

Ρίζες πραγματικών αριθμών

Θέμα 2ο

12943. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ και $\beta = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + \beta$ και το γινόμενο $\alpha\beta$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 7$.

Λύση

$$\alpha) \alpha + \beta = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) + \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) = \frac{1}{2}(3 + \cancel{\sqrt{5}} + 3 - \cancel{\sqrt{5}}) = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \cdot \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) = \frac{1}{4}(3^2 - (\sqrt{5})^2) = \frac{1}{4}(9 - 5) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$$

$$\beta) 1^{\text{ος}} \text{ τρόπος: } \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{4}(3 + \sqrt{5})^2 + \frac{1}{4}(3 - \sqrt{5})^2 = \frac{1}{4}(9 + 6\sqrt{5} + 5) + \frac{1}{4}(9 - 6\sqrt{5} + 5) =$$

$$\frac{1}{4}(14 + 6\sqrt{5}) + \frac{1}{4}(14 - 6\sqrt{5}) = \frac{1}{4}(14 + \cancel{6\sqrt{5}} + 14 - \cancel{6\sqrt{5}}) = \frac{1}{4} \cdot 28 = 7$$

2^{ος} τρόπος: (Με χρήση του α ερωτήματος)

$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3^2 - 2 \cdot 1 = 9 - 2 = 7$$

14452. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{3} - 1$ και $\beta = \sqrt{3} + 1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 10$.

β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 5$.

Λύση

$$\alpha) \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta =$$

$$= (\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 1)^2 - (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3}^2 - 1^2) =$$

$$= 4\sqrt{3}^2 - (3 - 1) = 4 \cdot 3 - 2 = 12 - 2 = 10$$

$$\beta) \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = \frac{\beta^2}{\alpha\beta} + \frac{\alpha^2}{\alpha\beta} + \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{10}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{10}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{10}{3 - 1} = \frac{10}{2} = 5$$

14682. Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{3})^6$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 18$.

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{3}, \sqrt[3]{3}$.

Λύση

$$\alpha) \text{ Είναι } A = (\sqrt{3})^6 = \left[(\sqrt{3})^2 \right]^3 = 3^3 = 27 \text{ και } B = (\sqrt[3]{3})^6 = \left[(\sqrt[3]{3})^3 \right]^2 = 3^2 = 9, \text{ άρα } A - B = 27 - 9 = 18.$$

β) Είναι $A > B \Leftrightarrow (\sqrt{3})^6 > (\sqrt[3]{3})^6 \Leftrightarrow \sqrt{3} > \sqrt[3]{3}$.

14750. Δίνονται οι ετερόσημοι αριθμοί α , β , με $\alpha = 1 + 2\sqrt{2}$ και $\beta = \sqrt{2} - 2$. Να δείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 = 15$

β) $\sqrt{\alpha^2} + 2\sqrt{\beta^2} = 5$.

Λύση

α) $\alpha^2 + \beta^2 = (1 + 2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} - 2)^2 = 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 + 4 =$
 $1 + 4\sqrt{2} + 8 + 2 - 4\sqrt{2} + 4 = 15$

β) Είναι $\sqrt{\alpha^2} + 2\sqrt{\beta^2} = |\alpha| + 2|\beta|$

Όμως $\alpha = 1 + 2\sqrt{2} > 0$ και $\beta = \sqrt{2} - 2 < 0$ αφού $\sqrt{2} < 2$, οπότε:

$\sqrt{\alpha^2} + 2\sqrt{\beta^2} = |\alpha| + 2|\beta| = \alpha - 2\beta = 1 + 2\sqrt{2} - 2(\sqrt{2} - 2) = 1 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 4 = 5$.

14774.α) Να δείξετε ότι $(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ και $(1 - \sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}$.

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι

$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + 2\sqrt{5}$.

Λύση

α) $(2 + \sqrt{5})^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$

$(1 - \sqrt{5})^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 1 - 2\sqrt{5} + 5 = 6 - 2\sqrt{5}$

β) $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2} = |2 + \sqrt{5}| + |1 - \sqrt{5}| = 2 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5} = 1 + 2\sqrt{5}$

14849. α) Να αποδείξετε ότι $2 < \sqrt{5}$.

β) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$.

Λύση

α) Πράγματι $2 < \sqrt{5} \Leftrightarrow 2^2 < \sqrt{5}^2 \Leftrightarrow 4 < 5$ ισχύει.

β) $(2 - \sqrt{5})^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = 9 - 4\sqrt{5}$

γ) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} \stackrel{\beta) \text{ ερώτημα}}{=} \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| \stackrel{\alpha) \text{ ερώτημα}}{=} \sqrt{5} - 2$

15051.α) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$ και να υπολογίσετε το ανάπτυγμα $(2 + \sqrt{5})^2$.

β) Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών $9 - 4\sqrt{5}$ και $9 + 4\sqrt{5}$.

Λύση

$$\alpha) (2 - \sqrt{5})^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = 9 - 4\sqrt{5}$$

$$(2 + \sqrt{5})^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$$

$$\beta) \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = -2 + \sqrt{5}, \quad \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2} = 2 + \sqrt{5}$$

34152. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$ όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ;

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$.

Λύση

α) Είναι $A = |x - 2|$ και ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό x .

β) Πρέπει $(2 - x)^3 \geq 0 \Leftrightarrow 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

γ) Για $x \leq 2$ είναι $A = 2 - x$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3} = |2-x| = 2-x$. Άρα $A = B$.

34155. Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$ και $\Gamma = \sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A , B .

Λύση

$$\alpha) A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{5^2} \cdot \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{5} = \sqrt[6]{5^2 \cdot 3^3 \cdot 5} = \sqrt[6]{5^3 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{15^2} = \sqrt{15}$$

β) $\sqrt[3]{5} < 3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{5})^3 < 3^3 \Leftrightarrow 5 < 27$ ισχύει. Άρα $A < B$.

34157. Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.

Λύση

$$\alpha) A \cdot B = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 3 = 1$$

$$\beta) A + B = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 2 + 2 = 4 \text{ και } \Pi = A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2A \cdot B = 4^2 - 2 \cdot 1 = 16 - 2 = 14$$

36778. Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

Λύση

α) Πρέπει $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ και $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$. Άρα για $x \neq -2, 3$ η παράσταση K έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β) Όταν $-2 < x < 3$, είναι $x + 2 > 0 \Leftrightarrow |x + 2| = x + 2$ και $x - 3 < 0 \Leftrightarrow |x - 3| = -x + 3 = -(x - 3)$

$$K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3} = \frac{\sqrt{(x + 2)^2}}{x + 2} - \frac{\sqrt{(x - 3)^2}}{x - 3} \Leftrightarrow$$

$$K = \frac{|x + 2|}{x + 2} - \frac{|x - 3|}{x - 3} = \frac{x + 2}{x + 2} - \frac{x - 3}{x - 3} = 1 - 1 = 0$$

37172. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $A = (\sqrt{2})^6$, $B = (\sqrt[3]{3})^6$ και $\Gamma = (\sqrt[6]{6})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A + B + \Gamma = 23$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.

Λύση

α) $A + B + \Gamma = (\sqrt{2})^6 + (\sqrt[3]{3})^6 + (\sqrt[6]{6})^6 = 2^3 + 3^2 + 6 = 8 + 9 + 6 = 23$

β) $\sqrt[3]{3} > \sqrt[6]{6} \Leftrightarrow (\sqrt[3]{3})^6 > (\sqrt[6]{6})^6 \Leftrightarrow 3^2 > 6 \Leftrightarrow 9 > 6$ ισχύει

37192. Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$$\sqrt{2} \cong 1,41, \sqrt{3} \cong 1,73, \sqrt{5} \cong 2,24, \sqrt{7} \cong 2,64.$$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}, \sqrt{40}, \sqrt{80}$.

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3 \cdot \sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$;

Λύση

α) $\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5} \cong 2 \cdot 2,24 = 4,48$

$\sqrt{40} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 5} = 2\sqrt{2} \sqrt{5} \cong 2 \cdot 1,41 \cdot 2,24 = 6,37$

$\sqrt{80} = \sqrt{4^2 \cdot 5} = 4\sqrt{5} \cong 4 \cdot 2,24 = 8,96$

β) $\frac{3 \cdot \sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{\sqrt{3^2 \cdot 5} - \sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{3\sqrt{5} - \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 5$

37193. Δίνεται η παράσταση: $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

- α)** Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

Λύση

α) Πρέπει $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ και $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. Άρα η παράσταση A ορίζεται για $x \geq 4$.

β) $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}) = (\sqrt{x-4})^2 - (\sqrt{x+1})^2 = x-4 - (x+1) = \cancel{x} - 4 - \cancel{x} - 1 = -5$

37194.α) Να δείξετε ότι : $3 < \sqrt[3]{30} < 4$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$, $6 - \sqrt[3]{30}$.

Λύση

α) $3 < \sqrt[3]{30} < 4 \Leftrightarrow 3^3 < (\sqrt[3]{30})^3 < 4^3 \Leftrightarrow 27 < 30 < 64$ ισχύει

β) $\sqrt[3]{30} > 6 - \sqrt[3]{30} \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{30} > 6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{30} > 3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{30})^3 > 3^3 \Leftrightarrow 30 > 27$ ισχύει . Άρα $\sqrt[3]{30} > 6 - \sqrt[3]{30}$

37195. Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Για $x=5$,να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$.

Λύση

α) Πρέπει $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ και $6-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6$. Άρα η παράσταση A ορίζεται για $4 \leq x \leq 6$.

β) Για $x=5$ είναι: $A = \sqrt{5-4} + \sqrt{6-5} = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 1+1=2$. Άρα $A^2 + A - 6 = 2^2 + 2 - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$.

37196. Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x-4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Για $x=4$,να αποδείξετε ότι: $A^2 - A = 2 \cdot (10 - \sqrt{5})$.

Λύση

α) Πρέπει $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ και $x^2+4 \geq 0$ που ισχύει πάντοτε. Άρα η παράσταση A ορίζεται για $x \geq 4$, δηλαδή $x \in [4, +\infty)$.

β) Για $x=4$: $A = \sqrt{4^2+4} - \sqrt{4-4} = \sqrt{20} - 0 = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$

Άρα $A^2 - A = (2\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} = 20 - 2\sqrt{5} = 2(10 - \sqrt{5})$

37197. Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Για $x = -3$, να αποδείξετε ότι: $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$.

Λύση

α) $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4} = \sqrt{1-x} - |x|$. Πρέπει $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$, άρα η A ορίζεται για $x \in (-\infty, 1]$.

β) Για $x = -3$ είναι: $A = \sqrt{1-(-3)} - |-3| = \sqrt{4} - 3 = 2 - 3 = -1$

Άρα $A^3 + A^2 + A + 1 = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$.

37198. Δίνεται η παράσταση: $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$.

Λύση

α) Πρέπει $(x-2)^5 \geq 0 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2, +\infty)$

β) Για $x = 4$ είναι $B = \sqrt[5]{(4-2)^5} = \sqrt[5]{2^5} = 2$ και $B^2 + 6B = 2^2 + 6 \cdot 2 = 4 + 12 = 16 = 2^4 = B^4$

37199. Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$.

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}$, 1 , $\sqrt[3]{2}$.

Λύση

α) $A - B = (\sqrt{2})^6 - (\sqrt[3]{2})^6 = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$

β) $1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2} \Leftrightarrow 1^6 < (\sqrt[3]{2})^6 < (\sqrt{2})^6 \Leftrightarrow 1 < 2^2 < 2^3 \Leftrightarrow 1 < 4 < 8$ ισχύει.

Θέμα 4ο

14931. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ και $\beta = 1 - \sqrt{2}$

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - \beta^2$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

γ) Αν $A = 4\sqrt{2}$ και $B = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) A &= \alpha^2 - \beta^2 = (1 + \sqrt{2})^2 - (1 - \sqrt{2})^2 = \\ &= 1 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - [1 - 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2] = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - (1 - 2\sqrt{2} + 2) = \\ &= 3 + 2\sqrt{2} - (3 - 2\sqrt{2}) = \cancel{3} + 2\sqrt{2} - \cancel{3} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\beta) B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2} = |\alpha| - |\beta| = |1 + \sqrt{2}| - |1 - \sqrt{2}| = 1 + \sqrt{2} - (-1 + \sqrt{2}) = 1 + \cancel{\sqrt{2}} + 1 - \cancel{\sqrt{2}} = 2$$

$$\gamma) \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2} \Leftrightarrow \sqrt{4\sqrt{2}} > 2 \Leftrightarrow (\sqrt{4\sqrt{2}})^2 > 2^2 \Leftrightarrow 4\sqrt{2} > 4 \Leftrightarrow \sqrt{2} > 1 \text{ ισχύει.}$$

Θέμα 3ο

14805. Έστω α ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει $\alpha = |3\sqrt{2} - 4| + 2|\sqrt{2} - 2|$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \sqrt{2}$. (Θεωρήστε ότι $\sqrt{2} = 1,41$)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) να αποδείξετε ότι $\alpha^3 = 2\alpha$.

γ) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \alpha^3 + (\alpha - 1)^2$.

Λύση

α) 1^{ος} τρόπος: Με $\sqrt{2} = 1,41$ είναι $3\sqrt{2} = 4,23 > 4$ άρα $\alpha = 3\sqrt{2} - \cancel{4} - 2\sqrt{2} + \cancel{4} = \sqrt{2}$.

2^{ος} τρόπος: (Χωρίς χρήση του $\sqrt{2} = 1,41$)

Έστω $3\sqrt{2} - 4 > 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{2} > 4 \Leftrightarrow 9 \cdot 2 > 16 \Leftrightarrow 18 > 16$ ισχύει άρα $3\sqrt{2} - 4 > 0$ και είναι $2 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2} < 2$.

Άρα τελικά $\alpha = 3\sqrt{2} - \cancel{4} - 2\sqrt{2} + \cancel{4} = \sqrt{2}$.

$$\beta) \alpha^3 = \sqrt{2}^3 = \sqrt{2}^2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2\alpha$$

$$\gamma) A = \alpha^3 + (\alpha - 1)^2 = \cancel{2\alpha} + \alpha^2 - \cancel{2\alpha} + 1 = \sqrt{2}^2 + 1 = 2 + 1 = 3$$