

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού**Θέμα 2ο**

12909. Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x-3| < 5$.

α) Να δείξετε ότι $x \in (-2, 8)$.

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x-3| < 5$.

γ) Αν A το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκατε στο β) ερώτημα και B το σύνολο με $B = \{-3, -2, -1, 0, 3, 4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$ με αναγραφή των στοιχείων τους.

Λύση

α) $|x-3| < 5 \Leftrightarrow -5 < x-3 < 5 \Leftrightarrow -2 < x < 8$

β) Οι ακέραιες τιμές του x είναι τα στοιχεία του συνόλου $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

γ) Είναι $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και $A \cap B = \{-1, 0, 3, 4\}$

13177. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

α) Να δείξετε ότι: $|\alpha-3| = 3-\alpha$ και $|\beta+2| = \beta+2$.

β) Να δείξετε ότι: $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$.

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1.

Λύση

α) Είναι $2 \leq \alpha \leq 3 \Leftrightarrow 2-3 \leq \alpha-3 \leq 3-3 \Leftrightarrow -1 \leq \alpha-3 \leq 0$, άρα $|\alpha-3| = 3-\alpha$.

Είναι $-2 \leq \beta \leq -1 \Leftrightarrow -2+2 \leq \beta+2 \leq -1+2 \Leftrightarrow 0 \leq \beta+2 \leq 1$ άρα $|\beta+2| = \beta+2$.

β) Είναι $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$.

γ) Επειδή $\alpha + \beta \geq 0$, $\alpha - 3 \leq 0$ και $\beta + 2 \geq 0$, είναι: $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2| = \alpha + \beta + 3 - \alpha - \beta - 2 = 1$

14071. α) Η αλγεβρική παράσταση K , που εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού x από τους αριθμούς 2 και -1, πάνω στον άξονα είναι:

A. $K = |x+1| + |x-2|$

B. $K = |x-1| + |x+2|$

Γ. $K = (|x|+1) + (|x|-2)$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τη σωστή παράσταση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Αν είναι $K = |x+1| + |x-2|$ τότε:

i) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης K όταν $x = \frac{3}{2}$.

ii) Αν $x > 2$ να γράψετε χωρίς απόλυτο την παράσταση K και να αποδείξετε ότι $K > 3$.

Λύση

α) A. $K = d(x, -1) + d(x, 2) = |x+1| + |x-2|$

β) i. Για $x = \frac{3}{2}$ είναι: $K = \left| \frac{3}{2} + 1 \right| + \left| \frac{3}{2} - 2 \right| = \left| \frac{3}{2} + \frac{2}{2} \right| + \left| \frac{3}{2} - \frac{4}{2} \right| = \left| \frac{5}{2} \right| + \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$

ii. Αν $x > 2$, τότε $x+1 > 3 > 0$ και $x-2 > 0$, οπότε $K = |x+1| + |x-2| = x+1 + x-2 = 2x-1$.

Είναι $x > 2 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow 2x-1 > 3 \Leftrightarrow K > 3$.

14412. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$, με $\beta > 1$ και $\alpha > 1$ τότε:

α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha} = 2$.

β) Να δείξετε $\alpha + \beta > \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha}$.

Λύση

α) Είναι $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$ και $\alpha > 1 \Leftrightarrow 1 - \alpha < 0$ άρα είναι:

$$\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} - \frac{-(1 - \alpha)}{1 - \alpha} = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$$

β) Είναι $\alpha > 1$ και $\beta > 1$ άρα $\alpha + \beta > 1 + 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 2$ όμως από το προηγούμενο ερώτημα είναι

$$\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha} = 2, \text{ άρα } \alpha + \beta > \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha}.$$

14491. α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$.

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

Λύση

α) $|y - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < y - 3 < 1 \Leftrightarrow 2 < y < 4$

β) Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με πλευρές x και y αντίστοιχα δίνεται από την σχέση $E = xy$. Είναι $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$ άρα πολλαπλασιάζοντας τις ανισότητες κατά μέλη (αφού όλοι οι όροι είναι θετικοί και έχουν ίδια φορά) προκύπτει $2 < E < 12$.

14572. Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $|x + 2| < 1$. Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$.

β) $|2x + 4| < 2$.

Λύση

α) $|x + 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x + 2 < 1 \Leftrightarrow -3 < x < -1$

β) $|x + 2| < 1 \Leftrightarrow 2|x + 2| < 2 \Leftrightarrow |2(x + 2)| < 2 \Leftrightarrow |2x + 4| < 2$

14599. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x| < 2$, τότε:

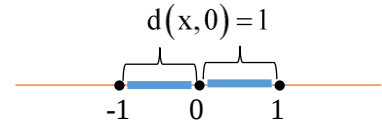
α) Να αποδείξετε ότι $-1 < x < 1$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$ ισχύει $x^2 < 1$.

Λύση

α) $|2x| < 2 \Leftrightarrow 2|x| < 2 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow d(x, 0) < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

β) $|x| < 1 \Leftrightarrow |x|^2 < 1^2 \Leftrightarrow x^2 < 1$



14617. Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$ (I).

α) Να αποδείξετε ότι $x \in (6, 8)$.

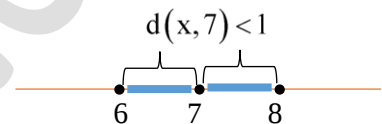
β) Αν γνωρίζουμε ότι $k \in (6, 8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k} \in (3, 4)$.

Λύση

α) $|x - 7| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 7 < 1 \Leftrightarrow 7 - 1 < x < 7 + 1 \Leftrightarrow 6 < x < 8$, δηλαδή $x \in (6, 8)$.

β) $k \in (6, 8) \Leftrightarrow 6 < k < 8 \Leftrightarrow \frac{1}{6} > \frac{1}{k} > \frac{1}{8} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{8} < \frac{1}{k} < \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{24}{8} < \frac{24}{k} < \frac{24}{6} \Leftrightarrow 3 < \frac{24}{k} < 4 \Leftrightarrow \frac{24}{k} \in (3, 4)$.



15054. Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha < 0 < \beta < \gamma$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός $A = \alpha(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)\beta$ είναι θετικός.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha + |\alpha - \beta| + |\gamma - \beta| - \gamma = 0$.

Λύση

α) Είναι $\alpha < 0$, $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$, $\gamma > \beta \Leftrightarrow \gamma - \beta > 0$ και $\beta > 0$, άρα $A > 0$.

β) $\alpha + |\alpha - \beta| + |\gamma - \beta| - \gamma = \alpha - \alpha + \beta + \gamma - \beta - \gamma = 0$.

35041. Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$.

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$.

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x .

Λύση

α) $d(2x, 3) = 3 - 2x \Leftrightarrow |2x - 3| = 3 - 2x$, το οποίο ισχύει όταν $2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$.

β) Από (α) ερώτημα είναι $|2x - 3| = 3 - 2x$. $x \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x \leq 3 \Leftrightarrow -2x \geq -3 \Leftrightarrow 6 - 2x \geq 3 > 0$

Άρα $|6 - 2x| = 6 - 2x$ και $K = |2x - 3| - 2|3 - x| = |2x - 3| - |6 - 2x| = 3 - 2x - (6 - 2x) = 3 - 2x - 6 + 2x = -3$
Επομένως η παράσταση K ανεξάρτητη του x .

35043. Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2| < 3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1| + |x-5|}{3}$.

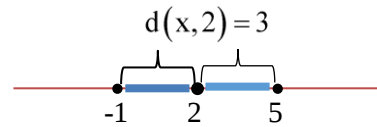
Λύση

$$\alpha) |x-2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x-2 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5$$

β) Από (α) ερώτημα έχουμε

$$x > -1 \Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow |x+1| = x+1 \text{ και } x-5 < 0 \Leftrightarrow |x-5| = -x+5.$$

$$\text{Άρα } K = \frac{|x+1| + |x-5|}{3} = \frac{\cancel{x}+1 + \cancel{-x}+5}{3} = \frac{6}{3} = 2$$



35044. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει $|y-2| < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|y-1| + |y-3|}{2}$.

Λύση

$$\alpha) |y-2| < 1 \Leftrightarrow -1 < y-2 < 1 \Leftrightarrow 1 < y < 3 \Leftrightarrow y \in (1, 3)$$

β) Από (α) ερώτημα έχουμε $y > 1 \Leftrightarrow y-1 > 0 \Leftrightarrow |y-1| = y-1$ και $y < 3 \Leftrightarrow y-3 < 0 \Leftrightarrow |y-3| = -y+3$

$$\text{Άρα } K = \frac{|y-1| + |y-3|}{2} = \frac{\cancel{y}-1 + \cancel{-y}+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

35112. Δίνεται η παράσταση: $A = |3x-6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε $x \geq 2$ είναι $A = 3x-4$

ii) για κάθε $x < 2$ είναι $A = 8-3x$.

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι: $\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2} = 3x+4$.

Λύση

$$\alpha) \text{ i) } x \geq 2 \Leftrightarrow 3x \geq 6 \Leftrightarrow 3x-6 \geq 0 \text{ και } |3x-6| = 3x-6. \text{ Άρα } A = 3x-6+2 = 3x-4$$

$$\text{ii) } x < 2 \Leftrightarrow 3x < 6 \Leftrightarrow 3x-6 < 0 \text{ και } |3x-6| = -3x+6. \text{ Άρα } A = -3x+6+2 = -3x+8 = 8-3x$$

$$\beta) \frac{9x^2-16}{|3x-6|+2} = \frac{(3x-4)(3x+4)}{A} \stackrel{x \geq 2}{=} \frac{\cancel{(3x-4)}(3x+4)}{\cancel{3x-4}} = 3x+4.$$

35404. α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3| < 1$.

β) Αν για τους x, y ισχύουν $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι $3 < x+y < 7$.

Λύση

α) $|y-3| < 1 \Leftrightarrow -1 < y-3 < 1 \Leftrightarrow 2 < y < 4$

β) Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο ανισότητες και προκύπτει το ζητούμενο.

35412. Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$:

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$.

Λύση

α) Είναι $5 < x < 10$, άρα $x-5 > 0 \Leftrightarrow |x-5| = x-5$ και $x-10 < 0 \Leftrightarrow |x-10| = -x+10$

$$\beta) A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10} = \frac{x-5}{x-5} + \frac{-x+10}{x-10} = \frac{\cancel{x}-5}{\cancel{x}-5} - \frac{\cancel{x}-10}{\cancel{x}-10} = 1-1=0$$

35415. Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| - |x-2|$.

α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$.

β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

Λύση

α) Είναι $1 < x < 2$, άρα $x-1 > 0 \Leftrightarrow |x-1| = x-1$ και $x-2 < 0 \Leftrightarrow |x-2| = -x+2$.

$$\text{Άρα } A = x-1 - (-x+2) = x-1+x-2 = 2x-3$$

β) Είναι $x < 1 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow |x-1| = -x+1$ και $x-2 < -1 < 0 \Rightarrow |x-2| = -x+2$

$$\text{Άρα } A = -x+1 - (-x+2) = \cancel{-x}+1+\cancel{x}-2 = -1$$

36777. Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν: $|x-3| \leq 2$ και $|y-6| \leq 4$.

α) Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$.

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y .

Λύση

α) Είναι $|x-3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x-3 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5$ και $|y-6| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq y-6 \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 10$

β) Αν Π η περίμετρος τότε $\Pi = 4x + 2y$. Είναι $1 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 4 \leq 4x \leq 20$ (1), $2 \leq y \leq 10 \Leftrightarrow 4 \leq 2y \leq 20$ (2) και με πρόσθεση των (1) και (2) έχουμε $8 \leq 4x + 2y \leq 40 \Leftrightarrow 8 \leq \Pi \leq 40$.

Άρα η μικρότερη τιμή της περιμέτρου είναι 8 και η μεγαλύτερη τιμή είναι 40.

36894. α) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$.

β) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha| + \left| \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$.

Λύση

α) $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 \geq -2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 + 2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha + 1)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει.

β) $|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2 \Leftrightarrow |\alpha| + \frac{1}{|\alpha|} \geq 2 \stackrel{|\alpha|>0}{\Leftrightarrow} |\alpha|^2 + 1 \geq 2|\alpha| \Leftrightarrow |\alpha|^2 - 2|\alpha| + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (|\alpha| - 1)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει.

Παρατήρηση: Δεν χρειάζεται το $\alpha < 0$.

36898. α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$ (1).

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|}{|\beta|} + \frac{|\beta|}{|\alpha|} \geq 2 \stackrel{(|\alpha||\beta|)}{\Leftrightarrow} |\alpha|^2 + |\beta|^2 \geq 2|\alpha||\beta| \Leftrightarrow$

$|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha||\beta| \geq 0 \Leftrightarrow (|\alpha| - |\beta|)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει.

β) $(|\alpha| - |\beta|)^2 = 0 \Leftrightarrow |\alpha| - |\beta| = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow \alpha = \pm\beta$.

37200. Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1| < 2$, τότε:

α) να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$.

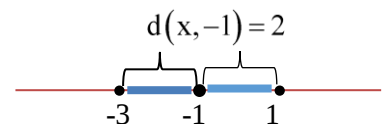
β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x .

Λύση

α) $|x+1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x+1 < 2 \Leftrightarrow -3 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-3, 1)$

β) Αφού $-3 < x < 1$ είναι $x+3 > 0$ και $x-1 < 0$. Τότε $|x+3| = x+3$,

$|x-1| = 1-x$ και $K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4} = \frac{x+3+1-x}{4} = 1$



37201. Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| + |y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$.

β) $0 < A < 4$.

Λύση

α) Αφού $1 < x < 4$ ισχύει ότι $x-1 > 0$ και $|x-1| = x-1$.

Επειδή $2 < y < 3$, ισχύει ότι $y-3 < 0$ και $|y-3| = 3-y$.

Άρα $A = x - 1 + 3 - y = x - y + 2$.

β) Είναι $1 < x < 4$ (1) και $2 < y < 3 \Leftrightarrow -2 > -y > -3 \Leftrightarrow -3 < -y < -2 \Leftrightarrow -1 < -y + 2 < 0$ (2)

Με πρόσθεση των (1) και (2) έχουμε: $0 < x - y + 2 < 4 \Leftrightarrow 0 < A < 4$

Θέμα 4ο

13179. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$.

α) i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3.

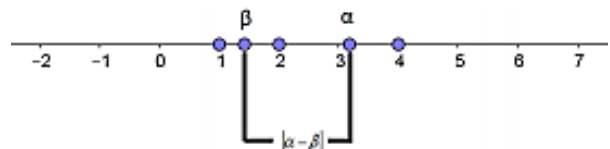
ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα.

β) i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$.

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1 - \frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta} - 1\right|$.

Λύση

α) i. Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα η απόσταση των α, β γίνεται μέγιστη όταν το β είναι το 1 και το α το 4, οπότε η μέγιστη απόσταση τους είναι ίση με 3, άρα $d(\alpha, \beta) \leq 3$.



ii. Είναι $2 \leq \alpha \leq 4$ (1) και $1 \leq \beta \leq 2 \Leftrightarrow -1 \geq -\beta \geq -2 \Leftrightarrow -2 \leq -\beta \leq -1$ (2)

Προσθέτοντας τις (1), (2) κατά μέλη προκύπτει: $0 \leq \alpha - \beta \leq 3$

Είναι $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta| = \alpha - \beta$, άρα $d(\alpha, \beta) \leq 3$.

β) i. Είναι $1 \leq \beta \leq 2$ (3) και $2 \leq \alpha \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{2}$ (4)

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (3), (4) προκύπτει ότι $\frac{1}{2} \leq \beta \cdot \frac{1}{\alpha} \leq 1 \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} \leq 1$

Είναι $2 \leq \alpha \leq 4$ (5) και $1 \leq \beta \leq 2 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\beta} \leq 1$ (6)

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (5), (6) προκύπτει ότι $1 \leq \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \leq 4 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} \geq 1$

ii. Είναι $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \frac{\beta}{\alpha}$ και $\frac{\alpha}{\beta} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} - 1 \geq 0$, οπότε

$$\left|1 - \frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta} - 1\right| \Leftrightarrow 1 - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} - 1 \Leftrightarrow \alpha\beta - \cancel{\alpha\beta} = \cancel{\alpha\beta} \frac{\alpha}{\cancel{\beta}} - \alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 - \alpha\beta \Leftrightarrow 0 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

Όμως $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$, οπότε η ισότητα $\alpha = \beta$ ισχύει μόνο όταν $\alpha = \beta = 2$.

33888. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση:

$$(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β .

β) Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|$.

Λύση

α) Επειδή $(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$, οι αριθμοί $\alpha - 1, 1 - \beta$ είναι ομόσημοι.

Αν $\alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$ και $1 - \beta > 0 \Leftrightarrow \beta < 1$, τότε $\beta < 1 < \alpha$.

Αν $\alpha - 1 < 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$ και $1 - \beta < 0 \Leftrightarrow \beta > 1$, τότε $\alpha < 1 < \beta$.

Άρα πάντοτε το 1 είναι μεταξύ των α, β .

β) Αν $\alpha < 1 < \beta$ έχουμε $|\beta - \alpha| = \beta - \alpha = 4$ ($\beta > \alpha$) και $K = 1 - \alpha + \beta - 1 = \beta - \alpha = 4$ ($\alpha - 1 < 0, 1 - \beta < 0$)

Αν $\beta < 1 < \alpha$ έχουμε $|\beta - \alpha| = -\beta + \alpha = 4$ ($\alpha > \beta$) και $K = \alpha - 1 + 1 - \beta = -\beta + \alpha = 4$ ($\alpha - 1 > 0, 1 - \beta > 0$)

33896. Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\alpha - 2| < 1$ και $|\beta - 3| \leq 2$.

α) Να αποδειχθεί ότι $1 < \alpha < 3$.

β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β .

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$.

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$.

Λύση

α) $|\alpha - 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < \alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow 1 < \alpha < 3$ (1)

β) $|\beta - 3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \beta - 3 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq \beta \leq 5 \Leftrightarrow \beta \in [1, 5]$

γ) Είναι $1 < \alpha < 3 \Leftrightarrow 2 < 2\alpha < 6$ (2) και $1 \leq \beta \leq 5 \Leftrightarrow -3 \geq -3\beta \geq -15 \Leftrightarrow -15 \leq -3\beta \leq -3$ (3).

Με πρόσθεση των (2) και (3) έχουμε $-13 < 2\alpha - 3\beta < 3$.

δ) Είναι $1 < \alpha < 3$ (1) και $1 \leq \beta \leq 5 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{\beta} \leq 1$ (4)

Με πολλαπλασιασμό των (1) και (4) έχουμε $\frac{1}{5} < \alpha \cdot \frac{1}{\beta} < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{\alpha}{\beta} < 3$

36671. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x, 5) \leq 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x .

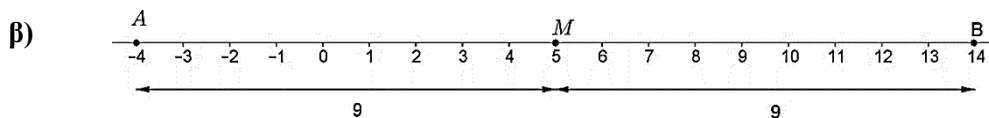
γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

$$|x + 4| + |x - 14| = 18.$$

Λύση

α) Η απόσταση του πραγματικού αριθμού x από τον αριθμό 5 είναι μικρότερη ή ίση του 9.



Ο ζητούμενος αριθμός είναι οποιοσδήποτε αριθμός είναι σημείο του AB ($[-4, 14]$)

γ) $|x - 5| \leq 9 \Leftrightarrow -9 \leq x - 5 \leq 9 \Leftrightarrow -9 + 5 \leq x \leq 9 + 5 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 14$

δ) Επειδή $-4 \leq x \leq 14$ είναι $x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow |x + 4| = x + 4$ και $x - 14 \leq 0 \Leftrightarrow |x - 14| = -x + 14$

Επομένως $|x + 4| + |x - 14| = x + 4 - x + 14 = 18$

36672. Δίνονται τα σημεία A , B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων: **i)** $|x+2|$ **ii)** $|x-7|$

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

$$|x+2|+|x-7|.$$

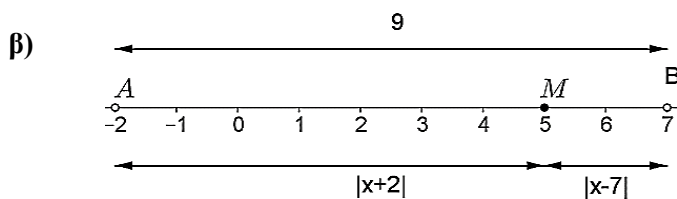
γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά.

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

Λύση

α) i) $|x+2| = d(x, -2)$ παριστάνει την απόσταση του πραγματικού αριθμού x από το -2.

ii) $|x-7| = d(x, 7)$ παριστάνει την απόσταση του πραγματικού αριθμού x από το 7.



γ) Παριστάνει το άθροισμα των αποστάσεων του πραγματικού αριθμού x από το -2 και από το 7, δηλαδή αν M, Γ, Δ οι εικόνες των x, -2, 7 στον άξονα των πραγματικών αριθμών τότε

$$(MG) + (MD) = (GD) = |7 - (-2)| = 9$$

δ) Είναι $-2 < x < 7$, επομένως $x+2 > 0 \Leftrightarrow |x+2| = x+2$ και $x-7 < 0 \Leftrightarrow |x-7| = -x+7$. Άρα

$$A = \cancel{x} + 2 - \cancel{x} + 7 = 9$$

36673. Σε έναν άξονα τα σημεία A , B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.

β) Αν ισχύει $|x-5| = |x-9|$ τότε:

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

Λύση

α) $|x-5| = d(x, 5)$ παριστάνει την απόσταση του πραγματικού αριθμού x από το 5 και το

$|x-9| = d(x, 9)$ παριστάνει την απόσταση του πραγματικού αριθμού x από το 9.

β) i) το M ισαπέχει από τα σημεία A και B όπου A η εικόνα του 5 και B η εικόνα του 9 και βρίσκεται στον άξονα x'x. Άρα είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB δηλαδή ο αριθμός 7.

ii) $|x-5| = |x-9| \Leftrightarrow x-5 = x-9 \Leftrightarrow 0 \cdot x = -4$ Αδύνατη ή $x-5 = -(x-9) \Leftrightarrow x-5 = -x+9 \Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 7$

Θέμα 1ο

14801.α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση Σ (Σωστό), αν η πρόταση είναι αληθής ή Λ (Λάθος), αν η πρόταση είναι ψευδής.

i. Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η πρόταση:

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$.

ii. Για κάθε $\theta \in (0, +\infty)$ ισχύει: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$.

iii. Η εξίσωση $x^3 = 5$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.

iv. Αν ισχύουν $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι αρνητικό για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x .

v. Ο παρακάτω πίνακας θα μπορούσε να είναι πίνακας τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 4]$.

x	0	1	1	2	4
y = f(x)	0	1	-1	2	0,5

β) Να αποδείξετε ότι, για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β , ισχύει η ανισότητα:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Λύση

α) i. Λ ii. Σ iii. Λ iv. Λ v. Λ

β) Επειδή και τα δύο μέλη της σχέσης $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow |\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq \alpha^2 + 2|\alpha||\beta| + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \leq \alpha^2 + 2|\alpha||\beta| + \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha\beta \leq 2|\alpha||\beta| \Leftrightarrow |\alpha\beta| \geq \alpha\beta \text{ που ισχύει.}$$

Η ισότητα $|\alpha\beta| = \alpha\beta$ ισχύει μόνο αν $\alpha\beta \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α, β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

14811. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Το σημείο $M(x, y)$ με $x > 0$ και $y < 0$ βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.

ii. Αν τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε ισχύει: $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.

iii. Ισχύει $|a| \geq a$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

iv. Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε: $\alpha - \gamma > \beta - \delta$ για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

v. Η εξίσωση $ax = a$ έχει μοναδική λύση $x = 1$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

β) Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β να αποδείξετε ότι: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

Λύση

α) i. Λ ii. Σ iii. Σ iv. Λ v. Λ

β) Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε:

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2 \text{ που ισχύει.}$$

14932. α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ είναι αδύνατη, όταν $\alpha \neq 0$ και $\beta = 0$.

ii. Αν $\alpha \leq 0$ και n άρτιος φυσικός, τότε $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$.

iii. Αν $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$ η ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv. Αν η απόσταση του x από το 0 είναι ίση με 3, τότε $x=3$ ή $x=-3$.

v. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.

β) Για οποιονδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β , να αποδείξετε ότι $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Λύση

α) i. Λ **ii.** Λ **iii.** Λ **iv.** Σ **v.** Σ

β) Επειδή και τα δύο μέλη της σχέσης $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow |\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \leq \alpha^2 + 2|\alpha||\beta| + \beta^2 \Leftrightarrow \cancel{\alpha^2} + 2\alpha\beta \leq \cancel{\alpha^2} + 2|\alpha||\beta| + \cancel{\beta^2} \Leftrightarrow \cancel{2}\alpha\beta \leq \cancel{2}|\alpha||\beta| \Leftrightarrow |\alpha\beta| \geq \alpha\beta \text{ που ισχύει.}$$

Η ισότητα $|\alpha\beta| = \alpha\beta$ ισχύει μόνο αν $\alpha\beta \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α, β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.