

Ομαλή κυκλική κίνηση

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα κινητό κάνει κυκλική κίνηση όταν η τροχιά που διαγράφει είναι περιφέρεια κύκλου.

Ομαλή κυκλική κίνηση, καλείται η κυκλική κίνηση ενός κινητού κατά την οποία η τιμή της ταχύτητάς του παραμένει σταθερή, δηλ. το κινητό σε ίσους χρόνους διανύει ίσα διαστήματα.

ΜΕΓΕΘΗ ΤΗΣ ΟΜΑΛΗΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

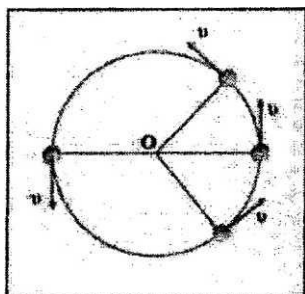
1) ΠΕΡΙΟΔΟΣ (T) Είναι ο χρόνος που χρειάζεται το κινητό για να κάνει μία περιφορά.

2) ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ (f) Είναι το πηλίκο του αριθμού των περιφορών (N) που εκτελεί το κινητό σε χρόνο t, προς το χρόνο αυτό:

Μονάδα στο S.I.: $1 \text{ Hz} = \text{s}^{-1}$

Πολλαπλάσια : $1 \text{ kHz} = 10^3 \text{ Hz}$, $1 \text{ MHz} = 10^6 \text{ Hz}$, $1 \text{ GHz} = 10^9 \text{ Hz}$.

3) ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ (v)



Σύμφωνα με τον ορισμό της **ομαλής** κυκλικής κίνησης το **μέτρο της ταχύτητας** του κινητού παραμένει **σταθερό**, ενώ η κατεύθυνσή της μεταβάλλεται συνεχώς, επειδή κάθε στιγμή **είναι εφαπτόμενη στην τροχιά**.

Μέτρο της γραμμικής ταχύτητας:

$$v = \frac{s}{t} \quad (2)$$

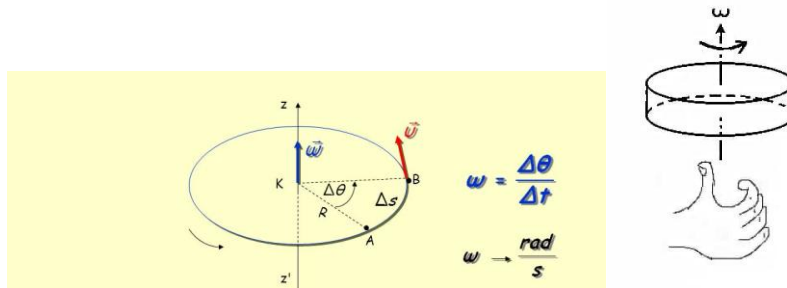
όπου s το μήκος του τόξου που διανύει το κινητό σε χρόνο t.

Μονάδα στο S.I.: $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

4) ΓΩΝΙΑΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ (ω)

Γωνιακή ταχύτητα στην ομαλή κυκλική κίνηση ενός κινητού ονομάζουμε το διανυσματικό φυσικό μέγεθος του οποίου: Το **μέτρο** της είναι ίσο με το σταθερό πηλίκο της γωνίας Δθ που διαγράφηκε από την επιβατική ακτίνα ΚΑ σε χρονικό διάστημα Δt διά του αντίστοιχου χρονικού διαστήματος,

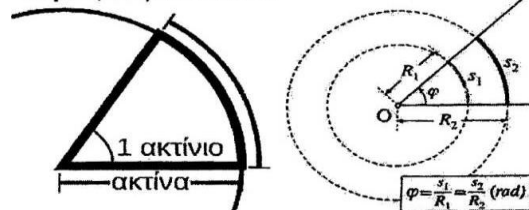
$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (3)$$



- Η **διεύθυνσή της** είναι κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς.
- Η **φορά της** καθορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού όπως στην παρακάτω εικόνα. Το διάνυσμα έχει τη φορά του αντίχειρα του δεξιού χεριού όταν η φορά περιστροφής του κινητού συμπίπτει με τη φορά των υπόλοιπων δακτύλων.

Η ΓΩΝΙΑ ΣΕ ΜΟΙΡΕΣ ΚΑΙ ΣΕ

Μήκος τόξου=ακτίνα



Ακτίνιο είναι η επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί σε μήκος τόξου ίσο με

Ο κύκλος είναι τόξο 360° . Θα βρούμε πόσο είναι σε ακτίνια. Το μήκος του κύκλου είναι $s=2\pi R$ (4) Έστω ότι είναι α ακτίνια. Τότε θα έχει μήκος $s=\alpha R$ (5)

Εξισώνοντας τις (4) και (5) προκύπτει: $\alpha=2\pi$. Άρα ο κύκλος είναι $2\pi \text{ rad}$ ή 360° .

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε πόσα ακτίνια είναι γωνία μ° .

Τα $2\pi \text{ rad}$ αντιστοιχούν σε 360°

$\alpha = ; \text{ rad}$ αντιστοιχούν σε μ°

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$$

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

- 5) Να γραφεί και να αποδειχθεί η σχέση $f-T$
- 6) Να γραφεί και να αποδειχθεί η σχέση $\omega - T$ και $\omega-f$
- 7) Να γραφεί και να αποδειχθεί η σχέση $v - T$ και $v-f$
- 8) Να γραφεί και να αποδειχθεί η σχέση $\omega- v$

9) ΚΕΝΤΡΟΜΟΛΟΣ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ (α_k)

Στην ομαλή κυκλική κίνηση το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας μένει σταθερό, όμως η διεύθυνση και η φορά της αλλάζουν συνεχώς. Άρα στην ομαλή κυκλική κίνηση το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας μεταβάλλεται, με αποτέλεσμα να έχουμε επιτάχυνση.

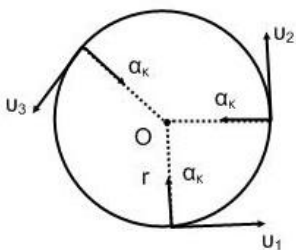
Στην ομαλή κυκλική κίνηση υπάρχει μόνο η κεντρομόλος επιτάχυνση, η οποία *δεν έχει σχέση με τη μεταβολή του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας*, αλλά με την μεταβολή στην κατεύθυνση της ταχύτητας.

Την επιτάχυνση στην ομαλή κυκλική κίνηση την ονομάζουμε **κεντρομόλο επιτάχυνση (α_k)** και είναι ένα διάνυσμα κάθετο στη γραμμική ταχύτητα, που έχει τη διεύθυνση της ακτίνας και φορά προς το κέντρο της τροχιάς.

Το μέτρο της δίνεται από την σχέση:

$$\alpha_k = \frac{v^2}{R} \quad (6)$$

όπου R η ακτίνα της τροχιάς και v το σταθερό μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του κινητού.



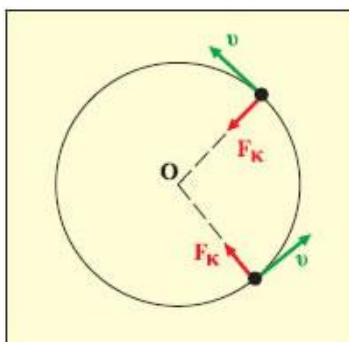
10) ΚΕΝΤΡΟΜΟΛΟΣ ΔΥΝΑΜΗ

Οι δύο πρώτοι νόμοι του Νεύτωνα μας επιτρέπουν να περιγράψουμε την κίνηση που κάνει ένα σώμα όταν γνωρίζουμε τη συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν σ' αυτό, την αρχική θέση του καθώς και την αρχική του ταχύτητα. Έτσι αν σε ένα σώμα δεν ασκούνται δυνάμεις, ή αν ασκούνται και έχουν συνισταμένη μηδέν, τότε σύμφωνα με τον **πρώτο νόμο** του Νεύτωνα αυτό θα ηρεμεί ή θα κινείται με κίνηση ευθύγραμμη ομαλή.

Αν η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα δεν είναι μηδέν, τότε σύμφωνα με το **δεύτερο** νόμο του Νεύτωνα αυτό έχει επιτάχυνση ομόρροπη της δύναμης, που προσδιορίζεται από τη σχέση $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$, όπου m είναι η μάζα του σώματος.

Στην περίπτωση που το σώμα κάνει ομαλή κυκλική κίνηση, η επιτάχυνσή του είναι η κεντρομόλος. Με βάση λοιπόν τον δεύτερο νόμο, η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα, θα είναι μια δύναμη, η **οποία έχει διεύθυνση την διεύθυνση της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς, φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και μέτρο:**

$$F_k = \frac{mv^2}{R} \quad (7)$$



Η κεντρομόλος δύναμη είναι γενικά **η συνισταμένη** των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα κατά τη διεύθυνση της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς με φορά προς το κέντρο του κύκλου. Δεν πρόκειται για μια ακόμα δύναμη πάνω στο σώμα.

Μεθοδολογία: Όταν ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, θα πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν στο σώμα να είναι η κεντρομόλος δύναμη.

ΤΡΟΠΟΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

- Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.
- Αναλύουμε κάθε δύναμη σε δύο κάθετες συνιστώσες: μία πάνω στον άξονα της ακτίνας και μία στο άξονα της εφαπτομένης στο ίδιο σημείο. Σαν θετική φορά επιλέγουμε τη φορά από το σώμα προς το κέντρο της τροχιάς.
- Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής στη διεύθυνση της ακτίνας, όπου ΣF είναι το αλγεβρικό άθροισμα των συνιστωσών των δυνάμεων στη διεύθυνση της ακτίνας της τροχιάς.

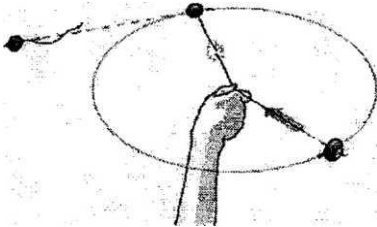
$$\Sigma F = F_k = \frac{mv^2}{R}$$

- Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις της κυκλικής κίνησης.

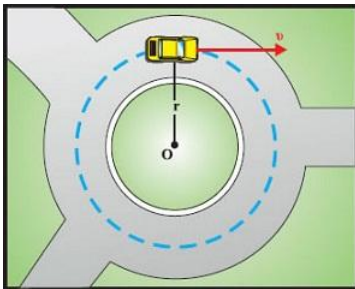
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Παράδειγμα 1° Ένα σώμα δεμένο στο ελεύθερο άκρο σχοινιού κάνει ομαλή κυκλική κίνηση σε οριζόντιο επίπεδο.

Η μάζα $m = 2 \text{ kg}$ διαγράφει κυκλική τροχιά πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο. Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας της μάζας είναι σταθερό και ίσο με $u = 10 \text{ m/s}$ και η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι $r = 1 \text{ m}$. Να βρείτε: i) την κεντρομόλο επιτάχυνση της μάζας τη, ii) τη δύναμη που δέχεται το χέρι από το νήμα.

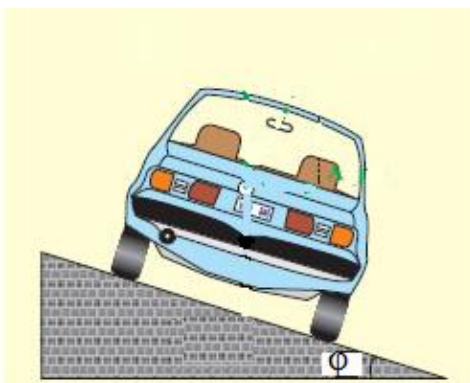


Παράδειγμα 2° Κίνηση αυτοκινήτου σε οριζόντιο δρόμο.



Αυτοκίνητο μάζας 1500 kg κινείται σε κυκλικό δρόμο ακτίνας 50 m με ταχύτητα 10 m/s . α) Να βρεθεί η στατική τριβή μεταξύ ελαστικών και οδοστρώματος, β) Τι θα συμβεί αν αυξηθεί η ταχύτητα του αυτοκινήτου; γ) να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να κινηθεί το αυτοκίνητο ώστε να μην φύγει από τον δρόμο. Δίνεται ο συντελεστής στατικής τριβής $\mu = 0.3$.

Παράδειγμα 3° Κίνηση αυτοκινήτου σε κυκλικό δρόμο με κλίση φ



Αυτοκίνητο κινείται σε κυκλικό δρόμο ακτίνας 10m, που έχει κλίση 7° . α) να βρεθεί η ταχύτητά του β) να βρεθεί η περίοδος της κυκλικής κίνησης.

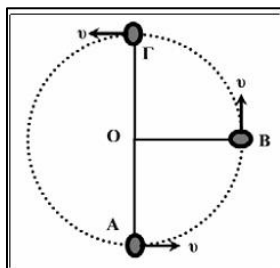
Παράδειγμα 4° Δρομέας που κινείται σε κυκλική τροχιά



Παράδειγμα 5° Σώμα που διαγράφει κυκλική τροχιά σε κατακόρυφο επίπεδο.
Προσοχή: η κίνηση δεν είναι ομαλή κυκλική.

Ένα σώμα μάζας $m=1 \text{ kg}$ είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο σχοινιού μήκους $l=1 \text{ m}$ και διαγράφει κατακόρυφο κύκλο. Η ταχύτητα στο σημείο Α είναι 8 m/s .

Να βρεθούν οι ταχύτητες στα σημεία Β και Γ, καθώς και η τάση του νήματος σε αυτά τα σημεία.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Κινητό κάνει ομαλή κυκλική κίνηση με περίοδο $T = 2 \text{ s}$ και ακτίνα $R = 10 \text{ m}$. Να βρείτε για το κινητό αυτό: α) τη συχνότητα, β) τη γωνιακή ταχύτητα, γ) τη γραμμική του ταχύτητα και δ) την κεντρομόλο επιτάχυνση του.

2) Για έναν δίσκο που περιστρέφεται γύρω από το κέντρο του τα σημεία της περιφέρειάς του έχουν γραμμική ταχύτητα μέτρου $u_1 = 0,5 \text{ m/s}$. Αν τα σημεία του δίσκου που απέχουν 4 cm από την περιφέρεια του έχουν γραμμική ταχύτητα μέτρου $U_2 = 0,3 \text{ m/s}$, να βρείτε:

α) την ακτίνα R του δίσκου, β) τη γωνιακή ταχύτητα του δίσκου.

3) Ράβδος AB, μήκους $l = 6 \text{ m}$, περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από ένα σημείο της Κ. Τα άκρα Α και Β της ράβδου έχουν γραμμικές ταχύτητες μέτρου $u_1 = 1 \text{ m/s}$ και $u_2 = 2 \text{ m/s}$ αντίστοιχα, α) Να βρείτε την απόσταση του Κ

από το Α. β) Πόση είναι η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου και ποια είναι η διεύθυνσή της; Να κάνετε σχήμα.

4) Σημειακό αντικείμενο κάνει ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας $R = 1 \text{ m}$ και σε χρόνο $\Delta t = 2 \text{ s}$ διαγράφει τόξο που αντιστοιχεί σε γωνία $\varphi = 20^\circ$. Να βρείτε: α) τη γωνία $\varphi = 20^\circ$ σε rad, β) την περίοδο και τη γωνιακή ταχύτητα του αντικειμένου, γ) τη γραμμική ταχύτητα του αντικειμένου, δ) τον αριθμό των περιστροφών του αντικειμένου σε χρόνο 100 s .

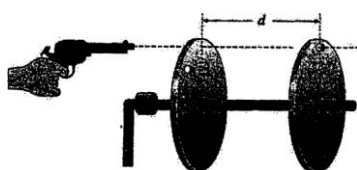
5) Σε περιφέρεια ακτίνας $R = 8 \text{ m}$ κινούνται δύο κινητά με γραμμικές ταχύτητες μέτρου $u_1 = 6 \text{ m/s}$ και $u_2 = 4 \text{ m/s}$. Να βρείτε: α) την περίοδο, τη συχνότητα και τη γωνιακή ταχύτητα κάθε κινητού, β) το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών συναντήσεων των κινητών όταν κινούνται: α) με την ίδια φορά, β) με αντίθετες φορές.

6) Ο ωροδείκτης και ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού δείχνουν τη 12η ώρα ακριβώς. Μετά από πόσο χρόνο οι δύο δείκτες θα σχηματίζουν μεταξύ τους για πρώτη φορά γωνία: 90° και 45° .

7) Δύο δρομείς Α και Β τρέχουν σε κυκλικό στίβο ακτίνας $R = 160/\pi \text{ m}$ με ταχύτητες $u_A = 14 \text{ m/s}$ και $u_B = 6 \text{ m/s}$ αντίστοιχα και με την ίδια φορά. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ διέρχονται από το σημείο Γ. α) Μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν για πρώτη φορά και πόσο διάστημα θα έχει διατρέξει ο καθένας; β) Μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν ξανά στο σημείο Γ και πόσες περιφορές θα έχει κάνει ο καθένας;

8) Σ' έναν κυκλικό στίβο ακτίνας $R = 200/\pi \text{ m}$ από το ίδιο σημείο περνούν ταυτόχρονα δύο δρομείς Α και Β με ταχύτητες μέτρου $u_A = 3 \text{ m/s}$ και $u_B = 2 \text{ m/s}$ αντίστοιχα. Μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν για τρίτη φορά όταν κινούνται: α) με την ίδια φορά; β) με αντίθετες φορές;

9) Δύο δίσκοι είναι στερεωμένοι στον ίδιο άξονα, που περιστρέφεται με συχνότητα $f = 20 \text{ Hz}$. Μια σφαίρα που κινείται παράλληλα προς τον άξονα τρυπά τους δύο δίσκους.



Τη στιγμή που η σφαίρα τρυπά τον δεύτερο δίσκο η τρύπα στον πρώτο δίσκο έχει μετατοπιστεί κατά γωνία $\varphi = 18^\circ$. Αν οι δίσκοι είναι παράλληλοι και απέχουν μεταξύ τους $d = 1 \text{ m}$, να βρείτε την ταχύτητα της σφαίρας.

10) Σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο νήματος μήκους $l = 1 \text{ m}$ και εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε λείο οριζόντιο επίπεδο με συχνότητα $f = 3/\pi \text{ Hz}$. α) Να βρείτε την τάση του νήματος, β) Αν το όριο θραύσης του νήματος είναι 400 N , ποια μπορεί να είναι η μέγιστη συχνότητα περιφοράς για να μην κοπεί το νήμα; "

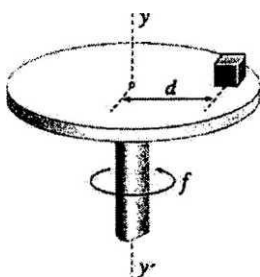
(απ: 72 N , $\frac{5\sqrt{2}}{\pi} \text{ Hz}$)

11) Σώμα μάζας $m = 0,2 \text{ kg}$ κινείται ευθύγραμμα πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $0,5 \text{ m/s}$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αρχίζει ν' ασκείται στο σώμα οριζόντια δύναμη μέτρου $F = \pi \text{ N}$, που η διεύθυνσή της είναι συνεχώς κάθετη στη διεύθυνση της ταχύτητας του σώματος, α) Να εξηγήσετε γιατί το σώμα θα κάνει ομαλή κυκλική κίνηση, β) Να βρείτε την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς, γ) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους οι διευθύνσεις των γραμμικών ταχυτήτων του σώματος τις χρονικές στιγμές 0 s και 10 s .

12) Όχημα κινείται σε οριζόντιο κυκλικό δρόμο ακτίνας $R = 25 \text{ m}$. α) Ποια δύναμη αποτελεί την κεντρομόλο δύναμη για το όχημα; β) Αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των ελαστικών του οχήματος και του οδοστρώματος είναι $\mu = 0,4$ να βρείτε α) Την μέγιστη ταχύτητα με την οποία μπορεί να κινηθεί με ασφάλεια το όχημα, β) Η μέγιστη ταχύτητα εξαρτάται από τη μάζα του οχήματος;

13) Σώμα, μάζας $m = 45 \text{ kg}$, αιωρείται κρεμασμένο από ένα σχοινί, το οποίο έχει μήκος 6 m . Αν στο πιο χαμηλό σημείο της τροχιάς του το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου 6 m/s , να υπολογίσετε στη θέση αυτή: α) την κεντρομόλο επιτάχυνση του σώματος, β) τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται, γ) την κεντρομόλο δύναμη, δ) την τάση του σχοινιού.

14) Ο οριζόντιος δίσκος του παρακάτω σχήματος στρέφεται γύρω από τον κακώρυφο άξονα yy' με συχνότητα $f = 0,1 \text{ Hz}$. Για να ισορροπεί ένα σώμα πάνω στον δίσκο, πρέπει να υπάρχει τριβή μεταξύ τους. Αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ σώματος και δίσκου είναι $\mu_0 = 0,2$, να βρείτε: α) ποια δύναμη ενεργεί ως κεντρομόλος δύναμη για το σώμα, β) τη μέγιστη απόσταση d από το κέντρο του δίσκου όπου το σώμα μπορεί να ισορροπεί πάνω στον δίσκο. Δίνονται: $g = 10 \text{ m/s}^2$ και $\pi^2 = 10$.



(απ: 5m)

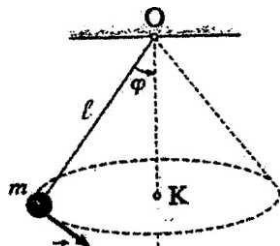
15) Ένας αθλητής της δισκοβολίας περιστρέφεται, αναγκάζοντας τον δίσκο που κρατά να διαγράψει κυκλική τροχιά σε οριζόντιο επίπεδο. Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι $R = 2 \text{ m}$ και το ύψος στο οποίο περιφέρεται ο δίσκος είναι $h = 1,8 \text{ m}$. Κάποια στιγμή ο δισκοβόλος αφήνει τον δίσκο, ο οποίος, κάνοντας οριζόντια βολή, πέφτει στο έδαφος σε απόσταση $s = 5,4 \text{ m}$ από τη θέση του αθλητή. Αν ο δίσκος έχει μάζα $m = 5 \text{ kg}$, να βρείτε: α) τον χρόνο της οριζόντιας βολής, β) την ταχύτητα εκτόξευσης του δίσκου, γ) την οριζόντια δύναμη που ασκεί ο αθλητής στον δίσκο τη στιγμή πριν τον αφήσει.

(απ: $202,5 \text{ N}$)

16) (κωνικό εκκρεμές) Σφαίρα μάζας $m = 0,5 \text{ kg}$ κινείται σε κυκλική τροχιά στον αέρα, όπως φαίνεται στο σχήμα, με περίοδο $T = \pi \text{ s}$. Το νήμα έχει μήκος $l = 5 \text{ m}$. α) Η δύναμη που είναι υπεύθυνη για την κυκλική τροχιά της σφαίρας είναι:

- 1) το βάρος της,
- 2) η τάση του νήματος,
- 3) η συνισταμένη του βάρους και της τάσης,
- 4) καμία από τις παραπάνω.

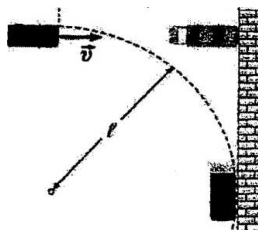
Ποια είναι η σωστή απάντηση;



β) Με τα δεδομένα του προβλήματος να βρείτε την τάση του νήματος και τη γωνία φ που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο.

(απ: 60° , 10N)

17) Το μικρό όχημα του παρακάτω σχήματος τρέχει με ταχύτητα 10m/s και βρίσκεται σε



απόσταση $l=15\text{ m}$ από τον τοίχο. Στη θέση αυτή ο οδηγός θέτει σε εφαρμογή τα φρένα, οπότε οι τροχοί δεν περιστρέφονται, αλλά ολισθαίνουν στον δρόμο.

α) Να αποδείξετε ότι για να αποφύγει το όχημα τη σύγκρουση με τον τοίχο, πρέπει ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των ελαστικών του οχήματος και του οδοστρώματος να έχει τιμή $\mu = 1/3$.

β) Αν ο οδηγός, για να αποφύγει τη σύγκρουση με τον τοίχο, αποφασίσει να εκτελέσει κυκλική κίνηση, όπου η στατική τριβή θα είναι η αναγκαία κεντρομόλος δύναμη, να βρείτε την τιμή του συντελεστή στατικής τριβής.

(απ: $2/3$)

18) Εκτρέπουμε το σφαιρίδιο μάζας $m = 1\text{ kg}$ ενός εκκρεμούς κατά γωνία $\varphi = 60^\circ$ από την κατακόρυφο και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο. Να βρείτε την ταχύτητα του σφαιριδίου όταν αυτό περνά από τη θέση ισορροπίας του και την τάση του νήματος στη θέση αυτή. Το μήκος του νήματος είναι $2,5\text{ m}$.

