

Ισοσκελές τρίγωνο – Μεσοκάθετος – Διχοτόμος (10 ασκήσεις)**Θέμα 2ο**

34424. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές.
 β) Οι γωνίες $\hat{AIB}$ και $\hat{AIG}$ είναι ίσες.
 γ) Η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.

Λύση

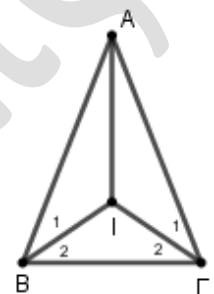
α) Επειδή οι BI , GI είναι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα, ισχύει ότι

$B_2 = \frac{B}{2}$ και $\Gamma_2 = \frac{\Gamma}{2}$. Όμως $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε $B_2 = \Gamma_2$. Το τρίγωνο $B\Gamma I$ έχει δύο γωνίες ίσες, οπότε είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα AIB και AIG έχουν:

- $AB = AG$ (υπόθεση)
- $BI = GI$ γιατί το τρίγωνο $IB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση $B\Gamma$
- $B_1 = \Gamma_1$ γιατί είναι ίσες με το μισό των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα AIB και $B\Gamma I$ είναι ίσα, οπότε έχουν και $\hat{AIB} = \hat{AIG}$.



γ) Επειδή $AB = AG$ και $IB = IG$, τα σημεία A και I ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος $B\Gamma$, οπότε η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$.

34503. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ . Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά $B\Gamma$ την κάθετο DE , η οποία τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα.
 β) Το Γ ισαπέχει από τα σημεία A και E και η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος AE .

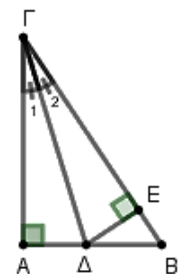
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ έχουν:

- την πλευρά $\Gamma\Delta$ κοινή
- $\Gamma_1 = \Gamma_2$ λόγω διχοτόμησης της γωνίας Γ .

Άρα τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα τους ίση και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα.

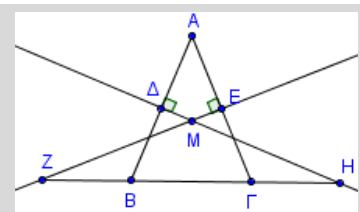
β) Επειδή τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta E$ είναι ίσα, έχουν $\Gamma A = \Gamma E$ και $\Delta A = \Delta E$. Δηλαδή τα σημεία Γ , Δ ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος AE , επομένως η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του ΔE .



34507. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = AG$.

Οι μεσοκάθετοι των ίσων πλευρών του τέμνονται στο M και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση $B\Gamma$ στα H και Z .

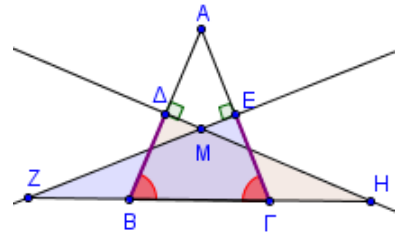
- α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔBH και $E\Gamma Z$.
 β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MZH είναι ισοσκελές.

**Λύση**

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ έχουν:

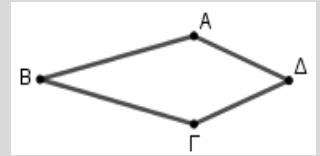
- 1) $\Delta B = \Delta \Gamma$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ
 - 2) $B = \Gamma$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.
- Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ είναι ίσα, έχουν και $Z = H$.
Το τρίγωνο ΜΖΗ έχει δύο γωνίες ίσες, άρα είναι ισοσκελές.



34514. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $BA = BG$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.
Να αποδείξετε ότι:

- $\angle B A \Gamma = \angle B \Gamma A$.
- Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές.
- Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ.

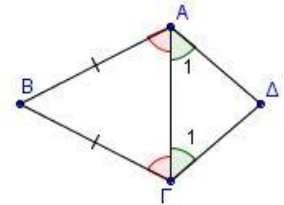


Λύση

α) Επειδή $BA = BG$, το τρίγωνο ΒΑΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, άρα $\angle B A \Gamma = \angle B \Gamma A$.

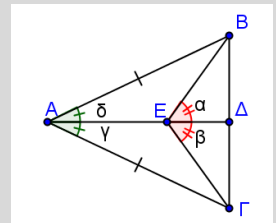
β) Επειδή $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\angle B A \Gamma = \angle B \Gamma A$, είναι και $\hat{A} - \angle B A \Gamma = \hat{\Gamma} - \angle B \Gamma A \Leftrightarrow \hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$,
άρα το τρίγωνο ΑΔΓ
είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ και είναι $\Delta A = \Delta \Gamma$.

γ) Επειδή $BA = BG$ και $\Delta A = \Delta \Gamma$, τα σημεία Β, Δ ισαπέχουν από τα Α, Γ, άρα η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ.



34516. Αν για το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ και $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

- Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα.
- Το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές.
- Η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.



Λύση

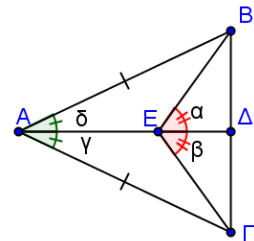
α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ έχουν:

- 1) την πλευρά ΑΕ κοινή
- 2) $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ (υπόθεση) και
- 3) $AB = AG$ (υπόθεση)

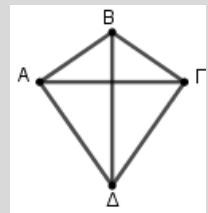
Με βάση το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα, έχουν και $EB = EG$, άρα το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα, έχουν και $AB = AG$, δηλαδή το Α ισαπέχει από τα Β και Γ οπότε βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΒΓ. Επειδή $EB = EG$, το Ε ισαπέχει από τα Β, Γ άρα βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΒΓ. Επειδή τα Α, Ε βρίσκονται στη μεσοκάθετο του ΒΓ, η ΑΔ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος αυτού.



36102. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$.
Οι διαγώνιοι $ΑΓ$, $B\Delta$ του τετράπλευρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.
Να αποδείξετε ότι:
α) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος των γωνιών B και Δ του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$.
β) Η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $ΑΓ$.



Λύση

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma\Delta$ έχουν:

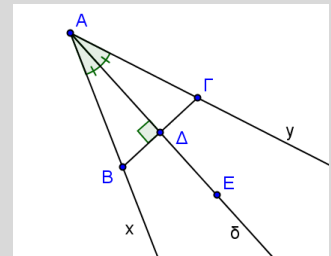
- 1) $BA = B\Gamma$
- 2) $\Delta A = \Delta\Gamma$ και
- 3) τη πλευρά $B\Delta$ κοινή

Με βάση το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν $\angle A B \Delta = \angle B \Gamma \Delta$ και $\angle A \Delta B = \angle B \Delta \Gamma$, δηλαδή η $B\Delta$ είναι διχοτόμος των γωνιών B και Δ του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$.

β) Επειδή $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$, τα σημεία A και Γ ισαπέχουν από τα B, Δ , άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο του $ΑΓ$. Οπότε η $B\Delta$ είναι η μεσοκάθετος του $ΑΓ$.

36341. Δίνεται γωνία xAy και η διχοτόμος της $A\delta$.
Από τυχαίο σημείο B της Ax φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την $A\delta$ στο Δ και την Ay στο Γ . Να αποδείξετε ότι:

- α)** $AB = A\Gamma$.
β) Το τυχαίο σημείο E της $A\delta$ ισαπέχει από τα B και Γ .



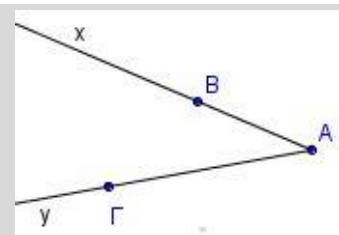
Λύση

α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η $A\Delta$ είναι διχοτόμος και ύψος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$, επομένως $AB = A\Gamma$.

β) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές η $A\Delta$ θα είναι και διάμεσος. Επειδή η $A\Delta$ είναι κάθετη στο μέσο Δ της $B\Gamma$, είναι μεσοκάθετη της $B\Gamma$. Επειδή κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος, το ίδιο ισχύει και για το τυχαίο σημείο E της $A\delta$.

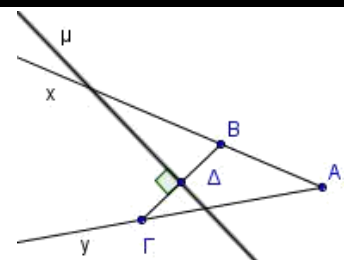
36226. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το χάρτη μιας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Ax και Ay παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία B και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια. Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

- α)** ισαπέχει από τα δύο πλατάνια.
β) ισαπέχει από τα δύο ποτάμια.
γ) ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

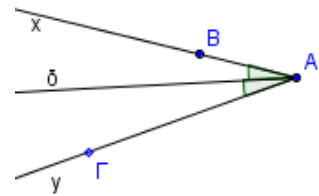


Λύση

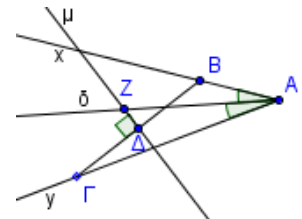
α) Γνωρίζουμε ότι τα σημεία που ισαπέχουν από δύο σημεία B και Γ , βρίσκονται στη μεσοκάθετο του τμήματος $B\Gamma$. Κατά συνέπεια ο θησαυρός βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο μ του $B\Gamma$.



β) Για να ισαπέχει ο θησαυρός από τα δύο ποτάμια, θα ισαπέχει από τις πλευρές Αχ και Αγ της γωνίας xAy, άρα θα βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας αυτής.



γ) Αν ο θησαυρός ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια, τότε ανήκει και στη μεσοκάθετο του ΒΓ και στη διχοτόμο Αδ της γωνίας xAy, άρα ο θησαυρός βρίσκεται στο σημείο τομής Ζ των Αδ, μ.



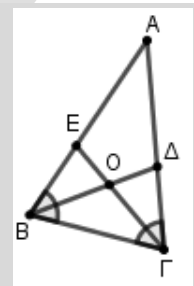
Θέμα 4ο

13854. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ των γωνιών Β και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο Ο.

α) Να αποδείξετε ότι ΒΔ=ΓΕ.

β) Από τα σημεία Ε και Δ φέρνουμε κάθετες ΕΛ και ΔΚ στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: ΔΚ=ΕΛ.

γ) Να εντοπίσετε και να σχεδιάσετε σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ που η απόστασή του από το σημείο Ε να ισούται με την απόσταση των σημείων Δ και Κ αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ έχουν:

- τη ΒΓ κοινή πλευρά
- $\angle B = \angle G$ ως προσκείμενες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ
- $\angle B\Gamma D = \angle G\Gamma E$ ως μισά των ίσων γωνιών ΑΒΓ και ΑΓΒ

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, άρα ΒΔ=ΓΕ ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών ΑΓΒ και ΑΒΓ.

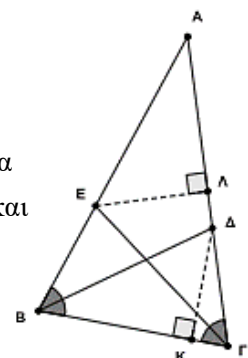
β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΚ και ΓΕΛ έχουν:

- ΒΔ = ΓΕ από το προηγούμενο ερώτημα
- $\angle BDK = \angle GEL$ ως μισά των ίσων γωνιών ΑΒΓ και ΑΓΒ

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα ΔΚ=ΕΛ ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών ΚΒΔ και ΛΓΕ.

γ) Αναζητούμε ένα σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ το οποίο να ικανοποιεί τη σχέση ΖΕ=ΔΚ.

Από το β) ερώτημα έχουμε ότι ΔΚ=ΕΛ συνεπώς το σημείο Ζ που αναζητούμε θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση ΖΕ=ΕΛ. Το σημείο Ε ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας ΑΓΒ και ΕΛ είναι η απόστασή του από την πλευρά ΓΑ, η οποία είναι ίση με την απόσταση του σημείου Ε από τη άλλη πλευρά, ΒΓ, της γωνίας. Συνεπώς το ζητούμενο σημείο Ζ θα είναι το ίχνος της κάθετης από το σημείο Ε στην πλευρά ΒΓ.



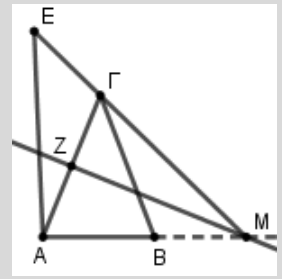
37823. Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AG=BG$).

Η μεσοκάθετη ε της AG τέμνει την προέκταση της AB (προς το μέρος του B) στο σημείο M και την AG στο Z . Στην προέκταση της MG (προς το μέρος του Γ) παίρνουμε σημείο E τέτοιο ώστε $GE=BM$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β) Ναδειχτεί ότι τα τρίγωνα $AG\epsilon$ και ΓBM είναι ίσα.

γ) Ναδειχτεί ότι το τρίγωνο AME είναι ισοσκελές.



Λύση

α) Επειδή το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετο του AG , ισαπέχει από τα σημεία A και Γ , δηλαδή $MA = M\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα $AG\epsilon$ και ΓBM έχουν:

1) $GE = BM$ (υπόθεση)

2) $AG = BG$

3) $\hat{E}\hat{G}A = \hat{G}\hat{B}M$ γιατί $\hat{E}\hat{G}A = 180^\circ - \hat{A}\hat{G}M \overset{\text{AM}\Gamma \text{ ισοσκελές με βάση την AG}}{=} 180^\circ - \hat{G}\hat{A}M \overset{\text{AB}\Gamma \text{ ισοσκελές με βάση την AB}}{=} 180^\circ - \hat{A}\hat{B}\Gamma = \hat{G}\hat{B}M$,
Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα $AG\epsilon$ και ΓBM είναι ίσα.

γ) Επειδή τα τρίγωνα $AG\epsilon$ και ΓBM είναι ίσα, έχουν και $M\Gamma = AE$. Όμως $M\Gamma = MA$ από το α σκέλος, άρα $AE = MA$, οπότε το τρίγωνο AME είναι ισοσκελές.