x^2-x|$ όπου $x: 0 < x < 3$

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \text{Η παράσταση γράφεται } A &= |x-5| + |10-2x| - |x^2-x| = \\ &= |x-5| + |-2(x-5)| - |x(x-1)| = |x-5| + |-2||x-5| - |x||x-1| = \\ &= |x-5| + 2|x-5| - |x||x-1| \text{ οπότε } A = 3|x-5| - |x||x-1| \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{➤ Είναι } x > 0 \Leftrightarrow |x| = x$$

$$\text{➤ Είναι } x < 3 < 5 \Leftrightarrow x-5 < 0 \Leftrightarrow |x-5| = -(x-5) = -x+5$$

Κατά συνέπεια η παράσταση A γράφεται

$$(1) \Leftrightarrow A = 3|x-5| - |x||x-1| = 3(-x+5) - x|x-1| \quad (2) \text{ οπότε}$$

- Αν $0 < x < 1$ είναι $x-1 < 0 \Leftrightarrow |x-1| = -(x-1) = -x+1$ οπότε
(2) $\Leftrightarrow A = 3(-x+5) - x(-x+1) = x^2 - 4x + 15$
- Αν $1 \leq x < 3$ είναι $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow |x-1| = x-1$ οπότε
(2) $\Leftrightarrow A = 3(-x+5) - x(x-1) = -x^2 - 2x + 15$

$$\text{Άρα } A = \begin{cases} x^2 - 4x + 15 & \text{αν } 0 < x < 1 \\ -x^2 - 2x + 15 & \text{αν } 1 \leq x < 3 \end{cases}$$

ΣΧΟΛΙΑ

1. Αντίστοιχα εργαζόμαστε και σε παραστάσεις με πηλίκα.

2. Η δοσμένη συνθήκη δεν μας εξασφαλίζει κατ' ανάγκη τα πρόσημα όλων των παραστάσεων των απολύτων

$$3. \text{ Θυμόμαστε } |-a| = |a|$$

ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΟ ΘΕΜΑ-ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΗΛΙΚΟΥ

14

Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \left| \frac{x^4 - 8x}{x-2} \right| + \left| \frac{x^7 + x^5}{x^5 + x^3} \right|$ όπου $x: 0 < x \neq 2$

ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$\text{➤ } \left| \frac{x^4 - 8x}{x-2} \right| = \left| \frac{x(x^3 - 8)}{x-2} \right| = \left| \frac{x(x-2)(x^2 - 2x + 4)}{x-2} \right| = |x||x^2 - 2x + 4|$$

$$= |x| \left| \underbrace{(x-1)^2 + 3}_{(+)} \right| = x \left[(x-1)^2 + 3 \right] = x(x^2 - 2x + 4) = x^3 - 2x^2 + 4x$$

$$\text{➤ } \left| \frac{x^7 + x^5}{x^5 + x^3} \right| = \left| \frac{x^5(x^2 + 1)}{x^3(x^2 + 1)} \right| = |x^2| = x^2$$

ΣΧΟΛΙΑ

Σε γινόμενα - πηλίκα

Κάνουμε όλες τις παραγοντοποιήσεις. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες $|a\beta| = |a| \cdot |\beta|$,

$$\left| \frac{a}{\beta} \right| = \frac{|a|}{|\beta|} \text{ και αφού κάνουμε}$$

απλοποίηση εργαζόμαστε κατά τα γνωστά.

Κατά συνέπεια η παράσταση A γράφεται

$$A = \left| \frac{x^4 - 8x}{x - 2} \right| + \left| \frac{x^7 + x^5}{x^5 + x^3} \right| = x^3 - 2x^2 + 4x + x^2 = x^3 - x^2 + 4x$$

ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

Γενικά

εργαζόμαστε με τις μεθόδους που έχουν αναπτυχθεί στο ΚΕΦ-2
(Ευθεία απόδειξη -ισοδυναμίες-απαγωγή σε άτοπο κλπ)

Χρήσιμες συμβουλές

1. Εξετάζουμε σε κάθε περίπτωση ,αν χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των απολύτων ,η προς απόδειξη σχέση ,γράφεται σε απλούστερη μορφή .
2. Αν έχουμε απόλυτα υψωμένα στο τετράγωνο ,χρησιμοποιούμε τον τύπο $|a|^2 = a^2$
3. Αν και τα δύο μέλη της ζητούμενης σχέσης είναι θετικά ,τα υψώνουμε στο τετράγωνο και εργαζόμαστε με ισοδυναμίες (**ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΥ**) .
4. Εξετάζουμε αν με επεξεργασία δοσμενων σχέσεων και χρήση της ιδιότητας $|a \pm b| \leq |a| + |b|$,καταλήγουμε στο ζητούμενο.

ΜΕΘΟΔΟΣ

15

Να αποδείξετε ότι $|a - b| \leq |a - 5| + |b - 5|$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι

$$|a - b| = |(a - 5) - (b - 5)| \quad \text{οπότε από την ιδιότητα } |x - y| \leq |x| + |y| \text{ για } x = a - 5 \text{ και } y = b - 5$$

,έχουμε

$$|a - b| = |(a - 5) - (b - 5)| \leq |a - 5| + |b - 5|$$

16

Να αποδείξετε ότι $|a - 3b|^2 + |3a + b|^2 = 10(|a|^2 + |b|^2)$

ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$\begin{aligned} |a - 3b|^2 + |3a + b|^2 &= (a - 3b)^2 + (3a + b)^2 = a^2 - 6ab + 9b^2 + 9a^2 + 6ab + b^2 = \\ &= 10a^2 + 10b^2 = 10|a|^2 + 10|b|^2 = 10(|a|^2 + |b|^2) \end{aligned}$$

17

Να αποδείξετε ότι $|a + b| \leq |a + \gamma| + |\gamma - b|$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι

$|a + \beta| = |(a + \gamma) + (\beta - \gamma)|$ οπότε από την ιδιότητα $|x + \psi| \leq |x| + |\psi|$ για $x = a + \gamma$ και $\psi = \beta - \gamma$ έχουμε

$$|a + \beta| = |(a + \gamma) + (\beta - \gamma)| \leq |a + \gamma| + |\beta - \gamma| = |a + \gamma| + |\gamma - \beta|$$

$$\text{Άρα } |a + \beta| \leq |a + \gamma| + |\gamma - \beta|$$

18

Αν $\beta \neq 0$ και ισχύει $|a + \beta| = |a| + |\beta|$ να αποδείξετε ότι $a \geq 0$

ΛΥΣΗ

Έχουμε

$|a + \beta| = |a| + |\beta| \Leftrightarrow$ αφού και τα δύο μέλη είναι θετικά, μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο

$$\Leftrightarrow |a + \beta|^2 = (|a| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow (a + \beta)^2 = |a|^2 + 2|a||\beta| + |\beta|^2 \Leftrightarrow a^2 + 2a|\beta| + |\beta|^2 = a^2 + 2|a||\beta| + |\beta|^2$$

$$\Leftrightarrow 2a|\beta| = 2|a||\beta| \stackrel{(\cdot 2|\beta|)}{\Leftrightarrow} \frac{2a|\beta|}{2|\beta|} = \frac{2|a||\beta|}{2|\beta|} \Leftrightarrow |a| = a \Leftrightarrow a \geq 0$$

19

Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή ως λάθος (Λ).

α) Αν $a > 2$ τότε $|a - 1| = a - 1$

β) Δεν ισχύει πάντα $|a - \beta| = |\beta - a|$

γ) Αν $|a| \geq 1 \Leftrightarrow a \geq 1$

δ) Αν $1 + x^2 \geq 2|x|$

ε) Η ισότητα $|x + y| = |x| + |y|$ ισχύει μόνο όταν οι x, y είναι θετικοί

στ) Αν $|x| \leq 2$ τότε το x ανήκει στο διάστημα $[-2, 2]$

ζ) Αν $x < 1$ τότε $|x - 1| + |x - 2| - |x - 3| = -x$

$$\eta) | -|x| | = \begin{cases} x, & \text{άν } x \leq 0 \\ -x, & \text{άν } x > 0 \end{cases}$$

θ) Η εξίσωση $-3x = 3|x|$, με $x < 0$ είναι αόριστη.

ι) $|x| < |y| \Leftrightarrow x < y$

$$\kappa) \left| -\frac{2010}{2011} \right| = |-2010| \frac{1}{2011}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Σ
δ) Σ
ζ) Σ

β) Λ
ε) Λ
κ) Σ

γ) Λ
στ) Σ

20

ΒΑΣΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

Να δείξετε την ισοδυναμία $|a| < |b| \Leftrightarrow a^2 < b^2$

ΛΥΣΗ

Είναι

$$a^2 < b^2 \Leftrightarrow |a|^2 < |b|^2 \Leftrightarrow |a|^2 - |b|^2 < 0 \Leftrightarrow (|a| - |b|)(|a| + |b|) < 0 \quad (1)$$

➤ Όμως γενικά ισχύει $|a| + |b| \geq 0$. Αν όμως $|a| + |b| = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ που είναι άτοπο, αφού τότε δεν ισχύει καμιά από τις ανισότητες $|a| < |b|$, $a^2 < b^2$.

➤ Κατά συνέπεια $|a| + |b| > 0$ οπότε $(1) \Leftrightarrow a^2 < b^2 \Leftrightarrow |a| - |b| < 0 \Leftrightarrow |a| < |b|$

21

Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει $\left| \frac{6a}{9a^2 + 1} \right| \leq 1$

ΛΥΣΗ

Εργαζόμαστε με ισοδυναμίες στην προς απόδειξη σχέση. Έτσι έχουμε

$$\left| \frac{6a}{9a^2 + 1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|6a|}{9a^2 + 1} \leq 1 \stackrel{(*)}{9a^2 + 1 > 0} \Leftrightarrow |6a| \leq 9a^2 + 1 \Leftrightarrow 9|a|^2 - 6|a| + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (3|a| - 1)^2 \geq 0$$

πού ισχύει.

22

ΒΑΣΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν $a \neq 0$ να δείξετε ότι : $\left| a + \frac{1}{a} \right| \geq 2$

ΛΥΣΗ

Εργαζόμαστε με τετραγωνισμό και ισοδυναμίες στην προς απόδειξη σχέση. Έτσι έχουμε

$$\left| a + \frac{1}{a} \right| \geq 2 \Leftrightarrow \left| a + \frac{1}{a} \right|^2 \geq 2^2 \Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{a} \right)^2 \geq 4 \Leftrightarrow a^2 + 2a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \geq 4 \Leftrightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 \geq 0 \stackrel{(**)}{a^2 > 0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 2a^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - 1)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει}$$

23

ΕΥΡΕΣΗ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΤΙΜΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΠΟ ΙΣΟΤΗΤΑ ΑΠΟΛΥΤΩΝ

Αν $\left| \frac{a+4}{a+1} \right| = 2$ να δείξετε ότι $|a| = 2$

ΛΥΣΗ

Εργαζόμαστε με τετραγωνισμό και ισοδυναμίες στην δοσμένη σχέση. Έτσι έχουμε

$$\left| \frac{a+4}{a+1} \right| = 2 \Leftrightarrow \frac{|a+4|}{|a+1|} = 2 \Leftrightarrow |a+4| = 2|a+1| \Leftrightarrow |a+4|^2 = 4|a+1|^2 \Leftrightarrow (a+4)^2 = 4(a+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 8a + 16 = 4(a^2 + 2a + 1) \Leftrightarrow 3a^2 = 12 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow |a|^2 = 4 \Leftrightarrow |a| = \sqrt{4} = 2$$

24

Αν $|x|\psi + |x|\psi = 2|x\psi|$, με $x\psi \neq 0$, να δείξετε ότι ότι x , ψ είναι ομόσημοι

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} |x|\psi + |x|\psi &= 2|x\psi| \quad |x|\psi + |x|\psi^2 = 4|x\psi|^2 \Leftrightarrow (|x|\psi + |x|\psi)^2 = 4(x\psi)^2 \Leftrightarrow \\ x^2|\psi|^2 + 2x\psi|x||\psi| + |x|^2\psi^2 &= 4x^2\psi^2 \Leftrightarrow \\ x^2\psi^2 + 2x\psi|x||\psi| + x^2\psi^2 &= 4x^2\psi^2 \Leftrightarrow 2x\psi|x||\psi| = 2x^2\psi^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2x\psi|x||\psi|}{2x\psi} &= \frac{2x^2\psi^2}{2x\psi} \Leftrightarrow |x||\psi| = x\psi \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |x\psi| &= x\psi \Leftrightarrow x\psi > 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή x , ψ είναι ομόσημοι .

ΣΧΟΛΙΟ

Η χρήση της ισοδυναμίας στις ασκήσεις 23 και 24 δεν είναι απαραίτητη ,αφού είναι προτάσεις της μορφής :

Αν P τότε Q

Μπορούσαμε να εργαστούμε με ευθεία απόδειξη ξεκινώντας από την δοσμένη σχέση και με το σύμβολο της συνεπαγωγής $\Rightarrow$ να καταλήξουμε στο ζητούμενο

25

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΧΕΣΗΣ ΜΕ ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ

Αν $|a| + |\beta| < 1$ να δείξετε ότι $|a| < 1$ και $|\beta| < 1$

ΛΥΣΗ

Έστω δεν ισχύει ότι $|a| < 1$ και $|\beta| < 1$. Τότε θα ισχύει ότι $|a| \geq 1$ ή $|\beta| \geq 1$.

➤ Αν $|a| \geq 1$ τότε : $|a| \geq 1 \Leftrightarrow |a| + |\beta| \geq 1 + |\beta| \geq 1$ (αφού $|\beta| \geq 0$) $\Leftrightarrow |a| + |\beta| \geq 1$ **άτοπο λόγω υπόθεσης.**

➤ Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν $|\beta| \geq 1$

Κατά συνέπεια $|a| < 1$ και $|\beta| < 1$

26

Να αποδείξετε ότι $|a\beta| - a\beta \geq a|\beta| - |a|\beta$

ΛΥΣΗ

Εργαζόμαστε με ισοδυναμίες στην ζητούμενη σχέση .Έτσι έχουμε

$$|a\beta| - a\beta \geq a|\beta| - |a|\beta \Leftrightarrow |a| \cdot |\beta| - a\beta \geq a|\beta| - |a|\beta \Leftrightarrow |a| \cdot |\beta| - a\beta - a|\beta| + |a|\beta \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta(|a| - a) + \beta(|a| - a) \geq 0 \Leftrightarrow (|a| - a)(|\beta| + \beta) \geq 0 \text{ πού ισχύει γιατί :}$$

➤ $|a| \geq a \Leftrightarrow |a| - a \geq 0$

➤ $|\beta| \geq -\beta \Leftrightarrow |\beta| + \beta \geq 0$. Κατά συνέπεια ισχύει η αρχική ανισότητα .

27

Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\alpha(\beta-1)(\gamma-2) \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha}{|\alpha|} + \frac{\beta-1}{|\beta-1|} + \frac{\gamma-2}{|\gamma-2|} \leq 3$$

ΛΥΣΗ

Από τη δοσμένη σχέση $a(\beta-1)(\gamma-2) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ και $\beta \neq 1$ και $\gamma \neq 2$.

Είναι $a \leq |a| \Leftrightarrow \frac{a}{|a|} \leq 1$. Όμοια έχουμε $\frac{\beta-1}{|\beta-1|} \leq 1$, $\frac{\gamma-2}{|\gamma-2|} \leq 1$ και με πρόσθεση κατά μέλη των τριών σχέσεων προκύπτει ότι: $\frac{a}{|a|} + \frac{\beta-1}{|\beta-1|} + \frac{\gamma-2}{|\gamma-2|} \leq 3$

28

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με: $|\alpha| < |\beta|$ και $|\alpha+\beta x| < |\alpha x + \beta|$. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) < 0$

β) $\alpha^2 + \beta^2 x^2 < \beta^2 + \alpha^2 x^2$

γ) $|x| < 1$

ΛΥΣΗ

α) Είναι $|\alpha| < |\beta| \Leftrightarrow |\alpha|^2 < |\beta|^2 \Leftrightarrow \alpha^2 < \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 < 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha+\beta) < 0$

β) Είναι $|\alpha+\beta x| < |\alpha x + \beta| \Leftrightarrow |\alpha+\beta x|^2 < |\alpha x + \beta|^2 \Leftrightarrow (\alpha+\beta x)^2 < (\alpha x + \beta)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 x^2 < \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 x^2 < \alpha^2 x^2 + \beta^2$ (1)

γ) Από (1) $\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 x^2 < \alpha^2 x^2 + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 x^2 - \alpha^2 x^2 - \beta^2 < 0 \Leftrightarrow x^2(\beta^2 - \alpha^2) - (\beta^2 - \alpha^2) < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(\beta^2 - \alpha^2) < 0$
 $\Leftrightarrow (|x|^2 - 1)(|\beta|^2 - |\alpha|^2) < 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 1, |\beta|^2 - |\alpha|^2$ (2) ετερόσημοι. Όμως $|\alpha| < |\beta| \Leftrightarrow |\alpha|^2 < |\beta|^2 \Leftrightarrow |\alpha|^2 - |\beta|^2 < 0$.
 $|\beta|^2 - |\alpha|^2 > 0$. Οπότε από (2) έχουμε ισοδύναμα ότι $|x|^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow |x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{1} \Leftrightarrow |x| < 1$

29

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΥΝΘΗΚΗΣ ΜΕ ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha\beta \neq 0$ ισχύει ότι $\alpha|\beta| + \beta|\alpha| = 0$, να αποδείξετε ότι οι α, β είναι ετερόσημοι.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι οι αριθμοί α, β δεν είναι ετερόσημοι. Αφού $\alpha\beta \neq 0$ θα έχουμε ότι α, β είναι ομόσημοι δηλαδή $\alpha \cdot \beta > 0$ (1).

➤ Αν $\alpha, \beta > 0$ τότε η δοσμένη σχέση γράφεται: $\alpha|\beta| + \beta|\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta + \beta\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta = 0$ που είναι άτοπο λόγω (1)

➤ Αν $\alpha, \beta < 0$ τότε η δοσμένη σχέση γράφεται: $\alpha|\beta| + \beta|\alpha| = 0 \Leftrightarrow -\alpha\beta - \beta\alpha = 0 \Leftrightarrow -2\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta = 0$ που είναι άτοπο λόγω (1)

Κατά συνέπεια οι α, β είναι ετερόσημοι.

30

Αν $|a + \beta| + |\beta + \gamma| + |\alpha + \gamma| \geq 2\alpha\beta\gamma \cdot (|a| + |\beta| + |\gamma|)$ (1), να αποδείξετε ότι $\alpha\beta\gamma \leq 1$.

ΛΥΣΗ

➤ Γνωρίζουμε ότι:

$|a + \beta| \leq |a| + |\beta|$, $|\beta + \gamma| \leq |\beta| + |\gamma|$, $|\gamma + \alpha| \leq |\gamma| + |\alpha|$ και με πρόσθεση κατά μέλη

προκύπτει ότι $|a + \beta| + |\beta + \gamma| + |a + \gamma| \leq 2(|a| + |\beta| + |\gamma|) \Leftrightarrow 2(|a| + |\beta| + |\gamma|) \geq |a + \beta| + |\beta + \gamma| + |a + \gamma|$ (2)

➤ Από (2) και (1) ,λόγω μεταβατικής ιδιότητας έχουμε ισοδύναμα

$$\Leftrightarrow 2(|a| + |\beta| + |\gamma|) \geq 2a\beta\gamma \cdot (|a| + |\beta| + |\gamma|) \Leftrightarrow (|a| + |\beta| + |\gamma|)(1 - a\beta\gamma) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - a\beta\gamma \geq 0 \Leftrightarrow a\beta\gamma \leq 1$$

31

Αν ισχύει $|x| \leq 1$ και $|\psi| \leq 3$ (1), να αποδείξετε ότι

α) $|4x - 5\psi| \leq 19$ και β) $|3x - 2\psi + 7| < 2011$

ΛΥΣΗ

α) Είναι $|4x - 5\psi| \leq |4x| + |5\psi| = 4|x| + 5|\psi| \stackrel{(1)}{\leq} 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 19$ και λόγω μεταβατικής ιδιότητας της διάταξης προκύπτει ότι $|4x - 5\psi| \leq 19$

β) Είναι $|3x - 2\psi + 7| \leq |3x| + |2\psi| + |7| = 3|x| + 2|\psi| + 7 \stackrel{(1)}{\leq} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 7 = 16 < 2011$
οπότε έχουμε όμοια $|3x - 2\psi + 7| < 2011$

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

Για όλους τους
πραγματικούς αριθμούς a, β
Ισχύει
 $||a| - |\beta|| \leq |a \pm \beta| \leq |a| + |\beta|$

32

Αν $-3 < x < 1$ και $-1 < \psi < 3$, να αποδείξετε ότι :

α) $|x + 1| + |\psi - 1| < 4$

β) $||x - 3| - |\psi - 2|| < 100$

ΛΥΣΗ

α) Είναι

➤ $-3 < x < 1 \Leftrightarrow -2 < x + 1 < 2 \Leftrightarrow |x + 1| < 2$ (1)

➤ $-1 < \psi < 3 \Leftrightarrow -2 < \psi - 1 < 2 \Leftrightarrow |\psi - 1| < 2$ (2)

Οπότε με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) παίρνουμε $|x + 1| + |\psi - 1| < 4$

β) Είναι

$$||x - 3| - |\psi - 2|| \leq |(x - 3) + (\psi - 2)| = |x + \psi - 5| = |(x + 1) + (\psi - 1) - 5| \leq |x + 1| + |\psi - 1| + |5| \stackrel{(a)}{<} 4 + 5 = 9 < 100$$

Οπότε λόγω μεταβατικότητας θα ισχύει ότι $||x - 3| - |\psi - 2|| < 100$.

33

Αν $|a - 1| < 5$ και $|\beta - 2| < 3$ (1), να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών μεταβάλλεται η παράσταση (α) $\alpha + \beta$ και (β) $2\alpha - \beta + 17$

ΛΥΣΗ

(α) Είναι $|a + \beta| = |(a - 1) + (\beta - 2) + 3| \leq |a - 1| + |\beta - 2| + |3| \stackrel{(1)}{<} 5 + 3 + 3 = 11$ και λόγω μεταβατικότητας θα ισχύει

ότι $|a + \beta| < 11 \Leftrightarrow -11 < \alpha + \beta < 11$

(β) Είναι $|2\alpha - \beta + 17| = |(2\alpha - 2) - (\beta - 2) + 17| \leq |2\alpha - 2| + |\beta - 2| + |17| = 2|a - 1| + |\beta - 2| + 17 \stackrel{(1)}{<} 2 \cdot 5 + 3 + 17 = 30$

και λόγω μεταβατικότητας θα ισχύει ότι

$$|2\alpha - \beta + 17| < 30 \Leftrightarrow -30 < 2\alpha - \beta + 17 < 30$$

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΑΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΩΝ

Στα κεφάλαια 3 και 4 θα δούμε λεπτομερικά εξισώσεις και ανισώσεις με απόλυτα. Για λόγους συνοχής της ύλης και καλύτερης εμπέδωσης των ιδιοτήτων των απολύτων, θα δούμε χρήσιμες εφαρμογές και σε υπολογιστικά θέματα. Έτσι έχουμε

A- ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Χρησιμοποιούμε γενικά τις παρακάτω ιδιότητες-προτάσεις

$$1. \begin{cases} |x| = \theta \\ \theta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \theta \quad \text{ή γενικά} \quad \begin{cases} |\varphi(x)| = \theta \\ \theta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \varphi(x) = \pm \theta$$

$$2. |x| = |a| \Leftrightarrow x = \pm a \quad \text{ή γενικά} \quad |\varphi(x)| = |\sigma(x)| \Leftrightarrow \varphi(x) = \pm \sigma(x)$$

$$3. |\varphi(x)| = \sigma(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) = \pm \sigma(x) \\ \text{και} \quad \sigma(x) \geq 0 \end{cases}$$

B- ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Χρησιμοποιούμε γενικά τις παρακάτω ιδιότητες-προτάσεις

$$1. |x| \leq \rho \Leftrightarrow -\rho \leq x \leq \rho \quad \text{ή γενικά} \quad |\varphi(x)| \leq \rho \Leftrightarrow -\rho \leq \varphi(x) \leq \rho$$

$$2. |x| \geq \rho \Leftrightarrow x \leq -\rho \quad \text{ή} \quad x \geq \rho \quad \text{ή γενικά} \quad |\varphi(x)| \geq \rho \Leftrightarrow \varphi(x) \leq -\rho \quad \text{ή} \quad \varphi(x) \geq \rho$$

$$3. |\varphi(x)| = \varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(x) \geq 0$$

4. Σε περιπτώσεις που δεν μπορούμε να κάνουμε χρήση ιδιοτήτων, μπορούμε να απαλοίσουμε τα απόλυτα διακρίνοντας περιπτώσεις ή με πίνακα προσήμων και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό

Γ- ΔΥΟ ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

$$|a| + |b| = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \quad \text{και} \quad |a| + |b| \leq 0 \Leftrightarrow |a| + |b| = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$$

34

Να βρείτε το x από τις εξισώσεις

$$(a) |x| = 2 \quad (b) |2x - 1| + 3 = 0 \quad (c) |x - 2| = 3$$

ΛΥΣΗ

Είναι

$$(a) |x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$(b) |2x - 1| + 3 = 0 \Leftrightarrow |2x - 1| = -3 \text{ που είναι αδύνατη αφού } |2x - 1| \geq 0$$

$$(c) |x - 2| = 3 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 3 \text{ οπότε}$$

- $x - 2 = 3 \Leftrightarrow x = 5$
- $x - 2 = -3 \Leftrightarrow x = -1$

35

Να βρείτε το x από τις εξισώσεις

$$(α) |x-3|+|6-2x|=12 \quad (β) |2x-3|=|x-1| \quad (γ) |2x-3|=|x-2|+|2x-4|$$

ΛΥΣΗ

Είναι

$$(α) |x-3|+|6-2x|=12 \Leftrightarrow |x-3|+|-2(x-3)|=12 \Leftrightarrow |x-2|+|-2||x-3|=12 \Leftrightarrow |x-2|+2|x-2|=12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3|x-2|=12 \Leftrightarrow |x-2|=6 \Leftrightarrow x-2=\pm 6 \text{ οπότε}$$

- $x-2=6 \Leftrightarrow x=8$
- $x-2=-6 \Leftrightarrow x=-4$

$$(β) |2x-3|=|x-1| \Leftrightarrow 2x-3=\pm(x-1) \text{ οπότε}$$

- $2x-3=x-1 \Leftrightarrow x=2$
- $2x-3=-(x-1) \Leftrightarrow 3x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$

$$(γ) |2x-3|=|x-2|+|2x-4| \Leftrightarrow |2x-3|=|x-2|+2|x-2| \Leftrightarrow |2x-3|=3|x-2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x-3=\pm 3(x-2) \text{ οπότε}$$

- $2x-3=3(x-2) \Leftrightarrow -x=-3 \Leftrightarrow x=3$
- $2x-3=-3(x-2) \Leftrightarrow 5x=9 \Leftrightarrow x=\frac{9}{5}$

ΠΡΟΣΟΧΗ

Αν η εξίσωση έχει περισσότερα από δύο απόλυτα, τότε ελέγχουμε αν κάποιο απόλυτα είναι παράσταση ενός άλλου.

36

Να βρείτε το x από τις ανισώσεις

$$(α) |x| \leq 1 \quad (β) |x-1| \leq 3 \quad (γ) |x-2|+|4-2x| < 6$$

ΛΥΣΗ

Είναι

$$(α) |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$$

$$(β) |x-1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-1 \leq 3 \stackrel{(+1)}{\Leftrightarrow} -2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-2, 4]$$

$$(γ) |x-2|+|4-2x| < 6 \Leftrightarrow |x-2|+|-2(x-2)| < 6 \Leftrightarrow |x-2|+|-2||x-2| < 6 \Leftrightarrow |x-2|+2|x-2| < 6 \Leftrightarrow 3|x-2| < 6 \Leftrightarrow$$

$$|x-2| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-2 < 2 \stackrel{(+2)}{\Leftrightarrow} 0 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (0, 4)$$

37

Να βρείτε το x από τις ανισώσεις

$$(α) |x| \geq 3 \quad (β) |2x+1| \geq 4 \quad (γ) |x-1|+|2-2x| > 9$$

ΛΥΣΗ

$$(α) |x| \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -3 \text{ ή } x \geq 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

$$(β) |2x+1| \geq 4 \Leftrightarrow 2x+1 \leq -4 \text{ ή } 2x+1 \geq 4 \Leftrightarrow 2x \leq -5 \text{ ή } 2x \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -\frac{5}{2} \text{ ή } x \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

$$(γ) |x-1|+|2-2x| > 9 \Leftrightarrow |x-1|+2|x-1| > 9 \Leftrightarrow 3|x-1| > 9 \Leftrightarrow |x-1| > 3 \Leftrightarrow |2x+1| \geq 4 \Leftrightarrow x-1 \leq -3 \text{ ή } x-1 \geq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \leq -2 \text{ ή } x \geq 4 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [4, +\infty).$$

38

Να βρείτε τα x, ψ από την σχέση

$$|2x-\psi-3|+|x+2\psi-4|=0$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$|2x-\psi-3|+|x+2\psi-4|=0 \Leftrightarrow 2x-\psi-3=0 \text{ και } x+2\psi-4=0 \text{ οπότε έχουμε το σύστημα}$$

$$\begin{cases} 2x - \psi = 3 \\ x + 2\psi = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2\psi = 6 \\ x + 2\psi = 4 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 5x = 10 \\ x + 2\psi = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2\psi = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \psi = 1 \end{cases}$$

39

Να βρείτε το x από την σχέση $|x^2 - x| + |x^2 - 1| \leq 0$

ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$|x^2 - x| + |x^2 - 1| \leq 0 \Leftrightarrow |x^2 - x| + |x^2 - 1| = 0 \Leftrightarrow |x(x-1)| + |(x-1)(x+1)| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x-1|(|x| + |x+1|) = 0 \quad (1) \quad \text{όμως } |x| + |x+1| > 0 \text{ και κατά συνέπεια } \neq 0$$

Οπότε από την (1) προκύπτει ότι $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ - ΑΚΤΙΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ

• ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ $(AB) = d(a, \beta) = |a - \beta| = |\beta - a|$

• ΜΕΣΟ $AB \quad x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$

• ΑΚΤΙΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ $\rho = \frac{\beta - \alpha}{2}$

• $d(x, x_0) < \rho \Leftrightarrow |x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$

• $d(x, x_0) > \rho \Leftrightarrow |x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x < x_0 - \rho \text{ ή } x > x_0 + \rho$

• Οι παραπάνω τύποι μπορούν να ‘εμπλακούν’ σε όλες τις κατηγορίες ασκήσεων που είδαμε στα απόλυτα.

40

Να βρείτε το x από την σχέση $d(x, 2) = 3$

ΛΥΣΗ

Είναι

$$d(x, 2) = 3 \Leftrightarrow |x - 2| = 3 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 3, \text{ οπότε}$$

- $x - 2 = 3 \Leftrightarrow x = 5$
- $x - 2 = -3 \Leftrightarrow x = -1$

41

Να βρείτε το x από την σχέση $d(x, 2) = d(x, 3)$

ΛΥΣΗ

$$d(x,2) = d(x,3) \Leftrightarrow |x-2| = |x-3| \Leftrightarrow x-2 = \pm(x-3), \text{οπότε}$$

- $x-2 = x-3 \Leftrightarrow -2 = -3$ αδύνατη
- $x-2 = -(x-3) \Leftrightarrow x-2 = -x+3 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

42

Αν $d(a,2\beta) > d(2a,\beta)$,να δείξετε ότι $|a| < |\beta|$

ΛΥΣΗ

Είναι

$$\begin{aligned} d(a,2\beta) > d(2a,\beta) &\Leftrightarrow |a-2\beta| > |2a-\beta| \Leftrightarrow |a-2\beta|^2 > |2a-\beta|^2 \Leftrightarrow (a-2\beta)^2 > (2a-\beta)^2 \Leftrightarrow \\ a^2 - 4a\beta + 4\beta^2 > 4a^2 - 4a\beta + \beta^2 &\Leftrightarrow 3\beta^2 > 3a^2 \Leftrightarrow a^2 < \beta^2 \Leftrightarrow |a|^2 < |\beta|^2 \Leftrightarrow |a| < |\beta|. \end{aligned}$$

43

Να βρείτε το x από την σχέση $d(x,-1) \geq d(x,2)$

ΛΥΣΗ

Είναι

$$\begin{aligned} d(x,-1) \geq d(x,2) &\Leftrightarrow |x+1| \geq |x-2| \Leftrightarrow |x+1|^2 \geq |x-2|^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq (x-2)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq x^2 - 4x + 4 \\ &\Leftrightarrow 6x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \end{aligned}$$

44

Να βρείτε το x από την σχέση $|d(x^2,-1) + d(x,2) - x^2| \leq 3$

ΛΥΣΗ

Είναι

$$\begin{aligned} |d(x^2,-1) + d(x,2) - x^2| \leq 3 &\Leftrightarrow ||x^2+1| + |x-2| - x^2| \leq 3 \Leftrightarrow |x^2+1| + |x-2| - x^2 \leq 3 \Leftrightarrow |1+|x-2|| \leq 3 \\ &\Leftrightarrow 1+|x-2| \leq 3 \Leftrightarrow |x-2| \leq 2 \Leftrightarrow 2-2 \leq x \leq 2+2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [0,4] \end{aligned}$$

ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΠΙΝΑΚΑ

Για τις ασκήσεις με συμπλήρωση πίνακα χρησιμοποιούμε τα παρακάτω

$ x-x_0 \leq \rho$	$d(x,x_0) \leq \rho$	$[a,\beta] = [x_0-\rho, x_0+\rho]$
$ x-x_0 < \rho$	$d(x,x_0) < \rho$	$(a,\beta) = (x_0-\rho, x_0+\rho)$
$ x-x_0 \geq \rho$	$d(x,x_0) \geq \rho$	$(-\infty, a] \cup [\beta, +\infty) = (-\infty, x_0-\rho] \cup [x_0+\rho, +\infty)$
$ x-x_0 > \rho$	$d(x,x_0) > \rho$	$(-\infty, a) \cup (\beta, +\infty) = (-\infty, x_0-\rho) \cup (x_0+\rho, +\infty)$

ΜΟΔΟΣ

45

Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας ,στα μη γραμμοσκιασμένα κουτάκια όπως δείχνει η πρώτη γραμμή .

ΛΥΣΗ

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ	ΑΠΟΣΤΑΣΗ	ΔΙΑΣΤΗΜΑ ή ΕΝΩΣΗ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ
$ x-4 \leq 2$	$d(x,4) \leq 2$	$[2,6]$
$ x+3 < 4$	$d(x,-3) < 4$	$(-7,1)$
$ x-4 > 2$	$d(x,4) > 2$	$(-\infty,2) \cup (6,+\infty)$
$ x+3 \geq 4$	$d(x,-3) \geq 4$	$(-\infty,-7] \cup [1,+\infty)$
$ x-5 < 1$	$d(x,5) < 1$	$(-4,6)$
$ x+1 > 2$	$d(x,-1) > 2$	$(-\infty,-3) \cup (1,+\infty)$
$ x-5 \geq 1$	$d(x,5) \geq 1$	$(-\infty,-4] \cup [6,+\infty)$
$ x+1 \leq 2$	$d(x,-1) \leq 2$	$[-3,1]$
$ x < 2$	$d(x,0) < 2$	$(-2,2)$
$ x+2 \leq 3$	$d(x,-2) \leq 3$	$[-5,1]$
$ x > 2$	$d(x,0) > 2$	$(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$
$ x+2 > 3$	$d(x,-2) > 3$	$(-\infty,-5) \cup (1,+\infty)$

ΠΡΟΣΟΧΗ

$$x_0 = \frac{a+b}{2} \text{ κεντρική τιμή } a, b$$

$$\rho = \frac{b-a}{2} \text{ ακτίνα διαστήματος}$$

ΘΕΜΑΤΑ - ΕΠΙΛΟΓΕΣ ΣΧΟΛΙΚΟΥ

46

Η διάμετρος ενός δίσκου μετρήθηκε και βρέθηκε 2,37dm. Το λάθος της μέτρησης είναι το πολύ 0,005dm. Αν D είναι η πραγματική διάμετρος του κύκλου, τότε :

- Να εκφράσετε την παραπάνω παραδοχή με τη βοήθεια της έννοιας της απόστασης.
- Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή D.

ΛΥΣΗ

$$i) d(D, 2,37) \leq 0,005$$

$$ii) d(D, 2,37) \leq 0,005 \Leftrightarrow |D - 2,37| \leq 0,005$$

$$-0,005 \leq D - 2,37 \leq 0,005$$

$$-0,005 + 2,37 \leq D \leq 0,005 + 2,37$$

$$2,365 \leq D \leq 2,375$$

47

Να αποδείξετε ότι $|\alpha - \beta| \leq |\alpha - \gamma| + |\gamma - \beta|$

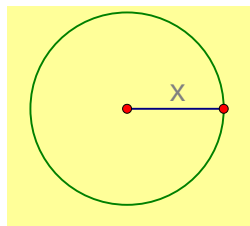
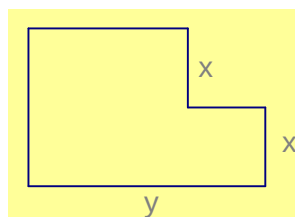
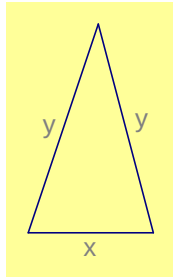
ΛΥΣΗ

$$|\alpha - \beta| = |\alpha - \beta + \gamma - \gamma|$$

$$= |(\alpha - \gamma) + (\gamma - \beta)| \leq |\alpha - \gamma| + |\gamma - \beta| \quad (\text{Τριγωνική ανισότητα})$$

48

Αν $|x-2| < 0,1$ και $|y-4| < 0,2$, να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου των παρακάτω σχημάτων :

**ΛΥΣΗ**

$$|x-2| < 0,1 \Rightarrow -0,1 < x-2 < 0,1 \Rightarrow$$

$$2-0,1 < x < 2+0,1 \Rightarrow 1,9 < x < 2,1 \quad (1)$$

$$|y-4| < 0,2 \Rightarrow -0,2 < y-4 < 0,2 \Rightarrow$$

$$4-0,2 < y < 4+0,2 \Rightarrow 3,8 < y < 4,2 \quad (2)$$

- Περίμετρος = $x + 2y$

$$(2) \Rightarrow 7,6 < 2y < 8,4 \quad (3)$$

$$(1) + (2) : 9,5 < x + 2y < 10,5$$

- Περίμετρος = $4x + 2y$

$$(1) \Rightarrow 7,6 < 4x < 8,4 \quad (4)$$

$$(3) + (4) : 15,2 < 4x + 2y < 16,8$$

- Περίμετρος = $2\pi x$

$$(1) \Rightarrow 2\pi \cdot 1,9 < 2\pi x < 2\pi \cdot 2,1 \Rightarrow 3,8\pi < 2\pi x < 4,2\pi$$

49

Αν $x \neq 0$ και $y \neq 0$, να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση

$$A = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y}$$

ΛΥΣΗ

- Όταν x, y θετικοί : $A = \frac{x}{x} + \frac{y}{y} = 1 + 1 = 2$

- Όταν x, y αρνητικοί : $A = \frac{-x}{x} + \frac{-y}{y} = -1 - 1 = -2$

- Όταν x θετικός, y αρνητικός : $A = \frac{x}{x} + \frac{-y}{y} = 1 - 1 = 0$

- Όταν x αρνητικός, y θετικός : $A = \frac{-x}{x} + \frac{y}{y} = -1 + 1 = 0$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ -για απάντηση

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Να γράψετε τον ορισμό της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού a .
Τι εκφράζει γεωμετρικά η απόλυτη τιμή ;
2. Να συμπληρώσετε με τα συμπεράσματα στις προτάσεις που ακολουθούν
 - Αν $\theta > 0$ και $|x| = \theta$ τότε.....
 - Αν $\theta > 0$ και $|x| \leq \theta$ τότε.....
 - Αν $\theta > 0$ και $|x| > \theta$ τότε.....
 - Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού x , συμβολίζεται με και είναι μη αριθμός.
 - Αν ισχύει $|a + b| = |a| + |b|$, τότε οι πραγματικοί αριθμοί a, b είναι
 - Η απόσταση δύο αριθμών a και b συμβολίζεται με και είναι ίση με
3. Για τους τυχαίους πραγματικούς αριθμούς a, b να δείξετε ότι ισχύουν :
 - α) $|a|^2 = a^2$
 - β) $|ab| = |a| \cdot |b|$
 - γ) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$
4. Για τους τυχαίους πραγματικούς αριθμούς a, b να δείξετε ότι ισχύουν :
 - α) $|a + b| \leq |a| + |b|$
 - β) $|a - b| \leq |a| + |b|$Πότε ισχύει το ' $=$ ' σε κάθε περίπτωση ;
5. Για τους τυχαίους πραγματικούς αριθμούς a, b να δείξετε ότι η κεντρική τιμή τους είναι ο αριθμός $x_0 = \frac{a + b}{2}$
6. Τι ονομάζουμε απόσταση δύο αριθμών πάνω στον άξονα ;
Να γράφεται την σχέση που την εκφράζει .
7. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή ως λάθος (Λ).
 - α) $|-|a|| = |a|$
 - β) $|a - 3| = |-a - 3|$
 - γ) Αν $|a| < |b| \Leftrightarrow a^2 < b^2$
 - δ) Αν a, b ετερόσημοι τότε $|a^3 b^5| = a^3 b^5$

ε) Αν α, β ομόσημοι τότε $|- \alpha \beta| = -\alpha \beta$

8. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή ως λάθος (Λ).

α) $|-|\alpha \beta|| + \alpha \beta = 0$ τότε α, β ετερόσημοι

β) $|\alpha - 2| = |- \alpha + 2|$

γ) Αν $|\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2$

δ) Αν $|\alpha - 1| + |2 - \beta| = 0$ τότε $\alpha = 1$ και $\beta = 2$

ε) Αν $d(x, 0) > 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

9. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, χ .

α) Τι συμπεραίνετε για τους α, β αν $|\alpha + 2| + |\beta - 1| \neq 0$;

β) Τι συμπεραίνετε για τους α, β αν $|\alpha - 1| + |\beta - 5| = 0$;

γ) Να βρείτε τις τιμές του χ αν $d(\chi, -2) < 3$.

δ) Να βρείτε τις τιμές του χ αν $d(\chi - 1, 2) \geq 4$.

ε) Τι συμπεραίνετε για τους α, β αν $|\alpha \cdot \beta| + \alpha \beta = 0$;

10. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή ως λάθος (Λ).

α) $|\alpha|^2 = |\alpha^2| = \alpha^2$

β) $|x - 3| = |3 - x|$

γ) $|3 + x^2| = \left| \frac{1}{3 + x^2} \right|$

δ) Η εξίσωση $|x - 3| + 4 = 0$ είναι αδύνατη

ε) $||x| + 3| = |x| + 3$

στ) Αν $\alpha + \beta = 0$ τότε $|\alpha| = |\beta|$

ζ) Η εξίσωση $|x - 3| = -1$ είναι αδύνατη

η) $||x|| = |x|$

θ) Αν $x \leq 5$, τότε $|x - 5| = 5 - x$

ι) $d(2x - 3, 4) = |2x - 7|$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΥΣ

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστό ή Λάθος

1. Αν $\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2$

2. $|\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2$

3. $|\alpha| < |\beta| \Leftrightarrow \alpha^2 < \beta^2$

4. i) $|\alpha| < |\beta| \Rightarrow \alpha < \beta$

ii) $\alpha < \beta \Rightarrow |\alpha| < |\beta|$

5. $|x-y| = |y-x|$
6. $\text{Αν } |α|+|β| = 0 \Leftrightarrow α^2+β^2 = 0$
7. $x+y=0 \Leftrightarrow |x| = |y|$
8. $\text{Αν } α<β<γ<δ \text{ τότε } |β-γ|<|α-δ|$
9. Ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R} : |x+y|+x+y \geq 0$
10. Ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R} : |x-y| \leq |x|+|y|$
11. Η ισότητα $|x+y| = |x|+|y|$ ισχύει μόνο όταν οι x, y είναι θετικοί
12. Η απόσταση δύο αριθμών είναι η διαφορά τους
13. $\text{Αν } |x| \leq 2 \text{ τότε το } x \text{ ανήκει στο διάστημα } [-2, 2]$
14. $\text{Αν } x \in (-\infty, -5) \text{ ή } x \in (5, +\infty) \text{ τότε } |x| > 5$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΝΤΟΜΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

Απαντήστε σύντομα (ή με απόδειξη) στις παρακάτω ερωτήσεις:

- α) Τι συμπεραίνετε για τους x, y αν i) $|x|+|y| \neq 0$; ii) $|x|+|y| = 0$;
- β) Τι προκύπτει για τους x, y αν $|x|+|y| \leq 0$;
- γ) Τι προκύπτει για τους x, y αν i) $|xy|=xy$; ii) $|xy|=-xy$;
- δ) Πότε ισχύει η ισότητα $|x+y| = |x| + |y|$;
- ε) Τι προκύπτει για τους α, β όταν $\alpha|\beta| + \beta|\alpha| = 0$;
- στ) Τι προκύπτει για τους α, β όταν $|α+β| = |α-β|$;
- ζ) Γιατί ισχύει $\left| \alpha + \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^*$;
- η) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = |x-1|^2 + 3$;
- θ) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του κλάσματος $\frac{x}{|x|}$
- ι) $\text{Αν } x^2 = 9$, με τι ισούται η $|x|$;
- ια) $\text{Αν } x \in [-5, 5]$, πόσο είναι i) η ελάχιστη απόσταση του x από το 0; ii) η μέγιστη απόσταση;
- ιβ) $\text{Αν } 1 \leq x \leq 3$, πόσο είναι η μέγιστη τιμή της απόστασης του x από τον αριθμό 2;
- ιγ) $\text{Αν } d(x, 2000) \leq 8$, σε ποιο διάστημα ανήκει ο x ;
- ιδ) $\text{Αν } |x-3| \geq 2$, ποιες τιμές παίρνει ο x ;
- ιε) Με δύο παραδείγματα δείξτε ότι δεν ισχύει η ισοδυναμία $|x| < |y| \Leftrightarrow x < y$
- ιστ) $\text{Αν } x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ να δείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $|x-1| < \varepsilon$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.....για λύση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΠΟΥ ΔΙΑΤΗΡΟΥΝ ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

1. Να βρείτε τις τιμές των απολύτων

α) $|-7|$

β) $|-5|+|-2|$

γ) $|\sqrt{2}-1|$

δ) $|\sqrt{2}-2|$

ε) $|3-\pi|$

στ) $|2\sqrt{3}-7|$

ζ) $|9-\pi|+|1-\pi|$

η) $\left|(-1)^{2011}\right| \cdot |2-\pi|+|4-\pi|$

θ) $|3-|1-4||$

ι) $\left|1-\frac{3}{2}\right|-\left|\frac{1}{3}-1\right|$

2. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

α) $|x^2+1|$

β) $|-x^2+4x-4|$

γ) $||x^2+7|+2010|$

δ) $|x^2-6x+9|$

ε) $|-\alpha^2-3|$

στ) $||x^2+4|+4x|$

3. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

α) $|x^2-4x+4| \cdot |x^2+4|+|x^4+2|-|x^4+x^2+6| \cdot |-3-x^{2010}|+|2x^{2010}+1|-|3x^{2010}+3|$

β) $|x^2+4|+|x^4+2|-|x^4+x^2+6|$

4. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = |9x^2 - 6x + 1|$$

$$B = |x^6 + 6x^3 + 17|$$

5. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = |3^{x+3} - 3^x| + |x + |x|| - ||x| - x| \quad B = |7 - |-x^2 + 4x - 4|| - ||x^2 + 1| + 2x|$$

6. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = |-x^4 - x^2 - 5| \quad B = |-x^2 + 2x - 7|$$

7. Αν $\alpha > \beta > \gamma$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = |\beta - \alpha| + |2\gamma - 2\beta| - |\alpha + \beta - 2\gamma| + \left| \beta - \frac{\alpha + \beta}{2} \right|$$

$$A = |2\alpha - 2\beta| + |3\gamma - 3\beta| - |\beta + \gamma - 2\alpha| + \left| \frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha \right|$$

8. Αν $x < 2$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = x + |x - 2|$$

$$B = 3x - |x - 2| + |3 - x|$$

$$\Gamma = |x - 2| + |2x - 4| - |x - 3| + |2x - 9|$$

$$\Delta = |2 - x| + |4 - 2x| - |2x - 6|$$

9. Αν $0 \leq x \leq 1$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = -2x + |x - 1|$$

$$B = x - |x - 1| + |1 - x|$$

$$\Gamma = |x - 1| + |2 - 2x| - |x^2 - 1| + |2x - 6|$$

$$\Delta = |x^2 - x| + |2x^2 - 5| - |x^3 - 4|$$

10. Αν $x > 5$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = 2x + |x - 5|$$

$$B = x - |x - 5| + |5 - x|$$

$$\Gamma = |x - 5| + |x - 4| - |x - 3| + |2x - 4|$$

$$\Delta = |x^2 - 25| + |x^2 - 5x| - |2x - 3|$$

11. Αν $\alpha < 2 < \beta$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = \alpha + |\alpha - 1| + |\beta - 2|$$

$$B = |2 - \alpha| + |2 - \beta| - |\alpha - 3|$$

$$\Gamma = |\beta - 1| + |\beta| - |\beta^2 - 4| + |\alpha + 2 - 2\beta|$$

$$\Delta = \left| \alpha - \frac{\beta + 2}{2} \right| + \left| \beta - \frac{\alpha + 2}{2} \right| - |2\beta - 4|$$

12. Αν $x < \psi < 0$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = x + |2x| + |3\psi| + |x + \psi| - |x - \psi|$$

$$B = |x - 1| + |\psi - 2| - |x - 3|$$

$$\Gamma = |x^2 - \psi^2| - |x^2 - x\psi| + |\psi^2 - x\psi|$$

$$\Delta = |x^2 + x\psi| + |\psi^2 + x\psi|$$

13. Να απλοποιηθούν , από τα απόλυτα , οι παραστάσεις

i) $A = |x - 1| + |x^4 + 3x^2 + 17| - x + 5$ ii) $B = |x| + 4| - 2|x| + 3$ όπου $x > 1$

14. Να απλοποιηθούν , από τα απόλυτα , οι παραστάσεις

$$A = |x^2 - 6x + 9|$$

$$B = |-x^2 + 8x - 16|$$

$$\Gamma = |(x - 2)(x + 2) + 6|$$

15. Να απλοποιηθούν , από τα απόλυτα , οι παραστάσεις

$$A = \frac{|x|^3 + 2x^2}{|x| + 2}$$

$$B = \frac{|x|^3 + 5x^2}{2|x| + 10}$$

16. Αν $-2 < x < 3$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = |x + 2| + |9 - 3x|$$

$$B = ||x + 2| - 5| - |2x - 6||$$

17. Αν $-4 < x < -1$ να δείξετε ότι παράσταση

$$A = |2x - 3| - |1 - 3x| + |-x| \text{ είναι ανεξάρτητη του } x$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΠΟΥ ΔΕΝ ΔΙΑΤΗΡΟΥΝ ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

18. Να απλοποιηθούν από τα απόλυτα οι παραστάσεις ,όταν $x \in \mathbb{R}$:

$$A = 2 + |x - 1|$$

$$B = 2x - 3 + |x + 2|$$

$$\Gamma = |x - 3| + |2x - 6| - |3 - x|$$

$$\Delta = 4x - |x - 2| - |4 - 2x|$$

19. Να απλοποιηθούν από τα απόλυτα οι παραστάσεις ,όταν $x \in \mathbb{R}$:

$$A = x + |x-1| + |x-2|$$

$$B = 2|x+1| - |x+3|$$

$$\Gamma = |x-2| + |2x-6| - |x-3|$$

$$\Delta = x - |x-1| - |x^2 - x|$$

20. Να απλοποιηθούν από τα απόλυτα οι παραστάσεις ,όταν $x \in \mathbb{R}$:

$$A = \frac{x^2 + 3|x|}{|x| + 3}$$

$$B = \frac{x^2 - 6|x| + 5}{|x| - 1}$$

$$\Gamma = \frac{x^2 + 6|x| + 9}{|x| + 3}$$

$$\Delta = \frac{x^2 - 4}{|x| + 2}$$

21. Να απλοποιηθούν από τα απόλυτα οι παραστάσεις ,όταν $x \in \mathbb{R}$:

$$A = |x^2 - 2x + 1| - |x^2 - x + |x|| \quad B = |x^2 + 4x + 4| - |x^2 + x + |x||$$

22. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = \frac{|2x-4|}{x-2} + \frac{|y-1|}{y-1} \quad \text{και} \quad B = \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|y+1|}{y+1}$$

για τις διάφορες τιμές των πραγματικών αριθμών x και y .

23. Να απλοποιηθούν από τα απόλυτα οι παραστάσεις ,όταν $x \in \mathbb{R}$:

$$A = |x-2| + |3-x| \quad B = |x| - |4-x| + |x-5|$$

24. Αν γνωρίζουμε ότι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \gamma$ και $\beta < \gamma$,να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να

πάρει η παράσταση $A = \frac{|a-\gamma| - |\gamma-\beta| + |a-\beta|}{|\beta-a|}$

25. Δίνεται η παράσταση $A = 2x + 3 + |x-1| + |x-2|$.Ν βρείτε για ποια x η παράσταση παίρνει σταθερή τιμή

26. Αφού εκφράσετε τις παρακάτω παραστάσεις με απόλυτα ,στη συνέχεια να τα απαλείψετε :

$$A = x - 1 + d(x, 2)$$

$$B = x + d(x, -2) + d(x - 1, 2)$$

$$x \in \mathbb{R}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΠΟΛΥΤΩΝ

27. Να δείξετε ότι $|5a + 3|a| = 3a + 5|a|$,για κάθε $a \in \mathbb{R}$

28. Αν ισχύει $|x| < 1$ και $|\psi| < 1$ να δείξετε ότι $\left| \frac{x+\psi}{1+x\psi} \right| < 1$

29. Να αποδείξετε ότι $\left| \frac{x}{1+|x|} \right| + \frac{1}{1+|x|} = 2$
30. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\left| \frac{\alpha|\beta| + \beta|\alpha|}{\alpha\beta} \right| = 2$ να δείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι
31. Δειξτε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει :
- α) $\left| x + \frac{1}{x} \right| = \left| x \right| + \frac{1}{\left| x \right|}$ β) $\left| x \right| \leq \left| x + \frac{1}{x} \right|$
32. Αν α, β ομόσημοι αριθμοί, να δείξετε ότι : $|\alpha + \beta| \geq |\alpha - \beta|$
33. Να δειχθεί η $\left| |x| - |y| \right| \leq |x - y|$. Πότε ισχύει το =;
34. Αν $|x| > 1$, να δείξετε ότι : $\left| x + \frac{1}{x} \right| < |x| + 1$
35. Να δείξετε ότι για τους τυχαίους πραγματικούς αριθμούς x, ψ ισχύει : $|x\psi| + x\psi + x|\psi| + |x|\psi \geq 0$
36. Δειξτε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει : $|\alpha|^3 + 1 \geq \alpha^2 + |\alpha|$
37. Αν $\alpha, \beta, x, \psi \in \mathbb{R}$ και $|x| > |\psi|$, να δείξετε την ισοδυναμία : $|\beta x + \alpha \psi| > |\beta \psi + \alpha x| \Leftrightarrow |x| > |\psi|$
38. Να δείξετε ότι : $|x - 2\psi|^2 + |2x + \psi|^2 = 5(|x|^2 + |\psi|^2)$ για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$
39. Αν $|a + 5| = |a| + 5$ να δείξετε ότι $a \geq 0$
40. Αν $|x|^3 + |x| \geq x^2 + 1$ να δείξετε ότι $x \leq -1$ ή $x \geq 1$
41. Αν $-2 < x < 2$ και $-3 < x < 3$ να δείξετε ότι $|x\psi| < 6$
42. Αν $|x| = 5$ και $|y| = 3$, να δείξετε ότι : i) $5 \leq |2x + 5y| \leq 25$ ii) $2 \leq |y - x| \leq 8$.
43. Αν $|x| \leq 3$ και $|y| \leq 1$, να δείξετε ότι : i) $|4x + 3y| \leq 15$ ii) $|x - y + 10| \leq 14$.
44. Αν x και ψ ακέραιοι αριθμοί να δείξετε ότι δεν μπορεί να ισχύει $|x - \psi| < 1 + |x\psi|$

45. Αν $|x| \leq 1, |y| \leq 2$. Να αποδείξετε ότι για την παράσταση $A = |3x - 2y - 5|$ ισχύει $A \leq 12$
46. Αν $-4 < x < 2$ και $-2 < \psi < 4$ να δείξετε ότι $|x+1| + |\psi-1| < 6$
47. Να δειχθεί ότι: $|x+y| + |x-y| = 2|x| + 2|y|$, $x, y \in \mathbb{R}$.
48. Να αποδείξετε ότι αν $|x| \leq 1$ και $|y| \leq 2$ τότε: $|3x - y + 1| \leq 6$
49. Να αποδείξετε ότι : $4|ab| \leq (|a| + |\beta|)^2 \leq 2(a^2 + \beta^2)$
50. Αν ισχύει ότι : $|\alpha - \beta| < 2$ και $|\beta - \gamma| < 3$ να δείξετε ότι : $|\beta - \gamma + 2| < 7$
51. Αν ισχύει ότι : $|\alpha| < 1$ και $|\beta| < 2$ να δείξετε ότι :
- α) $a^2 < 1$ και $\beta^2 < 4$
- β) $|a\beta + 2| > |2a + \beta|$

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΑΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΩΝ

52. Να βρείτε το x από τις εξισώσεις
(α) $|x| = 5$ (β) $|2x - 3| + 7 = 0$ (γ) $|x - 1| = 4$
53. Να βρείτε το x από τις εξισώσεις
(α) $|2x - 5| = |x + 2|$ (β) $|2x - 3| = |x - 1|$ (γ) $\left| \frac{2x+3}{x-1} \right| = 1$
54. Να βρείτε το x από τις ανισώσεις
(α) $|x| \leq 2$ (β) $|x - 2| \leq 4$ (γ) $|x - 3| + |6 - 2x| < 12$
55. Να βρείτε το x από τις ανισώσεις
(α) $|2x| \geq 4$ (β) $|2x + 1| \geq 3$ (γ) $|x - 1| + |2 - 2x| > 6$
56. Να βρείτε το x από τις ανισώσεις
(α) $\left| \frac{2x-1}{x+1} \right| \geq 1$ (β) $\left| \frac{x-2}{x+2} \right| < 1$ (γ) $\frac{|x-1|-2}{3} \leq 6$
57. Να βρείτε τα x, ψ από την σχέση $|x - \psi - 1| + |x + 3\psi - 5| = 0$
58. Να βρείτε το x από την σχέση $|x^2 + 2x| + |x^2 - 4| \leq 0$
59. Να βρείτε το x από την σχέση $|x^2 - 9| + |x^2 - 6x + 9| = 0$

60. Να βρείτε το x από τις εξισώσεις

(α) $|x-2|+|4-2x|=9$ (β) $|2x-3|=|x-1|$ (γ) $|2x-3|=|x-3|+|2x-6|$

61. Να βρείτε το x από τις εξισώσεις

(α) $\left| \frac{5x}{|x|+3} \right| = 3$ (β) $|2|x|+1| = ||x|+3|$ (γ) $\frac{|x-3|-4}{5} = 2$

62. Να βρείτε το x από τις εξισώσεις

(α) $|2x-4|=10-|x-2|$ (β) $|2|x|-3| = ||x|-1|$ (γ) $\frac{3|x-3|-|6-2x|}{3} = 2$

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ - ΑΚΤΙΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ

63. Να βρείτε το x από τις σχέσεις

α) $d(x,1)=4$ β) $d(x,-2)=3$ γ) $d(x-1,2)=5$

64. Να βρείτε το x από τις σχέσεις

α) $d(x,2)+d(2x,4)=6$ β) $d(3x,2)=d(x,1)$

65. Να βρείτε το x από τις σχέσεις

α) $d(d(x,-1),5)=4$ β) $d(d(x,2),-4)=6$ γ) $d(d(x,3),-d(2x,6))=12$

66. Να βρείτε το x από τις σχέσεις

α) $d(x,0)<3$ β) $d(x,2)\leq 3$ γ) $d(x-1,1)<4$

67. Να βρείτε το x από τις σχέσεις

α) $d(x,0)\geq 4$ β) $d(x,-3)\geq 2$ γ) $d(x+1,3)>4$

68. Να βρείτε το x από τις σχέσεις

α) $d(x,3)+d(2x,6)\leq 9$ β) $d(x,2)\geq d(x,-1)$ γ) $d(x-1,1)+d(x-2,\leq 4$

69. Να βρείτε τα x, ψ από τις σχέσεις

α) $d(x+1,\psi)+d(4,\psi^2)=0$ β) $d(x-2,-\psi)+d(2x+\psi,3)\leq 0$

70. Να δείξετε ότι $d(a,\beta)-d(3a,a)\leq d(a,-\beta)$

71. Να δείξετε ότι $d\left(\frac{a}{\beta},0\right)+d\left(\frac{\beta}{a},0\right)\geq 2$

72. Αν ισχύει $d(4a-\beta,a-2\beta)=d(2a,0)+d(2\beta,\beta)$ όπου $a,\beta\neq 0$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί a, β είναι ετερόσημοι.

73. Αν ισχύει $d(x, -2) \leq 5$ και $d(\psi, 3) \leq 3$, να αποδείξετε ότι : $d(x+7, -\psi) \leq 16$

74. Αν ισχύει $|x| \leq 1$ και $|\psi| \leq 2$, να αποδείξετε ότι :

α) $d(x, -\psi) \leq 3$ β) $d(x-2, \psi-2) \leq 3$ γ) $d(x+3, 2\psi) \leq 8$

75. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας, στα μη γραμμοσκιασμένα κουτάκια όπως δείχνει η πρώτη γραμμή

Απόλυτη Τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$ x+1 \leq 2$	$d(x, -1) \leq 2$	$[-3, 1]$
	$d(\chi, -1) \geq 3$	
$ \chi+1 > 5$		
$ \chi-2 \geq 6$		
	$d(\chi-2, 3) < 4$	
		$(-3, 3)$
		$(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$
	$d(\chi, 7) > 5$	
$ \chi-3 < 1$		
		$(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$
		$[-2, 2]$
		$[-5, 1]$

ΣΥΝΘΕΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

76. Δίνεται η παράσταση $f(x) = \frac{|\chi+1| - |\chi-1|}{|\chi+1| + |\chi-1|}$. Να δείξετε ότι :

α) $f(x) = \chi$ όταν $|\chi| < 1$

β) $f(x) = \frac{1}{x}$ όταν $|\chi| > 1$

77. Αν $|\chi-2| < 3$ να απλοποιηθεί το κλάσμα $\kappa = \frac{|5-\chi| - 2|\chi+1|}{|\chi-3| - 2}$

78. Αν α πραγματικός με $0 < \alpha < 1$ και $1-\alpha \leq x \leq 1+\alpha$, να απλοποιηθεί, η

$$\Pi = \left| \frac{x-1}{\alpha} + 1 \right| + \left| \frac{x}{1-\alpha} - 1 \right| - \frac{x}{\alpha(1-\alpha)}$$

79. Αν α, β πραγματικοί με $\alpha \neq 0$ και $1-\beta \leq \alpha^2 \leq 1+\beta$, να δείξετε ότι $\left| 1 - \frac{1}{\alpha^2} \right| \leq \frac{\beta}{\alpha^2}$

80. Αν $|a+1| < 2$ και $|\beta-1| < 2$ να δείξετε ότι $|a+\beta| < 3$

81. Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ και $\chi^2 + \psi^2 = 1$ να αποδείξετε ότι $|\alpha\chi + \beta\psi| \leq 1$

82. Να δείξετε ότι $\frac{(2a+1)^2}{|2a+1|} + \frac{(2a-1)^2}{|2a-1|} \geq 2$

83. Αν $|a+2| \leq 5$ και $|\beta-3| \leq 3$, να δείξετε ότι: $|\alpha + \beta + 7| \leq 16$

84. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{x^2 - 4|x| + 4}{x^2 - 2|x|}$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση A

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A = -2$

85. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{x^2 + |x|}{|x| + 1} + \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1} - 2 \frac{x^2 - 4}{|x| + 2}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x , ορίζεται η παράσταση A .

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A .

86. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x-5}{2x-4}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x , ορίζεται η παράσταση A .

β) Να λύσετε την εξίσωση $|A| = 1$.

87. i. Να αποδείξετε την ισοδυναμία $|a| < |\beta| \Leftrightarrow a^2 < \beta^2$.

ii. Αν $|a| \neq |\beta|$ και ισχύει $1 + |a\beta| < |a + \beta|$ να αποδείξετε ότι $|a| < 1 < |\beta|$ ή $|\beta| < 1 < |a|$.

iii. Αν $a\beta \neq 0$ και ισχύει $|a + \beta| < |a - \beta|$ να αποδείξετε ότι:

α) a, β ετερόσημοι, β) $a|\beta| + \beta|a| = 0$.

88. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a, β, γ ισχύουν οι ανισότητες $|a| < 1$, $|\beta - 1| < 10$ και $|a - \gamma| < 10$ να αποδείξετε ότι $|a\beta - \gamma| < 20$.

89. i. Να αποδείξετε ότι αν $|a| + |\beta| = 0$ τότε $a = \beta = 0$.

ii. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|x - 2| + |x - 3| = 0$, β) $|x - 1| + |x^2 - 1| = 0$

90. Δίνονται οι παραστάσεις:

$A = xy - x + 2y - 2$, $B = 3x - xy + 6 - 2y$, $\Gamma. 3x + 6$.

i. Να γίνουν γινόμενο παραγόντων.

ii. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|A| + |B| + |\Gamma|$.

iii. Για ποιά τιμή του x η παράσταση $|A| + |B| + |\Gamma|$ παίρνει την ελάχιστη τιμή.