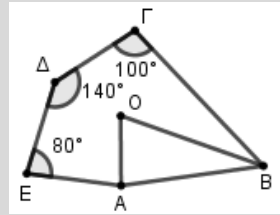


Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Θέμα 2ο

12640. Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο. Αν η γωνία του Γ ισούται με 100° , η γωνία του Δ ισούται με 140° και η γωνία του Ε ισούται με 80° τότε, να υπολογίσετε:

- α) το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$.
 β) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.



Λύση

α) Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με n πλευρές είναι $2 \cdot n - 4$ ορθές. Έτσι για το πολύγωνο ΑΒΓΔΕ το άθροισμα των γωνιών του είναι:

$$A + B + \Gamma + \Delta + E = (2 \cdot 5 - 4)90^\circ = 540^\circ \Leftrightarrow$$

$$A + B + 100^\circ + 140^\circ + 80^\circ = 540^\circ \Leftrightarrow A + B = 540^\circ - 320^\circ = 220^\circ$$

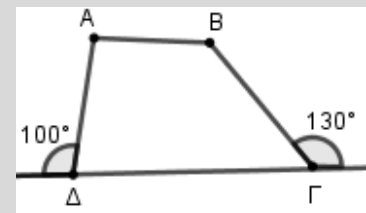
β) Στο τρίγωνο ΟΑΒ είναι

$$AOB + OAB + OBA = 180^\circ \Leftrightarrow AOB + \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow AOB + \frac{A+B}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$AOB + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow AOB = 70^\circ$$

12644. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, η εξωτερική γωνία της Γ, ισούται με 130° και η εξωτερική γωνία της Δ ισούται με 110° . Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο τότε, να υπολογίσετε:

- α) τα μέτρα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου.
 β) το μέτρο του αθροίσματος $\hat{A} + \hat{B}$.
 γ) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ.



Λύση

α) Είναι $\Gamma = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ και $\Delta = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

β) Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με n πλευρές είναι $2 \cdot n - 4$ ορθές. Έτσι για το τετράπλευρο ΑΒΓΔ, το άθροισμα των γωνιών του είναι:

$$A + B + \Gamma + \Delta = 360^\circ \Leftrightarrow A + B + 50^\circ + 70^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow A + B = 240^\circ$$

γ) Στο τρίγωνο ΟΑΒ είναι

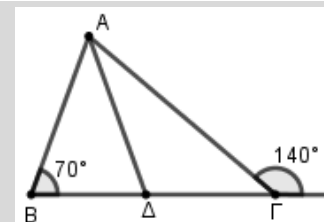
$$AOB + OAB + OBA = 180^\circ \Leftrightarrow AOB + \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow AOB + \frac{A+B}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$AOB + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow AOB = 60^\circ$$

12704. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma}_{\text{εξωτ}} = 140^\circ$.

Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ, ώστε $AD = AB$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $\hat{B}\hat{A}\hat{\Delta} = 40^\circ$.
 β) $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 110^\circ$.
 γ) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



Λύση

α) Επειδή $AD = AB$ το τρίγωνο ABD είναι ισοσκελές, οπότε $\angle ADB = \angle B = 70^\circ$ γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές του. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ABD έχουμε:

$$\angle BAD + \angle ADB + \angle B = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BAD + 70^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BAD = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

β) Είναι $\angle A\Delta\Gamma + \angle ADB = 180^\circ \Leftrightarrow \angle A\Delta\Gamma = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

γ) Είναι $\angle A\Gamma B + \angle \Gamma_{\text{εξωτ}} = 180^\circ \Leftrightarrow \angle A\Gamma B = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\angle A + \angle B + \angle \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \angle A + 70^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle A = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

Επειδή $\angle A = \angle B = 70^\circ$ το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

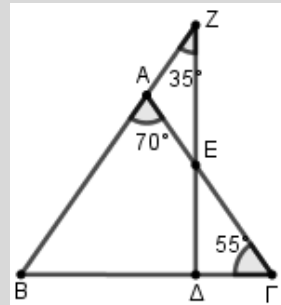
12707. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 55^\circ$.

Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το σημείο A και παίρνουμε στην προέκταση σημείο Z ώστε $\angle B\hat{Z}\Delta = 35^\circ$, όπου Δ εσωτερικό σημείο της $B\Gamma$. Η $Z\Delta$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β) $\angle Z\Delta B = 90^\circ$.

γ) το τρίγωνο AZE είναι ισοσκελές.

**Λύση**

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\angle A + \angle B + \angle \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + \angle B + 55^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle B = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$

Επειδή $\angle B = \angle \Gamma$ το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$.

β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $ZB\Delta$ έχουμε:

$$\angle Z + \angle Z\Delta B + \angle B = 180^\circ \Leftrightarrow 35^\circ + \angle Z\Delta B + 55^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle Z\Delta B = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

γ) Είναι $\angle A + \angle A_{\text{εξ}} = 180^\circ \Leftrightarrow \angle A_{\text{εξ}} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

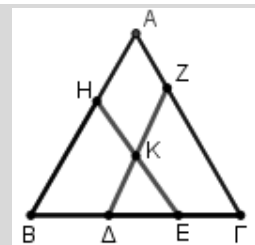
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου AZE έχουμε:

$\angle A_{\text{εξ}} + \angle Z + \angle ZEA = 180^\circ \Leftrightarrow 110^\circ + 35^\circ + \angle ZEA = 180^\circ \Leftrightarrow \angle ZEA = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$ Επειδή $\angle Z = \angle ZEA$ το τρίγωνο AZE είναι ισοσκελές.

12708. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις πλευρές $B\Gamma$ και $ΓΑ$ θεωρούμε σημεία E και Z αντίστοιχα ώστε $BE = \Gamma Z$. Στις πλευρές AB και $ΓB$ θεωρούμε σημεία H και Δ αντίστοιχα ώστε $BH = \Gamma\Delta$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔZ και EH τέμνονται στο σημείο K το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $EH = \Delta Z$ και $\angle B\hat{H}E = \angle \Gamma\hat{\Delta}Z$.

β) τα τρίγωνα BEH και $KE\Delta$ έχουν ίσες γωνίες μία προς μία.

**Λύση**

α) Τα τρίγωνα BEH και $\Gamma Z\Delta$ έχουν:

- $BE = \Gamma Z$, από την υπόθεση
- $BH = \Gamma\Delta$, από την υπόθεση

• $B = \Gamma = 60^\circ$, αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

Από το κριτήριο ισότητας Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, επομένως, $EH = Z\Delta$ και απέναντι από τις ίσες πλευρές $BE, \Gamma Z$ βρίσκονται αντίστοιχα οι ίσες γωνίες BHE και $\Gamma\Delta Z$.

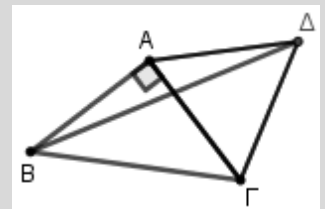
β) Από την ισότητα των τριγώνων BEH και $\Gamma Z\Delta$ προκύπτει ότι απέναντι από τις ίσες πλευρές BE και ΓZ βρίσκονται ίσες γωνίες, δηλαδή $H = \Delta$. Παρατηρούμε λοιπόν, ότι τα τρίγωνα $KE\Delta$ και BEH έχουν τη γωνία E κοινή και $H = \Delta$, επομένως, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες, δηλαδή, $\Delta KE = B$.

12709. Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 90^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$.

α) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών B, Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $AB\Delta$.



Λύση

α) Επειδή $AB = A\Gamma$ το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$, οπότε $B = \Gamma$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow 2B = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow B = 45^\circ = \Gamma$$

β) Επειδή το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι $A\Delta = A\Gamma$. Όμως $AB = A\Gamma$, άρα $AB = A\Delta$, οπότε το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Delta$.

γ) Επειδή το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο ισχύει ότι $\Gamma A\Delta = 60^\circ$, οπότε $B A\Delta = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$. Επειδή το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Delta$, ισχύει ότι $AB\Delta = A\Delta B$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Delta$ έχουμε:

$$AB\Delta + A\Delta B + B A\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 2AB\Delta + 150^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2AB\Delta = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ \Leftrightarrow AB\Delta = 15^\circ$$

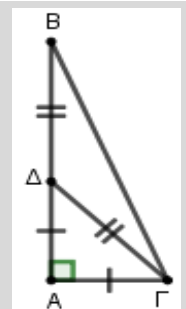
13442. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$.

Στην πλευρά του AB θεωρούμε σημείο Δ ώστε

$B\Delta = \Delta\Gamma$ και $A\Delta = A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{A\Delta\Gamma} = 45^\circ$.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$.



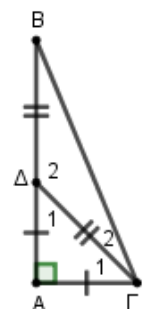
Λύση

α) Το ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι και ισοσκελές οπότε $\Delta_1 = \Gamma_1$ γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές του. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Delta\Gamma$ έχουμε:

$$\Delta_1 + \Gamma_1 + 90^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta_1 = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta_1 = 45^\circ, \text{ άρα } \hat{A\Delta\Gamma} = 45^\circ.$$

β) Επειδή $B\Delta = \Delta\Gamma$, το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε $B = \Gamma_2$ γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές του.

Η γωνία Δ_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ οπότε ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του, δηλαδή $\Delta_1 = B + \Gamma_2 \Leftrightarrow 45^\circ = 2B \Leftrightarrow B = 22,5^\circ$



13443. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 60^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 40^\circ$.

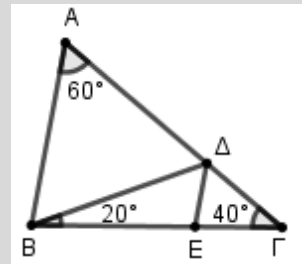
Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ , ώστε $\Gamma B\Delta = 20^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

β) Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

i. $B\hat{\Delta}E = 60^\circ$.

ii. Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Delta}\Gamma$.



Λύση

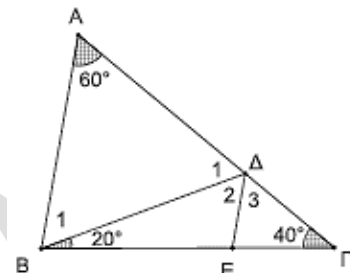
α) Η γωνία Δ_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\Delta B\Gamma$, άρα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών, δηλαδή

$$\Delta_1 = \Gamma B\Delta + \Gamma = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ.$$

Το τρίγωνο $AB\Delta$ έχει δύο γωνίες του ίσες με 60° , οπότε και η τρίτη του γωνία, η B_1 , θα είναι ίση με 60° , οπότε το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

β) i. Είναι $\Delta_2 = B_1 = 60^\circ$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB, \Delta E$ που τέμνονται από την $B\Delta$.

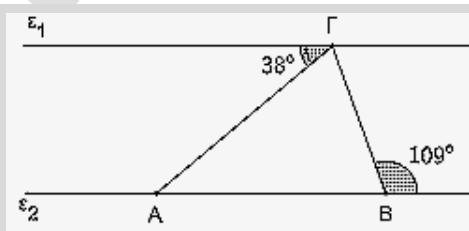
ii. Είναι $\Delta_3 = A = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων $AB, \Delta E$ που τέμνονται από την $A\Gamma$. Άρα $\Delta_2 = \Delta_3 = 60^\circ$, οπότε η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Delta}\Gamma$.



13535. Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ϵ_1 διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου $AB\Gamma$ και είναι παράλληλη στην ευθεία ϵ_2 που ορίζεται από τις κορυφές του A και B . Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.



Λύση

α) Είναι $A = 38^\circ$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ϵ_1, ϵ_2 που τέμνονται από την $A\Gamma$.

$$\text{Είναι } B + 109^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B = 180^\circ - 109^\circ = 71^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 38^\circ + 71^\circ + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 180^\circ - 109^\circ = 71^\circ$$

β) Επειδή $B = \Gamma = 71^\circ$ το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις AB και $A\Gamma$ γιατί βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες.

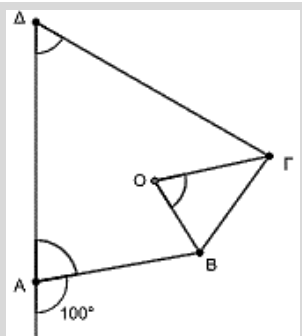
13619. Θεωρούμε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος με

$$\hat{A}_{\epsilon\epsilon} = 100^\circ \text{ και } \hat{B} + \hat{\Gamma} = 220^\circ.$$

Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο O , τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

β) Να αποδείξετε ότι $B\hat{O}\Gamma = 70^\circ$.



Λύση

α) Είναι $A_{εξ} + A = 180^\circ \Leftrightarrow 100^\circ + A = 180^\circ \Leftrightarrow A = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

Από το άθροισμα γωνιών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ έχουμε:

$$A + B + \Gamma + \Delta = 360^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 220^\circ + \Delta = 360^\circ \Leftrightarrow \Delta = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$$

β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΓΟ έχουμε:

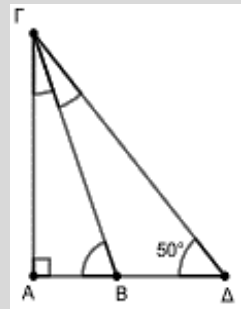
$$BO\Gamma + OBG + OGB = 180^\circ \Leftrightarrow BO\Gamma + \frac{B}{2} + \frac{\Gamma}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow BO\Gamma + \frac{B+\Gamma}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow BO\Gamma + \frac{220^\circ}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$BO\Gamma + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow BO\Gamma = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

13654. Στο ακόλουθο σχήμα είναι $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{AB}\Gamma - \hat{A}\Gamma B = 50^\circ$ και $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma = 50^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες $\hat{AB}\Gamma$ και $\hat{A}\Gamma B$ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma$.



Λύση

α) Είναι $\hat{AB}\Gamma - \hat{A}\Gamma B = 50^\circ \Leftrightarrow \hat{AB}\Gamma = \hat{A}\Gamma B + 50^\circ$ (1). Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ

$$\text{έχουμε: } A + \hat{AB}\Gamma + \hat{A}\Gamma B = 180^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + \hat{A}\Gamma B + 50^\circ + \hat{A}\Gamma B = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2\hat{A}\Gamma B = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\Gamma B = 20^\circ$$

Από τη σχέση (1) έχουμε: $\hat{AB}\Gamma = \hat{A}\Gamma B + 50^\circ = 20^\circ + 50^\circ = 70^\circ$

β) Η γωνία $\hat{AB}\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΓΔ, οπότε

$$\hat{AB}\Gamma = \hat{B}\Gamma\Delta + \Delta \Leftrightarrow 70^\circ = \hat{B}\Gamma\Delta + 50^\circ \Leftrightarrow \hat{B}\Gamma\Delta = 70^\circ - 50^\circ = 20^\circ$$

Επειδή $\hat{B}\Gamma\Delta = \hat{A}\Gamma B$, η ΓΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}\hat{\Delta}\Gamma$.

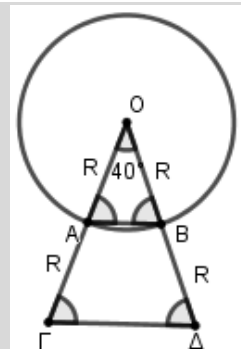
13687. Σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R θεωρούμε επίκεντρη γωνία

$\hat{AOB} = 40^\circ$. Προεκτείνουμε τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ κατά τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε $\hat{A}\Gamma = \hat{OA}$ και $\hat{BD} = \hat{OB}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{OAB} = \hat{OBA} = 70^\circ$.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{O}\hat{\Gamma}\Delta$ και $\hat{O}\hat{\Delta}\Gamma$.

γ) Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$.



Λύση

α) Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές, αφού οι πλευρές ΟΑ και ΟΒ είναι ίσες με την ακτίνα R. Επομένως, οι γωνίες ΟΑΒ και ΟΒΑ θα είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση ΑΒ. Στο τρίγωνο ΟΑΒ ισχύει:

$$O + \hat{OAB} + \hat{OBA} = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2\hat{OAB} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{OAB} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ \Leftrightarrow \hat{OAB} = 70^\circ = \hat{OBA}$$

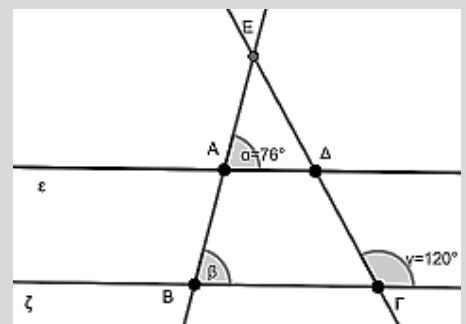
β) Τα τμήματα ΟΓ και ΟΔ είναι ίσα ως αθροίσματα ίσων τμημάτων, αφού $O\Gamma = OA + A\Gamma = 2R$ και $O\Delta = OB + B\Delta = 2R$. Επομένως, το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές με βάση ΓΔ. Στο τρίγωνο ΟΓΔ ισχύει:

$$O + \hat{O}\hat{\Gamma}\Delta + \hat{O}\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2\hat{O}\hat{\Gamma}\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{O}\hat{\Gamma}\Delta = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ \Leftrightarrow \hat{O}\hat{\Gamma}\Delta = 70^\circ = \hat{O}\hat{\Delta}\Gamma.$$

γ) Οι AB και ΓΔ τέμνονται από την ΑΓ και σχηματίζουν τις εκτός εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες τους ΟΑΒ και ΟΓΔ ίσες. Επομένως, $AB \parallel \Gamma\Delta$.

13741. Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες ε και ζ είναι παράλληλες. Αν είναι $\hat{\alpha} = 76^\circ$ και $\hat{\gamma} = 120^\circ$, να υπολογίσετε :

- α) Τη γωνία $\hat{\beta}$.
 β) Τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.
 γ) Τη γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου ΕΑΔ.



Λύση

α) Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι εκτός εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ε και ζ που τέμνονται από την ευθεία ΑΒ. Οπότε $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 76^\circ$.

β) Η γωνία Γ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\gamma} = 120^\circ$, έτσι

$$\Gamma = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Οι γωνίες Γ και Δ του τετράπλευρου είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ευθειών ε και ζ που τέμνονται από τη ΓΔ. Άρα είναι παραπληρωματικές, οπότε $\Gamma + \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Η γωνία Α του τετράπλευρου ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\alpha} = 76^\circ$.

$$\text{Έτσι } A + \hat{\alpha} = 180^\circ \Leftrightarrow A + 76^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$$

γ) Στο τρίγωνο ΕΑΔ έχουμε ήδη γνωστή τη γωνία $\hat{\alpha} = 76^\circ$. Επιπλέον η γωνία ΑΔΕ του τριγώνου είναι παραπληρωματική της γωνίας Δ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ οπότε

$$A\Delta E + \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow A\Delta E = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

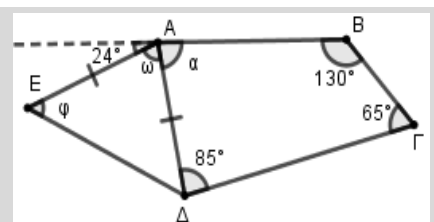
Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ είναι 180° , οπότε

$$A\Delta E + \hat{\alpha} + E = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + 76^\circ + E = 180^\circ \Leftrightarrow E = 180^\circ - 136^\circ = 44^\circ$$

13749. Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔΕ είναι ένα πεντάγωνο στο οποίο η διαγώνιος ΑΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΕ και η ημιευθεία Αχ είναι προέκταση της ΒΑ προς το Α.

Να υπολογίσετε δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

- α) Τη γωνία $\hat{\alpha}$ β) Τη γωνία $\hat{\omega}$ γ) Τη γωνία $\hat{\phi}$.



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ έχουμε:

$$\hat{\alpha} + 85^\circ + 65^\circ + 130^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 360^\circ - 280^\circ = 80^\circ$$

β) Είναι $\hat{\alpha} + \hat{\omega} + 24^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + \hat{\omega} + 24^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$.

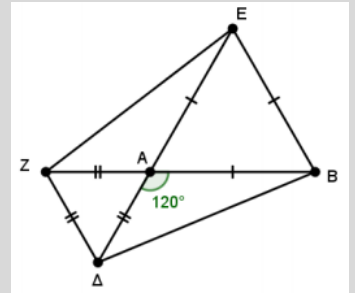
γ) Η διαγώνιος ΑΔ του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ είναι ίση με την πλευρά ΑΕ, άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΕΔ. Η γωνία $\hat{\phi}$ είναι ίση με τη γωνία ΑΔΕ, ως γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου ΑΔΕ, του οποίου η γωνία της κορυφής είναι η $\hat{\omega} = 76^\circ$ από το β) ερώτημα.

$$\text{Επομένως } \hat{\phi} = \frac{180^\circ - \hat{\omega}}{2} = \frac{180^\circ - 76^\circ}{2} = \frac{104^\circ}{2} = 52^\circ.$$

14884. Έστω τρίγωνο $AB\Delta$ με $\hat{A} = 120^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα AEB και $AZ\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

- α)** Τα τρίγωνα AEB και $AZ\Delta$ είναι ίσα.
β) Το τμήμα ΔZ είναι παράλληλο στο BE .



Λύση

α) Επειδή τα τρίγωνα $Z\Delta\Delta$ και AEB είναι ισόπλευρα, είναι

$$\angle Z\Delta\Delta = \angle A\Delta Z = \angle \Delta\Delta A = \angle BAE = \angle ABE = \angle BEA = 60^\circ.$$

Επειδή $\angle \Delta AB + \angle BAE = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά. Επειδή

$$\angle \Delta AB + \angle \Delta AZ = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ \text{ τα σημεία } Z, A, B \text{ είναι συνευθειακά.}$$

Τα τρίγωνα AEB και $AZ\Delta$ έχουν:

- $AZ = AB$ πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου $AZ\Delta$
- $AE = AB$ πλευρές του ισόπλευρου τριγώνου AEB
- $\angle ZAE = \angle \Delta AB$ ως κατακορυφήν

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα $AB\Delta$ και ZAE είναι ίσα.

β) Είναι $\angle AZ\Delta = \angle ABE = 60^\circ$, όμως οι γωνίες αυτές είναι εντός εναλλάξ των $\Delta Z, BE$ που τέμνονται από την ZB , οπότε οι ευθείες ΔZ και BE είναι παράλληλες.

34313. Δίνεται κύκλος (O, R) διαμέτρου AB ,

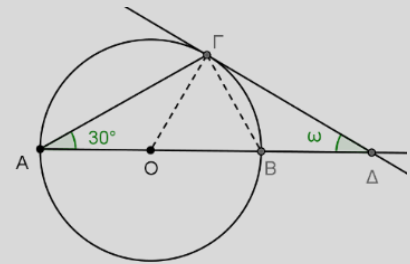
και χορδή του $A\Gamma$ τέτοια ώστε $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Στο σημείο Γ του κύκλου φέρουμε εφαπτομένη, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου AB (προς το B) σε σημείο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Gamma O\Delta$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας του $\hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta}$.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{\omega}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $O\Delta = 2R$.



Λύση

α) Επειδή η OG είναι ακτίνα στο σημείο επαφής Γ , είναι $OG \perp \Gamma\Delta$, οπότε $\hat{O}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 90^\circ$, άρα το τρίγωνο $\Gamma O\Delta$ είναι ορθογώνιο.

Επειδή οι OA και OG είναι ακτίνες του κύκλου, το τρίγωνο OAG είναι ισοσκελές με βάση την AG , οπότε $\hat{A}\hat{\Gamma}O = \hat{A} = 30^\circ$. Η γωνία $\hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο OAG , οπότε $\hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{\Gamma}O + \hat{A} = 60^\circ$.

β) Είναι $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{\Gamma}O + \hat{O}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Gamma\Delta$ έχουμε: $\hat{A} + \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} + \hat{\omega} = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 120^\circ + \hat{\omega} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

γ) Τα OG, OB είναι ακτίνες του κύκλου, οπότε το τρίγωνο $OB\Gamma$ είναι ισοσκελές. Επειδή επιπλέον έχει $\hat{\Gamma}\hat{O}\hat{\Delta} = 60^\circ$, είναι ισόπλευρο, οπότε $B\Gamma = R$. Είναι $\hat{O}\hat{\Gamma}B = 60^\circ$ και $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 90^\circ - \hat{O}\hat{\Gamma}B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Επειδή $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = \hat{\omega}$, το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση την $\Gamma\Delta$, άρα $B\Delta = B\Gamma = R$. Είναι $O\Delta = OB + B\Delta = R + R = 2R$.

34397. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την πλευρά AG στο σημείο Δ . Φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην πλευρά $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = AB$.

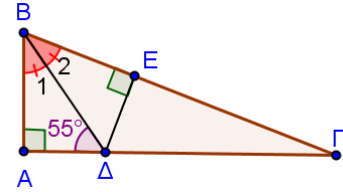
β) Αν επιπλέον $\hat{B\Delta A} = 55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Gamma\Delta E$.

Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Delta E$ έχουν:

1) τη πλευρά $B\Delta$ κοινή και

2) $B_1 = B_2$ λόγω της διχοτόμησης της γωνίας B , άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BE = AB$.



β) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου $AB\Delta$ έχουμε:

$$B\Delta A + B_1 = 90^\circ \Leftrightarrow 55^\circ + B_1 = 90^\circ \Leftrightarrow B_1 = 35^\circ = B_2 \Leftrightarrow \frac{B}{2} = 35^\circ \Leftrightarrow B = 70^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε:

$$B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 20^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου $\Gamma\Delta E$, έχουμε:

$$\Gamma\Delta E + \hat{E} = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma\Delta E = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ. \text{ Τέλος } \hat{E} = 90^\circ.$$

34413. Ένας μαθητής της A' Λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία $\chi O\psi$. Στη συνέχεια με κέντρο τη κορυφή O της γωνίας σχεδιάζει δύο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές $O\chi$ και $O\psi$ της γωνίας στα σημεία A και B αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ, Δ . Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

Λύση

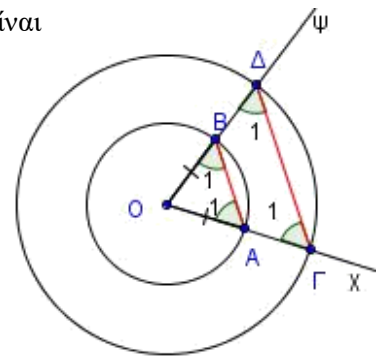
Επειδή $OA = OB$ γιατί είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου, το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές με βάση την AB , άρα $A_1 = B_1$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου OAB , έχουμε:

$$O + A_1 + B_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 2B_1 = 180^\circ - O \Leftrightarrow B_1 = \frac{180^\circ - O}{2} \quad (1)$$

Επειδή $OG = OD$ γιατί είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου, το τρίγωνο $O\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση την $\Gamma\Delta$, άρα $\Gamma_1 = \Delta_1$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $O\Gamma\Delta$, έχουμε:

$$O + \Gamma_1 + \Delta_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta_1 = 180^\circ - O \Leftrightarrow \Delta_1 = \frac{180^\circ - O}{2} \quad (2).$$

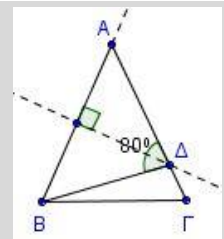
Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι $B_1 = \Delta_1$. Οι γωνίες αυτές όμως είναι και εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των $AB, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την OD , άρα οι ευθείες AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες.



34418. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο η εξωτερική γωνία A είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας $\hat{A\Gamma\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

β) Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς AB τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ σε εσωτερικό σημείο Δ . Αν η γωνία $\hat{A\Delta B}$ ίση με 80° , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



Λύση

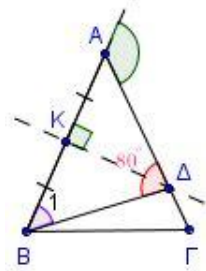
α) Γνωρίζουμε ότι η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του, δηλαδή $A_{εξ} = B + \Gamma$. Όμως $A_{εξ} = 2B$, άρα $2B = B + \Gamma \Leftrightarrow 2B - B = \Gamma \Leftrightarrow B = \Gamma$, άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$, δηλαδή $AB = A\Gamma$.

β) Στο τρίγωνο $A\Delta B$ η ΔK είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την AB , οπότε $A = B_1$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Delta B$, έχουμε:

$$A\Delta B + A + B_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 2A = 180^\circ \Leftrightarrow 2A = 100^\circ \Leftrightarrow A = 50^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε:

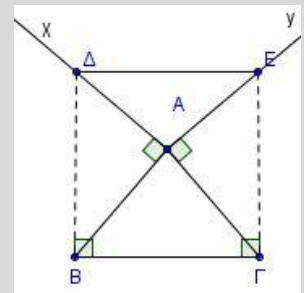
$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow 2B = 130^\circ \Leftrightarrow B = 65^\circ = \Gamma$$



34422. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Φέρουμε εκτός του τριγώνου τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$. Οι κάθετες στην πλευρά $B\Gamma$ στα σημεία B και Γ τέμνουν τις Ax και Ay στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

β) Αν η γωνία $BA\Gamma$ είναι ίση με 80° , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου που έχει για κορυφές τα σημεία A , E και Δ .



Λύση

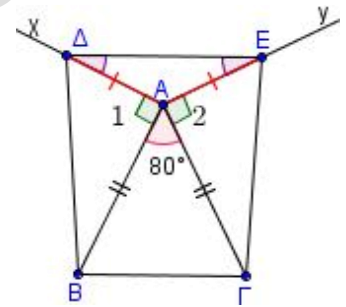
α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Gamma E$ έχουν:

- 1) $AB = A\Gamma$ και
- 2) $A\Delta = A\Gamma$, άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B\Delta = \Gamma E$.

β) Είναι $\Delta A E = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

Επειδή $A\Delta = A\Gamma$, το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές με βάση την ΔE , άρα $E = \Delta$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $\Delta A E$ έχουμε:

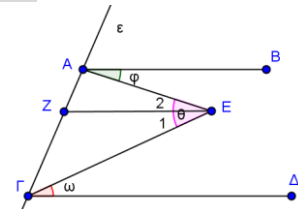
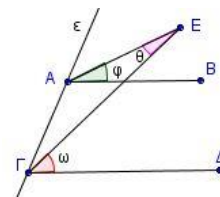
$$E + \Delta + \Delta A E = 180^\circ \Leftrightarrow 2E + 100^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2E = 80^\circ \Leftrightarrow E = 40^\circ = \Delta$$



34770. Δίνεται ευθεία ϵ του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ καθώς και ένα τυχαίο σημείο E βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ϵ . Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το E είναι εκτός των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$, τότε: $\hat{\omega} = \hat{\phi} + \hat{\theta}$.

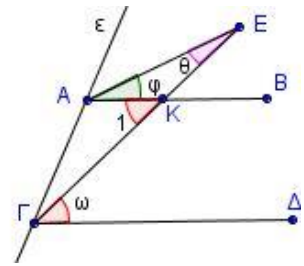
β) Αν το E είναι ανάμεσα στα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ και $EZ \parallel AB$, τότε να αποδείξετε ότι $\theta = \hat{\phi} + \hat{\omega}$.



Λύση

α) Έστω K το σημείο τομής των $E\Gamma$, AB . Είναι $K_1 = \omega$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB , $\Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $E\Gamma$. Η γωνία K_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο AKE , άρα $K_1 = \hat{\theta} + \phi \Leftrightarrow \omega = \hat{\theta} + \phi$

β) Έστω τώρα ότι το E βρίσκεται ανάμεσα στα τμήματα AB και ΓΔ. Τότε $\omega = \hat{\theta}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων EZ, ΓΔ που τέμνονται από την ΕΓ και $\varphi = \hat{\theta}_2$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB, EZ που τέμνονται από την ΑΕ. Είναι $\varphi + \omega = \hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}$.



34775. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB = ΑΓ) με $\hat{A} = 80^\circ$.

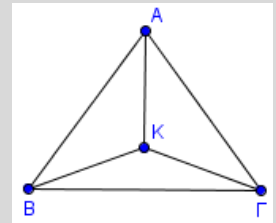
Έστω K σημείο της διχοτόμου της γωνίας A, τέτοιο, ώστε KB = KA = ΚΓ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BKA και ΓKA είναι ίσα.

β) Να υπολογίσετε:

i. τις γωνίες ABK και ΑΓΚ.

ii. τη γωνία BΚΓ.



Λύση

α) Τα τρίγωνα BKA και ΓKA είναι ίσα επειδή έχουν τρεις πλευρές ίσες μία προς μία: KA κοινή, BK = ΚΓ και AB = ΑΓ

β) Επειδή το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, είναι $B = \Gamma$.

Επειδή η AK είναι διχοτόμος της γωνίας A, είναι $\angle BAK = \angle KAG = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$.

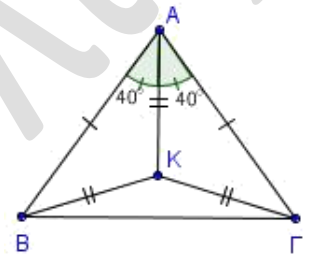
Επειδή KB = KA = ΚΓ, τα τρίγωνα ABK και ΑΓΚ είναι ισοσκελή με βάσεις τις AB και ΑΓ αντίστοιχα. Άρα $\angle ABK = \angle BAK = 40^\circ$ και $\angle KGA = \angle KAG = 40^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ABK έχουμε:

$$\angle AKB + \angle ABK + \angle BAK = 180^\circ \Leftrightarrow \angle AKB + 2 \cdot 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle AKB = 100^\circ$$

Όμοια στο τρίγωνο ΑΓΚ προκύπτει ότι $\angle AKG = 100^\circ$.

γ) Είναι $\angle BKG = 360^\circ - \angle AKB - \angle AKG = 360^\circ - 100^\circ - 100^\circ = 160^\circ$



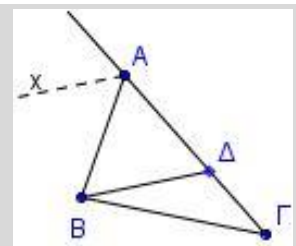
34778. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $AB < AG$. Έστω Αχ η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας $\hat{A}_{εξ} = 120^\circ$. Από την κορυφή Β φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Αχ, η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = 60^\circ$

ii. το τρίγωνο ABΔ είναι ισόπλευρο.

β) Αν η γωνία BΔΑ είναι διπλάσια της $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ABΓ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BΔΓ.

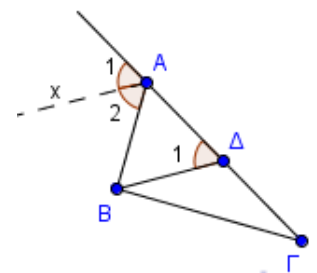


Λύση

α) i) $\angle A\hat{B}\hat{\Delta} = \angle A_2 = \frac{\angle A_{εξ}}{2} = 60^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων Αχ, ΒΔ που τέμνονται από την ΑΒ.

ii) Είναι $\angle \Delta_1 = \angle A_1 = \frac{\angle A_{εξ}}{2} = 60^\circ$ ως εντός εκτός

και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων Αχ, ΒΔ που τέμνονται από την ΑΔ.



Στο τρίγωνο $AB\Delta$ δύο γωνίες του είναι ίσες με 60° , άρα και η τρίτη του γωνία θα είναι 60° και το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

iii) Επειδή το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι: $AB = A\Delta = B\Delta$.

$$\text{Είναι } \Delta\Gamma = A\Gamma - A\Delta = A\Gamma - AB$$

β) Είναι $B\Delta A = 60^\circ$ και $B\Delta A = 2\Gamma \Leftrightarrow \Gamma = 30^\circ$. $B\Delta\Gamma = 180^\circ - B\Delta A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ και από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $B\Delta\Gamma$, έχουμε:

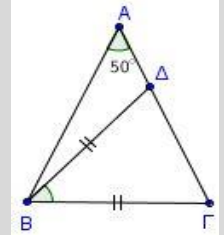
$$\Delta B\Gamma + \Gamma + B\Delta\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta B\Gamma + 30^\circ + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta B\Gamma = 30^\circ.$$

34785. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $A = 50^\circ$.

Έστω Δ σημείο της πλευράς $A\Gamma$, τέτοιο, ώστε $B\Delta = B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta B\Gamma = A$.



Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$, ισχύει ότι: $B = \Gamma$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow 2B = 130^\circ \Leftrightarrow B = 65^\circ = \Gamma$$

β) Επειδή $B\Delta = B\Gamma$, το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $\Delta\Gamma$, άρα $B\Delta\Gamma = \Gamma = 65^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $\Delta B\Gamma$ έχουμε:

$$\Delta B\Gamma + B\Delta\Gamma + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta B\Gamma + 65^\circ + 65^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta B\Gamma = 50^\circ = A$$

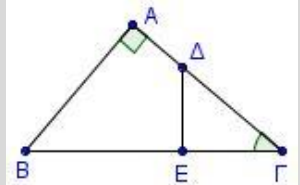
34786. Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 40^\circ$.

Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς $A\Gamma$ και $\Delta E \perp B\Gamma$.

Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

β) τις γωνίες του τετράπλευρου $A\Delta E B$.



Λύση

α) Επειδή $\hat{\Delta E\Gamma} = 90^\circ$, από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $\Delta E\Gamma$, έχουμε:

$$\Delta E\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta E\Gamma + 40^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta E\Gamma = 50^\circ$$

β) Αρχικά είναι $A = E = 90^\circ$.

$$A\Delta E + \Delta E\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow A\Delta E + 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A\Delta E = 130^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε:

$$B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow B + 40^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow B = 50^\circ$$

34787. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 40^\circ$. Στην προέκταση της ΓB (προς το B) παίρνουμε τμήμα $B\Delta$ τέτοιο, ώστε $B\Delta = AB$. Να υπολογίσετε

α) τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) τη γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$.

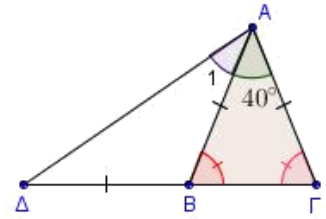
Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, ισχύει ότι:

$$B = \Gamma.$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow 2B = 140^\circ \Leftrightarrow B = 70^\circ = \Gamma$$



β) Επειδή $BD = AB$, το τρίγωνο ΒΔΑ είναι ισοσκελές με βάση

την ΑΔ, άρα $\Delta = A_1$. Η γωνία Β του τριγώνου ΑΒΓ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΔΑ, άρα

$$B = \Delta + A_1 \Leftrightarrow 70^\circ = 2\Delta \Leftrightarrow \Delta = 35^\circ = A_1. \text{ Είναι } \Delta A \Gamma = A + A_1 = 40^\circ + 35^\circ = 75^\circ$$

34500. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και σημεία Δ και Ε στην ευθεία ΒΓ τέτοια, ώστε $BD = GE$.

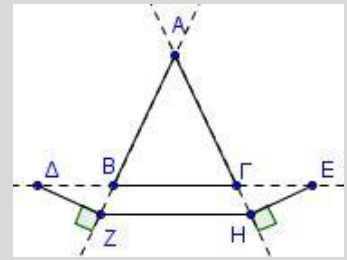
Έστω $\Delta Z \perp AB$ και $EH \perp AG$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $BZ = GH$.

ii. Το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.

β) Αν $\hat{A} = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΖΗ.



Λύση

α) i. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΖ και ΕΗΓ έχουν:

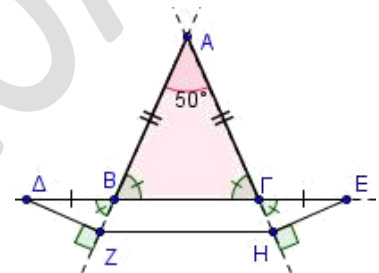
1) $BD = GE$ και

2) $\Delta BZ = EGH$ γιατί είναι κατακορυφήν των ίσων γωνιών Β και Γ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $BZ = GH$.

ii. Επειδή $AB = AG$ και $BZ = GH$, είναι και

$$AB + BZ = AG + GH \Leftrightarrow AZ = AH, \text{ άρα το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.}$$



β) Επειδή το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές με βάση τη ΖΗ, είναι $Z = H$.

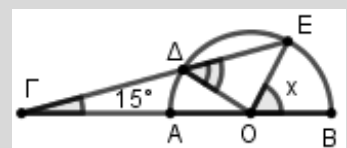
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΖΗ έχουμε:

$$A + Z + H = 180^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + 2Z = 180^\circ \Leftrightarrow 2Z = 130^\circ \Leftrightarrow Z = 65^\circ = H$$

34505. Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ προεκτείνουμε την ΑΒ προς το μέρος του Α και παίρνουμε ένα σημείο Γ. Θεωρούμε Ε ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓΕ με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα ΓΔ ισούται με το ΟΒ και η γωνία $B\hat{\Gamma}E$ είναι 15° , τότε

α) να αποδείξετε ότι $O\hat{\Delta}E = 30^\circ$.

β) να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{O}B = x$.



Λύση

Έστω ρ η ακτίνα του ημικυκλίου. Τότε $OA = OB = OE = \Gamma\Delta = O\Delta = \rho$.

Επειδή $\Gamma\Delta = O\Delta = \rho$, το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές με

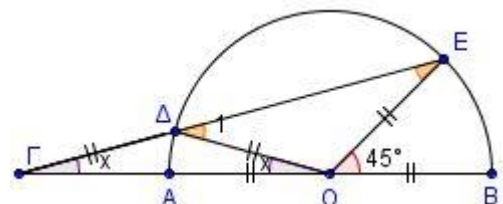
βάση την ΟΓ, άρα $\Delta O A = \Gamma = x$.

Η γωνία Δ_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΟΓΔ, άρα

$$\Delta_1 = \Delta O A + \Gamma = 2x.$$

Επειδή $OE = O\Delta = \rho$, το τρίγωνο ΟΔΕ είναι ισοσκελές με

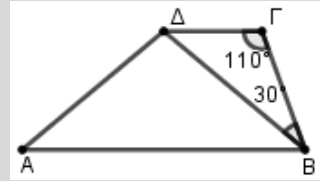
βάση την ΔΕ, οπότε $E = \Delta_1 = 2x$.



Η γωνία $\angle BOE$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\triangle GOE$, άρα

$$\angle BOE = \angle E + \angle G \Leftrightarrow 45^\circ = 2x + x \Leftrightarrow 3x = 45^\circ \Leftrightarrow x = 15^\circ$$

34506. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Delta\Gamma$, στο οποίο η διαγώνιος $B\Delta$ είναι ίση με την πλευρά $A\Delta$. Αν είναι η γωνία $\hat{\Gamma} = 110^\circ$ και η γωνία $\hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} = 30^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{B}$.



Λύση

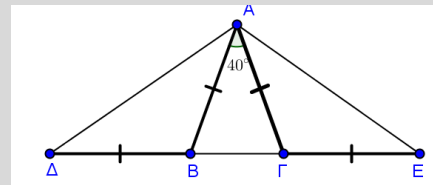
Οι γωνίες $\hat{\Gamma}$ και $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ είναι εντός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων $\Delta\Gamma$, AB που τέμνονται από τη $B\Gamma$, επομένως $\hat{\Gamma} + \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 110^\circ + \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 70^\circ$.

Όμως $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} + \hat{\Delta}\hat{B}\hat{\Gamma} \Leftrightarrow 70^\circ = \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} + 30^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = 40^\circ$.

Επειδή $B\Delta = A\Delta$ το τρίγωνο $\triangle A\Delta B$ είναι ισοσκελές και έχει $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{B} = \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = 40^\circ$.

Από το άθροισμα γωνιών στο τρίγωνο $\triangle A\Delta B$ έχουμε: $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} + \hat{\Delta}\hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} + 40^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

36087. Στο διπλανό σχήμα ισχύουν $\Delta B = BA = A\Gamma = \Gamma E$ και $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Να αποδείξετε ότι:



α) $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{\Gamma}E = 110^\circ$.

β) Τα τρίγωνα $\triangle AB\Delta$ και $\triangle A\Gamma E$ είναι ίσα.

γ) Το τρίγωνο $\triangle \Delta A E$ είναι ισοσκελές.

Λύση

α) Επειδή $AB = A\Gamma$, το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$ και έχει $\angle B = \angle \Gamma$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$, έχουμε:

$$\angle A + \angle B + \angle \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + 2\angle B = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle B = 140^\circ \Leftrightarrow \angle B = 70^\circ = \angle \Gamma$$

Οι γωνίες $\angle AB\Delta$ και $\angle A\Gamma E$ είναι παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\angle B$ και $\angle \Gamma$, άρα

$$\angle AB\Delta = \angle A\Gamma E = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

β) Τα τρίγωνα $\triangle AB\Delta$ και $\triangle A\Gamma E$ έχουν:

- 1) $\Delta B = \Gamma E$
- 2) $BA = A\Gamma$ και
- 3) $\angle AB\Delta = \angle A\Gamma E = 110^\circ$

Με βάση το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

γ) Επειδή τα τρίγωνα $\triangle AB\Delta$ και $\triangle A\Gamma E$ είναι ίσα έχουν και $\Delta\Delta = A\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $\triangle \Delta A E$ είναι ισοσκελές.

36101. Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $\hat{A} = 80^\circ$, $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$ και έστω $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας A .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

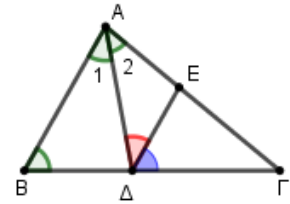
β) Φέρνουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην AB , που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Να υπολογίσετε τις γωνίες $\angle A\Delta E$ και $\angle E\Delta\Gamma$.

Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ABΓ έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + 20^\circ + \Gamma + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$2\Gamma = 80^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 40^\circ \text{ και } B = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$$



β) Είναι $A_1 = A_2 = \frac{A}{2} = 40^\circ$

Είναι $E\Delta A = A_2 = 40^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ, ΑΒ που τέμνονται από την ΑΔ και

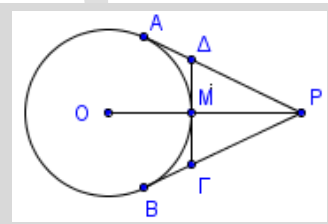
$E\Delta \Gamma = B = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΓ.

$$\Delta E \Gamma = 180^\circ - A E \Delta = 80^\circ.$$

36114. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και από ένα σημείο Ρ εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Το τμήμα ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο Μ και η εφαπτομένη του κύκλου στο Μ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΡΔΓ είναι ισοσκελές.

β) Αν $\hat{A}P\hat{B} = 40^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία ΑΟΒ.



Λύση

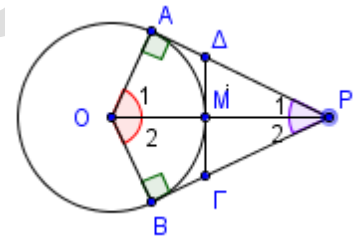
α) Επειδή η ΟΜ είναι ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής, είναι κάθετη στην εφαπτομένη. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων. Στο τρίγωνο ΡΓΔ η ΡΜ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Επειδή τα ΟΑ και ΟΒ είναι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής, είναι κάθετες στις εφαπτομένες. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΡ έχουμε:

$$O_1 + P_1 = 90^\circ \Leftrightarrow O_1 + 20^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow O_1 = 70^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΟΒΡ έχουμε:

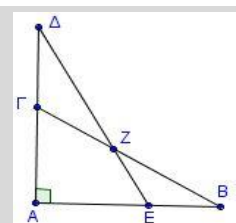
$$O_2 + P_2 = 90^\circ \Leftrightarrow O_2 + 20^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow O_2 = 70^\circ. \text{ Είναι } AOB = O_1 + O_2 = 140^\circ.$$



36117. Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ (γωνία Α ορθή) του διπλανού σχήματος ισχύει $\hat{B} = \hat{A} = 30^\circ$ και Ζ το σημείο τομής των πλευρών τους ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα..

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΕΖΓ.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΖΔ και ΕΒΖ είναι ισοσκελή.



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$B + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 60^\circ.$$

Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΕ, έχουμε:

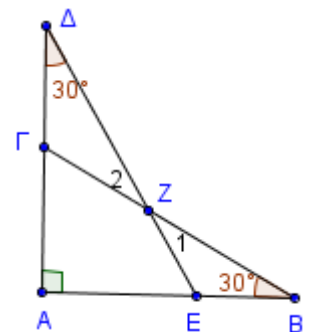
$$\Delta + A\hat{E}\Delta = 90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + A\hat{E}\Delta = 90^\circ \Leftrightarrow A\hat{E}\Delta = 60^\circ.$$

Η γωνία $A\hat{E}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΕΖΒ, άρα

$$E = Z_1 + B \Leftrightarrow 60^\circ = Z_1 + 30^\circ \Leftrightarrow Z_1 = 30^\circ.$$

$$\text{Είναι } \Gamma Z E = 180^\circ - Z_1 = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

β) Επειδή $Z_1 = B = 30^\circ$, το τρίγωνο ΕΒΖ είναι ισοσκελές.



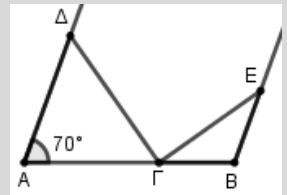
Είναι $Z_2 = Z_1 = 30^\circ$ ως κατακορυφήν, άρα $Z_2 = \Delta$, οπότε το τρίγωνο $\Gamma Z \Delta$ είναι ισοσκελές.

36118. Στο διπλανό σχήμα, οι AD, BE είναι παράλληλες.

Επιπλέον ισχύουν $AD = AG$, $BE = BG$ και $\hat{A} = 70^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ADG και BGE .

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta GE} = 90^\circ$.



Λύση

α) Επειδή $AD = AG$, το τρίγωνο ADG είναι ισοσκελές με βάση την DG , άρα $\Delta = A\Gamma\Delta$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ADG , έχουμε:

$$A + \Delta + A\Gamma\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + 2\Delta = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta = 110^\circ \Leftrightarrow \Delta = 55^\circ = A\Gamma\Delta.$$

Οι γωνίες A και B είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων AD, BE που τέμνονται από την AB , οπότε είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $A + B = 180^\circ \Leftrightarrow 70^\circ + B = 180^\circ \Leftrightarrow B = 110^\circ$.

Επειδή $BE = BG$, το τρίγωνο BEG είναι ισοσκελές με βάση την EG , άρα $B\Gamma E = E$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου BEG έχουμε:

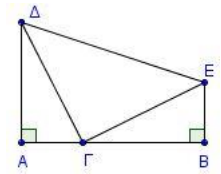
$$B + B\Gamma E + E = 180^\circ \Leftrightarrow 110^\circ + 2E = 180^\circ \Leftrightarrow 2E = 70^\circ \Leftrightarrow E = 35^\circ = B\Gamma E.$$

β) Είναι $\Delta GE = 180^\circ - A\Gamma\Delta - B\Gamma E = 180^\circ - 55^\circ - 35^\circ = 90^\circ$

36163. Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες A, B είναι ορθές και επιπλέον $AD = BG$ και $AG = BE$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AG\Delta$ και BGE είναι ίσα.

β) Αν η γωνία $E\Gamma B = 40^\circ$, τότε το τρίγωνο ΔGE είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AG\Delta$ και BGE έχουν:

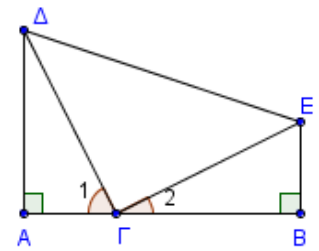
1) $AD = BG$ και 2) $AG = BE$, οπότε έχουν τις κάθετες πλευρές τους μία προς μία ίσες και είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα $AG\Delta$ και BGE είναι ίσα, είναι και $\Delta\Gamma = \Gamma E$, οπότε το τρίγωνο ΔGE είναι ισοσκελές. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου BGE έχουμε:

$$E\Gamma B + E = 90^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + E = 90^\circ \Leftrightarrow E = 50^\circ.$$

Επειδή τα τρίγωνα $AG\Delta$ και BGE είναι ίσα, είναι και $\Gamma_1 = E = 50^\circ$.

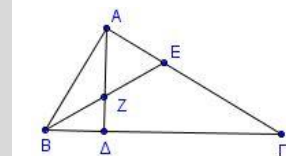
Είναι $\Delta GE = 180^\circ - \Gamma_1 - E\Gamma B = 180^\circ - 50^\circ - 40^\circ = 90^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΔGE είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



36167. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = 60^\circ$.

β) Αν το ύψος AD και η διχοτόμος BE τέμνονται στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο.



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε: $A + B + \Gamma = 180^\circ$, όμως $A + \Gamma = 2B$, άρα

$$2B + B = 180^\circ \Leftrightarrow 3B = 180^\circ \Leftrightarrow B = 60^\circ.$$

β) Επειδή $B = 60^\circ$ είναι $A + \Gamma = 2B = 120^\circ$. Όμως $A = 3\Gamma$, άρα

$$3\Gamma + \Gamma = 120^\circ \Leftrightarrow 4\Gamma = 120^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 30^\circ. \text{ Τότε}$$

$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow A + 60^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A = 90^\circ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABE από το

άθροισμα γωνιών του έχουμε:

$$B_1 + AEB = 90^\circ \Leftrightarrow \frac{B}{2} + AEB = 90^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + AEB = 90^\circ \Leftrightarrow AEB = 60^\circ.$$

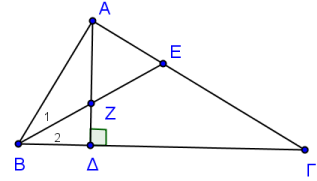
Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου AΔΓ έχουμε:

$$\Delta A\Gamma + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta A\Gamma + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \Delta A\Gamma = 60^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου AZE έχουμε:

$$AEB + \Delta A\Gamma + AZE = 180^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + 60^\circ + AZE = 180^\circ \Leftrightarrow AZE = 60^\circ$$

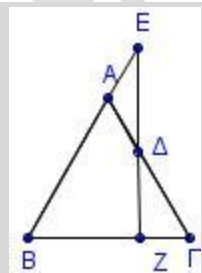
Το τρίγωνο AZE έχει τις γωνίες του ίσες είναι ισόπλευρο.



36228. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ. Θεωρούμε σημείο E στην προέκταση της BA (προς το A) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς ΑΓ, ώστε $AE = A\Delta$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AΔE.

β) Αν Z είναι το σημείο τομής της προέκτασης της EΔ (προς το Δ) με την BΓ, να αποδείξετε ότι η EZ είναι κάθετη στην BΓ.



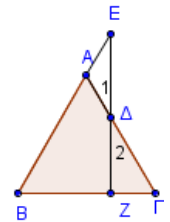
Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο, οι γωνίες του είναι ίσες με 60° . Άρα $\Delta AE = 180^\circ - A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Επειδή το τρίγωνο AΔE είναι ισοσκελές με βάση την ΔE, έχει $\Delta_1 = E$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου AΔE έχουμε:

$$\Delta_1 + E + \Delta AE = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta_1 + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta_1 = 60^\circ \Leftrightarrow \Delta_1 = 30^\circ = E$$



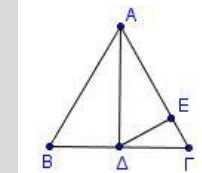
β) Είναι $\Delta_2 = \Delta_1 = 30^\circ$ ως κατακορυφήν και $\Gamma = 60^\circ$, οπότε από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΖΓ προκύπτει ότι $\Delta Z\Gamma = 90^\circ$, άρα $EZ \perp B\Gamma$.

36336. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $AB = A\Gamma$ και η διάμεσός του AΔ τέτοια, ώστε $B\hat{A}\Delta = 30^\circ$. Θεωρούμε σημείο E στην ΑΓ τέτοιο, ώστε $A\Delta = AE$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AΔE.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία EΔΓ.



Λύση

α) Επειδή $AB = A\Gamma$, το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές. Η διάμεσος AΔ είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου. Επειδή η AΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ABΓ, είναι $\Delta A\Gamma = B\Delta A = 30^\circ$, επομένως $A = 60^\circ$.

Επειδή το ισοσκελές τρίγωνο ABΓ έχει μια γωνία του ίση με 60° , είναι ισόπλευρο.

β) Επειδή $AD = AE$ το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές με βάση τη DE , άρα $\angle ADE = \angle AED$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ADE , έχουμε:

$$\angle A\Gamma + \angle ADE + \angle AED = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 2\angle ADE = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle ADE = 150^\circ \Leftrightarrow \angle ADE = 75^\circ = \angle AED$$

γ) $\angle ED\Gamma = \angle A\Delta\Gamma - \angle ADE = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

37009. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και AD η διχοτόμος της γωνίας A . Από το σημείο D φέρουμε την παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ED\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ADE .

γ) Αν η γωνία B είναι 20° μεγαλύτερη από τη γωνία Γ , να υπολογίσετε τη γωνία $ED\Gamma$.

Λύση

α) Είναι $A\Gamma \perp AB$ και $AB \parallel DE$, άρα είναι και $A\Gamma \perp DE$, οπότε το τρίγωνο ADE είναι ορθογώνιο.

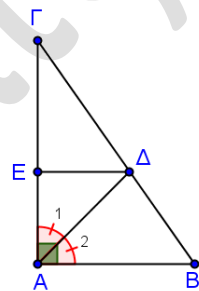
β) Επειδή $\hat{A} = \frac{A}{2} = 45^\circ$, από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου

ADE προκύπτει ότι $\angle ADE = 45^\circ$.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογώνιου τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε:

$$B + \Gamma = 90^\circ, \text{ όμως } B = \Gamma + 20^\circ, \text{ άρα } \Gamma + 20^\circ + \Gamma = 90^\circ \Leftrightarrow 2\Gamma = 70^\circ \Leftrightarrow \Gamma = 35^\circ \text{ και } B = 55^\circ.$$

Είναι $\angle ED\Gamma = B = 55^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων DE, AB που τέμνονται από την $B\Gamma$.



37013. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα D και E των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση $B\Gamma$.

β) Αν $\hat{A} = 75^\circ + \hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔZB και $EH\Gamma$ έχουν:

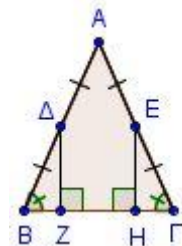
1) $\Delta B = E\Gamma$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών AB και $A\Gamma$ και

2) $B = \Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$.

Τα δύο τρίγωνα έχουν μια κάθετη τους πλευρά ίση και μια οξεία γωνία τους ίση, άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta Z = EH$. δηλαδή τα D και E ισαπέχουν από τη βάση $B\Gamma$.

β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

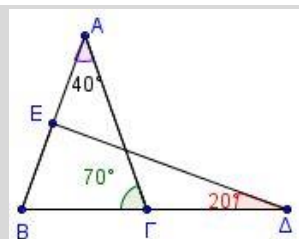
$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 75^\circ + B + B + B = 180^\circ \Leftrightarrow 3B = 105^\circ \Leftrightarrow B = 35^\circ = \Gamma \text{ και } A = 75^\circ + 35^\circ = 110^\circ.$$



37014. Στο διπλανό σχήμα, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές,

β) η γωνία $AE\Delta$ είναι ορθή.



Λύση

α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 40^\circ + B + 70^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow B = 70^\circ$$

Επειδή $B = 70^\circ = \Gamma$, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΒΕΔ έχουμε:

$$BE\Delta + B + \Delta = 180^\circ \Leftrightarrow BE\Delta + 70^\circ + 20^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow BE\Delta = 90^\circ, \text{ άρα και } AE\Delta = 90^\circ.$$

Θέμα 4ο

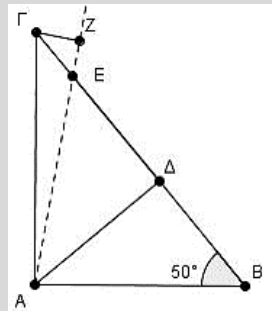
1708. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 50^\circ$, το ύψος του ΑΔ και σημείο Ε στην ΔΓ ώστε $\Delta E = B\Delta$. Το σημείο Ζ είναι η προβολή του Γ στην ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

ii. $\hat{\Gamma A E} = 10^\circ$.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΖΓΕ.



Λύση

α) i. Στο τρίγωνο ΑΒΕ το ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές και έχει $\angle AEB = \angle B = 50^\circ$.

ii. Στο τρίγωνο ΑΒΕ ισχύει ότι:

$$\angle EAB + \angle AEB + \angle B = 180^\circ \Leftrightarrow \angle EAB + 2 \cdot 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \angle EAB = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ.$$

$$\text{Είναι } \angle EAB + \angle GAE = 90^\circ \Leftrightarrow 80^\circ + \angle GAE = 90^\circ \Leftrightarrow \angle GAE = 10^\circ.$$

β) Είναι $\angle GEZ = \angle AEB = 50^\circ$ ως κατακορυφήν.

$$\text{Επειδή } \angle GZE = 90^\circ, \text{ στο τρίγωνο } \triangle GZE \text{ ισχύει ότι: } \angle GEZ + \angle EZG = 90^\circ \Leftrightarrow 50^\circ + \angle EZG = 90^\circ \Leftrightarrow \angle EZG = 40^\circ$$

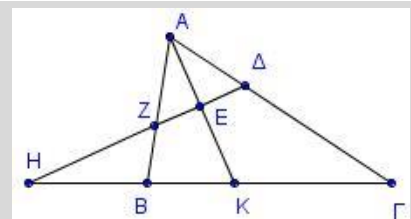
1792. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$. Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΚ και σε τυχαίο σημείο της Ε φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο ΑΚ, η οποία τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της ΓΒ στο σημείο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\angle Z\hat{A}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$

β) $ZK = K\Delta$

γ) $\angle Z\hat{H}\Gamma = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.



Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΖΔ η ΑΕ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, οπότε $\angle AZE = \angle ADE$.

$$\text{Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου } \triangle AZD \text{ έχουμε: } A + \angle AZE + \angle ADE = 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle ADE = 180^\circ - A \Leftrightarrow$$

$$\angle ADE = 90^\circ - \frac{A}{2}. \text{ Είναι } \angle Z\hat{A}\Gamma = 180^\circ - \angle ADE = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = 90^\circ + \frac{A}{2}$$

β) Η ΑΕ είναι μεσοκάθετος του ΖΔ και το Κ είναι σημείο της, άρα ισαπέχει από τα Ζ και Δ, δηλαδή $ZK = KD$.

γ) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΗΔΓ έχουμε:

$$ZH\Gamma + Z\Delta\Gamma + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow ZH\Gamma + 90^\circ + \frac{A}{2} + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow ZH\Gamma = 90^\circ - \frac{A}{2} - \Gamma = \frac{180^\circ - A - 2\Gamma}{2} \quad (1).$$

Όμως στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι:

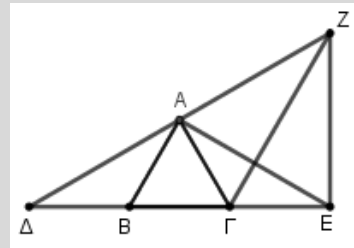
$$A + B + \Gamma = 180^\circ, \text{ οπότε η σχέση (1) γίνεται: } ZH\Gamma = \frac{A + B + \Gamma - A - 2\Gamma}{2} = \frac{B - \Gamma}{2}$$

1819. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $BD = BG$, ενώ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $GE = BG$. Φέρουμε την κάθετη στην ΕΔ στο σημείο Ζ, η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΑ στο Ζ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΓΑΕ και ΒΔΑ.

β) Να αποδείξετε ότι η ΓΖ είναι μεσοκάθετος του ΑΕ.

γ) Να αποδείξετε ότι $AB \parallel GZ$.



Λύση

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο οι γωνίες του είναι ίσες με 60° . Είναι $ABD = AGE = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Επειδή $AB = AD = AG = GE$, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα και ισοσκελή. Έστω ω κάθε μια από τις γωνίες που αντιστοιχούν στις βάσεις τους.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΒΔ έχουμε:

$$ABD + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow 2\omega = 60^\circ \Leftrightarrow \omega = 30^\circ$$

β) Επειδή $AG = GE$, το Γ ισαπέχει από τα Α και Ε, οπότε ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΕ.

Είναι $\angle AZG = \omega + A = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ = \angle AGZ$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΖ και ΓΕΖ έχουν:

- 1) τη πλευρά ΓΖ κοινή και
- 2) $AG = GE$,

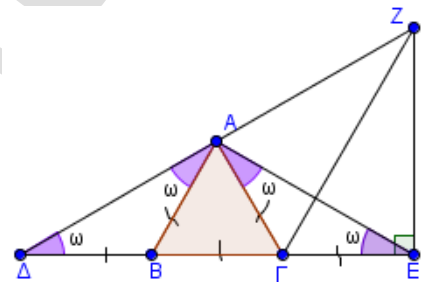
Δηλαδή τα δύο τρίγωνα έχουν τις υποτεινόμενες τους ίσες και μια κάθετη πλευρά του ενός τριγώνου είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου, οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα και έχουν $ZA = ZE$.

Δηλαδή το Ζ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΕ. Επειδή το Γ και το Ζ ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΕ, η ΓΖ είναι η μεσοκάθετος του ΑΕ.

γ) Στο τρίγωνο ΑΓΕ το ΓΖ είναι ύψος και διάμεσος, άρα είναι και διχοτόμος, δηλαδή

$$\angle AGZ = \angle ZGE = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ.$$

Οι γωνίες ΑΒΓ και ΖΓΕ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των ΑΒ, ΓΖ που τέμνονται από την ΒΓ και είναι ίσες, άρα οι ευθείες ΑΒ και ΓΖ είναι παράλληλες.

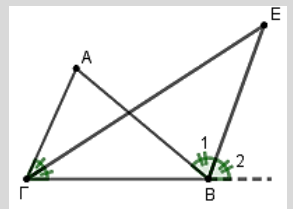


1851. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η προέκταση της διχοτόμου της γωνίας Γ και της εξωτερικής γωνίας του B τέμνονται στο E .

Δίνεται ότι $\hat{A}\hat{B}E = 70^\circ = 2\hat{\Gamma}\hat{E}B$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓBE είναι ισοσκελές.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



Λύση

α) Επειδή BE είναι διχοτόμος της γωνίας B εξωτερικής, ισχύει ότι $B_1 = B_2 = 70^\circ$.

Είναι $2\hat{\Gamma}EB = 70^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}EB = 35^\circ$.

Η γωνία B_2 είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΓBE οπότε $B_2 = \hat{\Gamma}EB + \hat{\Gamma}EB \Leftrightarrow 70^\circ = 35^\circ + \hat{\Gamma}EB \Leftrightarrow \hat{\Gamma}EB = 35^\circ$.

Επειδή $\hat{\Gamma}EB = \hat{\Gamma}EB$ το τρίγωνο ΓBE είναι ισοσκελές. Είναι $B_2 + \hat{\Gamma}BE = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}BE = 110^\circ$

β) Επειδή ΓE διχοτόμος της γωνίας Γ και $\hat{\Gamma}EB = 35^\circ$, είναι $\hat{A}\hat{\Gamma}B = 2 \cdot 35^\circ = 70^\circ$

Είναι $B_{\text{εξ}} + \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 140^\circ + \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει ότι: $A + \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} + \hat{A}\hat{\Gamma}B = 180^\circ \Leftrightarrow A + 40^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow A = 70^\circ$

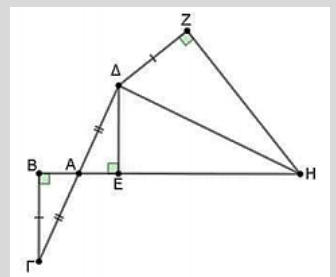
11882. Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Delta E$ και ΔZH είναι ορθογώνια με ορθές γωνίες $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$, $\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta}$ και $\hat{\Delta}\hat{Z}\hat{H}$, αντίστοιχα.

Επίσης $A\Gamma = A\Delta$ και $B\Gamma = \Delta Z$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα ευθύγραμμα τμήματα $B\Gamma$ και ΔE είναι ίσα.

β) Η ΔH είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{E}\hat{H}\hat{Z}$.

γ) Αν, επιπλέον, οι $A\Delta$ και ΔH είναι κάθετες, τότε $\hat{A}\hat{\Delta}E = \frac{\hat{E}\hat{H}\hat{Z}}{2}$.



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ έχουν: $A\Gamma = A\Delta$ (υπόθεση) και $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}\hat{A}\hat{E}$ ως κατακορυφήν. Άρα τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτεινουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου ισούται με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα. Επομένως έχουν και $B\Gamma = \Delta E$.

β) Είναι $\Delta E = B\Gamma = \Delta Z$, οπότε το Δ ισαπέχει από τις HA και HZ , άρα ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{E}\hat{H}\hat{Z}$. Δηλαδή η ΔH είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{E}\hat{H}\hat{Z}$.

γ) Επειδή η ΔH είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{E}\hat{H}\hat{Z}$, ισχύει $\hat{\Delta}HE = \frac{\hat{E}\hat{H}\hat{Z}}{2}$ (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta H$ είναι $\hat{\Delta}AE + \hat{\Delta}HE = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}HE = 90^\circ - \hat{\Delta}AE$ (2).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta E$ είναι $\hat{A}\hat{\Delta}E + \hat{\Delta}AE = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A}\hat{\Delta}E = 90^\circ - \hat{\Delta}AE$ (3).

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει ότι $\hat{A}\hat{\Delta}E = \frac{\hat{E}\hat{H}\hat{Z}}{2}$.

13499. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB < A\Gamma$ και AH το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία Δ και E τέτοια ώστε $\Delta B = AB$ και $\Gamma E = \Gamma A$. Αν ΔZ και $E\Theta$ είναι οι αποστάσεις των Δ και E από τις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma}\Delta\Delta = \hat{\Delta}\hat{A}H$ και $E\hat{A}B = H\hat{A}E$.

β) $\Delta E = \Delta Z + E\Theta$.

Λύση

α) Από το σχήμα έχουμε ότι:

$$\Gamma\Delta\Delta = \Gamma AB - \Delta AB = 90^\circ - \Delta AB \quad (1).$$

Οι γωνίες ΔAH και ΔDH του ορθογωνίου τριγώνου ΔDH είναι

συμπληρωματικές, οπότε: $\Delta AH = 90^\circ - \Delta DH \quad (2).$

Αφού $B\Delta = BA$, το τρίγωνο $B\Delta A$ θα είναι ισοσκελές με

βάση ΔA , οπότε οι γωνίες ΔAB και ΔDH θα είναι

ίσες ως προσκείμενες στη βάση, δηλαδή $\Delta AB = \Delta DH \quad (3).$

Άρα, από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\Gamma\Delta\Delta = \Delta AH \quad (4).$

Έχουμε, επίσης, ότι: $EAB = \Gamma AB - \Gamma AE = 90^\circ - \Gamma AE \quad (5).$

Οι γωνίες HAE και AEH του ορθογωνίου τριγώνου AEH είναι συμπληρωματικές, οπότε:

$$HAE = 90^\circ - AEH \quad (6).$$

Αφού $\Gamma E = \Gamma A$, το τρίγωνο ΓEA θα είναι ισοσκελές με βάση EA , οπότε οι γωνίες ΓAE και AEH θα είναι

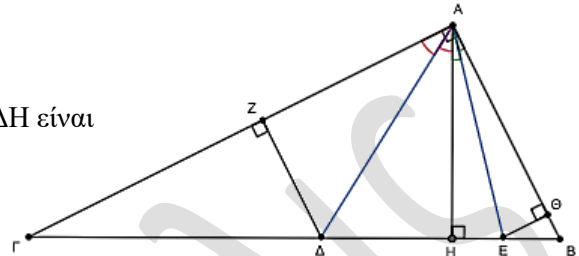
ίσες ως προσκείμενες στη βάση, δηλαδή $\Gamma AE = AEH \quad (7).$

Άρα, από τις σχέσεις (5), (6) και (7) προκύπτει ότι $EAB = HAE \quad (8).$

β) Από (α) ερώτημα ισχύει ότι $EAB = HAE$, οπότε η AE είναι διχοτόμος της γωνίας HAB του τριγώνου AHB . Άρα, το σημείο E ισαπέχει από τις πλευρές AH και AB κι επομένως είναι $EH = E\Theta$.

Από (α) ερώτημα ισχύει, επίσης, ότι $\Gamma\Delta\Delta = \Delta AH$, οπότε η ΔA είναι διχοτόμος της γωνίας $HA\Gamma$ του τριγώνου $AH\Gamma$. Άρα, το σημείο Δ ισαπέχει από τις πλευρές AH και $A\Gamma$ κι επομένως είναι $\Delta H = \Delta Z$.

Συνεπώς, $\Delta E = \Delta H + EH = \Delta Z + E\Theta$.



13537. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, σημείο Δ της πλευράς $A\Gamma$, ώστε $\Delta A = B\Delta = B\Gamma$ και σημείο E της πλευράς AB , ώστε $AE = \Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

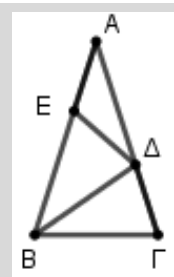
i. $\hat{\Gamma} = 2\hat{A}$

ii. $A = 36^\circ$

iii. Το τρίγωνο ΔDE είναι ισοσκελές.

β) Στην προέκταση της ΔE προς το E θεωρούμε σημείο Z , ώστε $\Delta Z = A\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.



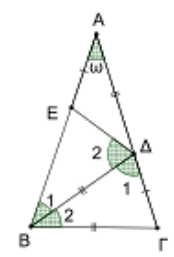
Λύση

α) Έστω $A = \omega \quad (1).$

i. Γνωρίζουμε ότι $\Delta A = B\Delta$, άρα το τρίγωνο ΔAB είναι ισοσκελές με βάση AB , οπότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $B_1 = \omega \quad (2)$

Η γωνία Δ_1 είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔAB , οπότε $\Delta_1 = B_1 + A = 2\omega \quad (3)$. Είναι $B\Gamma = B\Delta$ (από τα δεδομένα), άρα το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση $\Gamma\Delta$, οπότε οι

προσκείμενες στη βάση του γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\Gamma = \Delta_1 = 2\omega \quad (4).$

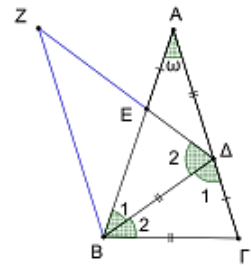


Από τις σχέσεις (1), (4) προκύπτει ότι $\Gamma = 2A$.

ii. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ (από τα δεδομένα), οπότε και οι προσκείμενες στη βάση $B\Gamma$ γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $B = \Gamma = 2\omega$.
Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε

$$A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \omega + 2\omega + 2\omega = 180^\circ \Leftrightarrow 5\omega = 180^\circ \Leftrightarrow \omega = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ, \text{ άρα}$$

$$A = 36^\circ.$$



iii. Ένας τρόπος να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές είναι να αποδείξουμε ότι $AE = \Delta E$. Όμως από τα δεδομένα είναι $AE = \Delta\Gamma$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $\Delta E = \Delta\Gamma$. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $BE\Delta$ τα οποία έχουν:

- $B\Delta$ κοινή πλευρά.
 - $B\Gamma = BE$, γιατί $B\Gamma = A\Delta$ από τα δεδομένα και $BE = A\Delta$ ως διαφορές των ίσων τμημάτων $AB = A\Gamma$ και $AE = \Gamma\Delta$.
 - $B_1 = B_2$ αφού $B_1 = \omega = 36^\circ$ ($AB\Delta$ ισοσκελές τρίγωνο) και $B_2 = B - B_1 = 2\omega - \omega = \omega = 36^\circ$.
- Τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $BE\Delta$ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ). Άρα θα είναι ίσες και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες B_1, B_2 , δηλαδή $\Delta E = \Delta\Gamma$.

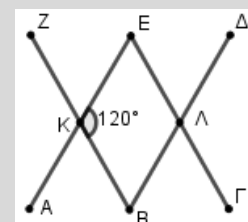
β) Στην ισότητα των τριγώνων $B\Gamma\Delta$ και $BE\Delta$ έχουμε αποδείξει ότι $B\Gamma = BE$, οπότε και οι αντίστοιχες γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\Delta_1 = \Delta_2$. Από τη σχέση (3) έχουμε ότι $\Delta_1 = 72^\circ$ άρα και $\Delta_2 = 72^\circ$.

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $ZB\Delta$ έχουν:

- $B\Gamma = B\Delta$, από τα δεδομένα.
- $A\Gamma = Z\Delta$, από το δεδομένο του ερωτήματος.
- $\Gamma = \Delta_2 = 72^\circ$.

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $ZB\Delta$ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (κριτήριο ΠΓΠ). Όμως το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε και το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

13697. Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα $AE, BZ, B\Delta$ και ΓE αναπαριστούν τέσσερις ίσους ράβδους μήκους 40 cm οι οποίες αποτελούν μέρη μιας κρεμάστρας τοίχου. Οι ράβδοι συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε ανά δύο απέναντι να είναι παράλληλες, δηλαδή $AE \parallel B\Delta$ και $BZ \parallel \Gamma E$, και ανά δύο να έχουν κοινό μέσο, δηλαδή K κοινό μέσο των AE, BZ και Λ κοινό μέσο των $B\Delta, \Gamma E$. Έστω ότι η μία από τις γωνίες που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ράβδοι AE και BZ με κορυφή το κοινό τους μέσο K , η γωνία $B\hat{K}E$, είναι ίση με 120° .



α) Να αποδείξετε ότι $A\hat{K}B = K\hat{B}\Lambda = B\hat{\Lambda}\Gamma = 60^\circ$.

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα τρίγωνα AKB και $B\Lambda\Gamma$ είναι ίσα και ισόπλευρα.

Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Λύση

α) Οι γωνίες AKB και BKE είναι παραπληρωματικές, οπότε ισχύει

$$AKB + BKE = 180^\circ \Leftrightarrow AKB + 120^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow AKB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \quad (1)$$

Είναι $AKB = K\hat{B}\Lambda$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων AE και $B\Delta$ με τέμνουσα την BZ .

Όμως $AKB = 60^\circ$ από τη σχέση (1) οπότε $K\hat{B}\Lambda = 60^\circ$ (2).

Είναι $K\beta\lambda = \beta\lambda\Gamma$ ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων BZ και ΓE με τέμνουσα την $B\Delta$.

Όμως $K\beta\lambda = 60^\circ$ από σχέση (2), οπότε $\beta\lambda\Gamma = 60^\circ$ (3)

Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\alpha\kappa\beta = \kappa\beta\lambda = \beta\lambda\Gamma = 60^\circ$ (4)

β) Τα τρίγωνα $\alpha\kappa\beta$ και $\beta\lambda\Gamma$ έχουν:

- $\alpha\kappa = \beta\lambda = 20$ cm, ως μισά των ίσων τμημάτων αE και $\beta\Delta$ μήκους 40 cm όπου κ και λ τα μέσα τους.

- $\kappa\beta = \lambda\Gamma = 20$ cm, ως μισά των ίσων τμημάτων BZ και ΓE μήκους 40 cm όπου κ και λ τα μέσα τους.

- $\alpha\kappa\beta = \beta\lambda\Gamma = 60^\circ$, από σχέση (4)

Επομένως τα τρίγωνα θα είναι ίσα, γιατί έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες. Οπότε θα είναι $\alpha_1 = \beta_1$ και

$\beta_2 = \Gamma_2$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές $\kappa\beta$, $\lambda\Gamma$ και $\kappa\alpha$, $\lambda\beta$ αντίστοιχα.

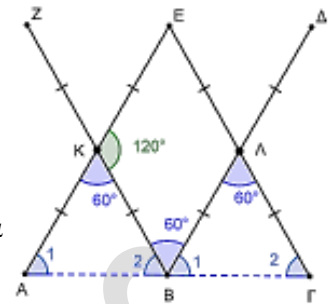
Επειδή είναι $\alpha\kappa = \kappa\beta = 20$ cm, το τρίγωνο $\alpha\kappa\beta$ θα είναι ισοσκελές με βάση $\alpha\beta$, οπότε θα έχει τις προσκείμενες στη βάση του γωνίες ίσες, δηλαδή $\alpha_1 = \beta_2$ (5).

Για τις γωνίες του τριγώνου $\alpha\kappa\beta$ ισχύει ότι $\alpha_1 + \alpha\kappa\beta + \beta_2 = 180^\circ \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$

$$2\alpha_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Leftrightarrow \alpha_1 = 60^\circ \text{ (6)}.$$

Από σχέσεις (4), (5) και (6) προκύπτει ότι $\alpha\kappa\beta = \alpha_1 = \beta_2 = 60^\circ$. Συνεπώς, το τρίγωνο $\alpha\kappa\beta$ θα είναι ισοπλευρό γιατί έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, οπότε και το ίσο του τρίγωνο $\beta\lambda\Gamma$ θα είναι και αυτό ισοπλευρό, οπότε κάθε γωνία του θα είναι ίση με 60° , δηλαδή $\beta\lambda\Gamma = \Gamma_2 = \beta_1 = 60^\circ$.

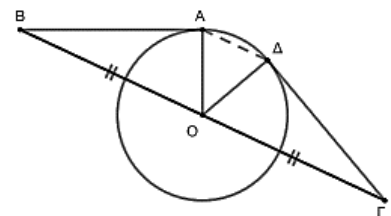
γ) Για να είναι τα α , β και Γ σημεία της ίδιας ευθείας, αρκεί να δειχθεί ότι η γωνία $\alpha\beta\Gamma$ είναι ευθεία γωνία. Είναι $\alpha\beta\Gamma = \beta_2 + \kappa\beta\lambda + \beta_1 = 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$, αφού είναι $\beta_2 = \beta_1 = 60^\circ$ ως γωνίες ισοπλευρών τριγώνων $\alpha\kappa\beta$ και $\beta\lambda\Gamma$. Επομένως, τα σημεία α , β και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία.



13750. Από σημείο B εξωτερικό ενός κύκλου (O, R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα BA . Ενώνουμε το σημείο B με το κέντρο O του κύκλου και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα $OG = BO$. Από το σημείο Γ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα $\Gamma\Delta$, όπως στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι: **i.** $AB = \Delta\Gamma$ **ii.** $\alpha\Delta \parallel \beta\Gamma$

β) Αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος BA είναι ίσο με την ακτίνα R , τι είδους τρίγωνο είναι το τρίγωνο $\alpha O\Delta$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) i. $OA \perp AB$ και $OD \perp \Delta\Gamma$ διότι OA και OD είναι ακτίνες στα σημεία επαφής A και Δ αντίστοιχα.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα OAB και $O\Delta\Gamma$, τα οποία έχουν:

- $OA = OD$, ακτίνες του κύκλου

- $OB = OG$, από την υπόθεσή

- $\angle OAB = \angle O\Delta\Gamma = 90^\circ$, αφού $OA \perp AB$ και $OD \perp \Delta\Gamma$

Τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση.

Άρα θα έχουν ίσες και τις άλλες κάθετες πλευρές τους, δηλαδή $AB = \Delta\Gamma$.

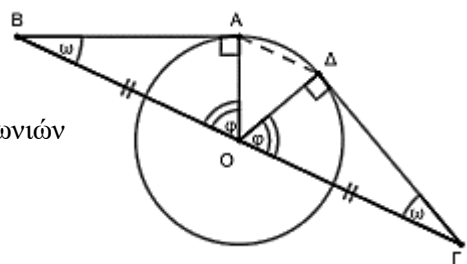
ii. Από την ισότητα των ορθογώνιων τριγώνων του α) i. ερωτήματος προκύπτει ότι $\angle OBA = \angle O\Gamma\Delta = \omega$, γιατί είναι οξείες γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές OA και OD

αντίστοιχα. Επίσης είναι $\angle AOB = \angle DO\Gamma = \phi$ ως οξείες

γωνίες απέναντι από τις ίσες πλευρές

AB και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα, με $\omega + \phi = 90^\circ$ (1), ως άθροισμα οξείων γωνιών ορθογώνιων τριγώνων.

Για τη γωνία $\alpha O\Delta$ έχουμε:



$$\text{ΑΟΔ} = 180^\circ - 2\varphi = 2(90^\circ - \varphi) = 2\omega \text{ λόγω της (1).}$$

Το τρίγωνο ΑΟΔ είναι ισοσκελές, αφού $\text{ΟΑ} = \text{ΟΔ} = \text{R}$.

Για τις ίσες του γωνίες ΟΑΔ και ΟΔΑ έχουμε:

$$\text{ΟΑΔ} = \text{ΟΔΑ} = \frac{180^\circ - \text{ΑΟΔ}}{2} = \frac{180^\circ - 2\omega}{2} = \frac{2(90^\circ - \omega)}{2} = 90^\circ - \omega = \varphi \text{ λόγω της (1).}$$

Άρα $\text{ΟΑΔ} = \text{ΑΟΒ} = \varphi$ και είναι γωνίες εντός εναλλάξ των ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΟΑ, οπότε $\text{ΑΔ} \parallel \text{ΒΓ}$.

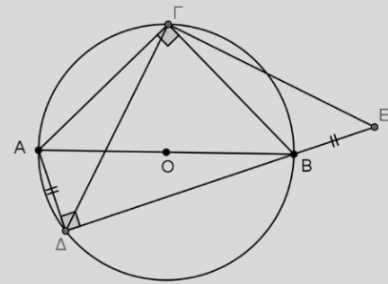
β) Αν το μήκος του ΒΑ είναι ίσο με R, τότε από το α) ερώτημα τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΔΓ θα είναι και ισοσκελή, αφού $\text{ΟΑ} = \text{ΑΒ} = \text{ΟΔ} = \text{ΔΓ} = \text{R}$. Επομένως οι γωνίες ω και φ θα είναι ίσες και η κάθεμία θα ισούται με 45° . Τότε $\text{ΑΟΔ} = 180^\circ - 2\varphi = 90^\circ$, οπότε το ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΔ έχει τη γωνία της κορυφής του ορθή, άρα είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

34316. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και διάμετρος του ΑΒ. Έστω Γ το μέσο ενός ημικυκλίου του, Δ τυχαίο σημείο του άλλου ημικυκλίου του και $\text{ΑΓ} \perp \text{ΒΔ}$. Στην προέκταση της ΔΒ προς το μέρος του Β θεωρούμε σημείο Ε ώστε $\text{ΒΕ} = \text{ΑΔ}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. οι γωνίες $\hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{\Lambda}$ και $\hat{\Gamma}\hat{\text{Β}}\hat{\text{Ε}}$ είναι ίσες,
- ii. τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα.
- iii. η ΓΔ είναι κάθετη στην ΓΕ.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι αντιδιαμετρικό του Γ, η ΓΕ είναι εφαπτόμενη του κύκλου.



Λύση

α) i. Στο τετράπλευρο ΑΓΔΒ ισχύει ότι: $\hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{\Lambda} + \hat{\Lambda}\hat{\Delta}\hat{\text{Β}} + \hat{\Delta}\hat{\text{Β}}\hat{\Gamma} + \hat{\text{Β}}\hat{\Gamma}\hat{\Lambda} = 360^\circ \Leftrightarrow$

$$\hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{\Lambda} + 90^\circ + \hat{\Delta}\hat{\text{Β}}\hat{\Gamma} + 90^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{\Lambda} = 180^\circ - \hat{\Delta}\hat{\text{Β}}\hat{\Gamma} \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \hat{\Delta}\hat{\text{Β}}\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}\hat{\text{Β}}\hat{\text{Ε}} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}\hat{\text{Β}}\hat{\text{Ε}} = 180^\circ - \hat{\Delta}\hat{\text{Β}}\hat{\Gamma} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{\Lambda} = \hat{\Gamma}\hat{\text{Β}}\hat{\text{Ε}}$.

ii. Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ έχουν:

1) $\text{ΑΓ} = \text{ΒΓ}$ γιατί τα τόξα ΑΓ και ΒΓ είναι ίσα και σε ίσα τόξα αντιστοιχούν ίσες χορδές στον ίδιο κύκλο.

2) $\text{ΑΔ} = \text{ΒΕ}$ υπόθεση

3) $\hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{\Lambda} = \hat{\Gamma}\hat{\text{Β}}\hat{\text{Ε}}$ από α)i.

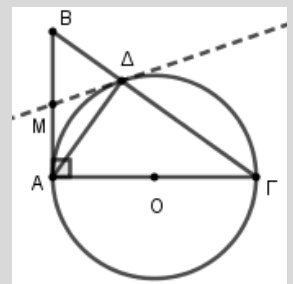
Σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας τριγώνων ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

iii. Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα, έχουν και $\hat{\Lambda}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = \hat{\text{Β}}\hat{\Gamma}\hat{\text{Ε}}$.

$$\text{Είναι } \hat{\Lambda}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} + \hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{\text{Β}} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\text{Β}}\hat{\Gamma}\hat{\text{Ε}} + \hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{\text{Β}} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{\text{Ε}} = 90^\circ, \text{ άρα η } \text{ΓΔ} \text{ είναι κάθετη στην } \text{ΓΕ}.$$

β) Αν το Δ είναι αντιδιαμετρικό του Γ τότε η ΔΓ διέρχεται από το κέντρο Ο και επειδή η ΓΔ είναι κάθετη στην ΓΕ, η ακτίνα ΟΓ στη περίπτωση αυτή θα είναι κάθετη στη ΓΕ. Επομένως η ΓΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου.

34329. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Με διάμετρο την κάθετη πλευρά του $A\Gamma$ φέρουμε κύκλο κέντρου O , ο οποίος τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου σε σημείο Δ . Έστω ότι η εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά AB σε σημείο M . Να αποδείξετε ότι:



α) $\hat{\Gamma\Delta\Delta} = \hat{B}$,

β) $\hat{M\Delta B} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$ και το τρίγωνο ΔMB είναι ισοσκελές.

γ) το M είναι το μέσο του AB .

Λύση

α) Η γωνία $\hat{A\Delta\Gamma}$ είναι ορθή γιατί είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο. Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $A\Delta\Gamma$ έχουμε: $\hat{\Gamma\Delta\Delta} + \hat{\Gamma} + \hat{A\Delta\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma\Delta\Delta} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$ (1)

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\hat{B} + \hat{B\Delta\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} + 90^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma} \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\hat{\Gamma\Delta\Delta} = \hat{B}$.

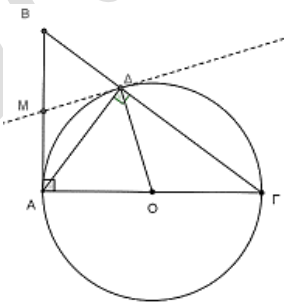
β) Τα OG , OD είναι ακτίνες του κύκλου οπότε το τρίγωνο $OG\Delta$ είναι ισοσκελές και έχει $\hat{O\Delta\Gamma} = \hat{\Gamma}$ (3).

Η OD είναι ακτίνα στο σημείο επαφής Δ , άρα $OD \perp \Delta M$, δηλαδή

$$\hat{M\Delta O} = 90^\circ. \text{ Είναι } \hat{M\Delta B} + \hat{M\Delta O} + \hat{O\Delta\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \hat{M\Delta B} + 90^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{M\Delta B} = 90^\circ - \hat{\Gamma}.$$

Επειδή $\hat{M\Delta B} = \hat{B}$, το τρίγωνο $M\Delta B$ είναι ισοσκελές.



γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ είναι:

$$\hat{M\Delta\Delta} + 90^\circ + \hat{B} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{M\Delta\Delta} = 90^\circ - \hat{B} \quad (4).$$

$$\text{Είναι } \hat{A\Delta B} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A\Delta M} + \hat{M\Delta B} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A\Delta M} + \hat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{A\Delta M} = 90^\circ - \hat{B} \quad (5).$$

Από τις (4), (5) προκύπτει ότι $\hat{A\Delta M} = \hat{M\Delta\Delta}$, οπότε το τρίγωνο $M\Delta\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση την $A\Delta$ και έχει $MA = \Delta M$ (6).

Επειδή το τρίγωνο $M\Delta B$ έχει $\hat{M\Delta B} = \hat{B}$, είναι ισοσκελές με βάση την ΔB , οπότε $MB = \Delta M$ (7). Από τις (6), (7) προκύπτει ότι $MA = MB$, δηλαδή το M είναι το μέσο του AB .

37097. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του ΓE .

Στην προέκταση της ΓB προς το B , θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο,

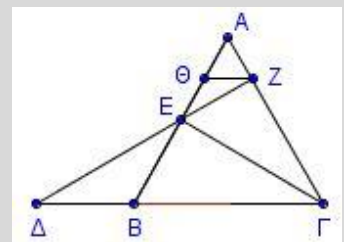
$$\text{ώστε } B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}. \text{ Αν η ευθεία } \Delta E \text{ τέμνει την } A\Gamma \text{ στο } Z \text{ και } Z\Theta \parallel B\Gamma:$$

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο $A\Theta Z$ είναι ισόπλευρο.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Theta E Z$.

γ) Να αποδείξετε ότι $AE = 2\Theta Z$.

δ) Να αποδείξετε ότι $3AB = 4\Theta B$.



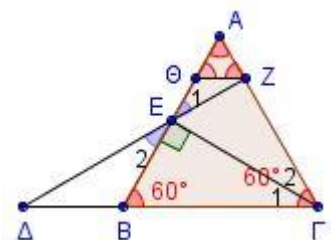
Λύση

α) Έστω a η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου.

Το ΓE είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο, άρα είναι διάμεσος και διχοτόμος

$$\text{του. Είναι } BE = \frac{BA}{2} = \frac{a}{2} = B\Delta, \text{ άρα το τρίγωνο } B\Delta E \text{ είναι ισοσκελές.}$$

Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, οι γωνίες του A , $AB\Gamma$ και $A\Gamma B$ είναι ίσες με 60° .



Είναι $\angle \Theta Z = \angle \Lambda \Gamma = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΘZ , $\Lambda \Gamma$ που τέμνονται από την AB . Ακόμη είναι $\angle AZ\Theta = \angle \Lambda \Gamma B = 60^\circ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΘZ , $\Lambda \Gamma$ που τέμνονται από την AG . Στο τρίγωνο $\Lambda \Theta Z$ και οι τρεις γωνίες του είναι ίσες με 60° , οπότε είναι ισόπλευρο.

β) Η γωνία $\Lambda \Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $\Lambda \Theta \Delta$, άρα $\angle \Lambda \Gamma = \angle \Delta + \angle E_2 \Leftrightarrow 60^\circ = 2\angle E_2 \Leftrightarrow \angle E_2 = 30^\circ$. Είναι $\angle E_1 = \angle E_2 = 30^\circ$ ως κατακορυφήν.

Είναι $\angle \Theta Z = 180^\circ - \angle \Lambda \Theta Z = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ και από το άθροισμα γωνιών στο τρίγωνο ΘEZ , έχουμε:

$$\angle \Theta Z + \angle E_1 + \angle \Theta ZE = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + 30^\circ + \angle \Theta ZE = 180^\circ \Leftrightarrow \angle \Theta ZE = 30^\circ$$

γ) Επειδή $\angle E_1 = \angle \Theta ZE = 30^\circ$, το τρίγωνο ΘZE είναι ισοσκελές με βάση την EZ , άρα $\Theta E = \Theta Z$.

Όμως $\Theta Z = \Theta \Lambda$ γιατί είναι πλευρές του ισόπλευρου, άρα $\Theta E = \Theta Z = \Theta \Lambda$ και $AE = 2\Theta Z$.

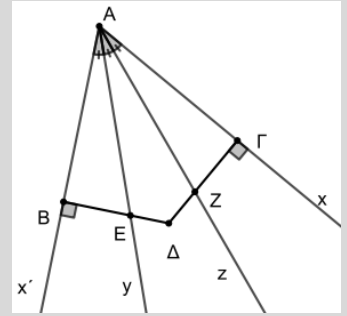
δ) Είναι $\Theta B = \Theta E + EB = \frac{1}{2}AE + \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AB = \frac{1}{4}AB + \frac{1}{2}AB = \frac{3}{4}AB \Leftrightarrow 3AB = 4\Theta B$.

37125. Στις πλευρές Ax' και Ax γωνίας $\angle x'Ax$ θεωρούμε σημεία B και Γ ώστε $AB = A\Gamma$. Οι κάθετες στις Ax' και Ax στα σημεία B και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ . Αν οι ημιευθείες Ay και Az χωρίζουν τη γωνία $\angle x'Ax$ σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο EAZ είναι ισοσκελές.

β) Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\angle x'Ax$.

γ) Οι γωνίες $\angle B\Delta$ και $\angle \Gamma\Delta$ είναι ίσες.



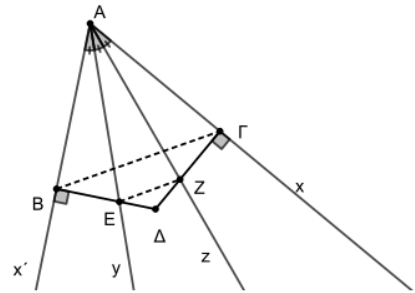
Λύση

α) Τα τρίγωνα ΛBE και $\Lambda \Gamma Z$ είναι ορθογώνια και έχουν:

1) $AB = A\Gamma$, από την υπόθεση και

2) $\angle B\Lambda E = \angle \Gamma\Lambda Z$, αφού οι Ay , Az χωρίζουν τη γωνία $\angle x'Ax$ σε τρεις ίσες γωνίες.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΛBE και $\Lambda \Gamma Z$ είναι ίσα γιατί έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνίες ίσες μία προς μία, οπότε θα είναι $AE = AZ$ ως υποτείνουσες των ίσων τριγώνων, άρα το EAZ είναι ισοσκελές τρίγωνο.



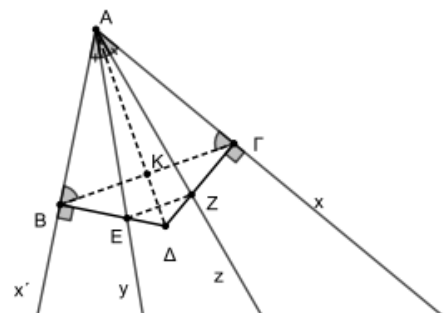
β) Τα τρίγωνα $\Lambda B\Delta$ και $\Lambda \Gamma\Delta$ είναι ορθογώνια και έχουν $\Lambda\Delta$ κοινή πλευρά και $AB = A\Gamma$, από την υπόθεση, οπότε θα είναι ίσα γιατί έχουν δυο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία, άρα θα είναι $B\Delta = \Gamma\Delta$ και $\angle B\Delta\Lambda = \angle \Gamma\Delta\Lambda$ ως γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές $B\Delta$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, οπότε $\Lambda\Delta$ διχοτόμος της $\angle x'Ax$.

γ) Έστω K το σημείο τομής των $\Lambda\Delta$ και $B\Gamma$. Στο ισοσκελές τρίγωνο $\Lambda B\Gamma$ η ΛK είναι διχοτόμος άρα και ύψος. Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $\Lambda K\Gamma$ ισχύει ότι:

$$\angle K\Lambda\Gamma + \angle \Lambda\Gamma K = 90^\circ \Leftrightarrow \angle \Gamma\Delta\Lambda + \angle \Lambda\Gamma K = 90^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \angle \Gamma\Delta\Lambda = 90^\circ - \angle \Lambda\Gamma K$$

Το τρίγωνο $\Lambda B\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$, άρα $\angle \Lambda\Gamma B = \angle \Lambda\Gamma\Gamma$ και επομένως είναι $\angle \Lambda\Gamma K = \angle \Lambda\Gamma B = \angle \Lambda\Gamma\Gamma$.



$$\text{Άρα } \hat{\Gamma\Delta\Lambda} = 90^\circ - \hat{A\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \hat{\Gamma\Delta\Lambda} = 90^\circ - \hat{A\hat{B}\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Gamma\Delta\Lambda} = \hat{\Gamma\hat{B}\Delta}$$

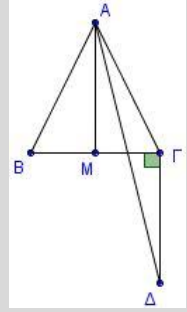
37164. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρνουμε $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$ με $\Gamma\Delta = AB$ (A, Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$). Να αποδείξετε ότι:

α) $AM \parallel \Gamma\Delta$.

β) η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $MA\Gamma$.

γ) $\hat{\Delta A\Gamma} = 45^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$.

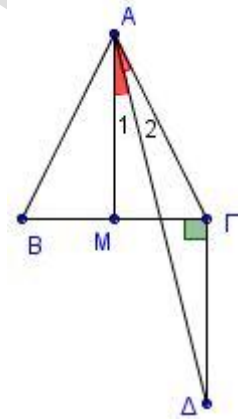
δ) $A\Delta < 2AB$.



Λύση

α) Επειδή AM διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ που αντιστοιχεί στη βάση του, θα είναι και ύψος και διχοτόμος του τριγώνου. Επειδή $AM \perp B\Gamma$ και $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$, είναι $AM \parallel \Gamma\Delta$.

β) Επειδή $AB = A\Gamma$ και $\Gamma\Delta = AB$ είναι και $A\Gamma = \Gamma\Delta$, άρα το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με βάση την $A\Delta$, άρα $\hat{A_2} = \hat{\Delta}$. Όμως $\hat{A_1} = \hat{\Delta}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AM, \Gamma\Delta$ που τέμνονται από την $A\Delta$, άρα και $\hat{A_1} = \hat{A_2}$, δηλαδή η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $MA\Gamma$.



γ) Είναι $\Delta A\Gamma = \frac{MA\Gamma}{2} = \frac{\frac{BA\Gamma}{2}}{2} = \frac{BA\Gamma}{4}$.

Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ έχουμε:

$$BA\Gamma + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow BA\Gamma + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow BA\Gamma = 180^\circ - 2B.$$

$$\text{Τότε } \Delta A\Gamma = \frac{BA\Gamma}{4} = \frac{180^\circ - 2B}{4} = 45^\circ - \frac{B}{2}$$

δ) Από τη τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$, έχουμε:

$$A\Delta < A\Gamma + \Gamma\Delta \Leftrightarrow A\Delta < AB + AB \Leftrightarrow A\Delta < 2AB$$

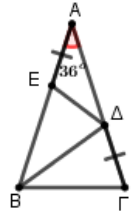
3ο Θέμα

12200. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 36^\circ$. Έστω $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας B και E σημείο της πλευράς AB ώστε $AE = \Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = B\Delta$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές.

γ) Η παράλληλη από το B προς την $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της ΔE (προς το E) στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.



Λύση

α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B = \Gamma$ και $A + B + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 36^\circ + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2B = 144^\circ \Leftrightarrow B = 72^\circ.$$

Επειδή η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της B , ισχύει ότι $B_1 = B_2 = \frac{1}{2}B = 36^\circ$. Επειδή $B_1 = A$, το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές με βάση την AB , οπότε $A\Delta = B\Delta$.

β) Είναι $AB = A\Gamma$ και $AE = \Gamma\Delta$, οπότε με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι: $AB - AE = A\Gamma - \Gamma\Delta \Leftrightarrow BE = A\Delta$. Όμως $A\Delta = B\Delta$, οπότε $BE = B\Delta$ και το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές.

γ) Είναι $B_3 = A = 36^\circ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Gamma, BZ$ που τέμνονται από την AB . Επειδή το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές με βάση την ΔE , είναι $\Delta_1 = E_1$. Στο τρίγωνο $B\Delta E$ είναι $B_1 + \Delta_1 + E_1 = 180^\circ \Leftrightarrow 36^\circ + 2\Delta_1 = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta_1 = 72^\circ$.

Όμως $ZB\Delta = B_1 + B_3 = 72^\circ$, άρα $ZB\Delta = \Delta_1$, οπότε το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές.

