

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4

ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

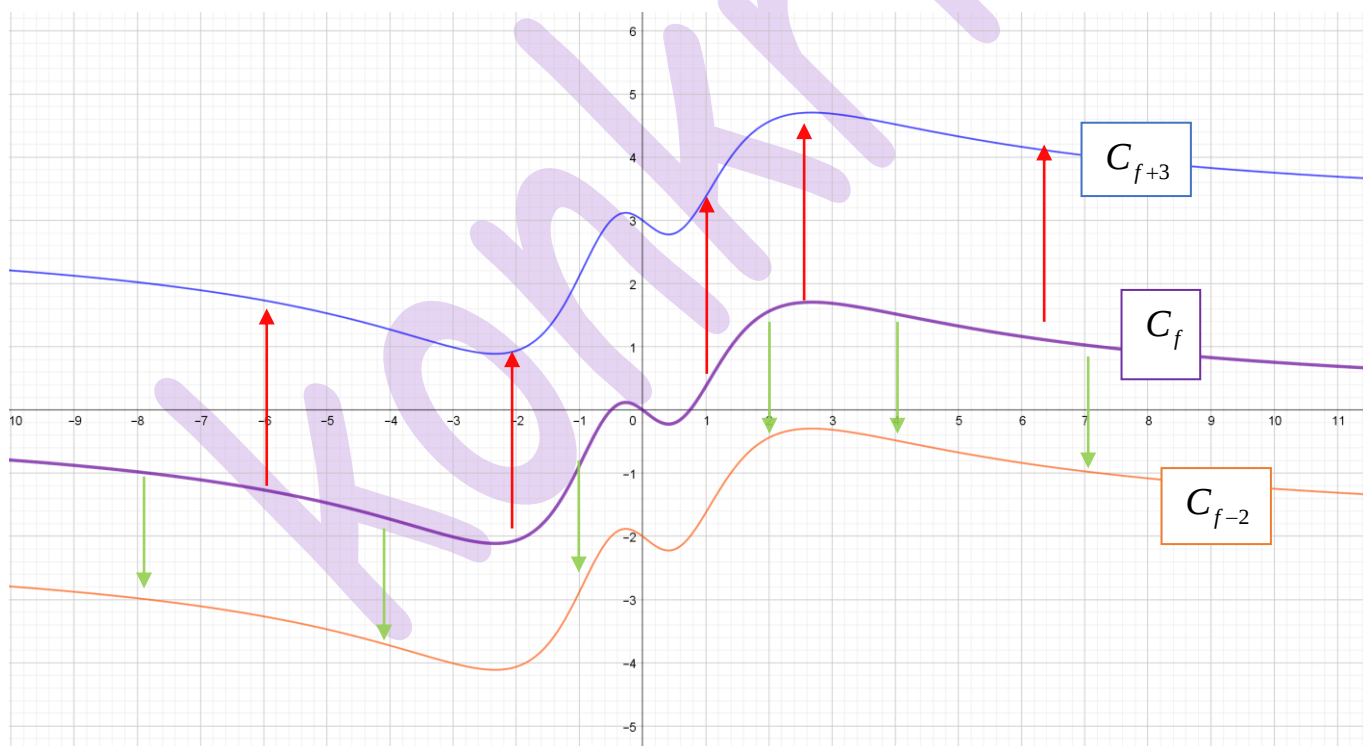
ΘΕΩΡΙΑ

Έστω μια συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ με γραφική παράσταση C_f . Θα μελετήσουμε τι μεταβολές συμβαίνουν στη γραφική της παράσταση όταν 'πειράξω' τον τύπο της συνάρτησης.

Θα εξετάσουμε 5 μεταβολές.

1. Έστω συνάρτηση με τύπο $y = f(x)$ και γραφική παράσταση C_f . Αν στον τύπο της συνάρτησης προσθέσουμε στο τέλος έναν αριθμό c (δηλαδή φτιάξουμε τη συνάρτηση $y = f(x) + c$), τότε η νέα γραφική παράσταση C_{f+c} θα είναι η αρχική γραφική παράσταση 'ανεβασμένη' προς τα πάνω ή 'κατεβασμένη' προς τα κάτω όσο είναι ο αριθμός c .

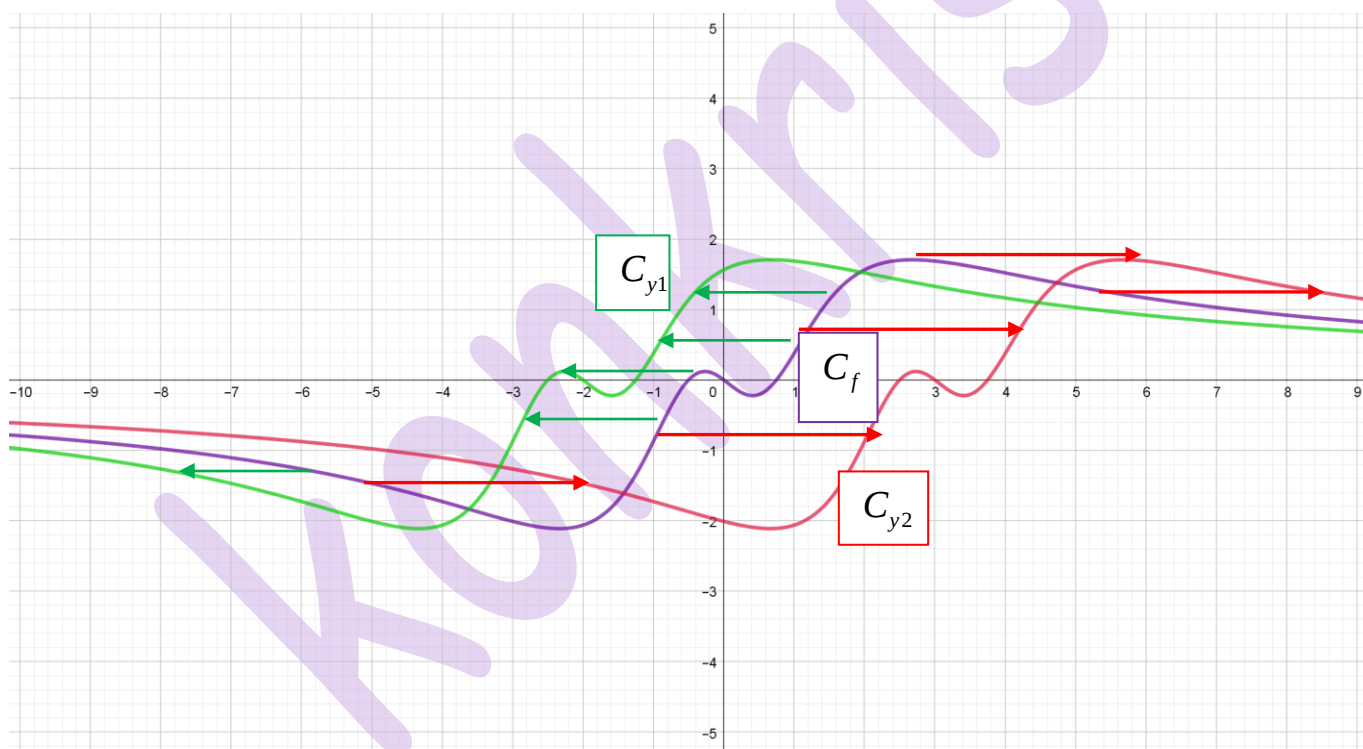
Για παράδειγμα έστω μια τυχαία συνάρτηση με γραφική παράσταση C_f όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δείτε την C_{f+3} (τα **κόκκινα βέλη** δείχνουν ότι 'σπρώξαμε' την C_f προς τα πάνω 3 μονάδες) και δείτε και την C_{f-2} (τα **πράσινα βέλη** δείχνουν ότι 'σπρώξαμε' την C_f προς τα κάτω 2 μονάδες).



Θα δούμε και τη μεταβολή 2 και μετά θα δούμε κάποια παραδείγματα

2. Έστω συνάρτηση με τύπο $y = f(x)$ και γραφική παράσταση C_f . Αν στον τύπο της συνάρτησης προσθέσουμε στο x έναν αριθμό c (δηλαδή φτιάξουμε τη συνάρτηση $y = f(x + c)$), τότε η νέα γραφική παράσταση C_g θα είναι η αρχική γραφική μετατοπισμένη δεξιά αριστερά αντίστροφα από ότι λέει ο αριθμός c . Δηλαδή αν μας ζητήσουν τη συνάρτηση $y = f(x+3)$ θα 'σπρώξω' τη γραφική παράσταση της C_f προς τα αριστερά 3 μονάδες, ενώ αν μας ζητήσουν την γραφική παράσταση της $y = f(x-2)$ θα 'σπρώξω' τη γραφική παράσταση της C_f προς τα δεξιά 2 μονάδες.

Για παράδειγμα έστω μια τυχαία συνάρτηση $y = f(x)$ με γραφική παράσταση C_f όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δείτε την $y_1 = f(x - 3)$ (τα **κόκκινα βέλη** δείχνουν ότι 'σπρώξαμε' την C_f προς τα δεξιά 3 μονάδες και προέκυψε η C_{y1}) και δείτε και την $y_2 = f(x + 2)$ (τα **πράσινα βέλη** δείχνουν ότι σπρώξαμε' την C_f προς τα αριστερά 2 μονάδες και προέκυψε η C_{y2}).



Πριν προχωρήσουμε στις επόμενες μεταβολές, θέλουμε να τονίσουμε ότι αυτές οι δύο μετατοπίσεις είναι πολύ σημαντικές και επίσης χρειάζεται προσοχή γιατί μερικές φορές οι μαθητές τις μπερδεύουν μεταξύ τους.

Έτσι, αν για παράδειγμα ξεκινήσουμε από τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, τότε αν σας ζητήσουν να φτιάξετε

τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ τότε έχουμε την πρώτη περίπτωση, δηλαδή 'σπρώχνουμε' την $f(x) = \frac{1}{x}$

προς τα πάνω κατά 1 μονάδα. Ενώ αν σας ζητήσουν να φτιάξετε την $f(x) = \frac{1}{x+1}$, τότε έχουμε τη

δεύτερη μεταβολή, δηλαδή τώρα το +1 επηρεάζει μόνο το x και όχι όλο τον τύπο. Άρα τώρα θα

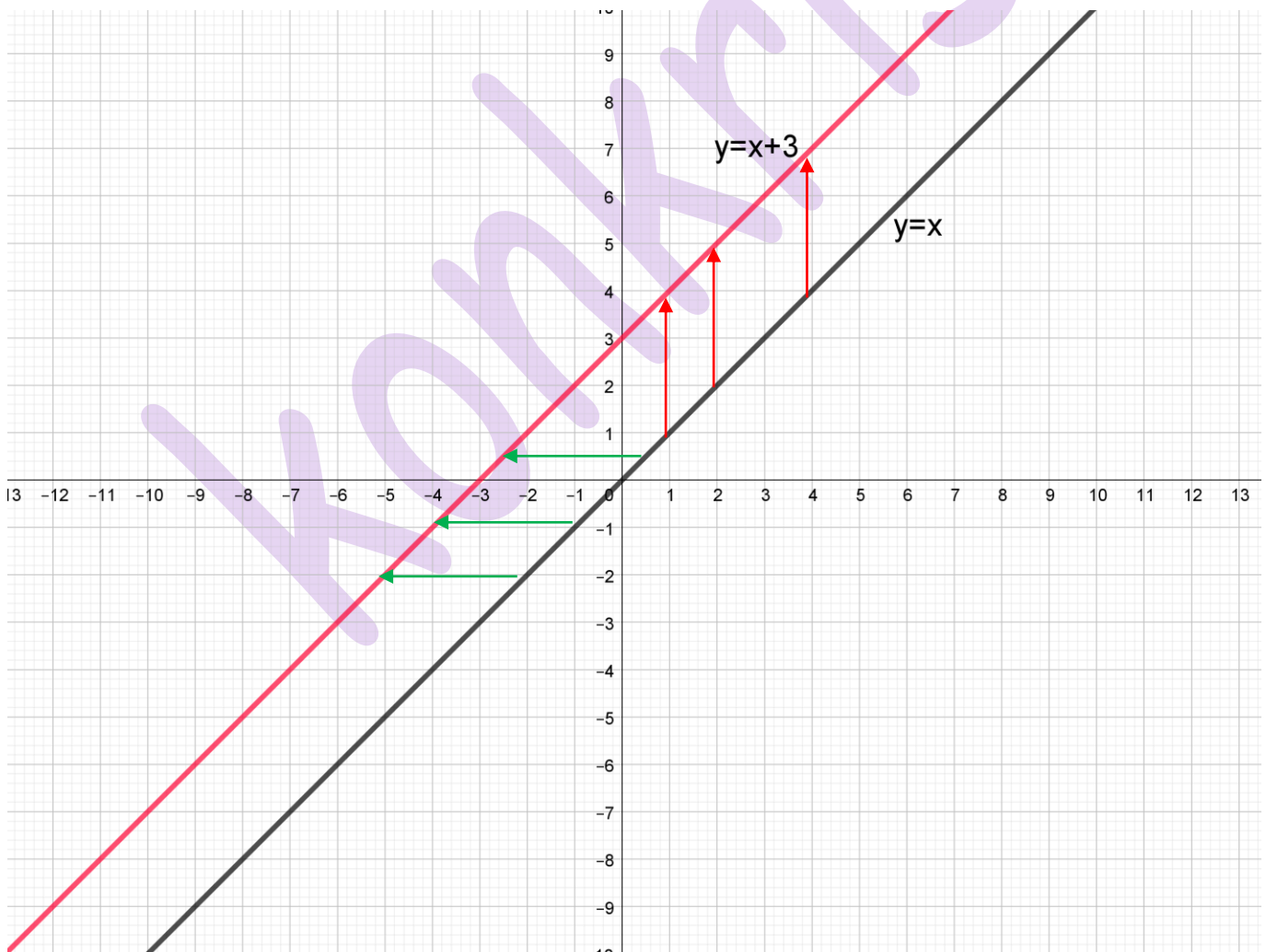
σπρώξουμε την $f(x) = \frac{1}{x}$ προς τα αριστερά κατά 1 μονάδα.

Επίσης να θυμόμαστε ότι **ειδικά για την συνάρτηση $y = x$ και μόνο για αυτή, οι δυο μεταβολές που περιγράψαμε ταυτίζονται.**

Για παράδειγμα, αν μας ζητήσουν να φτιάξουμε την $y = x+3$, τότε μπορούμε να σκεφτούμε και με τους δύο τρόπους:

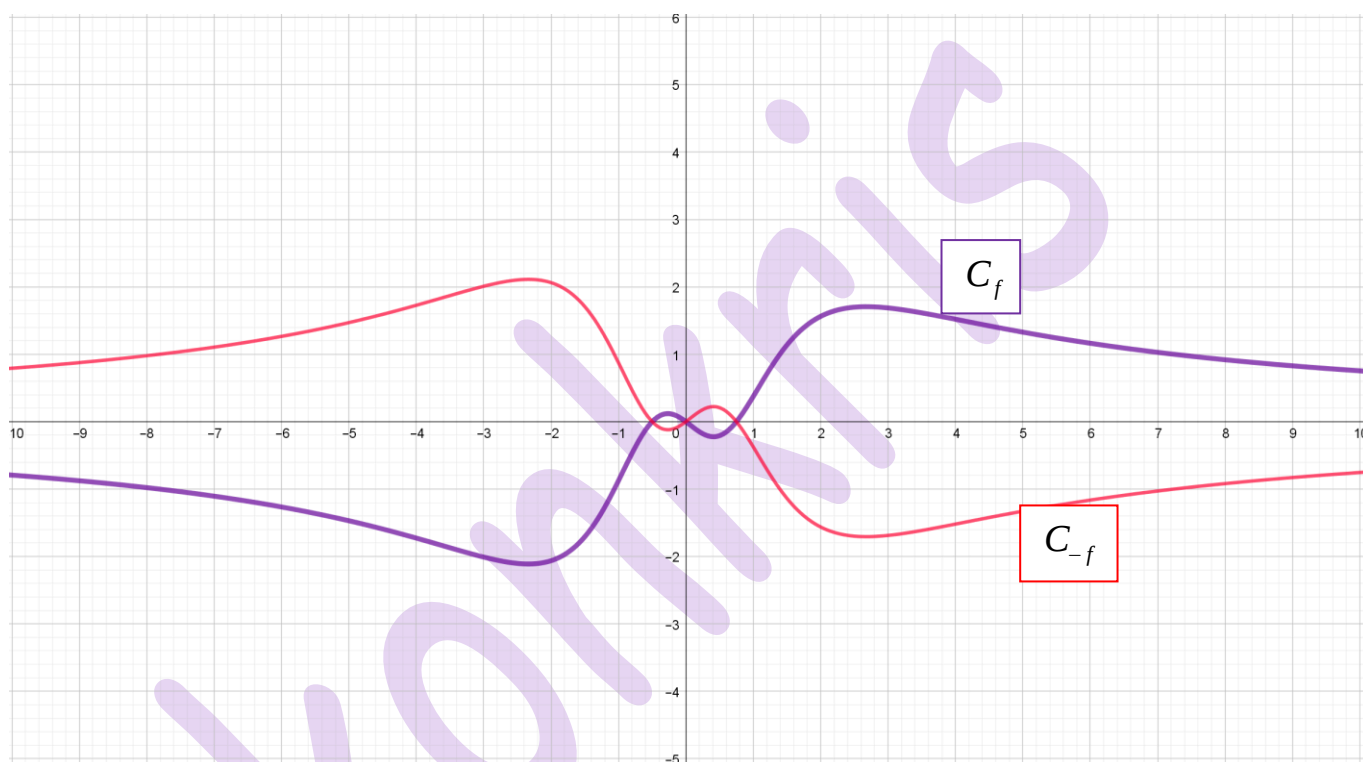
- Ο ένας μαθητής μπορεί να πει: Παίρνω την $y = x$ και της προσθέτω στο τέλος τον αριθμό 3, άρα σύμφωνα με την 1^η μεταβολή θα σπρώξω την $y = x$ προς τα πάνω 3 μονάδες (**κόκκινα βέλη** στο παρακάτω σχήμα).
- Ο άλλος μαθητής μπορεί να πει: παίρνω την $y = x$ και προσθέτω τον αριθμό 3 στον x , άρα σύμφωνα με την 2^η μεταβολή θα σπρώξω την $y = x$ προς τα αριστερά κατά 3 μονάδες (**πράσινα βέλη** στο παρακάτω σχήμα).

Όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα, με όποιον τρόπο και αν σκεφθούμε καταλήγουμε στο ίδιο σχήμα.



3. Έστω συνάρτηση με τύπο $y = f(x)$ και γραφική παράσταση C_f . Αν μπροστά από τον τύπο της συνάρτησης βάλουμε το μείον (δηλαδή αν φτιάξουμε τη συνάρτηση $y = -f(x)$), τότε η νέα γραφική παράσταση C_{-f} θα είναι συμμετρική της αρχικής γραφικής παράστασης ως προς τον άξονα $x'x$.

Δηλαδή για να φτιάξουμε τη γραφική παράσταση της C_{-f} αρκεί να περιστρέψουμε τον άξονα $x'x$. Για παράδειγμα έστω μια τυχαία συνάρτηση με γραφική παράσταση C_f όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δείτε την C_{-f} με το **κόκκινο χρώμα**.



Παρατηρήστε ότι C_{-f} είναι απολύτως συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $x'x$.

Σε αυτή τη μεταβολή είναι πολύ σημαντικό να προσέξουμε ότι την εφαρμόζουμε όταν βάζουμε μείον **μπροστά από όλον τον τύπο της $f(x)$** , όχι απλά μπροστά από τον πρώτο της όρο.

Δηλαδή, αν για παράδειγμα μου δώσουν τη συνάρτηση $f(x) = 2x - 3$, τότε η $-f(x)$ **δεν σημαίνει**

$-f(x) = -2x - 3$. $-f(x)$ σημαίνει ότι βάζω το μείον μπροστά από όλον τον τύπο, δηλαδή:

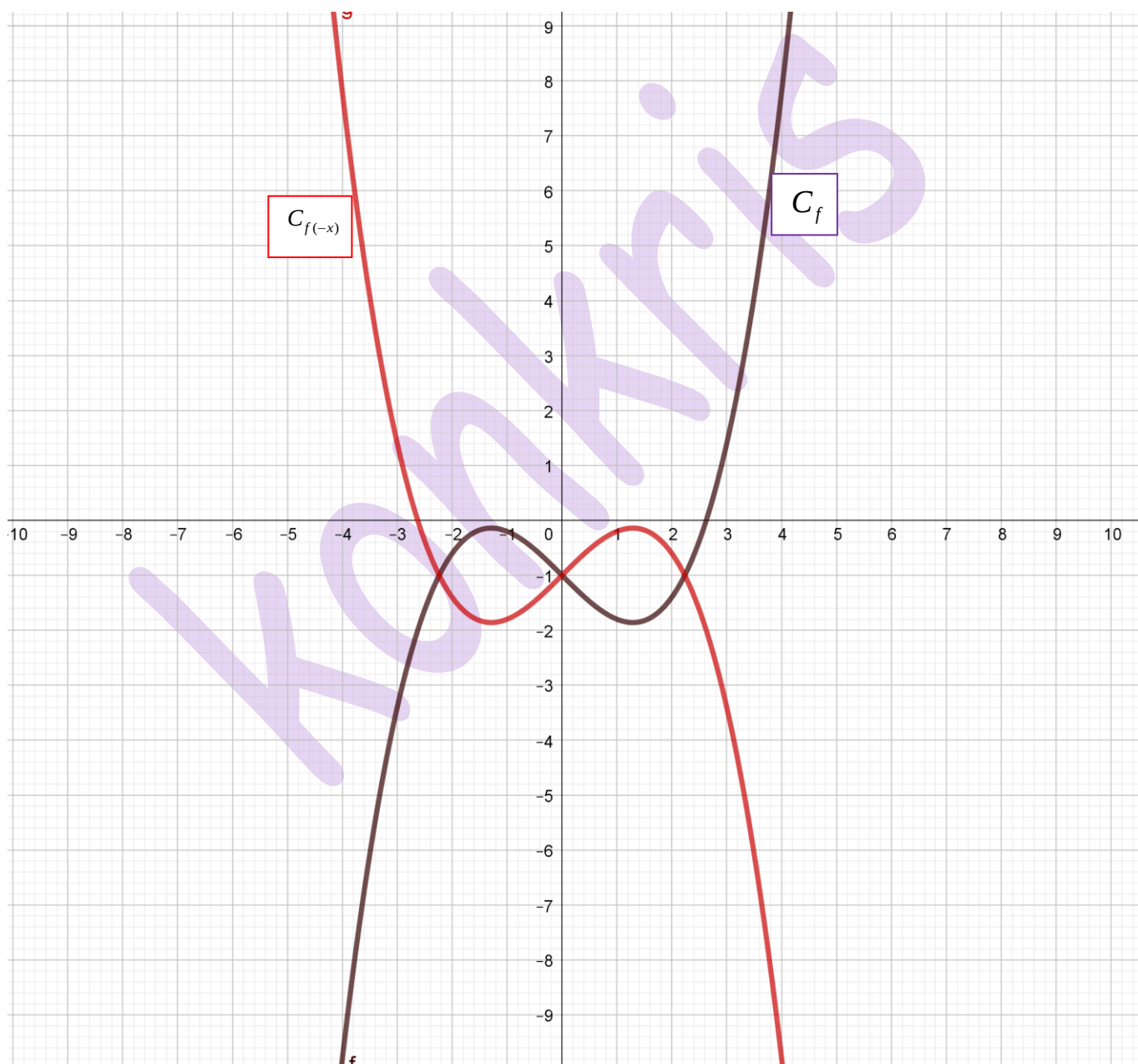
$$-f(x) = -(2x - 3) = -2x + 3.$$

Ομοίως, αν μας δώσουν τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 2x - 6$, τότε η $-f(x)$ θα είναι η:

$$-f(x) = -(2x^2 - 2x - 6) = -2x^2 + 2x + 6$$

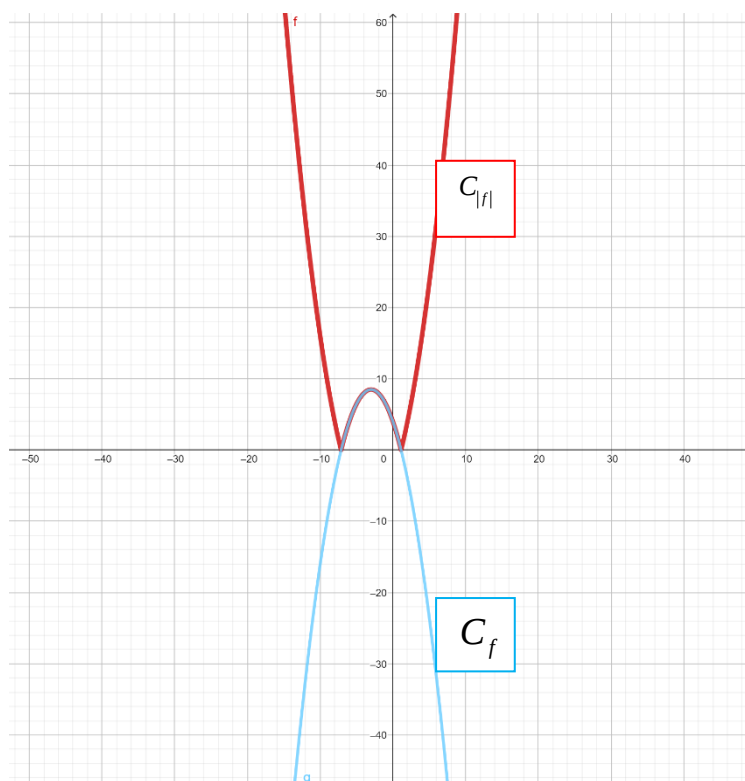
4. Έστω συνάρτηση με τύπο $y = f(x)$ και γραφική παράσταση C_f . Αν μπροστά από το x της συνάρτησης βάλουμε το μείον (δηλαδή αν φτιάξουμε τη συνάρτηση $y = f(-x)$), τότε η νέα γραφική παράσταση $C_{f(-x)}$ θα είναι συμμετρική της αρχικής γραφικής παράστασης ως προς τον άξονα $y'y$.

Δηλαδή για να φτιάξουμε τη γραφική παράσταση της $C_{f(-x)}$ αρκεί να περιστρέψουμε τον άξονα $y'y$. Για παράδειγμα έστω μια τυχαία συνάρτηση με γραφική παράσταση C_f όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δείτε την $C_{f(-x)}$ με το **κόκκινο χρώμα**.



5. Έστω συνάρτηση με τύπο $y = f(x)$ και γραφική παράσταση C_f . Αν βάλουμε τη συνάρτηση σε απόλυτη τιμή (δηλαδή αν φτιάξουμε τη συνάρτηση $y = |f(x)|$), τότε η νέα γραφική παράσταση $C_{|f|}$ θα κρατάει απείραχτα τα κομμάτια της C_f που είναι θετικά (δηλαδή ότι βρίσκεται πάνω από την άξονα $x'x$) και αντιστρέφει όσα κομμάτια της C_f είναι αρνητικά (δηλαδή ότι βρίσκεται κάτω από την άξονα $x'x$).

Για παράδειγμα έστω μια τυχαία συνάρτηση με γραφική παράσταση C_f όπως φαίνεται στο παρακάτω



σχήμα. Η μπλε καμπύλη παριστάνει τη C_f , ενώ η κόκκινη καμπύλη είναι η $C_{|f|}$.

Άρα, συνοψίζοντας έχουμε:

1. Η $y = f(x) + c$ προκύπτει από την C_f που την πάω πάνω ή κάτω τόσο όσο λέει ο αριθμός c .
2. Η $y = f(x + c)$ προκύπτει από την C_f που την πάω δεξιά ή αριστερά κατά c **αλλά με ανάποδο πρόσημο**.
3. Η $y = -f(x)$ είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $x'x$.
4. Η $y = f(-x)$ είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $y'y$.
5. Η $y = |f(x)|$ κρατάει τα θετικά κομμάτια της C_f ίδια και γυρίζει πάνω τα αρνητικά.

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα με αυτές τις μετατοπίσεις

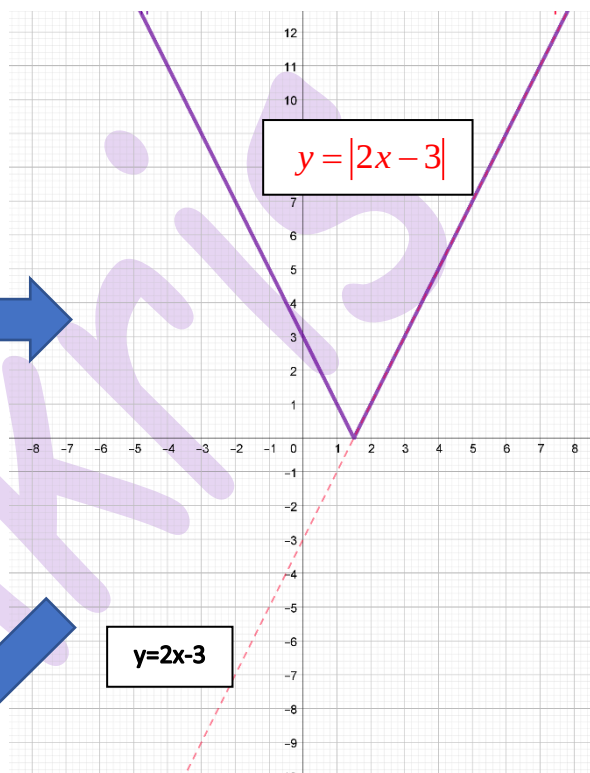
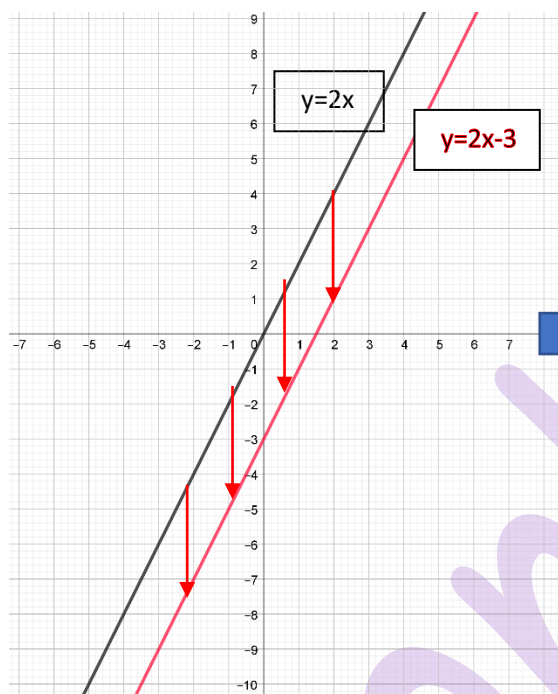
Ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση $f(x) = |2x - 3| - 4$

Λύση

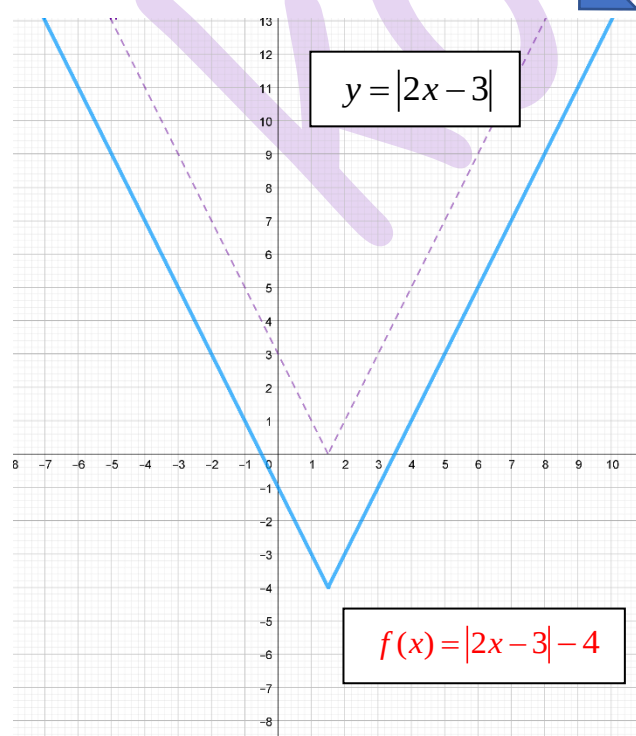
Ξεκινάω από την $f(x) = 2x$, στη συνέχεια τη 'σπρώχνω' προς τα κάτω κατά 3 και φτιάχνω την $f(x) = 2x - 3$, μετά βάζω απόλυτο και παίρνω την $f(x) = |2x - 3|$ και στο τέλος την κατεβάζω κατά 4 μονάδες. Άρα:

Ξεκινάω φτιάχνοντας την $f(x) = 2x$ (είναι σαν την $y = x$ αλλά πιο 'όρθια')



Παρατηρήστε στο δεύτερο σχήμα ότι έχουμε διατηρήσει με διακεκομμένη γραμμή την $y = 2x - 3$ για να φανεί απλά τι κάνει η απόλυτη τιμή.

Τελικά, κατεβάζουμε την $y = |2x - 3|$ κατά 4 μονάδες και έχουμε την τελική συνάρτηση, την $f(x) = |2x - 3| - 4$

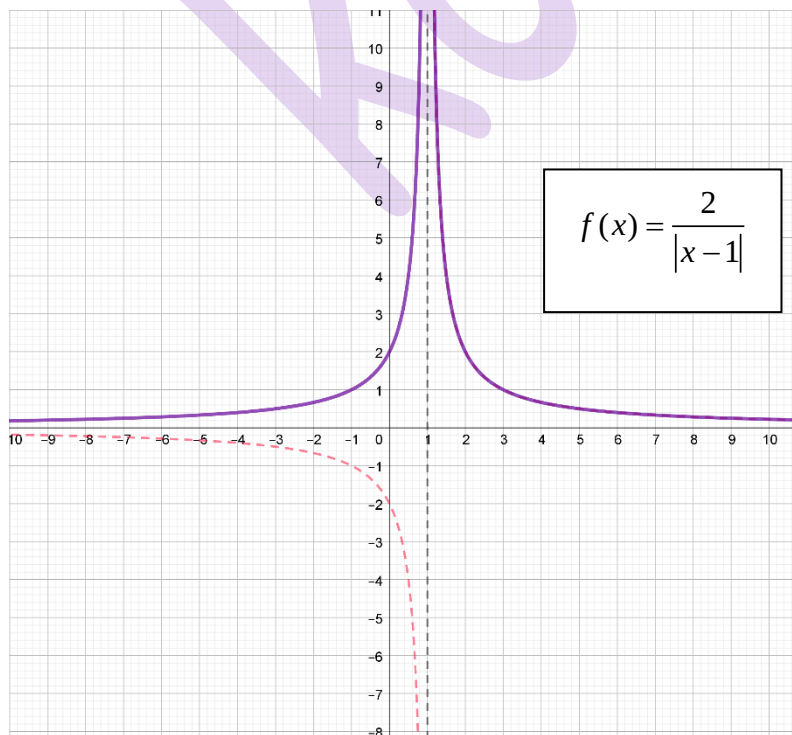
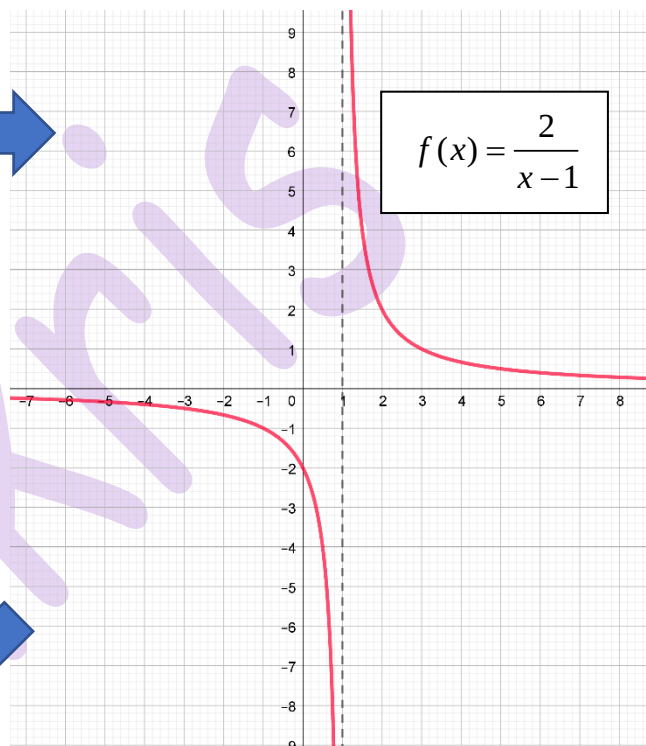
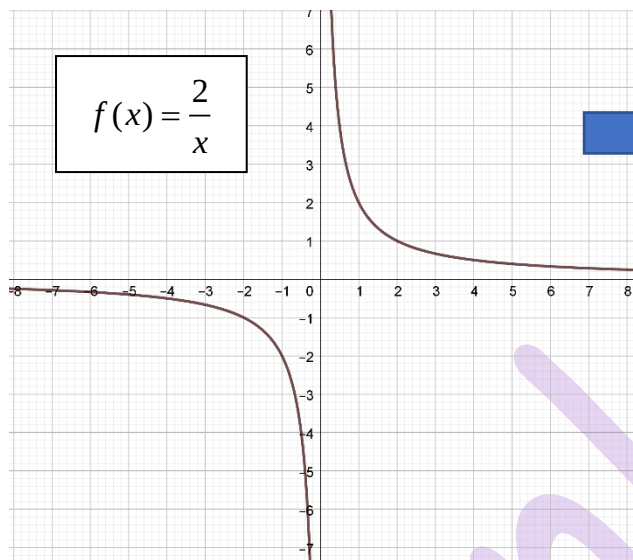


2. Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{|x-1|}$

Λύση

Αρχικά παρατηρώ ότι λόγω της ιδιότητας των απολύτων έχω ότι: $f(x) = \frac{2}{|x-1|} = \left| \frac{2}{x-1} \right|$

Άρα ξεκινάω με την υπερβολή $f(x) = \frac{2}{x}$, στη συνέχεια τη 'σπρώχνω' προς τα δεξιά κατά 1, και στο τέλος της βάζω απόλυτο. Άρα:



Στο σχήμα 2 σημειώσαμε με διακεκομμένη γραμμή την ευθεία $x = 1$

Στο τελικό σχήμα έχουμε διατηρήσει με διακεκομμένη γραμμή την $f(x) = \frac{2}{x-1}$ για να φανεί πώς κρατάμε το θετικό της κομμάτι (αυτό που είναι πάνω από τον άξονα x') και αντιστρέφουμε το αρνητικό κομμάτι (αυτό που είναι κάτω από τον άξονα x') κι έτσι φτιάχνουμε την τελική συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{|x-1|}$.

3. Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{|x+2|} + 2$

Λύση

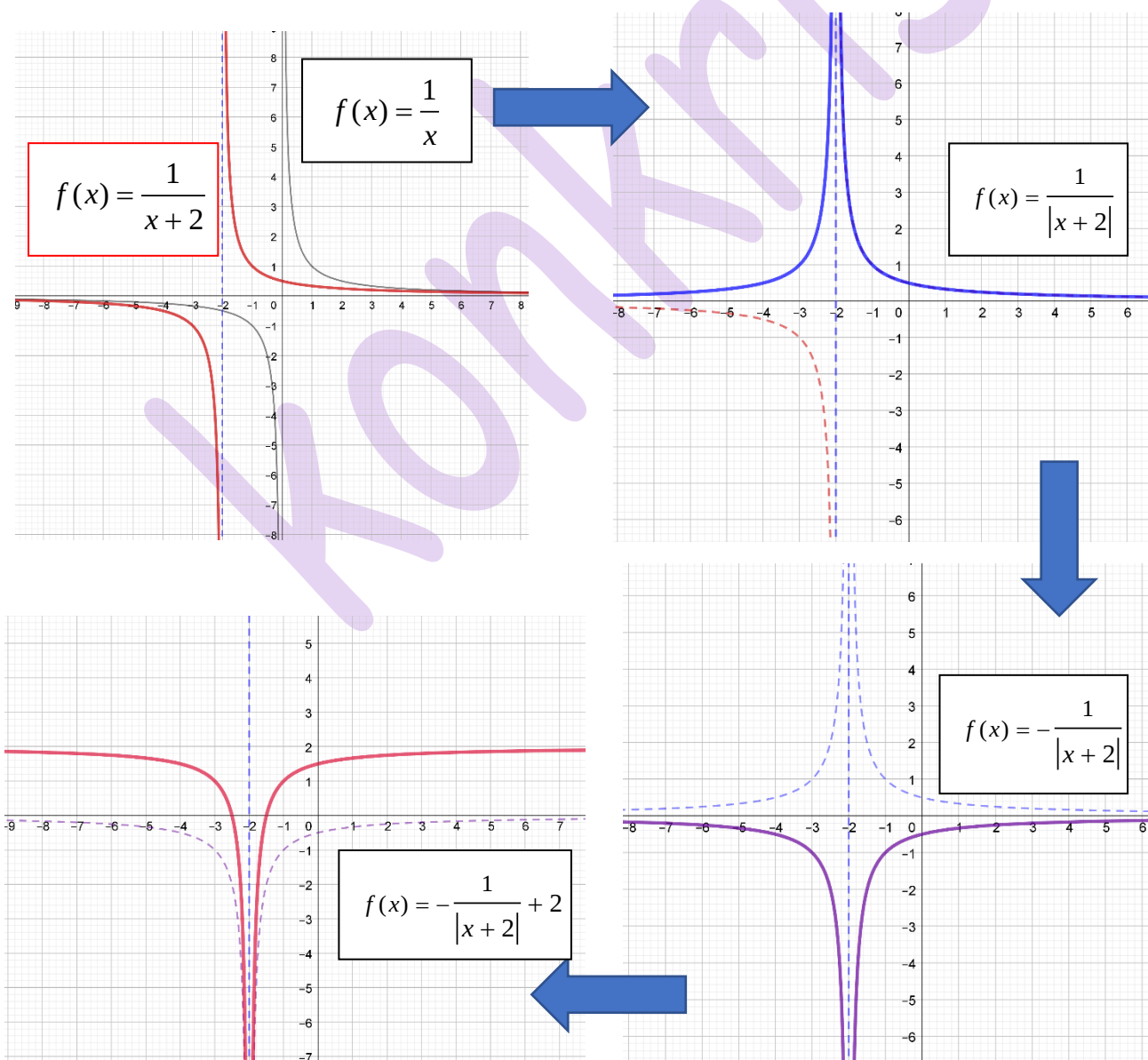
Τώρα ξεκινάμε με την υπερβολή $f(x) = \frac{1}{x}$, στη συνέχεια τη 'σπρώχνουμε' προς τα αριστερά κατά 2

μονάδες και φτιάχνουμε την $f(x) = \frac{1}{x+2}$, μετά της βάζουμε απόλυτο και φτιάχνουμε την

$f(x) = \frac{1}{|x+2|}$ (θυμηθείτε από τα απόλυτα ότι $\frac{1}{|x+2|} = \left| \frac{1}{x+2} \right|$), στην συνέχεια την

'αναποδογυρίζουμε' ως προς τον άξονα x'x και φτιάχνουμε την $f(x) = -\frac{1}{|x+2|}$, και στο τέλος την

ανεβάζουμε κατά 2 μονάδες και φτιάχνουμε την τελική συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{|x+2|} + 2$. Άρα:



4. Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση $f(x) = \left| \frac{3x+1}{x} \right|$

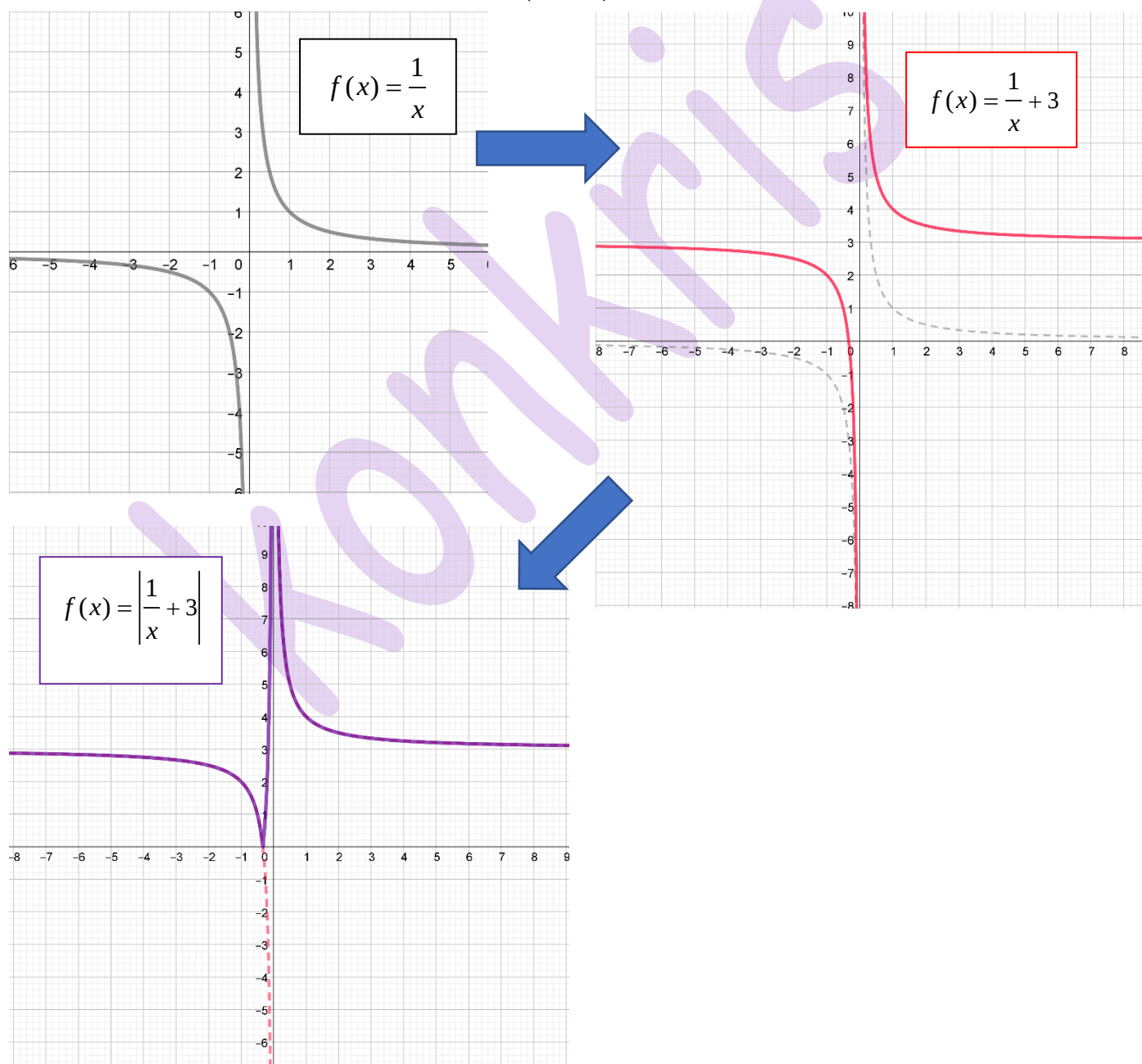
Λύση

Εδώ αρχικά μπορεί να μπερδευτούμε γιατί δεν φαίνεται να κρύβεται καμιά από τις γνωστές μας συναρτήσεις, αλλά με λίγες πράξεις αποκαλύπτεται.

$$\left| \frac{3x+1}{x} \right| = \left| \frac{3x}{x} + \frac{1}{x} \right| = \left| 3 + \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} + 3 \right|, \text{ άρα } f(x) = \left| \frac{1}{x} + 3 \right|. \text{ Οπότε ξεκινάω με την υπερβολή } f(x) = \frac{1}{x},$$

την ανεβάζω κατά 3 και πάω στην $f(x) = \frac{1}{x} + 3$ και μετά της βάζω απόλυτο και καταλήγω στην

$$f(x) = \left| \frac{1}{x} + 3 \right| \text{ που όπως είπαμε είναι η } f(x) = \left| \frac{3x+1}{x} \right|. \text{ Άρα έχουμε:}$$

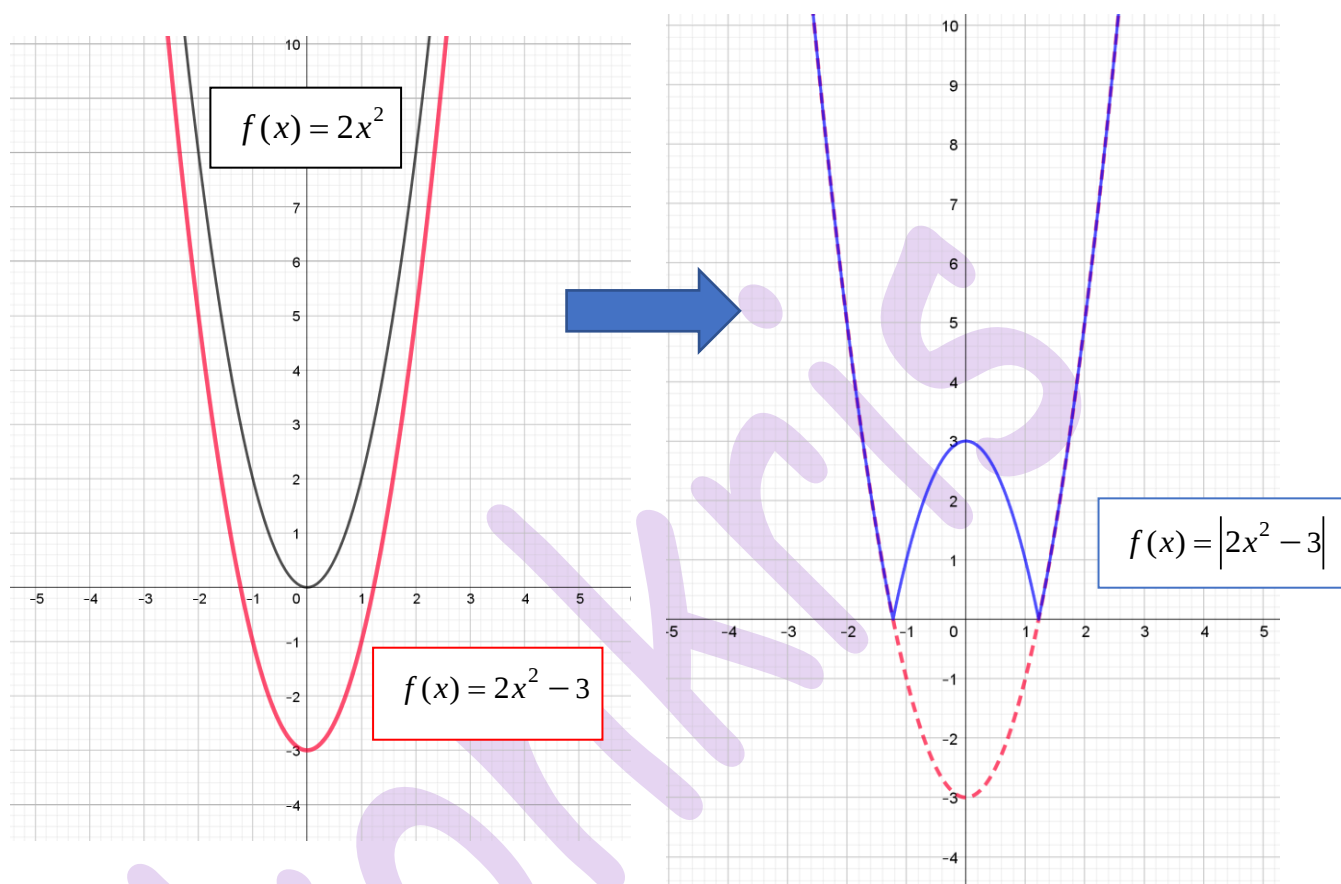


5. Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση $f(x) = |2x^2 - 3|$

Λύση

Τώρα ξεκινάμε με την $f(x) = 2x^2$ που είναι παραβολή με κορυφή στο 0 και το άνοιγμα προς τα πάνω.

Στη συνέχεια τη σπρώχνουμε προς τα κάτω και παίρνουμε την $f(x) = 2x^2 - 3$ και στο τέλος της βάζουμε απόλυτο. Άρα:



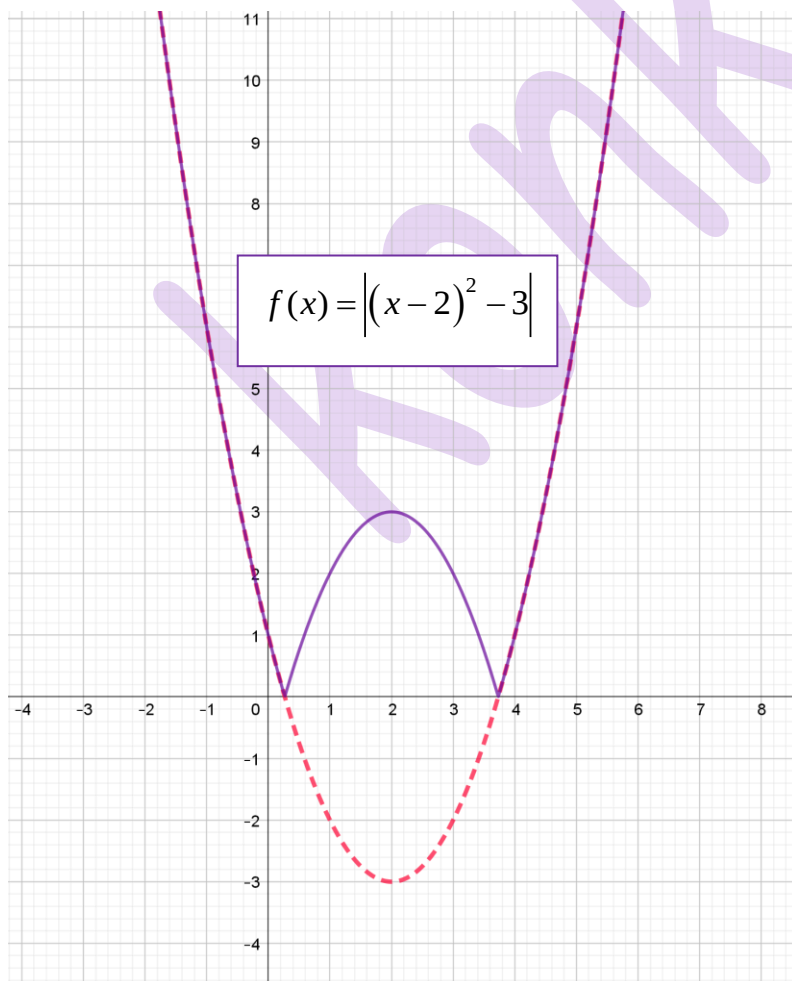
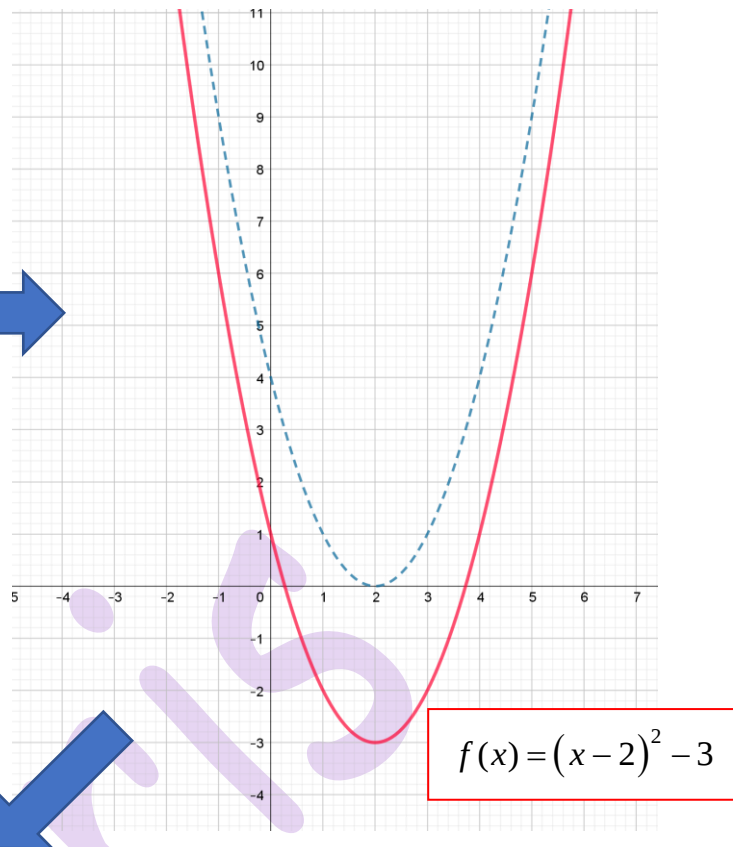
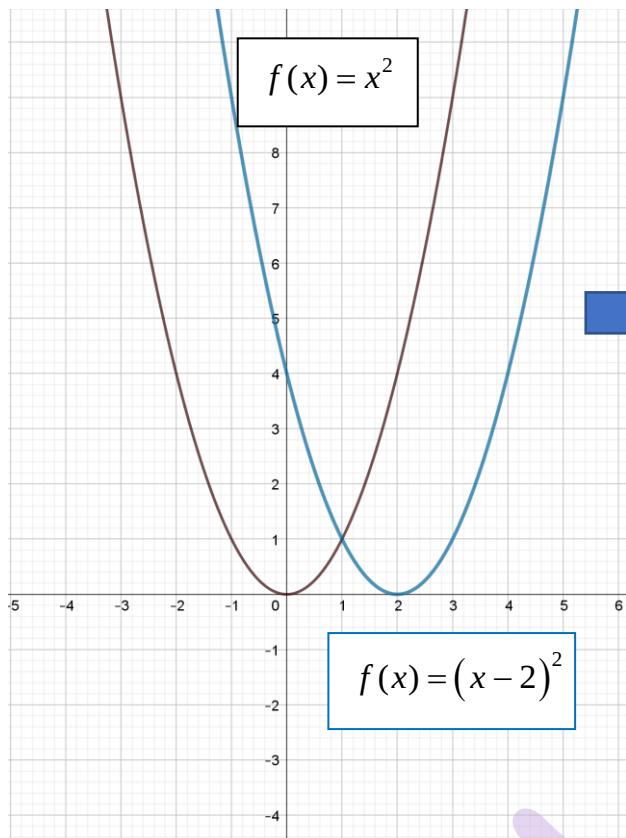
6. Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση $f(x) = |x^2 - 4x + 1|$

Λύση

*βλέπω
ταυτότητα*

Παρατηρούμε ότι $x^2 - 4x + 1 = x^2 - 4x + 4 - 3 = (x - 2)^2 - 3$, άρα έχουμε ότι:

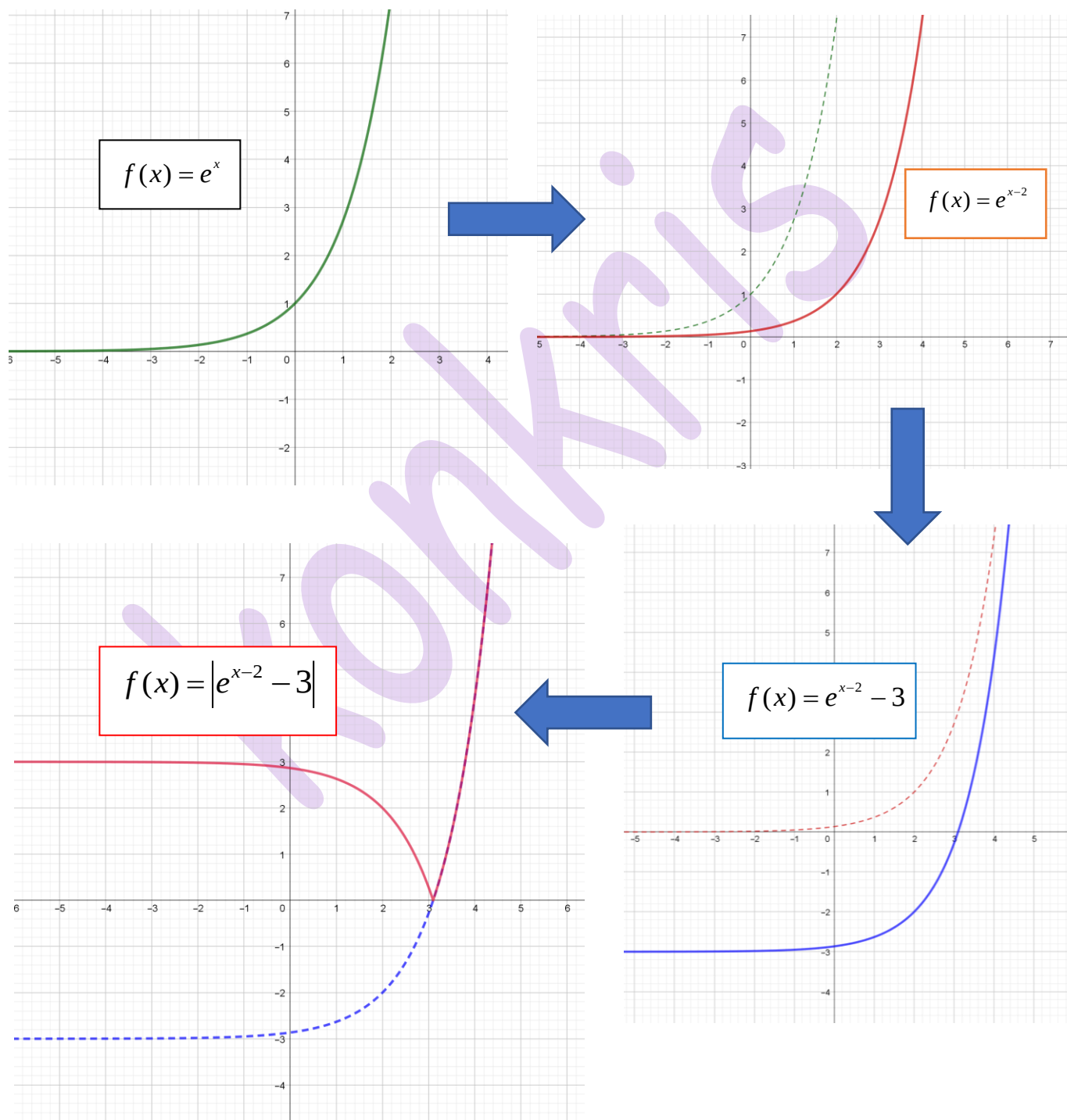
$f(x) = |x^2 - 4x + 1| = |(x - 2)^2 - 3|$. Οπότε, θα ξεκινήσουμε από την $f(x) = x^2$ (παραβολή με κορυφή στο 0 και άνοιγμα προς τα πάνω), μετά την πάμε δεξιά κατά 2, μετά θα την κατεβάσουμε κατά 3 και στο τέλος θα της βάλουμε απόλυτο. Άρα:



7. Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση $f(x) = |e^{x-2} - 3|$

Λύση

Θα ξεκινήσουμε από την $f(x) = e^x$, θα την μετακινήσουμε προς τα αριστερά κατά δύο μονάδες και θα πάρουμε την $f(x) = e^{x-2}$, μετά θα την σπρώξουμε προς τα κάτω κατά τρεις μονάδες και θα πάρουμε την $f(x) = e^{x-2} - 3$. Στο τέλος θα φτιάξουμε την $f(x) = |e^{x-2} - 3|$ κρατώντας τα θετικά κομμάτια και αναποδογυρίζοντας τα αρνητικά.



8. Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση $f(x) = \left| \ln \frac{1}{x-2} \right|$

Λύση

Λόγω της ιδιότητας των λογαρίθμων, ισχύει ότι $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, άρα:

$$\ln \frac{1}{x-2} = \ln 1 - \ln(x-2) = 0 - \ln(x-2) = -\ln(x-2), \text{ οπότε:}$$

$$f(x) = \left| \ln \frac{1}{x-2} \right| = |-\ln(x-2)| = |\ln(x-2)|. \text{ Άρα θα ξεκινήσω με την } f(x) = \ln x, \text{ μετά θα την πάω προς}$$

τα δεξιά κατά 2 και θα φτιάξω την $f(x) = \ln(x-2)$. Στο τέλος θα αναποδογυρίσω ως προς τον άξονα

χ' τα αρνητικά της κομμάτια και θα φτιάξω την $f(x) = |\ln(x-2)| = \left| \ln \frac{1}{x-2} \right|$

