

ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Από το Γυμνάσιο γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$, με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ που λέγεται **γραμμική εξίσωση**, παριστάνει ευθεία γραμμή.

Πριν προχωρήσετε στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος είναι σημαντικό να καταλαβαίνετε πλήρως πώς λειτουργεί η γραμμική εξίσωση. Γι' αυτό, αν δεν θυμάστε καλά τη γραμμική εξίσωση δείτε προσεκτικά το βίντεο: <https://youtu.be/zbvWpcajh1g>

Στη συνέχεια για να δείτε τι παριστάνει ένα γραμμικό σύστημα και πώς λύνεται, δείτε το επόμενο βίντεο: <https://youtu.be/IA5RxBrItKA>

Στο παραπάνω βίντεο βλέπετε τους βασικούς τρόπους επίλυσης των γραμμικών συστημάτων, τη μέθοδο της αντικατάστασης καθώς και τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών. Οι μέθοδοι αυτοί είναι γνωστοί από την Γ' Γυμνασίου.

Το καινούριο φέτος είναι η μέθοδος επίλυσης με τη χρήση οριζουσών καθώς και η επίλυση – διερεύνηση των γραμμικών συστημάτων 2×2 με παράμετρο. Για την επίλυση αυτών των συστημάτων δείτε το βίντεο: <https://youtu.be/-BdDcdpdXdk>

Βασικές Ασκήσεις στο 1.1 – Γραμμικά Συστήματα

1. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2x + y = -4 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} 2x - 3y = 16 \\ 3x + 4y = -10 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = -7 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} x - 2y = 4 \\ -\frac{x}{2} + y = -2 \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} 3x - 7y = 0 \\ -2x + 5y = 0 \end{cases}$$

$$\sigma\tau) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\zeta) \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

$$\eta) \begin{cases} x = 4y + 2 \\ \frac{x}{4} - y = 1 \end{cases}$$

$$\theta) \begin{cases} -8x + 5y = 0 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$$

2. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2x - (y - 1) = x \\ 3(x - y) - 1 = y - 6 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} 3 - 2(x - 3y) = y - x \\ x - (2y - 1) = y - 6 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 5(y + 2) - 2(4 - x) = 3 \\ -x - 3(y - 2) = 6 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} 3(y - 1) - 2(2y - x) = 0 \\ y - 2(x - 1) = -1 \end{cases}$$

3. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{x+2}{3} - \frac{y}{6} = 1 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} \frac{x}{2} - 1 = \frac{y}{4} \\ \frac{x-1}{2} - \frac{x-2y}{3} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} (x+1)^2 + 3y = x^2 - 4 \\ 3x + (y-1)^2 = y^2 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} (x-2)^2 - y = x^2 \\ \frac{x+2}{3} - \frac{y-6}{6} = 2 \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{3y-1}{4} = -x+1 \\ x + (y-1)^2 = y^2 \end{cases}$$

$$\sigma\tau) \begin{cases} x - 3y = -1 \\ (x-1)^3 + 3x^2 + 5y = x^3 - 2 \end{cases}$$

$$\zeta) \begin{cases} \frac{1}{3}(x+1) = 1-y \\ \frac{1}{4}(x-3) = 1-2y \end{cases}$$

$$\eta) \begin{cases} \frac{x+y-5}{2} - \frac{y-x}{3} = 0 \\ 3(x-y-7) - 2(2-x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\theta) \begin{cases} \frac{x+2y}{2} - \frac{3x+13y}{10} = \frac{7}{5} \\ 6y - 3(x+4y) = 38 - 7x \end{cases}$$

4. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x + 6y = 5$ και $\varepsilon_2: x + 2y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τους συντελεστές διεύθυνσης των δύο ευθειών.

β) Υπάρχουν τιμές της παραμέτρου α , για τις οποίες οι δύο ευθείες τέμνονται;

γ) Για ποιες τιμές της παραμέτρου α , οι ευθείες:

i) είναι παράλληλες;

ii) συμπίπτουν.

5. Να λύσετε γραφικά τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$$

6. Να βρείτε για ποιες τιμές των α και β η εξίσωση: $(\alpha + 2\beta - 4)x + (3\alpha + 5\beta - 9)y - 7 = 0$ δεν παριστάνει ευθεία.

7. Η ευθεία $\varepsilon: (\beta - 3\alpha)x + (2\alpha - \beta)y + 1 = 0$ διέρχεται από τα σημεία $M(-2, -1)$ και $N(4, 3)$. Να βρείτε:

α) τους αριθμούς α και β .

β) το κοινό σημείο της ευθείας ε και της ευθείας $\zeta: 3x - 4y + 3 = 0$.

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \begin{vmatrix} x & 1 \\ x-1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\beta) \begin{vmatrix} 3x-1 & -4 \\ -2 & 3x+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\gamma) \begin{vmatrix} 3x-1 & -2 \\ -1 & x \end{vmatrix} = 0$$

9. Να λύσετε τα συστήματα με τη μέθοδο των οριζουσών:

$$\alpha) \begin{cases} (2 - \sqrt{3})x + y = 1 \\ x + (2 + \sqrt{3})y = 2 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} (2 - \sqrt{3})x + y = -1 \\ x + (2 + \sqrt{3})y = -2 - \sqrt{3} \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x + 2\sqrt{2} \cdot y = -2 \\ \sqrt{2} \cdot x + (\sqrt{2} + 1)y = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

10. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να λύσετε τα συστήματα:

$$\begin{array}{lll} \alpha) \begin{cases} \lambda^2 x - 3y = 6 - \lambda \\ \lambda x + y = -3 \end{cases} & \beta) \begin{cases} \lambda x + 2y = 1 \\ 6x + (\lambda + 1)y = \lambda - 1 \end{cases} & \gamma) \begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ 4x + (\lambda - 3)y = 0 \end{cases} \\ \delta) \begin{cases} \lambda(x + 1) = y + 1 \\ 4x = \lambda(y - 1) \end{cases} & \epsilon) \begin{cases} 1 - \lambda(x - y) = 0 \\ (\lambda + 1)(x - 1) = 2y \end{cases} & \sigma\tau) \begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = -1 \end{cases} \\ \zeta) \begin{cases} \lambda^2 x - 2y = \lambda \\ \lambda x - y = \lambda - 1 \end{cases} & \eta) \begin{cases} \lambda^2 x + y = \lambda \\ x + 4y = 2 \end{cases} & \theta) \begin{cases} (\lambda + 1)x - y = \lambda + 1 \\ x + (\lambda - 1)y = 2 \end{cases} \end{array}$$

11. Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon: y = \lambda x - 2$ και $\zeta: 4x + \lambda y - \lambda = 0$ τέμνονται για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

12. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: (\lambda - 1)x + \lambda y = \lambda$ και $\zeta: x + \lambda y = 2$

α) Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες οι ευθείες είναι παράλληλες.

Αν $\lambda = -2$, τότε:

β) Να βρείτε το εμβαδόν E του τριγώνου που ορίζει η ευθεία ζ με τους άξονες.

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων που η ευθεία ζ τέμνει τους άξονες.

13. α) Να βρείτε το κοινό σημείο A των ευθειών: $\varepsilon_1: x - 3y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x - y - 3 = 0$.

β) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, για την οποία η ευθεία $\zeta: \lambda x - y = \lambda + 3$ διέρχεται από το σημείο A .

14. Να δείξετε ότι το σύστημα $\begin{cases} (\lambda + 1)x + \lambda y = \lambda + 1 \\ x + (\lambda + 2)y = \lambda^5 - 2 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

15. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + (\lambda + 1)y = 2\lambda + 1 \\ 2x + (2\lambda - 1)y = 5 \end{cases}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα:

α) Έχει άπειρες λύσεις

β) Είναι αδύνατο

16. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} x + (\lambda + 2)y = 3 \\ (\lambda - 2)x + 5y = 3 \end{cases}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα:

α) Έχει άπειρες λύσεις

β) Είναι αδύνατο

γ) Το σύστημα έχει μοναδική λύση

δ) Το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) για την οποία ισχύει: $\frac{1}{x_0} + \frac{1}{y_0} < 3$.

17. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα $\begin{cases} x + 2y = \lambda \\ 3x + 6y = 2 \end{cases}$:

α) έχει άπειρο πλήθος λύσεων

β) δεν έχει καμία λύση

18. Αν το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + 2y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ έχει άπειρο πλήθος λύσεων, να δείξετε ότι το σύστημα

$$\begin{cases} x - \lambda y = \lambda \\ \lambda x - 4y = 3 \end{cases} \text{ είναι αδύνατον.}$$

19. Να βρείτε τις τιμές των λ, μ , για τις οποίες τα παρακάτω συστήματα είναι συγχρόνως αδύνατα.

$$\begin{cases} x - \lambda y = -2 \\ x + 3y = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ (\lambda - 1)x - \mu y = 2 \end{cases}.$$

20. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 3x - 4y = \lambda - 15 \\ -6x + 8y = \lambda \end{cases}$.

α) να εξετάσετε αν το σύστημα μπορεί να έχει μοναδική λύση

β) Να βρείτε για ποια τιμή του λ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

21. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2x - y - z = -5 \\ y + 3z = 7 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x + 2y - 3z = 10 \\ 2x + 4y - z = 13 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 2x + 3y - 7z = 0 \\ 3x - y - 5z = 0 \\ 5x + 2y - 12z = 0 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 0 \\ z + x = 5 \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = -1 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$\sigma\tau) \begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ 3y + z = 11 \\ y + z = 7 \end{cases}$$

22. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \\ 3x + y - z = 15 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} \frac{x-5}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{3-z}{4} \\ 2x - 4y + z = 5 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x + y = 1 \\ 2y + 2z = 1 \\ 4z + 4x = 3 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 3 \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = -5 \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} \frac{5}{x-2} - \frac{2}{y+1} = 7 \\ \frac{3}{x-2} - \frac{1}{y+1} = 5 \end{cases}$$

$$\sigma\tau) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = -1 \\ \frac{x-2y}{xy} = -5 \end{cases}$$

$$\zeta) \begin{cases} \frac{1}{x+y} = 2 \\ \frac{1}{z+y} = 3 \\ \frac{1}{x+z} = 6 \end{cases}$$

$$\eta) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{y} = 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 6 \end{cases}$$

Βασικές Ασκήσεις στο 1.2 – Μη Γραμμικά Συστήματα

23. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} -x + y = -3 \\ x^2 + 2y^2 = 9 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x^2 - y^2 = -7 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -8 \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} x + 2y = -1 \\ x^2 - 4y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\sigma\tau) \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1 \\ -2x^2 + 5y^2 = 2 \end{cases}$$

24. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα

$$\alpha) \begin{cases} y = 2x^2 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = -4 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -6 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \\ xy = -2 \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\sigma\tau) \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

25. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 2y = 3 \\ x^2 + y^2 - x = 3 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} (x - 2y)(x - 1) = 0 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} \sqrt{x} - \frac{1}{y} = 1 \\ \sqrt{x} + \frac{2}{y} = 4 \end{cases}$$

26. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η υπερβολή $C: y = -\frac{1}{x}$ και η ευθεία $\epsilon: y = x - \lambda$ έχουν δύο κοινά σημεία.

27. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -5 \\ \frac{2}{x} + \frac{6}{y} = 1 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} \left(\frac{2}{x} + \frac{5}{y}\right) = 8 \\ \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 1 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{8}{y} = -1 \\ \frac{3y + 2x}{xy} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} x^2 + y^2 + 3x - 2y = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y = -1 \\ 2x^2 + 2y^2 + 3x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$\sigma\tau) \begin{cases} 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 4 \\ 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 3 \end{cases}$$

$$\zeta) \begin{cases} \frac{x+y}{xy} = 3 \\ \frac{2x-3y}{2xy} = -2 \end{cases}$$

$$\eta) \begin{cases} |x+y| = 2 \\ \sqrt{4x^2 - 4xy + y^2} = 1 \end{cases}$$

$$\theta) \begin{cases} |x - 2y| = 3 \\ 4x - 5y = 6 \end{cases}$$

$$\iota) \begin{cases} |2y - x| - |2x - y| = 0 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$$

$$\iota\alpha) \begin{cases} x^2 - 9x = y^2 - 9y \\ xy = 18 \end{cases}$$

28. Έστω η ευθεία $\epsilon: \alpha x + \beta y = \alpha + \beta$, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$. Θεωρούμε, επιπλέον, την ευθεία $\zeta: 2x + 4y = 2\gamma - 1$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.
 β) Να βρείτε τους συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών ε και ζ.
 γ) Υπάρχουν τιμές της παραμέτρου γ, για τις οποίες οι δύο ευθείες τέμνονται;
 δ) Για ποιες τιμές της παραμέτρου γ οι ευθείες είναι παράλληλες;
 ε) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου Ε που ορίζει η ευθεία ε με τους άξονες.

29. Θεωρούμε τα συστήματα:

$$(\Sigma_1): \begin{cases} (x+4)^2 - y = x^2 + 31 \\ \frac{x}{2} - \frac{9y-1}{4} = -x+1 \end{cases} \quad \text{και} \quad (\Sigma_2): \begin{cases} \alpha x + \beta y = 1 \\ \alpha \beta x + \beta^2 y = \alpha^2 - 7 \end{cases} \quad \text{τα οποία έχουν κοινή λύση.}$$

α) Να λύσετε το σύστημα (Σ_1) .

β) Να βρείτε τις τιμές των α και β.

γ) Για το παραπάνω ζεύγος (α, β) με α > 0, να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 = \alpha - \beta \\ xy = a \end{cases}$ και στη

συνέχεια να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.

30. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + 2y = 4 \\ 2x + \lambda y = \lambda^2 \end{cases}$

α) Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Αν το σύστημα είναι αδύνατο, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $x + y = -2\lambda$ και της υπερβολής $y = \frac{3}{x}$.

γ) Αν το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων, να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x - y + z = \lambda - 2 \\ \lambda x + y - z = 0 \\ x - \lambda y + z = 0 \end{cases}$