

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

ΠΕΔΙΑ ΟΡΙΣΜΟΥ

Γενικά

Κάθε συνάρτηση έχει τη μορφή $f : A \rightarrow B = f(A)$

Δηλαδή τα x «ξεκινάνε» από ένα σύνολο A που ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης και μέσω του τύπου της συνάρτησης καταλήγουν στο «ταίρι» τους y που βρίσκεται στο σύνολο τιμών της συνάρτησης που το συμβολίζουμε με B ή με $f(A)$.

Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης είναι πολύ σημαντικό. Αυτό μαζί με τον τύπο της συνάρτησης καθορίζουν πλήρως μια συνάρτηση.

Τι εννοούμε λοιπόν όταν λέμε: «Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \dots$. Βρείτε το πεδίο ορισμού της»; Σημαίνει ότι ψάχνουμε να βρούμε ποια x επιτρέπεται να βάλω στον τύπο της συνάρτησης. Στην πραγματικότητα στις ασκήσεις εμείς ψάχνουμε να βρούμε ποια x απαγορεύεται να βάλουμε στον τύπο της συνάρτησης και αυτά τα αποκλείουμε.

Άρα, πώς λύνουμε μια άσκηση που μου ζητούν να βρω το πεδίο ορισμού;

- ✚ Ψάχνουμε πού μπορεί η συνάρτηση **να μην ορίζεται**.
- ✚ Μήπως υπάρχει παρονομαστής; Τότε κάθε παρονομαστής πρέπει να είναι διαφορετικός από το μηδέν
- ✚ Μήπως υπάρχει ρίζα; Τότε κάθε υπόριζο (δηλαδή η ποσότητα που είναι μέσα στη ρίζα) πρέπει να είναι μη αρνητική.
- ✚ Μήπως υπάρχουν και τα δύο; Τότε πρέπει να πάρω δύο περιορισμούς.
- ✚ Μήπως υπάρχουν και άλλοι περιορισμοί; (για παράδειγμα θα μάθουμε φέτος για τους περιορισμούς που έχουν οι λογαριθμικές συναρτήσεις, κ.λπ)
- ✚ Αφού λοιπόν αποκλείσουμε όλους τους απαγορευμένους αριθμούς, στο τέλος απαντάμε $A = \dots$ γράφοντας ποιο είναι το σύνολο των αριθμών που επιτρέπεται να πάρω για πεδίο ορισμού, δηλαδή ποιοι είναι οι αριθμοί που επιτρέπεται να βάλω στη θέση του x .

Ας δούμε μερικά παραδείγματα

Παραδείγματα

1. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = 5x - 3$

Λύση

Υπάρχει κάποιος αριθμός που να απαγορεύεται να βάλω στη θέση του x ; Όχι! Μπορώ να βάλω οτιδήποτε θέλω! Άρα, πεδίο ορισμού είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Άρα γράφουμε ως απάντηση:

$$A = \mathbb{R}$$

2. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = 4x^5 - 3x^3 - 4x + 7$

Λύση

Υπάρχει εδώ κάποιος αριθμός που να απαγορεύεται να βάλω στη θέση του x ; Όχι! Και εδώ μπορώ να βάλω οτιδήποτε θέλω! Άρα, πεδίο ορισμού είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Άρα γράφουμε ως απάντηση:

$$A = \mathbb{R}$$

$$3. \text{ Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: } f(x) = \frac{5x-2}{x-3}$$

Λύση

Εδώ παρατηρούμε ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι κλάσμα. Και θυμάμαι ότι στα μαθηματικά, **οποτεδήποτε έχω κλάσμα ο παρονομαστής πρέπει να είναι διαφορετικός από το μηδέν.**

Άρα, πρέπει $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

Οπότε, από όλους τους πραγματικούς αριθμούς πρέπει να εξαιρέσω τον αριθμό 3.

Άρα απαντάω: $A = \mathbb{R} - \{3\}$ (που σημαίνει ότι δέχομαι όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός από το 3)

Αυτό μπορεί να γραφτεί και ως εξής: $A = \mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

$$4. \text{ Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: } f(x) = \frac{5x-2}{x^2+1}$$

Λύση

Εδώ παρατηρούμε πάλι ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι κλάσμα. Άρα πρέπει πάλι να απαιτήσω ο παρονομαστής να μην είναι μηδέν.

Πρέπει $x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -1$. Ναι αλλά κάτι στο τετράγωνο είναι πάντα θετική ποσότητα. Άρα το x^2 δεν μπορεί ποτέ να γίνει ίσο με το -1. Άρα ο παρονομαστής μου ποτέ δεν θα γίνει ίσος με το μηδέν.

Άρα γράφουμε ως απάντηση: $A = \mathbb{R}$

$$5. \text{ Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: } f(x) = \frac{3x^4-2x+1}{x^2-1}$$

Λύση

Εδώ παρατηρούμε πάλι ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι κλάσμα. Άρα πρέπει πάλι να απαιτήσω ο παρονομαστής να μην είναι μηδέν.

Πρέπει $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

Άρα από όλους τους αριθμούς πρέπει να εξαιρέσω το 1 και το -1. Άρα απαντάω:

$A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ ή μπορώ να γράψω: $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

$$6. \text{ Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: } f(x) = 3x^2 - \sqrt{6-2x}$$

Λύση

Εδώ παρατηρούμε ότι ο τύπος της συνάρτησης έχει μια ρίζα. Γνωρίζω ότι για να έχει νόημα μια ρίζα θα πρέπει το υπόριζο (δηλαδή η ποσότητα μέσα στη ρίζα) να μην είναι αρνητικό.

Άρα πρέπει: $6 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow 6 \geq 2x \Leftrightarrow 2x \leq 6 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} \leq \frac{6}{2} \Leftrightarrow \boxed{x \leq 3}$

Άρα η απάντηση είναι: $A = (-\infty, 3]$

7. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = 3x - 4 - \sqrt{x^2 - 9}$

Λύση

Εδώ παρατηρούμε πάλι ότι ο τύπος της συνάρτησης έχει μια ρίζα. Άρα θα πρέπει:

$x^2 - 9 \geq 0$ Πώς λύνουμε αυτή την δευτεροβάθμια ανίσωση; Μπορούμε να το κάνουμε με 3 τρόπους:

α' τρόπος (ο καλύτερος και ο πιο γρήγορος αλλά δεν λειτουργεί πάντα)

$$x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \geq \sqrt{9} \Leftrightarrow |x| \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -3 \quad \text{ή} \quad x \geq 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

Οπότε, $A = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

β' τρόπος (καλός τρόπος κι αυτός και κλασικός όταν έχω τριώνυμο κάτω από ρίζα)

Παρατηρώ ότι το $x^2 - 9$ είναι ένα τριώνυμο. Το λύνω για να βρω τις ρίζες του.

[μπορώ να το λύσω με διακρίνουσα αλλά αν το παρατηρήσω λύνεται πολύ πιο γρήγορα]

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{9} \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3, \text{ άρα έχει ρίζες το } -3 \text{ και το } +3.$$

Κάνω τώρα 'πινακάκι' και υπολογίζω το πρόσημο τριωνύμου

	$-\infty$	-3	$+3$	$+\infty$
	ομόσημο του α, άρα	ετερόσημο του α, άρα	ομόσημο του α, άρα	
$x^2 - 9$	+	0	0	+

Άρα αφού εγώ θέλω το $x^2 - 9$ να είναι μη αρνητικό (δηλαδή θέλω $x^2 - 9 \geq 0$, από το πινακάκι απαντάω: πρέπει $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ Άρα τελικά: $A = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

γ' τρόπος (λίγο πιο αργός)

Παρατηρώ ότι το $x^2 - 9$ είναι μια διαφορά τετραγώνων, δηλαδή $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

Κάνω πινακάκι και υπολογίζω το πρόσημο τριωνύμου

	$-\infty$	-3	$+3$	$+\infty$
$x+3$	-	0	+	+
$x-3$	-	-	0	+
$x^2 - 9$	+	0	-	+

Και πάλι αφού εγώ θέλω το $x^2 - 9$ να μην είναι αρνητικό, από το πινακάκι απαντάω:

Πρέπει $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ Άρα τελικά: $A = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

Παρατήρηση

Εννοείται ότι όποιον τρόπο και να χρησιμοποιήσετε για να λύσετε την άσκηση είναι ολόσωστος.

8. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = 3x - 2 + \sqrt{-x^2 + x + 2}$

Λύση

Πάλι έχουμε μια ρίζα, άρα πρέπει $-x^2 + x + 2 \geq 0$

Εδώ δεν λειτουργεί ο **α' τρόπος** που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη άσκηση, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τον **β' τρόπο**.

Βρίσκουμε αρχικά τις ρίζες της εξίσωσης $-x^2 + x + 2 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 1 + 8 = 9$ Άρα οι ρίζες είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow \boxed{x_1 = -1} \\ \frac{-1-3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2} \end{cases}$$

Και φτιάχνουμε πάλι το πινακάκι:

	$-\infty$	-3	$+3$	$+\infty$
	ομόσημο του α, άρα	ετερόσημο του α, άρα	ομόσημο του α, άρα	
$-x^2 + x + 2$		0	0	
	-	+	-	

Άρα αφού εγώ θέλω το $-x^2 + x + 2$ να μην είναι αρνητικό (δηλαδή θέλω $-x^2 + x + 2 \geq 0$) από το πινακάκι απαντάω: πρέπει $x \in [-3, 3]$ Άρα τελικά: $A = [-3, 3]$

9. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{3x^2 - 5}{\sqrt{6 - 2x}}$

Λύση

Παρατηρήστε ότι εδώ υπάρχει πάλι μια ρίζα η οποία όμως είναι στον παρονομαστή.

Άρα στην πραγματικότητα έχω δύο περιορισμούς:

- Η ποσότητα $6 - 2x$ να μην είναι αρνητική (αφού είναι υπόριζο), και
- Η ποσότητα $\sqrt{6 - 2x}$ να μην είναι ίση με το μηδέν (αφού είναι στον παρονομαστή)

$$\text{Άρα, έχω} \left. \begin{matrix} 6 - 2x \geq 0 \\ \sqrt{6 - 2x} \neq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} 6 \geq 2x \\ 6 - 2x \neq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} 2x \leq 6 \\ 2x \neq 6 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x \leq 3 \\ x \neq 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{και τελικά } \boxed{x < 3}$$

[τα παραπάνω θα μπορούσα να τα πω πιο γρήγορα ως εξής:

Πρέπει $6 - 2x > 0 \Leftrightarrow 6 > 2x \Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow x < 3]$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι: $A = (-\infty, 3)$

Παρατηρήστε τώρα την άσκηση αυτή και κάντε μια σύγκριση με την άσκηση 6. Τι άλλαξε; Στην άσκηση 6 είχα τη ρίζα $\sqrt{6-2x}$ και είπα ότι πρέπει $6-2x \geq 0$ και κατέληξα στο $A = (-\infty, 3]$.

Εδώ, είχα την ίδια ρίζα αλλά την είχα στον παρονομαστή, άρα αυτό που άλλαξε ήταν ότι αντί να πούμε ότι πρέπει $6-2x \geq 0$, τώρα είπαμε ότι πρέπει $6-2x > 0$ και καταλήξαμε στο $A = (-\infty, 3)$

10. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{7x+1}{\sqrt{-x^2+x+2}}$

Λύση

Παρατηρήστε και εδώ την ομοιότητα που υπάρχει με την άσκηση 8. Έχουμε την ίδια ακριβώς ρίζα, απλά την έχουμε στον παρονομαστή. Άρα αντί να πούμε ότι πρέπει $-x^2+x+2 \geq 0$, τώρα θα πούμε ότι πρέπει $-x^2+x+2 > 0$.

Άρα θα κάνουμε ακριβώς την ίδια διαδικασία που κάναμε στην άσκηση 8 και στο τέλος θα γράψουμε:

Άρα αφού $-x^2+x+2 > 0$ από το πινακάκι απαντάω: πρέπει $x \in (-3, 3)$ Άρα τελικά: $A = (-3, 3)$

11. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{5x-2\sqrt{|x-3|-4}}{x^2+3}$

Λύση

Εδώ βλέπω ότι έχω δύο προβλήματα:

- Μια ρίζα (άρα ότι είναι μέσα πρέπει να είναι θετικό), και
- Έναν παρονομαστή που πρέπει να είναι διαφορετικός από το μηδέν.

Όμως ο δεύτερος περιορισμός δεν χρειάζεται γιατί η ποσότητα x^2+3 που είναι στον παρονομαστή είναι πάντα θετική, άρα δεν υπάρχει φόβος να γίνει μηδέν. (βλέπε και άσκηση 4). Άρα θα ασχοληθώ μόνο με τον πρώτο περιορισμό.

ιδιότητα
απολύτων

$$\begin{aligned} \text{Πρέπει } |x-3|-4 \geq 0 &\Leftrightarrow |x-3| \geq 4 \Leftrightarrow x-3 \leq -4 \quad \text{ή} \quad x-3 \geq 4 \Leftrightarrow x \leq 3-4 \quad \text{ή} \quad x \geq 3+4 \Leftrightarrow \\ &x \leq -1 \quad \text{ή} \quad x \geq 7 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [7, +\infty) \end{aligned}$$

Άρα τελικά $A = (-\infty, -1] \cup [7, +\infty)$.

12. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{5x^3-2x^2-7}{\sqrt{|x-3|-4}}$

Λύση

Η μόνη αλλαγή σε σχέση με πριν είναι ότι η ρίζα βρίσκεται στον παρονομαστή. Άρα δεν θα ξεκινήσω με $|x-3|-4 \geq 0$ αλλά με $|x-3|-4 > 0$ και κάνοντας τις ίδιες πράξεις καταλήγω:

ιδιότητα
απολύτων

$$\begin{aligned} |x-3|-4 > 0 &\Leftrightarrow |x-3| > 4 \Leftrightarrow x-3 < -4 \quad \text{ή} \quad x-3 > 4 \Leftrightarrow x < 3-4 \quad \text{ή} \quad x > 3+4 \Leftrightarrow \\ &x < -1 \quad \text{ή} \quad x > 7 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (7, +\infty) \end{aligned}$$

Και τελικά απαντάω ότι $A = (-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$

13. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{5x - 2\sqrt{|x-3|-4}}{x+1}$

Λύση

Εδώ βλέπω και πάλι ότι έχω δύο προβλήματα:

- Μια ρίζα (άρα ότι είναι μέσα πρέπει να είναι θετικό), και
- Έναν παρονομαστή που πρέπει να είναι διαφορετικός από το μηδέν.

Άρα πρέπει (κάνω ό,τι έκανα στην άσκηση 11)

$|x-3|-4 \geq 0 \Leftrightarrow |x-3| \geq 4 \Leftrightarrow x-3 \leq -4 \quad \text{ή} \quad x-3 \geq 4 \Leftrightarrow x \leq 3-4 \quad \text{ή} \quad x \geq 3+4 \Leftrightarrow$
 $x \leq -1 \quad \text{ή} \quad x \geq 7 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [7, +\infty) \quad (1)$

Και επίσης πρέπει: $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \quad (2)$

Τώρα πρέπει να συναληθεύσω τους περιορισμούς (1) και (2), να καταλήξω δηλαδή σε έναν περιορισμό που να έχει μέσα τους και τους δύο.

Τελικά απαντάω ότι $A = (-\infty, -1) \cup [7, +\infty)$

14. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{5x - 2\sqrt{|x-3|-4}}{x-1}$

Λύση

Εδώ βλέπω και πάλι ότι έχω δύο προβλήματα:

- Μια ρίζα (άρα ότι είναι μέσα πρέπει να είναι θετικό), και
- Έναν παρονομαστή που πρέπει να είναι διαφορετικός από το μηδέν.

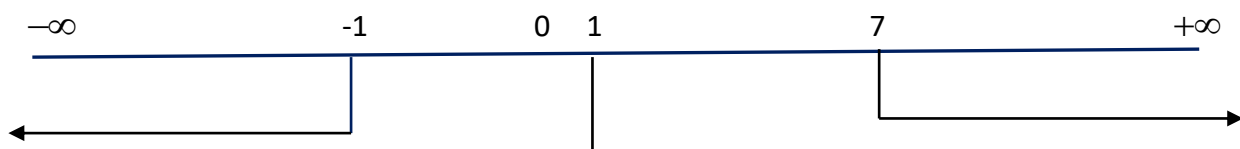
Κάνω ό,τι έκανα στην άσκηση 13

$|x-3|-4 \geq 0 \Leftrightarrow |x-3| \geq 4 \Leftrightarrow x-3 \leq -4 \quad \text{ή} \quad x-3 \geq 4 \Leftrightarrow x \leq 3-4 \quad \text{ή} \quad x \geq 3+4 \Leftrightarrow$
 $x \leq -1 \quad \text{ή} \quad x \geq 7 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [7, +\infty) \quad (1)$

Και επίσης πρέπει: $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \quad (2)$

Τώρα πρέπει να συναληθεύσω τους περιορισμούς (1) και (2), να καταλήξω δηλαδή σε έναν περιορισμό που να έχει μέσα τους και τους δύο. Παρατηρήστε όμως ότι με τον περιορισμό (1) είστε καλυμμένοι αφού ο "κακός" αριθμός 1 είναι ούτως ή άλλως εκτός. (βλέπε σχήμα παρακάτω)

Άρα τελικά απαντάω $A = (-\infty, -1] \cup [7, +\infty)$



$$15. \text{Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης } f(x) = \frac{5x - 2\sqrt{4 - |x - 3|}}{x - 1}$$

Λύση

Εδώ βλέπω και πάλι ότι έχω δύο προβλήματα:

- Μια ρίζα (άρα ότι είναι μέσα πρέπει να είναι θετικό), και
- Έναν παρονομαστή που πρέπει να είναι διαφορετικός από το μηδέν.

Άρα έχω:

$$4 - |x - 3| \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq |x - 3| \Leftrightarrow |x - 3| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x - 3 \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$-4 + 3 \leq x - 3 + 3 \leq 4 + 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow x \in [-1, 7]$$

Επίσης ο δεύτερος περιορισμός δίνει: $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Συναληθεύω και πάλι τους δύο περιορισμούς και καταλήγω πρέπει $x \in [-1, 7] - \{1\} = [-1, 1) \cup (1, 7]$

και άρα τελικά απαντάω ότι $A = [-1, 7] - \{1\} = [-1, 1) \cup (1, 7]$

(με όποιον και από τους δύο τρόπους και αν γράψετε το A είναι το ίδιο)

$$16. \text{Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης } f(x) = \frac{6x^4 - 9}{|x^2 - 1| - 1} + \frac{3x}{|3x - 4| - 5} - \frac{2}{|x - 6| + 7}$$

Λύση

Εδώ βλέπω και πάλι ότι έχω τρεις παρονομαστές που πρέπει να είναι διαφορετικοί από το μηδέν.

Άρα πρέπει:

$$|x^2 - 1| - 1 \neq 0 \Leftrightarrow |x^2 - 1| \neq 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 \neq \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \neq 1 \Leftrightarrow x^2 \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{2} \\ x^2 - 1 \neq -1 \Leftrightarrow x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \end{cases}$$

$$|3x - 4| - 5 \neq 0 \Leftrightarrow |3x - 4| \neq 5 \Leftrightarrow 3x - 4 \neq \pm 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4 \neq 5 \Leftrightarrow 3x \neq 9 \Leftrightarrow x \neq 3 \\ 3x - 4 \neq -5 \Leftrightarrow 3x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$|x - 6| + 7 \neq 0 \Leftrightarrow |x - 6| \neq -7$ που ισχύει πάντα αφού ένα απόλυτα είναι πάντα μη αρνητικό.

Άρα τελικά έχω ότι $A = \mathbb{R} - \left\{-\sqrt{2}, -\frac{1}{3}, 0, \sqrt{2}, 3\right\}$

$$17. \text{Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης } f(x) = 5x - 2\sqrt{4 - |x - 3|} + \frac{3x}{\sqrt{x - 1}}$$

Λύση

Εδώ βλέπω και πάλι ότι έχω δύο προβλήματα:

Κώστας Χρυσανθόπουλος, Μ.Εδ Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών,
5^ο ΓΕΛ Ηλιούπολης

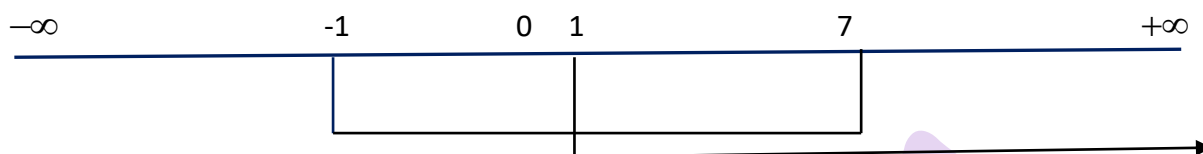
- Μία ρίζα (και άρα ότι έχει μέσα πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το μηδέν), και
- Μια ρίζα σε παρονομαστή οπότε ότι έχει μέσα πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το μηδέν.

Άρα πρέπει:

$$4 - |x - 3| \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq |x - 3| \Leftrightarrow |x - 3| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x - 3 \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$-4 + 3 \leq x - 3 + 3 \leq 4 + 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow x \in [-1, 7] \quad (1)$$

$$\text{Και επίσης πρέπει: } x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \quad (2)$$



Συναληθεύω τους δύο περιορισμούς και καταλήγω ότι ο κοινός περιορισμός είναι:

$$x \in (1, 7] \text{ άρα τελικά } A = (1, 7]$$

Παρατήρηση

Οι συνδυασμοί που μπορούν να γίνουν με συναλήθευση ανισώσεων είναι πολλοί και δεν έχει νόημα να γίνουν πολλές ίδιες ασκήσεις. Αν αντιμετωπίζετε πρόβλημα με τις ανισώσεις και την συναλήθευσή τους, τότε δείτε τα βίντεο: https://youtu.be/Q0lOhIE2_vI και <https://youtu.be/mjhVsBa2Q0s>

Ασκήσεις

Βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = \sqrt{7x - 3x^2}$

2. $f(x) = \frac{5x - 3}{2x - 6}$

3. $f(x) = \frac{3x^4 - 2x + 1}{x^4 + 7}$

4. $f(x) = \frac{3x^4 - 2\sqrt{6 - 3x}}{x^4 + 7}$

5. $f(x) = \frac{3x - 8}{x^2 - 5x + 6}$

6. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

7. $f(x) = \frac{3x - 2}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$

8. $f(x) = \sqrt{2 - x} + \sqrt{3x - 10}$

9. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9} - \frac{1}{\sqrt{x - 2}}$

10. $f(x) = \sqrt{9 - x^2} - \frac{1}{\sqrt{x - 2}}$

11. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9} + \frac{6 - x}{\sqrt{2x - 6}}$

12. $f(x) = \sqrt{9 - x^2} - \frac{1}{\sqrt{2x - 6}}$

13. $f(x) = \sqrt{9 - x^2} - 3\sqrt{2x - 6}$

14. $f(x) = \sqrt{1 - x^2} - 3\sqrt{x^2 - 4}$

15. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - 3\sqrt{4 - x^2}$

16. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - 3\sqrt{-x^2 + 2x + 3}$

17. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - 3x + \frac{2x^2 - 5x}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}$

18. $f(x) = \frac{3x^2 - 5x}{|3x - 9| - 5}$

$$19. f(x) = \frac{3x^2 - 5x - 1}{\sqrt{|x-5|} - 8}$$

$$20. f(x) = \frac{3x^2 - 5x - 1}{\sqrt{8 - |x-5|}}$$

$$21. f(x) = \frac{5x-1}{\sqrt{8-|x-5|}} + \frac{7x}{2x-4}$$

Υποδείξεις για την λύση των ασκήσεων – Απαντήσεις

1. Κανένας περιορισμός, άρα $A = \mathbb{R}$
2. Πρέπει $x - 3 \neq 0 \dots A = \mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$
3. Πρέπει $x^4 + 7 \neq 0$ που όμως ισχύει γιατί $x^4 + 7 > 0 \dots$ Άρα τελικά $A = \mathbb{R}$
4. Πρέπει $6 - 3x \geq 0$ και $x^4 + 7 \neq 0 \dots$ Τελικά $A = (-\infty, 2]$
5. Πρέπει $x^2 - 5x + 6 \neq 0 \dots$ Άρα τελικά $A = \mathbb{R} - \{2, 3\}$
6. Πρέπει $x^2 - 5x + 6 \geq 0 \dots$ Λύνω την εξίσωση πρώτα, κάνω μετά πινακάκι (βλέπε λυμένη 8) και από εκεί έχω ότι $x \leq 2$ ή $x \geq 3$. Άρα τελικά $A = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$
7. Πρέπει $x^2 - 5x + 6 > 0 \dots$ Όπως πριν ... Άρα τελικά $A = (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$
8. Πρέπει $2 - x \geq 0$ και $3x - 10 \geq 0 \dots$ Αυτές όμως δεν συναληθεύουν πουθενά, άρα ΔΕΝ μπορώ να ορίσω τέτοια συνάρτηση, δεν υπάρχει δηλαδή συνάρτηση με τέτοιο τύπο.
9. Πρέπει $x^2 - 9 \geq 0$ και $x - 2 > 0 \dots$ Η πρώτη ανίσωση (βλέπε λυμένη 7) οδηγεί στη λύση $x \leq -3$ ή $x \geq 3$ και η δεύτερη στη λύση $x > 2$. Τελικά $A = [3, +\infty)$
10. Πρέπει $9 - x^2 \geq 0$ και $x - 2 > 0 \dots$ Η πρώτη οδηγεί στη λύση $-3 \leq x \leq 3$. Τελικά $A = (2, 3]$
11. Πρέπει $x^2 - 9 \geq 0$ και $2x - 6 > 0 \dots$ Τελικά $A = (3, +\infty)$
12. Πρέπει $9 - x^2 \geq 0$ και $2x - 6 > 0 \dots$ Δεν συναντιούνται πουθενά, άρα ΔΕΝ μπορώ να ορίσω συνάρτηση με αυτόν το τύπο.
13. Πρέπει $9 - x^2 \geq 0$ και $2x - 6 \geq 0 \dots$ Συναντιούνται μόνο στο σημείο 3, άρα τελικά έχω $A = \{3\}$ [δηλαδή αυτός ο τύπος συνάρτησης ορίζεται μόνο για $x = 3$].

14. Πρέπει $1 - x^2 \geq 0$ και $x^2 - 4 \geq 0$. Η πρώτη οδηγεί στη λύση $-1 \leq x \leq 1$ και η δεύτερη στη λύση $x \leq -2$ ή $x \geq 2$. Αυτές όμως δεν συναληθεύουν πουθενά, άρα ΔΕΝ μπορώ να ορίσω τέτοια συνάρτηση, δεν υπάρχει δηλαδή συνάρτηση με τέτοιο τύπο.
15. Πρέπει $x^2 - 1 \geq 0$ και $4 - x^2 \geq 0$. Η πρώτη οδηγεί στη λύση $x \leq -1$ ή $x \geq 1$ και η δεύτερη οδηγεί στη λύση $-2 \leq x \leq 2$. Άρα τελικά έχω $A = [-2, -1] \cup [1, 2]$
16. Πρέπει $x^2 - 1 \geq 0$ και $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$. Η πρώτη οδηγεί στη λύση $x \leq -1$ ή $x \geq 1$ και η δεύτερη με πινακάκι οδηγεί στη λύση $-1 \leq x \leq 3$. Άρα τελικά έχω $A = \{-1\} \cup [1, 3]$
17. Πρέπει $x^2 - 1 \geq 0$ και $-x^2 + 2x + 3 > 0$. Η πρώτη οδηγεί στη λύση $x \leq -1$ ή $x \geq 1$ και η δεύτερη με πινακάκι οδηγεί στη λύση $-1 < x < 3$. Άρα τελικά έχω $A = [1, 3)$
18. Πρέπει $|3x - 9| - 5 \neq 0$, λύνω όπως λυμένη 16 και τελικά βγάζω $x \neq \frac{14}{3}$ και $x \neq \frac{4}{3}$. Άρα τελικά έχω $A = \mathbb{R} - \left\{ \frac{4}{3}, \frac{14}{3} \right\}$
19. Πρέπει $|x - 5| - 8 > 0$ και όπως λυμένες 12, 13, 14 καταλήγω ότι $x \leq -3$ ή $x \geq 13$. Άρα τελικά έχω: $A = (-\infty, -3) \cup (13, +\infty)$
20. Πρέπει $8 - |x - 5| > 0$ και όπως λυμένες 12, 13, 14 καταλήγω ότι $-3 < x < 13$. Άρα τελικά έχω ότι $A = (-3, 13)$
21. Πρέπει $8 - |x - 5| > 0$ και όπως λυμένες 12, 13, 14 καταλήγω ότι $-3 < x < 13$. Επίσης πρέπει $2x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$. Άρα τελικά $A = (-3, 13) - \{2\} = (-3, 2) \cup (2, 13)$