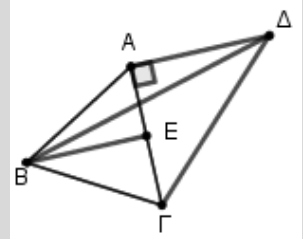


Παραλληλία

Θέμα 2ο

12710. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του BE . Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ με υποτείνουσα τη $\Gamma\Delta$ έτσι, ώστε τα σημεία B και Δ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας $A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) $BE \parallel A\Delta$.
 β) οι γωνίες $EB\Delta$ και $A\Delta B$ είναι ίσες.
 γ) το τρίγωνο $BA\Delta$ είναι ισοσκελές.



Λύση

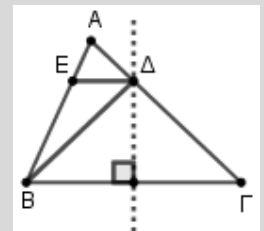
α) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, οπότε η διχοτόμος BE είναι και ύψος, δηλαδή η BE είναι κάθετη στην $A\Gamma$. Το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο στην κορυφή A , οπότε η $A\Delta$ είναι κάθετη στην $A\Gamma$. Τα ευθύγραμμα τμήματα BE και $A\Delta$ είναι κάθετα στην $A\Gamma$, οπότε είναι μεταξύ τους παράλληλα.

β) Οι γωνίες $EB\Delta$ και $A\Delta B$ είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων BE και $A\Delta$ που τέμνονται από την $B\Delta$, άρα είναι ίσες.

γ) Από το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $AB = A\Gamma = B\Gamma$ και από το ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ έχουμε $A\Gamma = A\Delta$, οπότε $AB = A\Delta$, επομένως το τρίγωνο $BA\Delta$ είναι ισοσκελές.

13534. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ και η παράλληλη από το Δ προς τη $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.
 β) η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Delta B$.

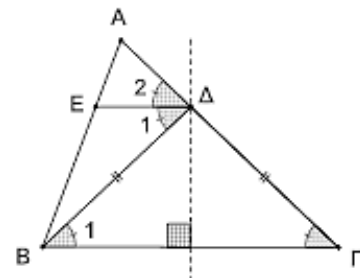


Λύση

α) Το σημείο Δ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος $B\Gamma$, άρα ισαπέχει από τα άκρα του, δηλαδή $\Delta B = \Delta\Gamma$. Συνεπώς το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

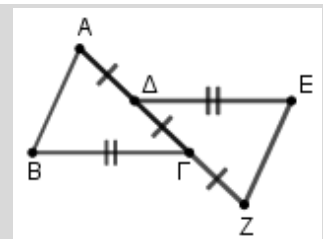
β) Είναι $E_1 = B_1$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE , $B\Gamma$ που τέμνονται από την $B\Delta$ και $E_2 = \Gamma$ (2) ως εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔE , $B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$.

Όμως $B_1 = \Gamma$ επειδή το τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση την $B\Gamma$, οπότε από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $E_1 = E_2$, επομένως η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Delta B$.



13748. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε το μέσο Δ της πλευράς $A\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔE ίσο και παράλληλο με την πλευρά $B\Gamma$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Προεκτείνουμε την $A\Gamma$ προς το μέρος του Γ και παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $\Gamma Z = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $ZE\Delta$ είναι ίσα.
 β) $AB \parallel EZ$.



Λύση

α) Για το τμήμα ΔZ έχουμε: $\Delta Z = \Delta\Gamma + \Gamma Z = 2\Delta\Gamma$.

Όμως το Δ είναι το μέσο του $A\Gamma$, άρα $2\Delta\Gamma = A\Gamma$, οπότε θα είναι $\Delta Z = A\Gamma$ (1).

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $ZE\Delta$ έχουν:

- $B\Gamma = \Delta E$, από την υπόθεση
- $A\Gamma = \Delta Z$, από τη σχέση (1)

• $\angle B = \angle Z$, ως γωνίες εντός εναλλάξ των παραλλήλων $B\Gamma$ και ΔE που τέμνονται από την $A\Gamma$.

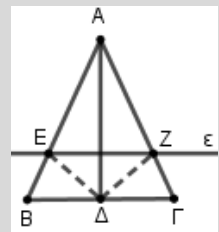
Άρα είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές ίσες από το κριτήριο ΠΓΠ.

β) Από την ισότητα των τριγώνων $AB\Gamma$ και $ZE\Delta$, προκύπτει ότι $\angle B A \Gamma = \angle Z \Delta$ γιατί είναι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές $B\Gamma$ και $E\Delta$ αντίστοιχα. Όμως, είναι γωνίες εντός εναλλάξ των AB και EZ που τέμνονται από την AZ , άρα $AB \parallel EZ$.

34399. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ και μια ευθεία (ϵ) παράλληλη προς τη $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.

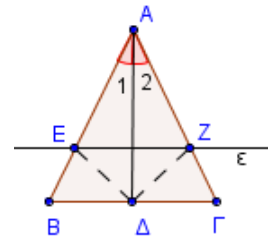
β) Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $AZ\Delta$ είναι ίσα.



Λύση

α) Είναι $\angle AEZ = \angle B$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων EZ , $B\Gamma$

που τέμνονται από την AB και $\angle AZE = \angle \Gamma$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων EZ , $B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$. Όμως $\angle B = \angle \Gamma$ αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$, άρα $\angle AEZ = \angle AZE$, οπότε το τρίγωνο AEZ έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές με βάση την EZ .



β) Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $AZ\Delta$ έχουν:

- 1) την πλευρά $A\Delta$ κοινή
- 2) $\angle 1 = \angle 2$ γιατί η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A και
- 3) $AE = AZ$ επειδή το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές με βάση την EZ .

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

34776. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$

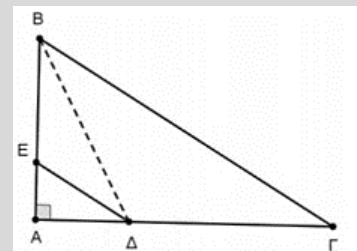
($\hat{A} = 90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς $A\Gamma$ τέτοιο, ώστε η διχοτόμος ΔE της γωνίας $\angle ADB$ να είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $\angle E\hat{A}B = \angle \Delta\hat{B}\Gamma$ και $\angle E\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

ii) Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β) Αν $\angle A\hat{A}B = 60^\circ$ να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.



Λύση

α) i) Οι γωνίες $\angle E\hat{A}B$, $\angle \Delta\hat{B}\Gamma$ είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE , $B\Gamma$ που τέμνονται από την AB , οπότε είναι ίσες. Οι γωνίες $\angle E\hat{A}$, $\hat{\Gamma}$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔE , $B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$, οπότε είναι ίσες.

ii) Επειδή ΔΕ διχοτόμος της γωνίας ΑΔΒ είναι $\angle EDA = \angle EDB$, τότε λόγω του προηγούμενου σκέλους είναι και $\angle AB\Gamma = \hat{\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Είναι $\hat{\Gamma} = \angle EDA = \frac{\angle ADB}{2} = 30^\circ$

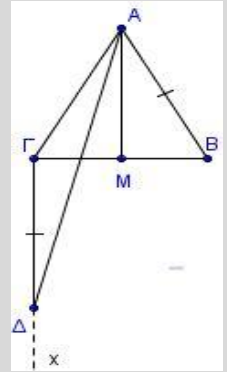
34777. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και η διάμεσός του ΑΜ. Φέρουμε ημιευθεία $\Gamma x \perp BG$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $\Gamma\Delta = AB$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\angle \Delta\hat{A}\Gamma$ είναι ίση με τη $\angle \Gamma\hat{A}A$.

β) Να αποδείξετε ότι:

i) $\Gamma\Delta \parallel AM$

ii) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑΓ.



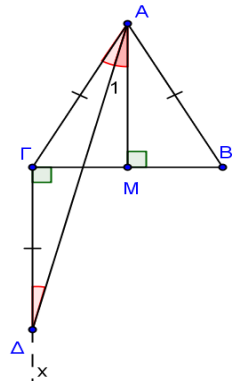
Λύση

α) Είναι $\Gamma\Delta = AB$ και $AB = AG$, άρα $\Gamma\Delta = AG$, οπότε το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΔ, άρα έχει και $\angle A\hat{\Gamma}\Delta = \angle \Gamma\hat{A}A$.

β) i) Η ΑΜ είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και ύψος του τριγώνου.

Είναι $\Gamma\Delta \perp BG$ και $AM \perp BG$, άρα $\Gamma\Delta \parallel AM$.

ii) Είναι $\angle \Gamma\Delta A = A_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\Gamma\Delta$, AM που τέμνονται από την ΓB και $\angle A\hat{\Gamma}\Delta = \angle \Gamma\hat{A}A$, άρα είναι και $\angle A\hat{\Gamma}\Delta = A_1$, δηλαδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑΓ.



34779. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ (προς το Α) και ΓΑ (προς το Α) τριγώνου ΑΒΓ, παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = AG$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.

β) $\Delta E \parallel B\Gamma$.

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν:

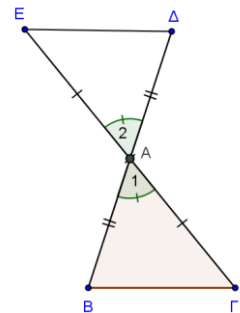
1) $A\Delta = AB$

2) $AE = AG$

3) $A_1 = A_2$ ως κατακορυφήν

Με βάση το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα, έχουμε και $E = \Gamma$. Οι γωνίες αυτές όμως είναι εντός εναλλάξ των ΔΕ, ΒΓ που τέμνονται από την ΕΓ, άρα οι ΔΕ, ΒΓ είναι παράλληλες.

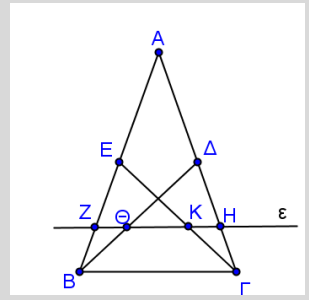


4ο Θέμα

1744. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρουμε τις διαμέσους $B\Delta$ και ΓE . Μια ευθεία ε παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα Z και H αντίστοιχα και τις διαμέσους $B\Delta$ και ΓE στα σημεία Θ και K αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α)** $BZ = \Gamma H$.
β) τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $HK\Gamma$ είναι ίσα.
γ) $ZK = H\Theta$.



Λύση

α) Είναι $AZH = AB\Gamma$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $\varepsilon, B\Gamma$ που τέμνονται από την AB . Όμοια $AHZ = A\Gamma B$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $\varepsilon, B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$. Όμως $AB\Gamma = A\Gamma B$ γιατί το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές άρα και $AHZ = AZH$, οπότε το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές και $AZ = AH$. Επειδή $AB = A\Gamma$ και $AZ = AH$, είναι και $AB - AZ = A\Gamma - AH \Leftrightarrow BZ = \Gamma H$.

β) Αρχικά θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ για να βρούμε στοιχεία που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω. Αυτά έχουν:

- 1) $AB = A\Gamma$
- 2) $AE = A\Delta = \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma}{2}$ και
- 3) τη γωνία A κοινή

Λόγω του κριτηρίου ισότητας Π-Γ-Π, τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $AB\Delta = A\Gamma E$.

Τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $HK\Gamma$ έχουν:

- 1) $BZ = \Gamma H$
- 2) $AB\Delta = A\Gamma E$ και
- 3) $BZ\Theta = KH\Gamma$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών AHZ και AZH .

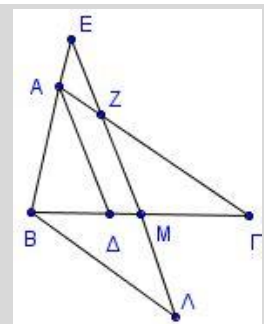
Από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $HK\Gamma$ είναι ίσα.

γ) Είναι $ZK = Z\Theta + \Theta K = KH + \Theta K = H\Theta$. ($Z\Theta = HK$ από την ισότητα των τριγώνων $ZB\Theta$ και $HK\Gamma$)

1818. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος του $A\Delta$ και ευθεία ε παράλληλη από το B προς την $A\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην $A\Delta$ η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Z , την ευθεία ε στο σημείο Λ και την προέκταση της BA στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

- α)** Τα τρίγωνα AEZ και $B\Lambda E$ είναι ισοσκελή.
β) $B\Lambda = \Gamma Z$.
γ) $AE = A\Gamma - B\Lambda$.



Λύση

α) Είναι $E = B\Lambda\Delta$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $A\Delta, E\Lambda$ που τέμνονται από την BE και $EZA = \Delta A\Gamma$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Delta, E\Lambda$ που τέμνονται από την $A\Gamma$. Επειδή

$BA\Delta = \Delta A\Gamma$ γιατί η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A , είναι και $E = EZA$, οπότε το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.

Είναι $EZA = B\Lambda E$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $A\Gamma, B\Lambda$ που τέμνονται από την $E\Lambda$. Άρα $E = B\Lambda E$ και το τρίγωνο $B\Lambda E$ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα BMA και ZMG έχουν:

1) $BM = MG$

2) $ZMG = BMA$ ως κατακορυφήν και

3) $\Lambda BM = ZGM$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $A\Gamma, B\Lambda$ που τέμνονται από την BG .

Σύμφωνα με το κριτήριο ΓΠΓ, τα τρίγωνα BMA και ZMG είναι ίσα. Άρα $BA = GZ$.

γ) Είναι $AE = AZ = A\Gamma - GZ = A\Gamma - BA$

13699. Δίνονται δυο κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο A . Έστω ότι μια ευθεία (ϵ) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους B και Γ αντίστοιχα και ότι η εσωτερική εφαπτομένη (ζ) των κύκλων στο σημείο επαφής τους A τέμνει την ευθεία (ϵ) σε σημείο M .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι ευθείες KB και ΛM τέμνονται σε σημείο, έστω Δ .

ii. το τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ είναι ισοσκελές.

γ) Με ποια σχέση πρέπει να συνδέονται οι ακτίνες ρ_1 και ρ_2 των δύο κύκλων ώστε το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

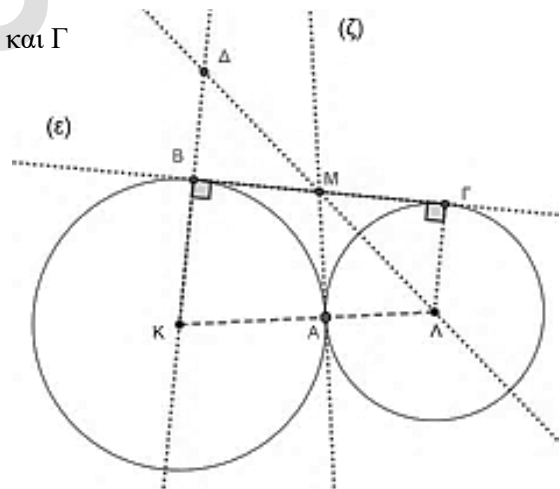
α) i. Επειδή $KB, \Lambda\Gamma$ ακτίνες κύκλων στα σημεία επαφής B και Γ με την (ϵ) , είναι $KB \perp (\epsilon)$ και $\Lambda\Gamma \perp (\epsilon)$. Άρα $KB \parallel \Lambda\Gamma$.

Η ΛM τέμνει τη $\Lambda\Gamma$ στο Λ , επομένως θα τέμνει και κάθε άλλη παράλληλη προς αυτήν οπότε και την ΛM .

ii. Η διακεντρική ευθεία MA διχοτομεί τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής A, Γ , δηλαδή $\hat{A}\hat{\Lambda}\hat{G} = \hat{M}\hat{\Lambda}\hat{G}$ (1).

Επειδή $K\Delta \parallel \Lambda\Gamma$ είναι $\hat{K}\hat{\Delta}\hat{\Lambda} = \hat{M}\hat{\Lambda}\hat{G}$ (2) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $K\Delta, \Lambda\Gamma$ που τέμνονται από την $\Delta\Lambda$.

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\hat{A}\hat{\Lambda}\hat{G} = \hat{K}\hat{\Delta}\hat{\Lambda}$, οπότε το τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ είναι ισοσκελές.



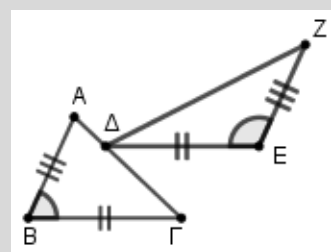
γ) Το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ είναι ορθογώνιο όταν $\hat{K} = 90^\circ$. Τότε το $BK\Lambda\Gamma$ είναι ορθογώνιο οπότε οι απέναντι πλευρές του είναι ίσε, δηλαδή $KB = \Lambda\Gamma \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2$.

13752. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} < 90^\circ$ θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ της πλευράς $A\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔE ίσο και παράλληλο με την πλευρά $B\Gamma$ και από το σημείο E φέρουμε τμήμα $E\hat{H}$ ίσο και παράλληλο με την πλευρά AB , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Ένας μαθητής κάνει τους παρακάτω διαδοχικούς συλλογισμούς. Να χαρακτηρίσετε Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) κάθε έναν από αυτούς.

1. Οι γωνίες $\hat{\Delta E Z}$ και $\hat{A B \Gamma}$ είναι γωνίες με πλευρές παράλληλες.

2. Οπότε $\Delta E Z = A B \Gamma$.



3. Τα τρίγωνα ΔΕΗ και ΑΒΓ είναι ίσα.

4. Το τμήμα ΔΗ είναι ίσο με το τμήμα ΑΓ.

β) Να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς σας (Σ ή Λ) που αφορούν τους ισχυρισμούς 2. και 3.

γ) Αν στα δεδομένα παραλείψουμε τη συνθήκη $\hat{B} < 90^\circ$, να συγκρίνετε

τα τμήματα ΑΓ και ΔΗ για τα διάφορα είδη της γωνίας Β και να

δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Λύση

α) 1. Σ 2. Λ 3. Λ 4. Λ

β) Η απάντηση στον συλλογισμό 2. είναι λάθος. Προεκτείνουμε την ΖΕ και τη ΒΓ και έστω Η το σημείο τομής τους. Τότε:

$\angle ZED = \angle EHG$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες των παραλλήλων ΔΕ και ΒΗ που τέμνονται από την ΖΗ.

$\angle EHG + \angle ABG = 180^\circ$ γιατί είναι γωνίες εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ και ΖΗ που

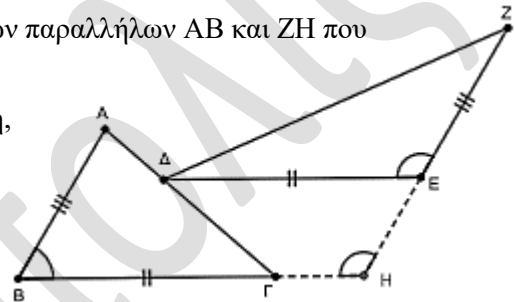
τέμνονται από την ΒΗ. Άρα $\angle ZED + \angle ABG = 180^\circ$, δηλαδή είναι

παραπληρωματικές γωνίες και αφού $B < 90^\circ$ από την υπόθεση,

τότε $\angle ZED > 90^\circ$.

Άρα δεν είναι ίσες.

Η απάντηση στο συλλογισμό 3. είναι λάθος, γιατί τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μία, τις ΔΕ, ΒΓ και τις ΖΕ, ΑΒ, αλλά οι περιεχόμενες γωνίες αυτών των πλευρών δεν είναι ίσες αλλά παραπληρωματικές, όπως δικαιολογήθηκε παραπάνω.



γ) Οι γωνίες $\angle ZED$ και $\angle ABG$ είναι παραπληρωματικές.

• Αν $\angle ABG < 90^\circ$, τότε $\angle ZED > 90^\circ$ και τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες στις πλευρές αυτές άνισες. Οπότε, θα έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ομοίως άνισες. Δηλαδή, αφού $\angle ABG < \angle ZED$ τότε $AG < AZ$.

• Αν $\angle ABG > 90^\circ$, τότε $\angle ZED < 90^\circ$ και τα τρίγωνα όπως προηγουμένως θα έχουν τις τρίτες πλευρές τους ομοίως άνισες. Δηλαδή, αφού $\angle ABG > \angle ZED$ τότε $AG > AZ$.

• Αν $\angle ABG = 90^\circ$, τότε $\angle ZED = 90^\circ$ και τα τρίγωνα είναι ορθογώνια με ίσες τις κάθετες πλευρές τους, οπότε θα είναι ίσα και συνεπώς θα έχουν ίσες και τις υποτείνουσες τους. Δηλαδή, αφού $\angle ABG = \angle ZED$ τότε $AG = AZ$. Άρα η μόνη περίπτωση στην οποία τα τμήμα ΔΖ είναι ίσο με το τμήμα ΑΓ είναι όταν οι γωνίες ΔΕΖ και ΑΒΓ είναι παραπληρωματικές και ίσες, δηλαδή ορθές.

13822. Δίνονται οι ευθείες (ε) και (ψ).

α) Αν η γωνία $\hat{BAG}$ είναι μεγαλύτερη από την $\hat{AB\psi}$:

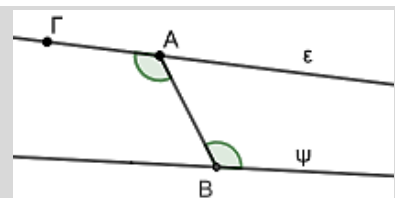
i. Να αποδείξετε ότι $\hat{BA\epsilon} + \hat{AB\psi} < 180^\circ$.

ii. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε και ψ τέμνονται.

Σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η ΑΒ βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;

β) Να διατυπώσετε την πρόταση που αποδείχθηκε στο α) για τις εντός και εναλλάξ γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη και το σημείο τομής των ευθειών αυτών.

γ) Αν ισχύει $\hat{BAG} < \hat{AB\psi}$, τότε σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η ΑΒ βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;



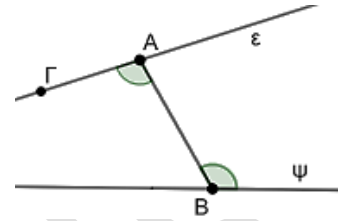
Λύση

α) i. Είναι $BA\epsilon + BA\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow BA\Gamma = 180^\circ - BA\epsilon$.

Είναι $BA\Gamma > AB\psi \Leftrightarrow 180^\circ - BA\epsilon > AB\psi \Leftrightarrow BA\epsilon + AB\psi < 180^\circ$

ii. Οι γωνίες $BA\epsilon$ και $AB\psi$ είναι εντός και επί τα αυτά μέρη των ϵ και ψ που τέμνονται από την AB και επειδή $BA\epsilon + AB\psi < 180^\circ$ οι ϵ και ψ τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την AB προς το μέρος που βρίσκεται η $AB\psi$.

β) Στο α) αποδείξαμε ότι αν δύο ευθείες τεμνόμενες από άλλη ευθεία σχηματίζουν εντός και εναλλάξ γωνίες που δεν είναι ίσες, τότε οι δύο αυτές ευθείες τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την τέμνουσα προς το μέρος που βρίσκεται η μικρότερη από τις δύο εντός και εναλλάξ γωνίες.



γ) Οι γωνίες $BA\Gamma$ και $AB\psi$ είναι εντός και εναλλάξ των ευθειών ϵ και ψ με τέμνουσα την AB . Όμως δίνεται ότι $BA\Gamma < AB\psi$.

Εφαρμόζοντας την πρόταση που διατυπώσαμε στο β) για τις γωνίες

$BA\Gamma$ και $AB\psi$, οι ευθείες ϵ και ψ τέμνονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την AB προς το μέρος της $BA\Gamma$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

13843. Έστω ότι οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ εφάπτονται στον κύκλο (O,R) στα άκρα μιας διαμέτρου του AB . Να αποδείξετε ότι:

α) οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ είναι παράλληλες.

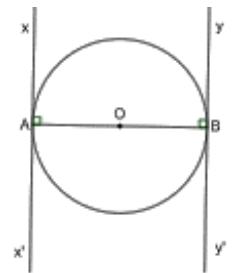
β) οι διχοτόμοι των γωνιών BAX και ABY τέμνονται σε σημείο M .

γ) το σημείο M είναι το μέσο του ημικυκλίου AB .

δ) αν η διχοτόμος της γωνίας BAX τέμνει την $y'y$ στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας ABY τέμνει την $x'x$ στο σημείο Δ , τότε $M\Gamma = M\Delta$.

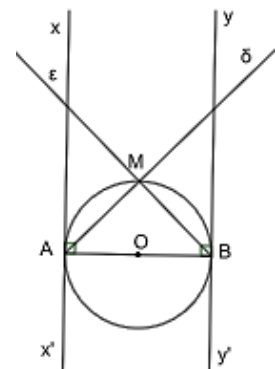
Λύση

13843. α) Οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ εφάπτονται στον κύκλο (O,R) στα άκρα της διαμέτρου του AB , επομένως, είναι κάθετες στην AB και συνεπώς είναι μεταξύ τους παράλληλες.



β) Έστω $A\delta$ και Be οι διχοτόμοι των γωνιών BAX και ABY αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται από τη διάμετρο AB . Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες που σχηματίζονται έχουν άθροισμα μικρότερο από 180° , οπότε η $A\delta$ και η Be θα τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας AB που βρίσκονται οι γωνίες.

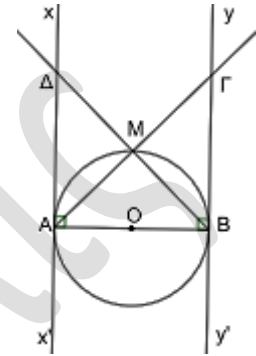
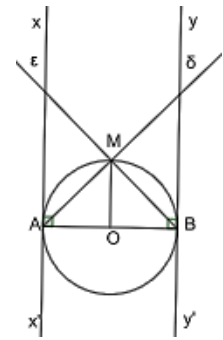
Είναι $BA\delta + AB\epsilon = \frac{90^\circ}{2} + \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ < 180^\circ$, άρα οι $A\delta$ και Be τέμνονται σε σημείο M του ημιεπιπέδου στο οποίο βρίσκονται οι γωνίες.



γ) Από το ερώτημα (β) έχουμε $BAM = BA\delta = 45^\circ$ και $ABM = AB\epsilon = 45^\circ$.
Επομένως, το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές με $MA = MB$. Άρα, το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετο της διαμέτρου AB . Το τρίγωνο AOM είναι ορθογώνιο διότι MO μεσοκάθετος της AB , οπότε $\angle AOM = 90^\circ$.

Στο τρίγωνο AOM έχουμε $\angle OAM = 45^\circ$, άρα $\angle OMA = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

Το τρίγωνο AOM είναι ισοσκελές με $OM = OA = R$. Δηλαδή, το σημείο M είναι σημείο του κύκλου (O, R) και επειδή ανήκει στη μεσοκάθετο της AB συμπεραίνουμε ότι το σημείο είναι το μέσο του ημικυκλίου AB .



δ) Τα τρίγωνα $AM\Delta$ και $BM\Gamma$ έχουν :

- $AM = BM$, από το ερώτημα (γ)
- $\hat{A}\hat{M}\Delta = \hat{B}\hat{M}\Gamma$, ως κατακορυφήν
- $\angle MA\Delta = \angle MB\Gamma = 45^\circ$

Από το κριτήριο ισότητας Γ -Π-Γ τα τρίγωνα είναι ίσα. Απέναντι από τις ίσες γωνίες $\angle MA\Delta$ και $\angle MB\Gamma$ βρίσκονται αντίστοιχα ίσες πλευρές, δηλαδή $M\Delta = M\Gamma$.

34335. Δίνεται κύκλος (O, R) και μία ευθεία $x'x$ η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο A . Θεωρούμε τυχαίο σημείο M της ημιευθείας Ax . Αν για κάποιο σημείο B του κύκλου ισχύει η σχέση $MA = MB$, να αποδείξετε ότι:

α) το MB είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O, R)

β) η διχοτόμος της γωνίας BMx είναι κάθετη στη MO ,

γ) το ευθύγραμμο τμήμα OB τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας BMx .

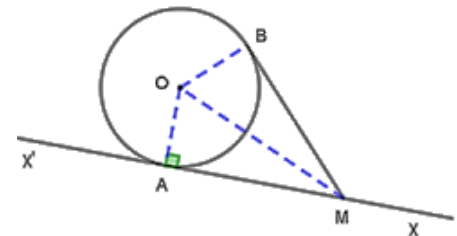
Λύση

α) Τα τρίγωνα MOB και MOA έχουν:

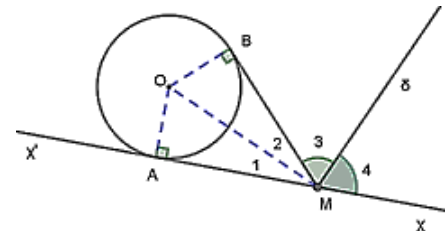
- 1) MO , κοινή πλευρά
- 2) $OB = OA$, ακτίνες του κύκλου (O, R) , $MB = MA$, υπόθεση

Επομένως, τα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς (Π-Π-Π), οπότε είναι ίσα. Επομένως $\angle O\hat{A}M = \angle O\hat{B}M$ και

επειδή $\angle O\hat{A}M = 90^\circ$, είναι και $\angle O\hat{B}M = 90^\circ$, άρα το MB είναι εφαπτόμενο του κύκλου.

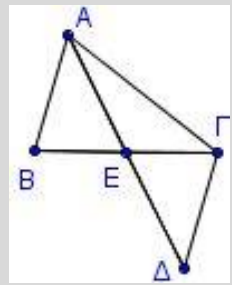


β) Γνωρίζουμε ότι η διακεντρική ευθεία OM διχοτομεί τη γωνία $\hat{A}MB$ των εφαπτομένων. Ακόμη γνωρίζουμε ότι οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες. Επειδή οι γωνίες $\hat{A}MB$ και $\hat{B}Mx$ είναι εφεξής και παραπληρωματικές, οι διχοτόμοι τους OM , $M\delta$ είναι κάθετες.



γ) Αν η OB δεν έτεμνε την $M\delta$ τότε θα ήταν παράλληλη σε αυτήν. Τότε οι γωνίες $\angle O\hat{B}M = 90^\circ$ και $\hat{M}_3$ θα ήταν εντός εναλλάξ, οπότε ίσες. Δηλαδή $\hat{M}_3 = 90^\circ$, οπότε $\hat{B}Mx = 180^\circ$ που είναι άτοπο. Άρα το ευθύγραμμο τμήμα OB τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας BMx .

37166. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α, Β, Γ, Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό Ε ισαπέχει από τα χωριά Β, Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.



α) Να αποδείξετε ότι:

- i.** η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ.
- ii.** αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν.
- iii.** τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από το δρόμο ΑΔ.

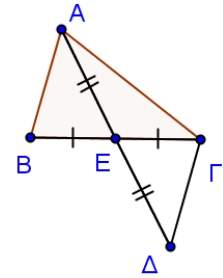
β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ.

Λύση

α) i. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΕΔ έχουν:

- 1) $AE = ED$
- 2) $BE = EG$ και
- 3) $\angle AEB = \angle GED$ ως κατακορυφήν.

Με βάση το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ, τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $AB = GD$.



ii. Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΕΔ είναι ίσα και οι γωνίες ΑΒΕ και ΕΓΔ είναι ίσες. Όμως οι γωνίες αυτές είναι και εντός εναλλάξ των ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από την ΒΓ, άρα οι ευθείες ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες.

iii. Έστω ΒΚ, ΓΛ οι αποστάσεις των Β, Γ από την ΑΔ.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΚ και ΓΛΕ έχουν:

- 1) $BE = EG$ και
- 2) $\angle AEB = \angle GED$ ως κατακορυφήν,

άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $BK = GL$.

β) Γνωρίζουμε ότι ένα σημείο ισαπέχει από δύο άλλα όταν βρίσκεται στη μεσοκάθετο του τμήματος που ορίζουν τα σημεία αυτά. Για το λόγο αυτό θεωρούμε τη μεσοκάθετο (ε) του ΑΔ η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Το Ζ είναι το ζητούμενο σημείο.

