

Ανισοτικές σχέσεις

2ο Θέμα

34396. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ . Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά $B\Gamma$ την κάθετο ΔE , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- α)** $A\Delta = \Delta E$.
β) $A\Delta < \Delta B$.

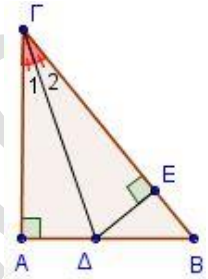
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ έχουν:

- 1) την πλευρά $\Gamma\Delta$ κοινή και
- 2) $\Gamma_1 = \Gamma_2$ λόγω της διχοτόμησης της γωνίας Γ .

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $A\Delta = \Delta E$.

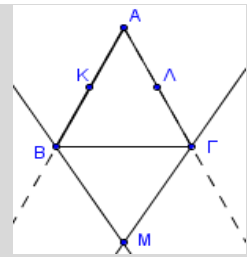
β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔEB η ΔB είναι η υποτείνουσα, άρα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή $\Delta B > \Delta E$, όμως $A\Delta = \Delta E$, άρα $\Delta B > A\Delta$.



34415. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$.

Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών B και Γ τέμνονται στο σημείο M και K, Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των AB και $A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α)** Το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές με $MB = M\Gamma$.
β) $MK = M\Lambda$.



Λύση

α) Επειδή οι BM και ΓM είναι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών B και Γ

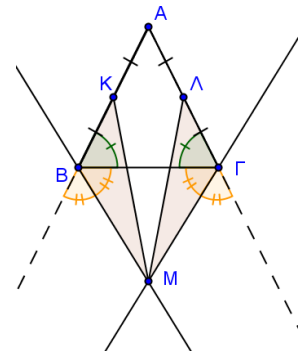
αντίστοιχα, έχουμε: $MB\Gamma = \frac{B_{\text{εξ}}}{2} = \frac{180^\circ - B}{2} = \frac{180^\circ - \Gamma}{2} = \frac{\Gamma_{\text{εξ}}}{2} = M\Gamma B$.

Το τρίγωνο $M\Gamma B$ έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$, άρα $MB = M\Gamma$.

β) Τα τρίγωνα KBM και $\Lambda\Gamma M$ έχουν:

- 1) $KB = \Lambda\Gamma$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών AB και $A\Gamma$
- 2) $MB = M\Gamma$ και
- 3) $\angle KBM = B + MB\Gamma = \Gamma + M\Gamma B = \angle \Lambda\Gamma M$

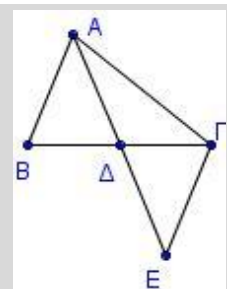
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $MK = M\Lambda$.



34502. Στο διπλανό σχήμα, η $A\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και το E είναι σημείο στην προέκταση της $A\Delta$, ώστε $\Delta E = A\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

- α)** $AB = \Gamma E$.
β) $A\Delta < \frac{AB + A\Gamma}{2}$.

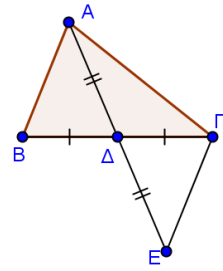


Λύση

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ έχουν:

- 1) $A\Delta = \Delta E$
- 2) $B\Delta = \Delta\Gamma$ γιατί το Δ είναι μέσο της $B\Gamma$ και
- 3) $\angle A\Delta B = \angle E\Delta\Gamma$ ως κατακορυφήν

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $AB = \Gamma E$ (1).



β) $AE = A\Delta + \Delta E \Leftrightarrow AE = 2A\Delta$

Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $A\Gamma E$ ισχύει ότι:

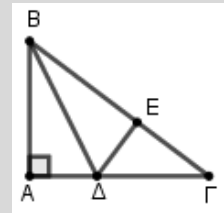
$$AE < AE + A\Gamma \Leftrightarrow AE < AB + A\Gamma \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2A\Delta < AB + A\Gamma \Leftrightarrow A\Delta < \frac{AB + A\Gamma}{2}.$$

36168. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία A και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας B .

Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B , η ΔE είναι κάθετη στην $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $A\Delta = \Delta E$.
- β) $A\Delta < \Delta\Gamma$.
- γ) $A\Gamma > AB$.

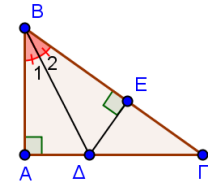


Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ και $B\Delta E$ έχουν:

- 1) την πλευρά $B\Delta$ κοινή και
- 2) $B_1 = B_2$ λόγω της διχοτόμησης της γωνίας B .

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $A\Delta = \Delta E$.



β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ η $\Delta\Gamma$ είναι η υποτείνουσα, άρα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή $\Delta\Gamma > \Delta E$, όμως $A\Delta = \Delta E$, άρα $\Delta\Gamma > A\Delta$.

γ) Γνωρίζουμε ότι απέναντι από άνισες γωνίες βρίσκονται ομοίως άνισες πλευρές, άρα στο τρίγωνο $AB\Gamma$ επειδή $\Gamma < B$ είναι και $AB < A\Gamma$.

Θέμα 4ο

1749. Θεωρούμε δύο σημεία A και B τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία ϵ , τέτοια ώστε η ευθεία AB δεν είναι κάθετη στην ϵ . Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία ϵ .

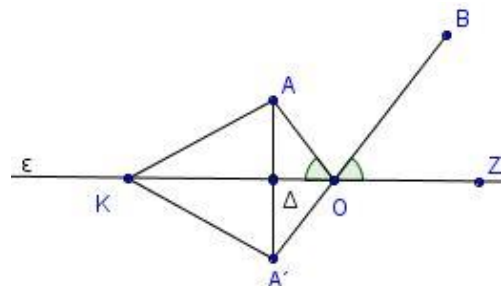
α) Αν η BA' τέμνει την ευθεία ϵ στο σημείο O , να αποδείξετε ότι:

- i. Η ευθεία ϵ διχοτομεί τη γωνία AOA' .
 - ii. Οι ημιευθείες OA και OB σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία ϵ .
- β) Αν K είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία ϵ , να αποδείξετε ότι:
- i. $KA = KA'$
 - ii. $KA + KB > AO + OB$

Λύση

α) i. Επειδή στο τρίγωνο OAA' η OA είναι ύψος και διάμεσος, το τρίγωνο είναι ισοσκελές και η OA είναι διχοτόμος της γωνίας AOA' .

ii. Επειδή το τρίγωνο $A\Delta O$ είναι ορθογώνιο, η γωνία $AO\Delta$ είναι οξεία. Είναι $\Delta OA' = BOZ$ ως κατακορυφήν και



$\angle OA' < 90^\circ$, άρα και $\angle BOZ < 90^\circ$.

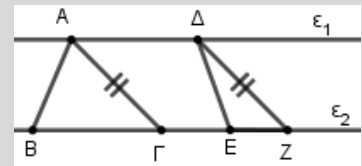
Άρα οι ζητούμενες οξείες γωνίες είναι οι $\angle AOD$, $\angle BOZ$ και είναι ίσες.

β) i. Επειδή το K ανήκει στη μεσοκάθετο του AA' ισχύει ότι: $KA = KA'$.

ii. Στο τρίγωνο KBA' από τη τριγωνική ανισότητα, ισχύει ότι:

$$KA' + KB > BA' \Leftrightarrow KA + KB > OA' + OB \Leftrightarrow KA + KB > OA + OB$$

13751. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο, ενώ το ΔEZ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{E} > 90^\circ$. Ισχύει επίσης ότι $AG = \Delta Z$.



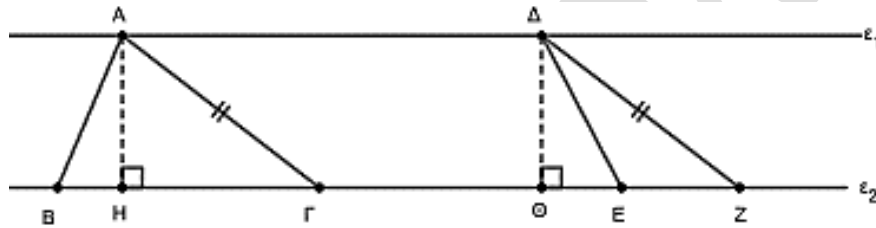
α) i. Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων από τις κορυφές A και Δ ονομάζοντας τα AH και $\Delta\Theta$ αντίστοιχα.

ii. Να αποδείξετε ότι $H\Gamma = \Theta Z$.

β) Να δικαιολογήσετε γιατί $EZ < B\Gamma$.

Λύση

α) i.



ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα $AH\Gamma$ και $\Delta\Theta Z$ έχουν:

- $\angle A\Theta = \angle \Delta\Theta$, ως αποστάσεις παράλληλων ευθειών
- $AG = \Delta H$, από την υπόθεση

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση. Οπότε και οι άλλες κάθετες πλευρές τους είναι ίσες, δηλαδή $H\Gamma = \Theta Z$.

β) Το σημείο H είναι εσωτερικό του τμήματος $B\Gamma$ γιατί το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, οπότε $H\Gamma < B\Gamma$.

Το σημείο Θ είναι εξωτερικό του τμήματος EZ γιατί η γωνία E είναι αμβλεία, οπότε $EZ < \Theta Z$.

Από το α) ii. ερώτημα βρήκαμε ότι $\Theta\Gamma = \Theta H$. Άρα $EZ < \Theta Z$, $H\Gamma = \Theta\Gamma$ και $H\Gamma < B\Gamma$, επομένως $EZ < B\Gamma$.

Σχετική θέση ευθείας – κύκλου

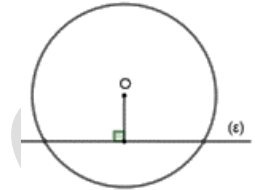
Θέμα 2ο

13759. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 6$. Έστω d η απόσταση του κέντρου O του κύκλου από μια ευθεία (ε). Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ε) στις εξής περιπτώσεις:

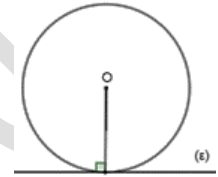
- α)** $d = 3$. **β)** $d = 6$. **γ)** $d = 9$.

Λύση

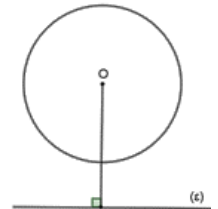
α) Επειδή η απόσταση $d = 3$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μικρότερη από την ακτίνα $\rho = 6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι τέμνουσα του κύκλου.



β) Επειδή η απόσταση $d = 6$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι ίση με την ακτίνα $\rho = 6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, δηλαδή είναι εφαπτόμενη του κύκλου.



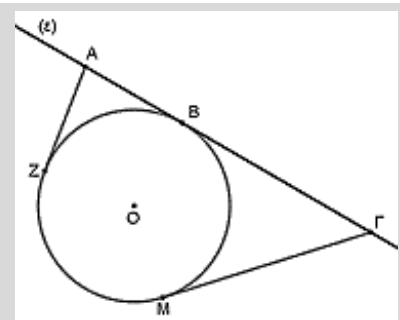
γ) Επειδή η απόσταση $d = 9$ του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μεγαλύτερη με την ακτίνα $\rho = 6$ του κύκλου, η ευθεία (ε) δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι εξωτερική του κύκλου.



13817. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο B του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε). Θεωρούμε στην ευθεία (ε) δύο σημεία A και Γ εκατέρωθεν του B έτσι ώστε $BA < B\Gamma$ και από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AZ και ΓM στον κύκλο.

α) Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = AZ + M\Gamma$.



Λύση

α) Από τα δεδομένα τα ευθύγραμμα τμήματα AB και AZ είναι εφαπτόμενα στον κύκλο από σημείο εκτός αυτό, άρα είναι ίσα, δηλαδή $AB = AZ$.

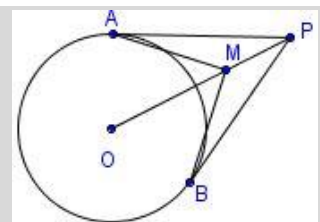
Όμοια από το σημείο Γ που είναι εκτός του κύκλου τα ευθύγραμμα τμήματα $\Gamma B, \Gamma M$ είναι εφαπτόμενα σε αυτόν, άρα $\Gamma B = \Gamma M$.

β) Λόγω του ερωτήματος (α) έχουμε $A\Gamma = AB + B\Gamma = AZ + M\Gamma$.

36095. Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP , να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα.

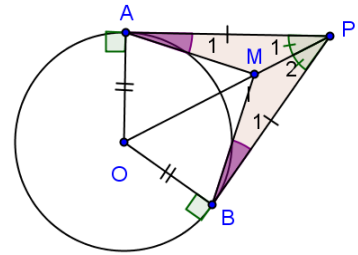
β) $\hat{M}\hat{A}\hat{O} = \hat{M}\hat{B}\hat{O}$.



Λύση

α) Τα τρίγωνα PAM και PMB έχουν:

- 1) τη πλευρά PM κοινή
 - 2) $PA = PB$ γιατί είναι τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το P προς τον κύκλο
 - 3) $P_1 = P_2$ γιατί η διακεντρική ευθεία PO διχοτομεί την γωνία των εφαπτομένων
- Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.



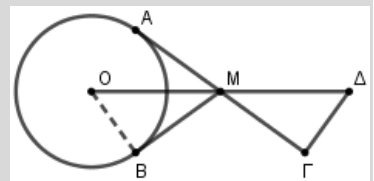
β) Επειδή τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα, έχουν και $A_1 = B_1$.

Όμως $OAM = OBM = 90^\circ$ γιατί οι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής είναι κάθετες στις εφαπτομένες, άρα $MAO = 90^\circ - A_1 = 90^\circ - B_1 = MBO$.

36098. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (O,R) και τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB. Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα $MG = MA$ και την OM κατά τμήμα $M\Delta = OM$.

α) Να αποδείξετε ότι $MB = MG$.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OMB και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα.



Λύση

α) Τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB που άγονται από το M προς τον κύκλο είναι μεταξύ τους ίσα. Ακόμη $MA = MG$, οπότε είναι και $MB = MG$.

β) Η διακεντρική ευθεία MO διχοτομεί τη γωνία AMB των εφαπτομένων, δηλαδή $AMO = OMB$.

Όμως $AMO = \Gamma M\Delta$ ως κατακορυφήν, άρα $AMO = \Gamma M\Delta$.

Τα τρίγωνα OMB και $M\Gamma\Delta$ έχουν:

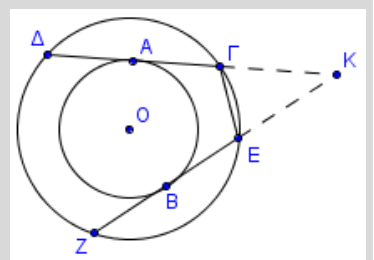
- $OM = M\Delta$ (υπόθεση)
- $MB = MG$
- $AMO = \Gamma M\Delta$

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα OMB και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα

36338. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$). Οι χορδές $\Delta\Gamma$ και ZE του κύκλου (O,R) εφάπτονται στον κύκλο (O, ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = ZE$.

β) Αν οι $\Delta\Gamma$ και ZE προεκτείνόμενες τέμνονται στο σημείο K, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KEG είναι ισοσκελές.



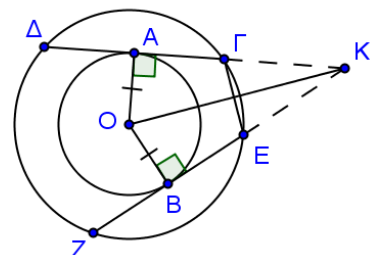
Λύση

α) Έστω OA και OB οι ακτίνες του κύκλου (O, ρ) που καταλήγουν στα σημεία επαφής με τις εφαπτομένες. Τότε $OA \perp \Delta\Gamma$ και $OB \perp ZE$.

Τα OA, OB είναι αποστήματα των χορδών $\Delta\Gamma$ και EZ στον κύκλο (O,R) και είναι ίσα ($OA = OB = \rho$), άρα και οι χορδές $\Delta\Gamma$ και EZ είναι ίσες.

β) Επειδή τα KA, KB είναι εφαπτόμενα τμήματα από το K προς τον κύκλο (O, ρ), είναι μεταξύ τους ίσα.

Επειδή τα OA, OB είναι αποστήματα των χορδών $\Delta\Gamma$ και EZ, τα σημεία A και B είναι μέσα



των χορδών και επειδή οι χορδές είναι ίσες, είναι και $ΑΓ = ΒΕ$.

Είναι $ΚΑ = ΚΒ$ και $ΑΓ = ΒΕ$, άρα και $ΚΑ - ΑΓ = ΚΒ - ΒΕ \Leftrightarrow ΚΓ = ΚΕ$, οπότε το τρίγωνο $ΚΓΕ$ είναι ισοσκελές.

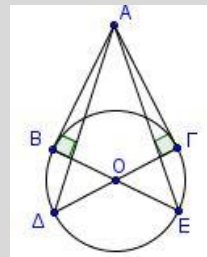
36354. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Από σημείο εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα $ΑΒ$ και $ΑΓ$.

Τα σημεία $Ε$ και $Δ$ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των $Β$ και $Γ$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $ΑΒΕ$ και $ΑΓΔ$ είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΕ$ είναι ίσα.



Λύση

α) Επειδή οι εφαπτομένες ενός κύκλου είναι κάθετες στις ακτίνες στα σημεία επαφής, οι γωνίες $ΑΒΕ$ και $ΑΓΔ$ είναι ορθές.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΕ$ και $ΑΓΔ$ έχουν:

- 1) $ΑΒ = ΑΓ$ γιατί τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν είναι ίσα και
- 2) $ΒΕ = ΓΔ = 2\rho$

Άρα τα δύο τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους μία προς μία ίσες, οπότε είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα $ΟΒΔ$ και $ΟΓΕ$ έχουν:

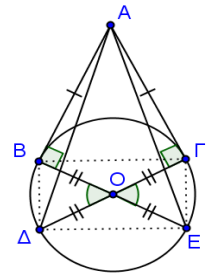
- 1) $ΟΒ = ΟΕ = \rho$,
- 2) $ΟΔ = ΟΓ = \rho$ και
- 3) $ΒΟΔ = ΓΟΕ$ ως κατακορυφήν.

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΒΔ = ΓΕ$.

Τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΕ$ έχουν:

- 1) $ΑΒ = ΑΓ$
- 2) $ΑΔ = ΑΕ$ γιατί τα τρίγωνα $ΑΒΕ$ και $ΑΓΔ$ είναι ίσα και
- 3) $ΒΔ = ΓΕ$

Με βάση το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.



Θέμα 4ο

1751. Έστω ότι ο κύκλος (O, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου $ΡΓΕ$ στα σημεία $Α, Δ$ και $Β$.

α) Να αποδείξετε ότι:

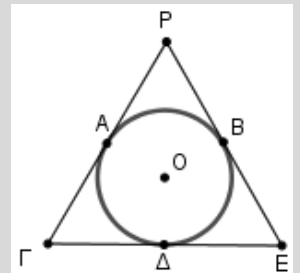
i. $ΡΓ = ΓΔ + ΑΡ$

ii. $ΡΓ - ΓΔ = ΡΕ - ΔΕ$

β) Αν $ΑΓ = ΒΕ$, να αποδείξετε ότι

i. Το τρίγωνο $ΡΓΕ$ είναι ισοσκελές.

ii. Τα σημεία P, O και $Δ$ είναι συνευθειακά.



Λύση

α) i. Τα $ΓΑ, ΓΔ$ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το $Γ$ προς τον κύκλο, οπότε $ΓΑ = ΓΔ$.

Είναι $ΡΓ = ΡΑ + ΑΓ \Leftrightarrow ΡΓ = ΡΑ + ΓΔ$.

ii. Τα EB, ΕΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ε προς τον κύκλο, οπότε $EB = ED$. Όμοια PA, PB εφαπτόμενα τμήματα από το Ρ και ισχύει $PA = PB$.

Όμως $PG = ΓΔ + PA \Leftrightarrow PA = PG - ΓΔ$ και

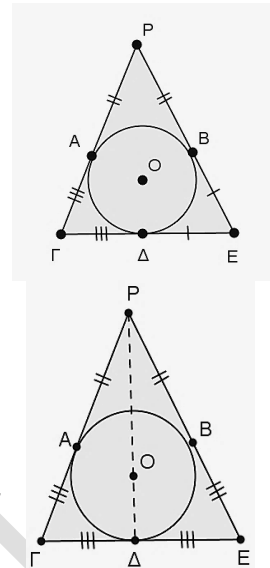
$PB = PE - BE = PE - ΔΕ$, άρα $PG - ΓΔ = PE - ΔΕ$.

β) i. Αν $ΑΓ = BE$, τότε $ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ = BE$.

Είναι $PG = ΓΔ + PA$, $PE = PB + ΔΕ$, οπότε $PG = PE$, άρα το τρίγωνο PΓΕ είναι ισοσκελές.

ii. Επειδή $OA = OB = ρ$ και $OA \perp PG$, $OB \perp PB$, το Ο ισαπέχει από τις πλευρές PΓ, PΕ της γωνίας Ρ, οπότε βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας.

Επειδή το τρίγωνο PΓΕ είναι ισοσκελές και το ΡΔ είναι διάμεσος, θα είναι και διχοτόμος της γωνίας Ρ. Άρα τα Ο, Δ ανήκουν στη διχοτόμο της γωνίας Ρ, οπότε τα σημεία Ρ, Ο, Δ είναι συνευθειακά.



1752. Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο και εξωτερικό σημείο του Ρ. Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ. Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΡΓΔ είναι ισοσκελές.

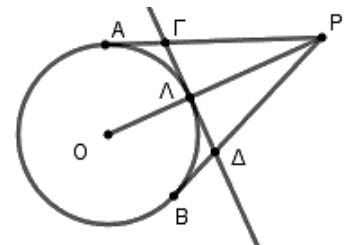
β) $GA = ΔB$.

γ) η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ είναι ίση με $PA + PB$.

Λύση

α) Επειδή η ΓΔ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Λ, ισχύει ότι $ΓΔ \perp ΡΟ$. Επειδή η διακεντρική ευθεία ΡΟ διχοτομεί την γωνία ΓΡΔ των εφαπτομένων, στο τρίγωνο ΡΓΔ, το ΡΛ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Επειδή τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ είναι ίσα και οι πλευρές ΡΓ και ΡΔ του ισοσκελούς τριγώνου ΡΓΔ είναι επίσης ίσες, ισχύει ότι:
 $PA - ΡΓ = PB - ΡΔ \Leftrightarrow GA = ΔB$



γ) Τα ΓΑ, ΓΛ είναι εφαπτόμενα τμήματα από το Γ προς τον κύκλο, οπότε είναι ίσα.

Τα ΔΒ, ΔΛ είναι εφαπτόμενα τμήματα από το Δ προς τον κύκλο, οπότε είναι ίσα.

Αν Π η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ, είναι $\Pi = ΡΓ + ΓΔ + ΡΔ = ΡΓ + ΓΛ + ΛΔ + ΡΔ = ΡΓ + ΓΑ + ΔΒ + ΡΔ = ΡΑ + ΡΒ$

Σχετική θέση δύο κύκλων

Θέμα 2ο

12417. Έστω δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, r) , με $R=3$, $r=2$ και $K\Lambda=4$. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω A και B .

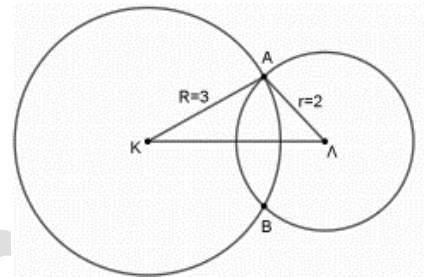
β) $\widehat{K\Lambda} > \widehat{AK}$.

Λύση

α) Είναι $R + r = 5$ και $R - r = 1$.

Επειδή $R - r < K\Lambda < R + r$ οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία A και B .

β) Στο τρίγωνο $K\Lambda A$ είναι $K\Lambda > AK$ και επειδή απέναντι από άνισες πλευρές σε ένα τρίγωνο βρίσκονται ομοίως άνισες γωνίες, ισχύει ότι $\widehat{K\Lambda} > \widehat{AK}$.



13757. Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 2)$ και $(\Lambda, 5)$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

β) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.

γ) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν ο κύκλος $(K, 2)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda, 5)$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$, αν οι κύκλοι τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Έστω $R = 5$ και $r = 2$.

α) Αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, τότε για τη διάκεντρο $K\Lambda$ έχουμε: $K\Lambda = R + r = 5 + 2 = 7$.

β) Αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, τότε για τη διάκεντρο $K\Lambda$ έχουμε: $K\Lambda = R - r = 5 - 2 = 3$.

γ) Για να είναι ο κύκλος $(K, 2)$ στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda, 5)$ θα πρέπει $K\Lambda < R - r$, δηλαδή $K\Lambda < 5 - 2$ ή $K\Lambda < 3$.

δ) Για να τέμνονται οι κύκλοι θα πρέπει $R - r < K\Lambda < R + r$, δηλαδή $5 - 2 < K\Lambda < 5 + 2$ ή $3 < K\Lambda < 7$.

13758. Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 3)$ και $(\Lambda, 8)$. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:

α) $K\Lambda = 13$.

β) $K\Lambda = 2$.

γ) $K\Lambda = 5$.

δ) $K\Lambda = 11$.

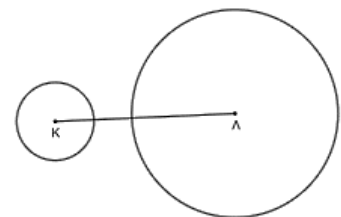
ε) $K\Lambda = 9$.

Λύση

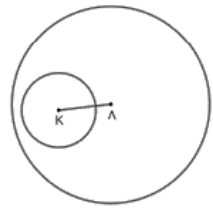
Έστω $R = 8$ και $r = 3$. Υπολογίζουμε τη διαφορά και το άθροισμα των δύο ακτίνων, δηλαδή

$R - r = 8 - 3 = 5$ και $R + r = 8 + 3 = 11$.

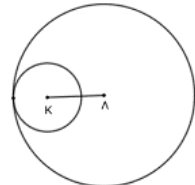
α) Επειδή η διάκεντρος $K\Lambda = 13$ έχει μεγαλύτερο μήκος από το άθροισμα των δύο ακτίνων $R + r = 11$, ο κύκλος $(\Lambda, 8)$ βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου $(K, 3)$



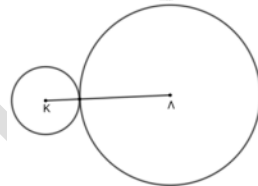
β) Επειδή η διάκεντρος $ΚΛ = 2$ έχει μικρότερο μήκος από τη διαφορά των δύο ακτίνων $R - ρ = 5$, ο κύκλος $(Κ, 3)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $(Λ, 8)$.



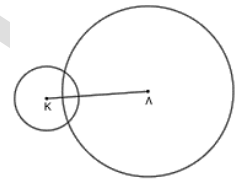
γ) Επειδή η διάκεντρος $ΚΛ = 5$ έχει ίσο μήκος με τη διαφορά των δύο ακτίνων $R - ρ = 5$, οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.



δ) Επειδή η διάκεντρος $ΚΛ = 11$ έχει ίσο μήκος με το άθροισμα των δύο ακτίνων $R + ρ = 11$, οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.



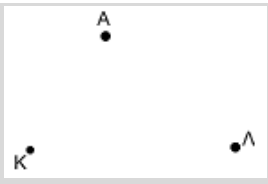
ε) Επειδή η διάκεντρος $ΚΛ = 9$ έχει μήκος μεταξύ της διαφοράς $R - ρ = 5$ και του αθροίσματος των δύο ακτίνων $R + ρ = 11$, οι κύκλοι τέμνονται.



13835. Τα σημεία A , K και $Λ$ δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το σημείο A απέχει 4 από το K και 5 από το $Λ$.

α) Να αποδείξετε ότι $1 < ΚΛ < 9$.

β) Να βρείτε ένα σημείο B του επιπέδου διαφορετικό από το A , που να απέχει 4 από το K και 5 από το $Λ$.

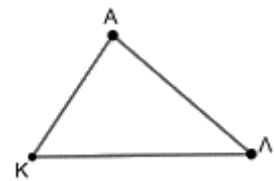


Λύση

α) Τα τρία μη συνευθειακά σημεία A , K και $Λ$ ορίζουν το τρίγωνο $ΑΚΛ$.

Λόγω της τριγωνικής ανισότητας ισχύει ότι

$$ΑΛ - ΑΚ < ΚΛ < ΑΛ + ΑΚ \Leftrightarrow 5 - 4 < ΚΛ < 5 + 4 \Leftrightarrow 1 < ΚΛ < 9.$$



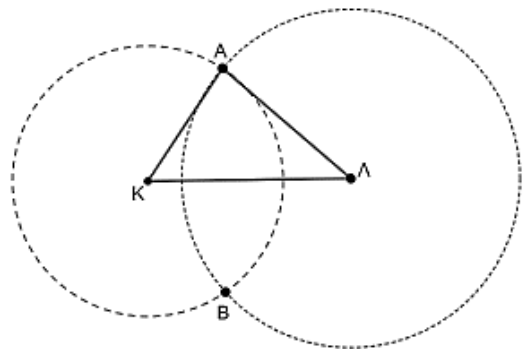
β) Το ζητούμενο σημείο είναι σημείο του κύκλου $(Κ, 4)$ και του κύκλου $(Λ, 5)$.

Σχεδιάζουμε δύο κύκλους: ο ένας έχει κέντρο το K και ακτίνα 4 και ο άλλος έχει κέντρο το $Λ$ και ακτίνα 5. Από το α)ερώτημα για τη διάκεντρο των κύκλων έχουμε ότι:

$$ΑΛ - ΑΚ < ΚΛ < ΑΛ + ΑΚ \Leftrightarrow R - ρ < ΚΛ < R + ρ,$$

όπου R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το $Λ$ και $ρ$ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το K .

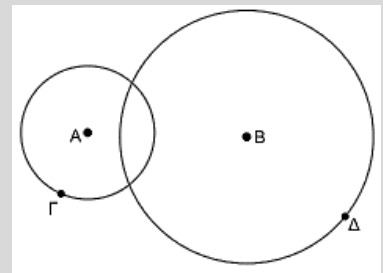
Άρα οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία. Το ένα είναι το A και το άλλο είναι το B , που είναι και το ζητούμενο σημείο.



13836.α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$.

Να αποδείξετε ότι $BD - AG < AB < AG + BD$.

β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B , τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6 . Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 5 από το B του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός;



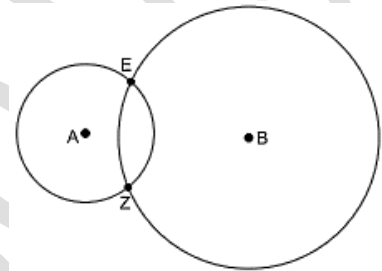
Λύση

α) Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι. Άρα ισχύει $R - \rho < \delta < R + \rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το A , R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο B και δ η διάκεντρός τους. Όμως η διάκεντρος είναι η AB και επιπλέον ισχύουν $AG = \rho$ και $BD = R$. Επομένως $BD - AG < AB < BD + AG$.

β) Ο θησαυρός, επειδή απέχει 3 από το A και 5 από το B είναι σε σημείο του κύκλου με κέντρο το A και ακτίνα 3 και σε σημείο του κύκλου με κέντρο το B και ακτίνα 5 . Σχεδιάζουμε δύο κύκλους (A, ρ) και (B, R) με $\rho = 3$ και $R = 5$. Τότε η $AB = 6$ είναι η διάκεντρος του κύκλου και ισχύει $R - \rho < AB < R + \rho$ γιατί αντικαθιστώντας έχουμε $5 - 3 < 6 < 5 + 3$, που είναι αληθές.

Επομένως οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι δηλαδή έχουν δύο κοινά σημεία τα E και Z .

Αυτά τα σημεία έχουν την ιδιότητα να απέχουν 3 από το A και 5 από το B , άρα είναι τα σημεία που μπορεί να κρύβεται ο θησαυρός.



Θέμα 4ο

13823.α) Στο διπλανό σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$ και $AB = 6$.

i. Να αποδείξετε ότι: $BK - AG < AB < BK + AG$.

ii. Παρακάτω γράφονται οι ιδιότητες 1 και 2.

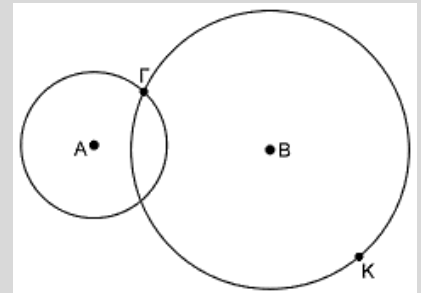
Ποιο σημείο από τα K και Γ έχει την ιδιότητα 1, ποιο την ιδιότητα 2 και ποιο έχει και τις δύο;

Ιδιότητα 1: «Το σημείο απέχει R από το B .»

Ιδιότητα 2: «Το σημείο απέχει ρ από το A .»

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B , τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6 . Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 2 από το B του χάρτη. Μπορεί να είναι σωστή η πληροφορία που δίνει ο χάρτης για να βρει κανείς το θησαυρό;



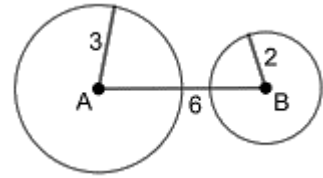
Λύση

α) i. Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι. Άρα ισχύει $R - \rho < \delta < R + \rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το A , R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο B και δ η διάκεντρός τους. Όμως η διάκεντρος είναι η AB και επίσης $\rho = AG$ και $R = BK$. Επομένως $BK - AG < AB < BK + AG$.

ii. Το σημείο K έχει μόνο την ιδιότητα 1, γιατί είναι σημείο του κύκλου (B, R) και όχι του κύκλου (A, ρ) . Το σημείο Γ έχει και τις δύο ιδιότητες γιατί είναι σημείο και των δύο κύκλων, δηλαδή απέχει ρ από το A και R από το B .

β) Έστω A και B τα δύο σημεία του χάρτη.

Σύμφωνα με την οδηγία το σημείο του θησαυρού ανήκει σε ένα κύκλο κέντρου A και ακτίνας 3 και σε κύκλο κέντρου B και ακτίνας 2. Επειδή απέχει 3 από το A και 2 από το B θα είναι το σημείο τομής των δύο αυτών κύκλων, αν υπάρχει. Όμως η απόσταση των σημείων A και B που είναι η διάκεντρος των κύκλων (A,3) και (B,2) είναι 6, δηλαδή είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των ακτίνων τους. Αυτό σημαίνει ότι οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και μάλιστα ο ένας είναι εξωτερικός του άλλου. Συνεπώς η οδηγία δεν είναι σωστή, γιατί δεν υπάρχει σημείο του επιπέδου (άρα και του χάρτη) για το οποίο να ισχύει αυτό που περιγράφει η οδηγία.



13846. Δίνεται το διπλανό σχήμα με τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) με $R > \rho$. Επίσης $AB = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι $R + \rho < 9$.

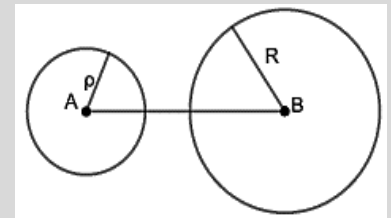
β) Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΚΛΜ με ΚΛ να είναι ίση με ρ και η πλευρά ΛΜ να είναι ίση με R. Να περιγράψετε τον τρόπο που το σχεδιάσατε και να αποδείξετε ότι η τρίτη πλευρά του είναι μικρότερη από 9.

γ) Έστω το τρίγωνο ΚΛΜ που σχεδιάσατε στο β) ερώτημα. Πόσα σημεία του επιπέδου έχουν και τις δύο ιδιότητες I1 και I2 που περιγράφονται παρακάτω;

I1: «Η απόσταση των σημείων από το K είναι ίση με ρ».

I2: «Η απόσταση των σημείων από το M είναι ίση με R».

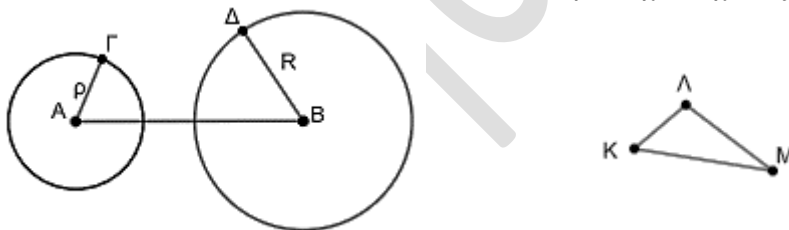
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) Οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και είναι ο ένας στο εξωτερικό του άλλου και η διάκεντρός τους είναι το ευθύγραμμο AB. Άρα ισχύει $R + \rho < AB$ ή $R + \rho < 9$.

β) Έστω Γ σημείο του κύκλου με κέντρο A και ακτίνα ρ και Δ σημείο του κύκλου με κέντρο B και ακτίνα R, όπως στο παρακάτω σχήμα. Με το διαβήτη «μεταφέρουμε» τα $AG = \rho$ και $BD = R$ έτσι ώστε να σχηματίζονται τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΛ και ΛΜ. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε και την ΚΜ.



Ισχύει ότι $LM > KL$, γιατί $R > \rho$. Άρα από την τριγωνική ανισότητα για το τρίγωνο ΚΛΜ έχουμε ότι $LM - KL < KM < LM + KL$ ή $R - \rho < KM < R + \rho$.

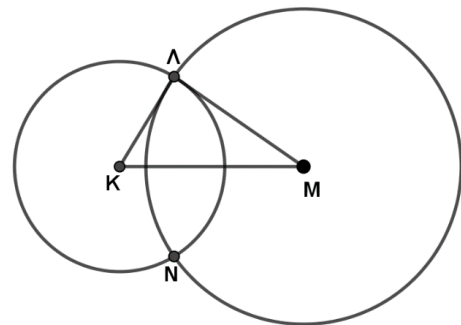
Όμως από το α) έχουμε ότι $R + \rho < 9$. Άρα $KM < 9$.

Δηλαδή η τρίτη πλευρά του τριγώνου είναι μικρότερη από 9.

γ) Έστω το τρίγωνο ΚΛΜ που έχουμε σχεδιάσει. Τα σημεία του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα I1 είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο K και ακτίνα ρ, ενώ τα σημεία του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα I2 είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο M και ακτίνα R. Επομένως, τα σημεία του επιπέδου που έχουν και τις δύο ιδιότητες I1 και I2 είναι εκείνα που βρίσκονται και στους δύο αυτούς κύκλους. Δηλαδή είναι τα κοινά σημεία των δύο κύκλων.

Όπως έχουμε αποδείξει στο προηγούμενο ερώτημα $R - \rho < KM < R + \rho$ όπου KM η διάμετρος των δύο κύκλων. Επομένως οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι οπότε έχουν δύο σημεία τομής.

Άρα δύο σημεία είναι τα ζητούμενα σημεία τα Λ και Ν.



Θέμα 3ο

13702. Δίνονται δυο κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο A . Μια ευθεία (ε) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία B και Γ αντίστοιχα. Αν η εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους A τέμνει την ευθεία (ε) σε σημείο M , να αποδείξετε ότι:

α) τα σημεία A , B και Γ ανήκουν σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

β) ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία A , B και Γ εφάπτεται στη διάκεντρο $K\Lambda$ των κύκλων (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) .

Λύση

Έστω οι κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο A , (ε) η ευθεία η οποία εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους B και Γ αντίστοιχα, (ζ) η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους A και M το σημείο στο οποίο τέμνει την ευθεία (ε)

α) Το σημείο A είναι σημείο της διακέντρου $K\Lambda$ και τα B, Γ είναι σημεία επαφής της κοινής εξωτερικής εφαπτομένης των δυο κύκλων με αυτούς, οπότε τα τρία σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά. Άρα τα σημεία A, B και Γ θα είναι σημεία ενός μοναδικού κύκλου. Το σημείο M είναι εξωτερικό σημείο των κύκλων (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) ως σημείο τομής των κοινών εφαπτομένων τους από τα δεδομένα. Είναι $MB = MA$ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου (K, ρ_1) από το σημείο M . Επίσης είναι $MA = M\Gamma$ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου (Λ, ρ_2) από το σημείο M . Οπότε θα είναι $MB = MA = M\Gamma (= \kappa)$. Άρα ο κύκλος που ζητείται να κατασκευαστεί θα έχει κέντρο το σημείο M και ακτίνα ίση με κ .

β) Επειδή οι κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) εφάπτονται εξωτερικά στο A , η κοινή εφαπτομένη τους (ζ) είναι κάθετη στην ακτίνα KA και κάθετη στην ακτίνα LA αντίστοιχα. Και επειδή το σημείο A είναι σημείο της διακέντρου $K\Lambda$, η εφαπτομένη (ζ) των δυο κύκλων στο A θα είναι κάθετη στη διάκεντρο $K\Lambda$. Η ακτίνα $MA (= \kappa)$ του κύκλου που σχεδιάζεται με κέντρο το M έχει ως φορέα την εφαπτομένη (ζ) των δυο κύκλων στο σημείο επαφής τους A , οπότε η ακτίνα MA θα είναι κάθετη στη διάκεντρο $K\Lambda$. Άρα ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ θα εφάπτεται της διακέντρου $K\Lambda$ στο σημείο A .

