

Διάταξη πραγματικών αριθμών

Θέμα 2ο

12673. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$.

Λύση

α) Είναι $0 < \alpha < \beta$, άρα $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \frac{3}{\alpha} > \frac{3}{\beta}$.

β) Είναι $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^3 < \beta^3$ (1) και από το α σκέλος είναι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$ (2).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$

12922. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$.

Λύση

α) $A = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$.

β) Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι $A - B = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 \geq 0$.

γ) $A - B = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$

13266. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$.

β) i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$.

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

Λύση

α) $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5 = \alpha^2 + 4\alpha + 4 + 1 = (\alpha + 2)^2 + 1$

β) i. $A + B = (\alpha + 2)^2 + 1 + (2\beta + 1)^2 - 1 = (\alpha + 2)^2 + (2\beta + 1)^2 \geq 0$ γιατί για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι $(\alpha + 2)^2 \geq 0$ και $(2\beta + 1)^2 \geq 0$.

ii. $A + B = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 2)^2 + (2\beta + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2)$ και $\left(2\beta + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\beta = -1 \Leftrightarrow \beta = -\frac{1}{2}\right)$

13323. α) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17.$$

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε:

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0.$$

Λύση

$$\alpha) (x-1)^2 + (y+4)^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 8y + 16 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17$$

$$\beta) x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+4)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1=0 \Leftrightarrow x=1) \text{ και } (y+4=0 \Leftrightarrow y=-4)$$

14410. Δίνονται οι παραστάσεις A και B με $A = \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4}$ και $B = (\beta - 3)^2$.

α) i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β έτσι, ώστε $A + B = 0$.

β) Υπάρχουν τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $A = -B$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) i. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι $A = \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4} = \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ και $B = (\beta - 3)^2 \geq 0$, άρα και $A + B \geq 0$.

ii. Είναι $A = 0 \Leftrightarrow \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$ και $B = 0 \Leftrightarrow (\beta - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \beta - 3 = 0 \Leftrightarrow \beta = 3$

Αν $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ ή $\beta \neq 3$ τότε $A > 0$ ή $B > 0$, οπότε $A + B > 0$ που απορρίπτεται.

Επομένως $A + B = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$ και $\beta = 3$.

β) $A = -B \Leftrightarrow A + B = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$ και $\beta = 3$.

14475. Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$

β) $\alpha - \beta$

Λύση

α) Είναι $2 \leq \alpha \leq 4$ (1) και $-4 \leq \beta \leq -3$ (2). Είναι (2) $\Leftrightarrow -8 \leq 2\beta \leq -6$ (3) και με προσθήκη κατά μέλη των (1),(3) είναι $2 - 8 \leq \alpha + 2\beta \leq 4 - 6 \Leftrightarrow -6 \leq \alpha + 2\beta \leq -2$

β) Είναι (2) $\Leftrightarrow 4 \geq -\beta \geq 3 \Leftrightarrow 3 \leq -\beta \leq 4$ (4) και με προσθήκη κατά μέλη των (1),(4) είναι $2 + 3 \leq \alpha - \beta \leq 4 + 4 \Leftrightarrow 5 \leq \alpha - \beta \leq 8$

14492. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Λύση

α) Η περίμετρος ενός ορθογωνίου με πλευρές x και y δίνεται από την σχέση $\Pi = 2x + 2y = 2(x + y)$.

Είναι $4 \leq x \leq 7$ (1) και $2 \leq y \leq 3$ (2) και με πρόσθεση των (1), (2) κατά μέλη είναι

$$4 + 2 \leq x + y \leq 7 + 3 \Leftrightarrow 6 \leq x + y \leq 10 \Leftrightarrow 12 \leq 2(x + y) \leq 20 \Leftrightarrow 12 \leq \Pi \leq 20$$

β) Η περίμετρος ενός ορθογωνίου με πλευρές $x - 1$ και $3y$ δίνεται από την σχέση $\Pi = 2(x - 1) + 6y$.

Είναι (1) $\Leftrightarrow 3 \leq x - 1 \leq 6 \Leftrightarrow 6 \leq 2(x - 1) \leq 12$ (3) και (2) $\Leftrightarrow 12 \leq 6y \leq 18$ (4) και με πρόσθεση των

(3), (4) κατά μέλη είναι $6 + 12 \leq 2(x - 1) + 6y \leq 12 + 18 \Leftrightarrow 18 \leq \Pi \leq 30$.

14704. Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$ **β)** $2x - 3y$ **γ)** $\frac{x}{y}$

Λύση

α) Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις $2 \leq x \leq 3$, $1 \leq y \leq 2$ και έχουμε: $3 \leq x + y \leq 5$.

β) Είναι $2 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 4 \leq 2x \leq 6$ (1) και $1 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow -3 \geq -3y \geq -6 \Leftrightarrow -6 \leq -3y \leq -3$ (2).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει: $-2 \leq 2x - 3y \leq 3$.

γ) Είναι $2 \leq x \leq 3$ (3) και $1 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1$ (4).

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (3) και (4) προκύπτει: $2 \cdot \frac{1}{2} \leq x \cdot \frac{1}{y} \leq 3 \cdot 1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 3$.

35040. Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$.

β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

γ) Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) $K - \Lambda = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - [2\alpha(3 - \beta)] = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - 6\alpha + 2\alpha\beta =$

$$= \alpha^2 + \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 6\alpha + 9 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 - 6\alpha + 9 = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$$

β) $K - \Lambda = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 - 6\alpha + 9 = (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - 3)^2 \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

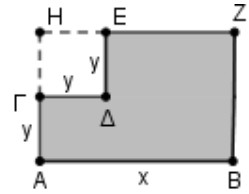
γ) $K = \Lambda \Leftrightarrow K - \Lambda = 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\beta$ και $\alpha = 3$.

35549. Από το ορθογώνιο ABZH αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος EZBAΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$.

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών

βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.



Λύση

α) $\Pi = EZ + ZB + BA + \Gamma A + \Gamma \Delta + \Delta E = x + 2y + x + y + y = 2x + 4y$

β) $5 < x < 8 \Leftrightarrow 10 < 2x < 16$ (1), $1 < y < 2 \Leftrightarrow 4 < 4y < 8$ (2)

Προσθέτουμε τις (1) και (2) και έχουμε: $14 < 2x + 4y < 24 \Leftrightarrow 14 < \Pi < 24$

36884. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$$

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$.

Λύση

α) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$

β) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ και $y+3=0 \Leftrightarrow y=-3$

36899. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right) \cdot \left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$

Λύση

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \stackrel{(\alpha > 0)}{\Leftrightarrow} \alpha^2 + 4 \geq 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει.

β) Είναι $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ (1) και όμοια $\beta + \frac{4}{\beta} \geq 4$ (2)

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right) \cdot \left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$.

37179. Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β) Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$;

Λύση

α) $K \geq \Lambda \Leftrightarrow 2\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + (\alpha - \beta)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει αφού $\alpha^2 \geq 0$ και $(\alpha - \beta)^2 \geq 0$.

$$\beta) K = \Lambda \Leftrightarrow K - \Lambda = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

37817. Δίνεται η παράσταση $A = x^4 + \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$, $x \neq \pm\sqrt{2}$.

α) Να δείξετε ότι $A = x^4 + x^2 + 2$.

β) i. Να αιτιολογήσετε γιατί $A > 0$ για κάθε $x \neq \pm\sqrt{2}$.

ii. Για ποια τιμή του x η παράσταση A παίρνει τη μικρότερη τιμή της;

Λύση

α) Για $x \neq \pm\sqrt{2}$ είναι $A = x^4 + \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2} = x^4 + \frac{(x^2 - 2)(x^2 + 2)}{x^2 - 2} = x^4 + x^2 + 2$.

β) i. Για $x \neq \pm\sqrt{2}$ είναι $x^4 \geq 0$ και $x^2 \geq 0$, είναι $x^4 + x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 2 \geq 2$, άρα $A > 0$.

ii. Για $x \neq \pm\sqrt{2}$ είναι $x^4 \geq 0$, $x^2 \geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα $A = x^4 + x^2 + 2 \geq 2$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, οπότε η ελάχιστη τιμή της παράστασης A είναι το 2 και ισχύει μόνο για $x = 0$.

Θέμα 4ο

14820. α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν οι ισότητες.

i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$ **ii.** $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$

β) Να δείξετε ότι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A .

ii. Με τη βοήθεια του β) i με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

Λύση

α) i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 4 \geq 3 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x + 1)^2 \geq 0$ ισχύει. Η ισότητα

$x^2 + x + 1 = \frac{3}{4}$ ισχύει όταν $(2x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

ii. $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 4 \geq 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει. Η ισότητα

$x^2 - x + 1 = \frac{3}{4}$ ισχύει όταν $(2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

β) Για κάθε $x \neq -\frac{1}{2}$ είναι $x^2 + x + 1 > \frac{3}{4}$ και για κάθε $x \neq \frac{1}{2}$ είναι $x^2 - x + 1 > \frac{3}{4}$.

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη είναι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$.

Για $x = \frac{1}{2}$ είναι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{16} > \frac{9}{16}$ και για $x = -\frac{1}{2}$ είναι

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{4} = \frac{21}{16} > \frac{9}{16}.$$

Επομένως $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) i. Η παράσταση A ορίζεται όταν $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

$$\text{ii. } A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1} = A = \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)\cancel{(x+1)}(x^2 - x + 1)}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}} \Leftrightarrow A = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16},$$

οπότε η παράσταση A δεν μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

Θέμα 3ο

14602. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$.

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$.

Λύση

α) Για $0 < \alpha < 1$ είναι:

$$\alpha^3 < \alpha \Leftrightarrow \alpha^3 - \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha^2 - 1) < 0 \text{ το οποίο ισχύει αφού } \alpha > 0 \text{ και } \alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha^2 < 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - 1 < 0$$

β) Είναι $\alpha < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > 1$, τότε $0 < \alpha^3 < \alpha < 1 < \frac{1}{\alpha}$.

14713. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18}{\alpha^2 + 2\alpha}$, $\alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18 = (\alpha^2 + 9)(\alpha + 2)$.

β) Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει:

$$\text{i. } A = \frac{\alpha^2 + 9}{\alpha}$$

ii. $A \geq 6$. Πότε ισχύει η ισότητα $A = 6$;

Λύση

$$\alpha) \alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18 = \alpha^2(\alpha + 2) + 9(\alpha + 2) = (\alpha^2 + 9)(\alpha + 2)$$

$$\beta) \text{ i. } A = \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18}{\alpha^2 + 2\alpha} = \frac{(\alpha^2 + 9)\cancel{(\alpha + 2)}}{\alpha\cancel{(\alpha + 2)}} = \frac{\alpha^2 + 9}{\alpha}$$

$$\text{ii. } A \geq 6 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 + 9}{\alpha} \geq 6 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \alpha^2 + 9 \geq 6\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 3)^2 \geq 0 \text{ το οποίο ισχύει.}$$