

ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

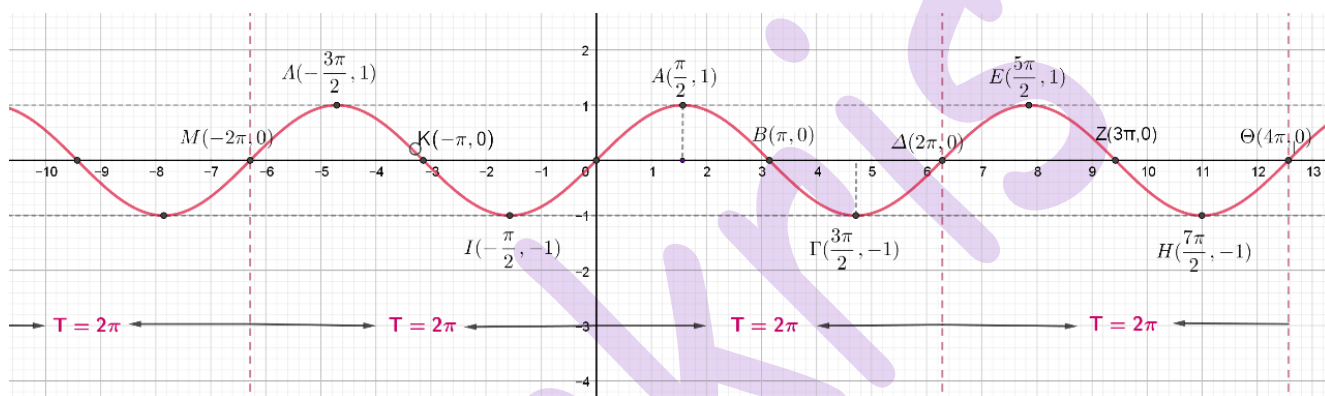
ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Αφού έχουμε μάθει τη βασική θεωρία της τριγωνομετρίας και τους σχετικούς τύπους, εδώ θα δούμε συνοπτικά όσα χρειαζόμαστε για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Εφόσον για κάθε γωνία x (που τη μετράμε σε ακτίνια και όχι σε μοίρες) ξέρουμε ότι μπορούμε να βρίσκουμε το $\eta\mu x$, το $\sigma\upsilon\nu x$, την $\epsilon\phi x$ και την $\sigma\phi x$. Ας δούμε αρχικά τις συναρτήσεις $\eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu x$.

Ορίζουμε λοιπόν τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ με τύπο $f(x) = \eta\mu x$.

Το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$, δηλαδή για x μπορούμε να βάλουμε οποιονδήποτε αριθμό. Το σύνολο τιμών είναι το $[-1, 1]$ γιατί όπως ξέρουμε $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$, δηλαδή το $\eta\mu x$ παίρνει τιμές μόνο από το -1 μέχρι το 1 . Η γραφική παράσταση της συνάρτησης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

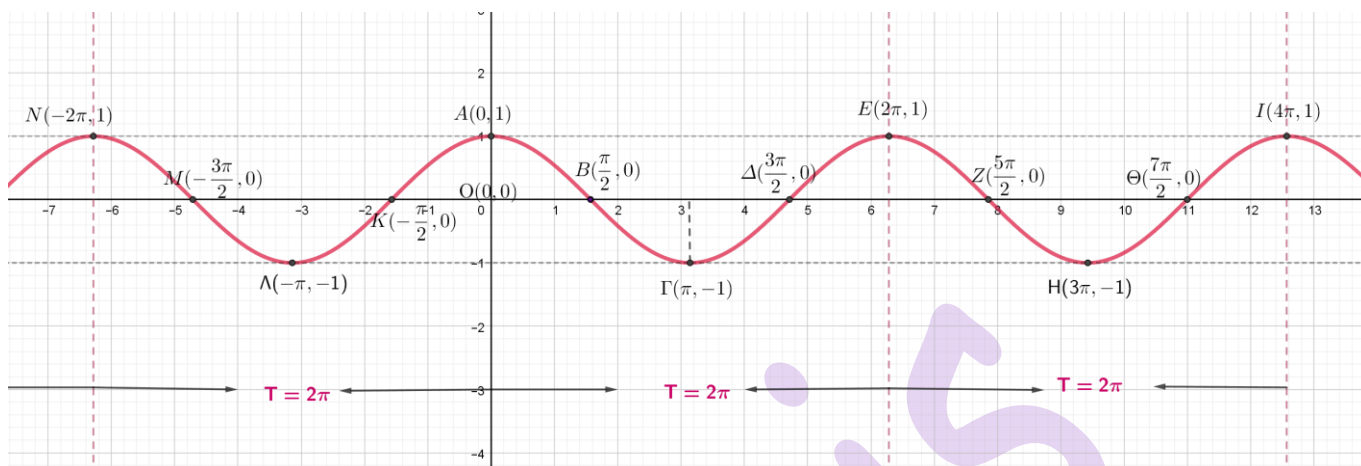


Τι παρατηρούμε στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$;

- Η μορφή της είναι κυματοειδής.
- Είναι συνάρτηση περιοδική. Δηλαδή η γραφική της παράσταση επαναλαμβάνεται ανά τακτά διαστήματα. Συγκεκριμένα, επαναλαμβάνεται κάθε 2π , γι' αυτό λέμε ότι έχει περίοδο 2π , δηλαδή $T = 2\pi$.
- Αν τη μελετήσουμε μέσα σε μια περίοδο, για παράδειγμα από το 0 μέχρι το 2π , τότε παρατηρούμε ότι:
 - Από το 0 μέχρι το $\frac{\pi}{2}$ η συνάρτηση 'ανεβαίνει', δηλαδή είναι γνησίως αύξουσα και φτάνει στο A που είναι μέγιστο. Δηλαδή για $x = \frac{\pi}{2}$ η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή 1 .
 - Από το $\frac{\pi}{2}$ και μετά η συνάρτηση αρχίζει να 'κατεβαίνει', δηλαδή γίνεται γνησίως φθίνουσα, περνάει από το B και μηδενίζεται και μετά συνεχίζει κατεβαίνοντας μέχρι το $\frac{3\pi}{2}$. Εκεί στο σημείο Γ η συνάρτηση παρουσιάζει την ελάχιστη τιμή της, το -1 .
 - Από το $\frac{3\pi}{2}$ και μέχρι το 2π η συνάρτηση αρχίζει πάλι να 'ανεβαίνει', δηλαδή γίνεται γνησίως αύξουσα και φτάνει στο σημείο Δ που κόβει πάλι τον άξονα.

Ορίζουμε επίσης τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ με τύπο $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

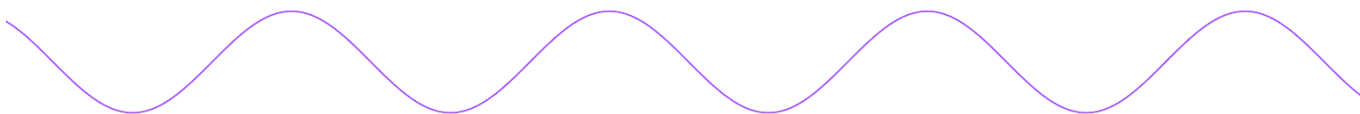
Το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$, δηλαδή για x μπορούμε να βάλουμε οποιοδήποτε αριθμό. Το σύνολο τιμών είναι το $[-1, 1]$ γιατί όπως ξέρουμε $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$, δηλαδή το $\sigma\upsilon\nu x$ παίρνει τιμές μόνο από το -1 μέχρι το 1 . Η γραφική παράσταση της συνάρτησης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Τι παρατηρούμε στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$;

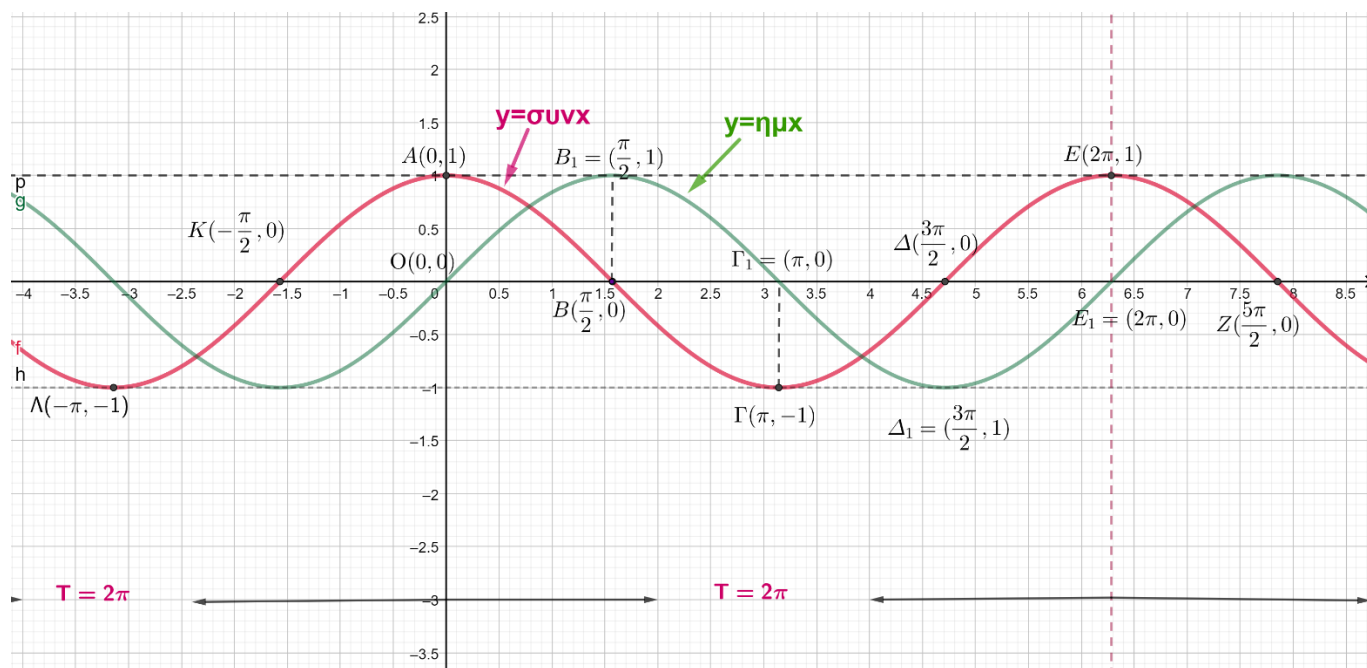
- Η μορφή της είναι και εδώ κυματοειδής.
- Είναι συνάρτηση περιοδική. Δηλαδή η γραφική της παράσταση επαναλαμβάνεται ανά τακτά διαστήματα. Συγκεκριμένα, επαναλαμβάνεται κάθε 2π , γι' αυτό λέμε ότι έχει περίοδο 2π , δηλαδή $T = 2\pi$.
- Αν τη μελετήσουμε μέσα σε μια περίοδο, για παράδειγμα από το 0 μέχρι το 2π , τότε παρατηρούμε ότι:
 - Η συνάρτηση στο 0 βρίσκεται στο ψηλότερο σημείο της, το 1 και μετά αρχίζει να 'κατεβαίνει', δηλαδή γίνεται γνησίως φθίνουσα, όταν φτάνει στο $\frac{\pi}{2}$ κόβει τον άξονα και μετά συνεχίζει να 'κατεβαίνει', και φτάνει στο Γ που είναι στο π η συνάρτηση φτάνει την ελάχιστη τιμή της, το -1 . είναι μέγιστο.
 - Από το π και ύστερα η συνάρτηση αρχίζει να 'ανεβαίνει', δηλαδή γίνεται γνησίως αύξουσα, περνάει από το Δ και μηδενίζεται και μετά συνεχίζει ανεβαίνοντας μέχρι το 2π . Εκεί στο σημείο E η συνάρτηση παρουσιάζει την μέγιστη τιμή της, το 1 .

Όπως μπορούμε να δούμε, στην ουσία οι δύο γραφικές παραστάσεις έχουν την ίδια μορφή, ένα 'κύμα'.



Αυτό που αλλάζει σε κάθε συνάρτηση είναι το πότε έχουμε κάθε φορά μέγιστο, πότε έχουμε ελάχιστο και πότε η συνάρτηση τέμνει τους άξονες. Έτσι, αν για παράδειγμα ζωγραφίζαμε και τις δύο συναρτήσεις στο ίδιο σύστημα αξόνων, τότε θα βλέπαμε το παρακάτω σχήμα:

Κώστας Χρυσανθόπουλος, Μ.Εδ Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών,
konkris1@sch.gr, 5^ο ΓΕΛ Ηλιούπολης



Ας δούμε τώρα τι μπορούμε να κάνουμε σε μια γραφική παράσταση της μορφής $f(x) = \eta\mu x$ και $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

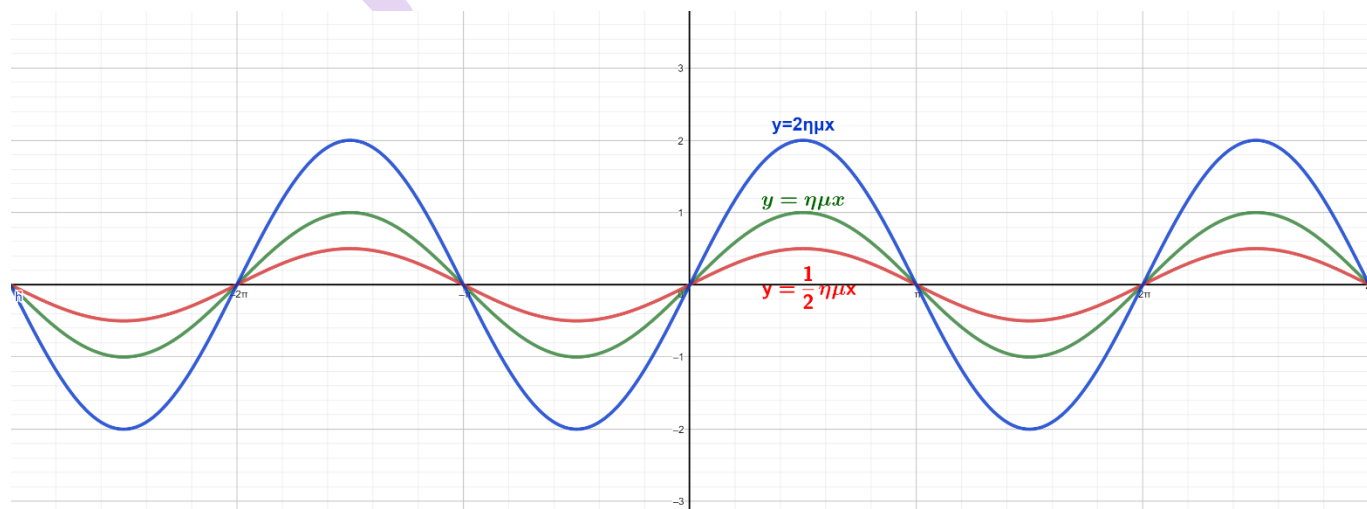
Α. Πολλαπλασιάζω με έναν αριθμό α τη συνάρτηση

Αν στη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ ή στην $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ βάλω μπροστά έναν αριθμό α (άρα φτιάχνω τις συναρτήσεις $f(x) = \alpha\eta\mu x$ ή $f(x) = \alpha\sigma\upsilon\nu x$), τότε:

- Αν $\alpha > 0$ τότε η συνάρτηση αντί να κινείται μεταξύ του -1 και του 1 , τώρα θα κινείται μεταξύ του $-\alpha$ και του α . Δηλαδή η συνάρτηση 'φουσκώνει' ή 'συμπιέζεται' όσο λέει το α.
- Αν $\alpha < 0$ τότε εκτός του ότι η συνάρτηση 'φουσκώνει' ή 'συμπιέζεται' όσο λέει το α, επιπλέον γυρίζει συμμετρικά ως προς τον άξονα x'x.

Παράδειγμα 1.

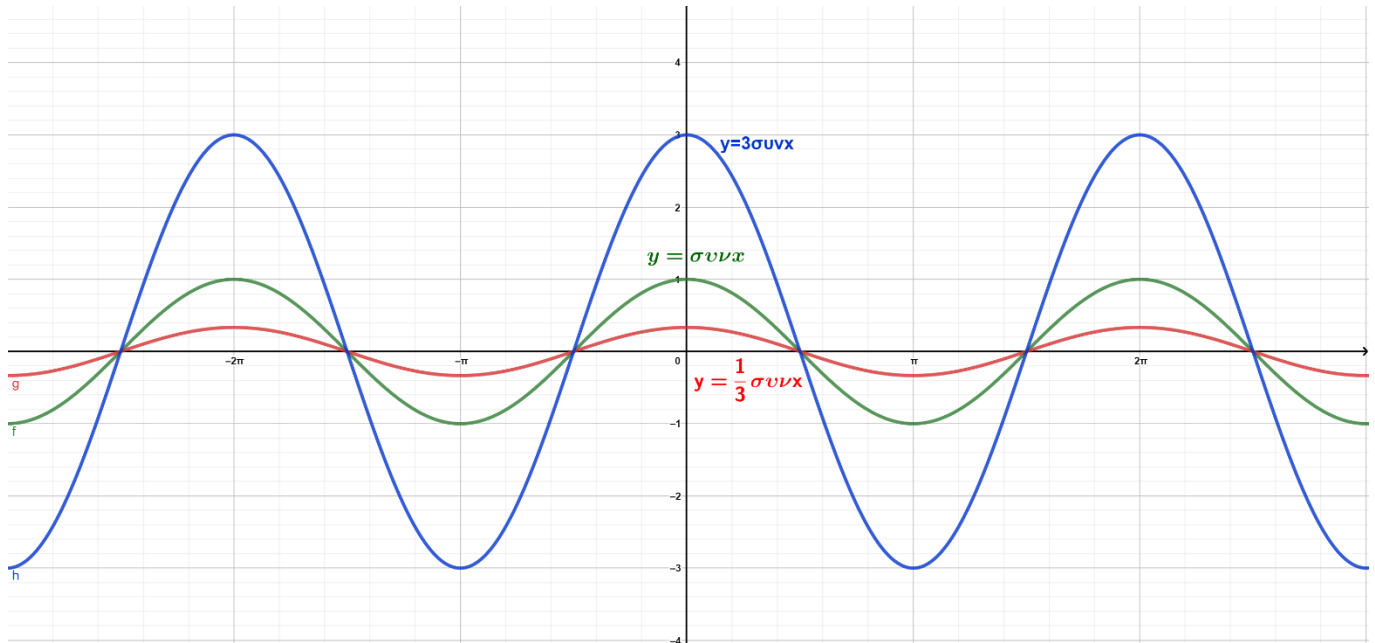
Σχεδιάστε τις συναρτήσεις: $f(x) = \eta\mu x$, $f(x) = 2\eta\mu x$, $f(x) = \frac{1}{2}\eta\mu x$



Όπως μπορούμε να δούμε η $f(x) = 2\eta\mu x$ 'φούσκωσε' και πάει από το -2 μέχρι το 2 , ενώ η $f(x) = \frac{1}{2}\eta\mu x$ συρρικνώθηκε και πάει από το $-\frac{1}{2}$ μέχρι το $\frac{1}{2}$.

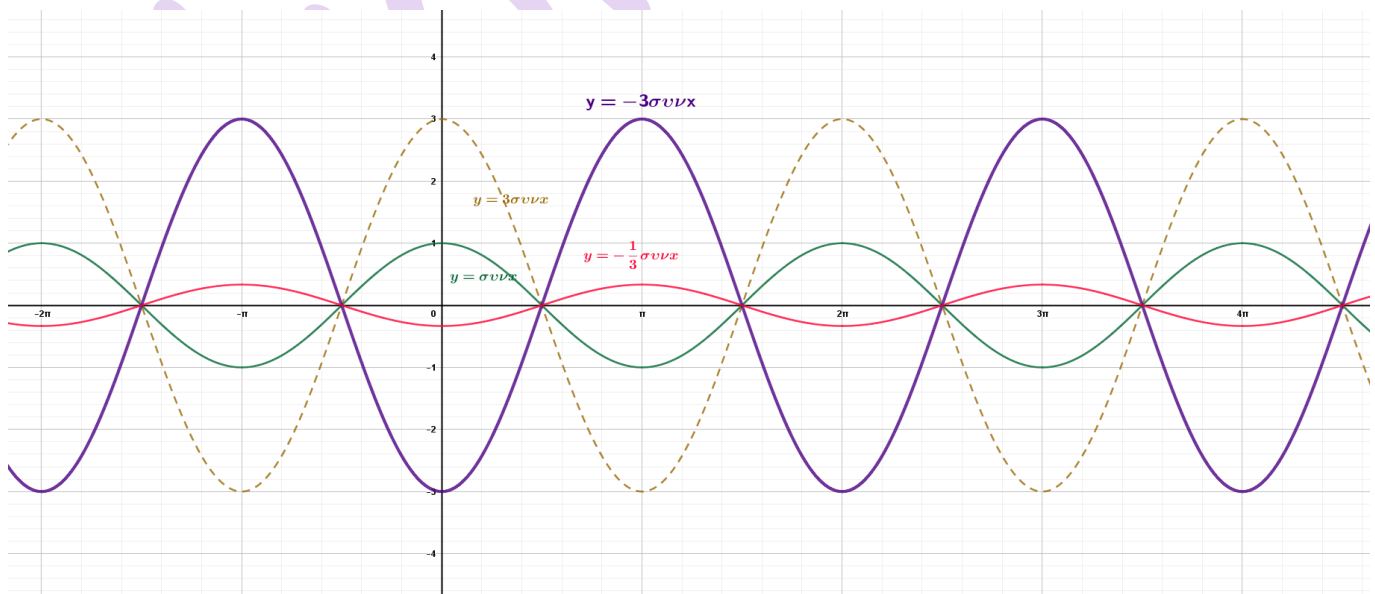
Παράδειγμα 2.

Σχεδιάστε τις συναρτήσεις: $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu x$, $f(x) = \frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu x$



Παράδειγμα 3.

Σχεδιάστε τις συναρτήσεις: $f(x) = -\sigma\upsilon\nu x$, $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu x$, $f(x) = -\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu x$



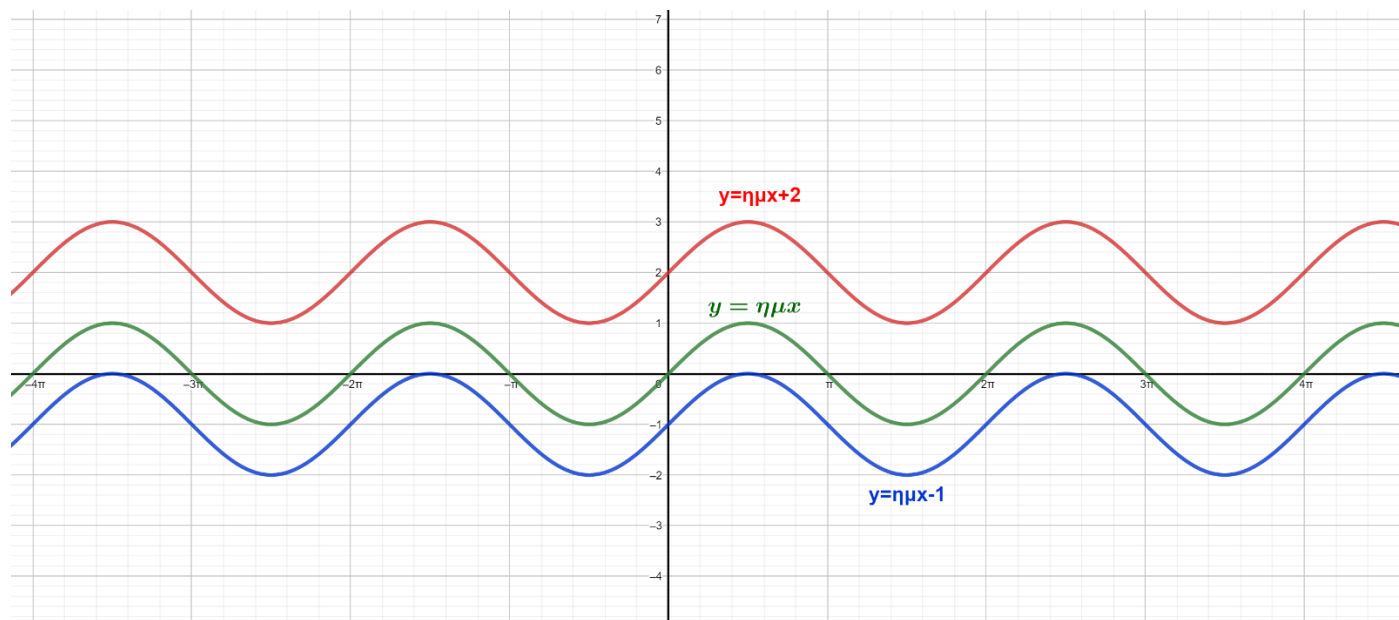
Όπως μπορούμε να δούμε στα παραδείγματα 2 και 3, οι γραφικές παραστάσεις είναι συμμετρικές μεταξύ τους ως προς τον άξονα x' .

B. Προσθέτω στο τέλος έναν αριθμό β, θετικό ή αρνητικό

Αν στη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ ή στην $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ βάλω στο τέλος έναν αριθμό β (άρα φτιάχνω τις συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x + \beta$ ή $f(x) = \sigma\upsilon\nu x + \beta$), τότε η γραφική παράσταση ανεβαίνει πάνω ή κάτω τόσο όσο λέει ο αριθμός β.

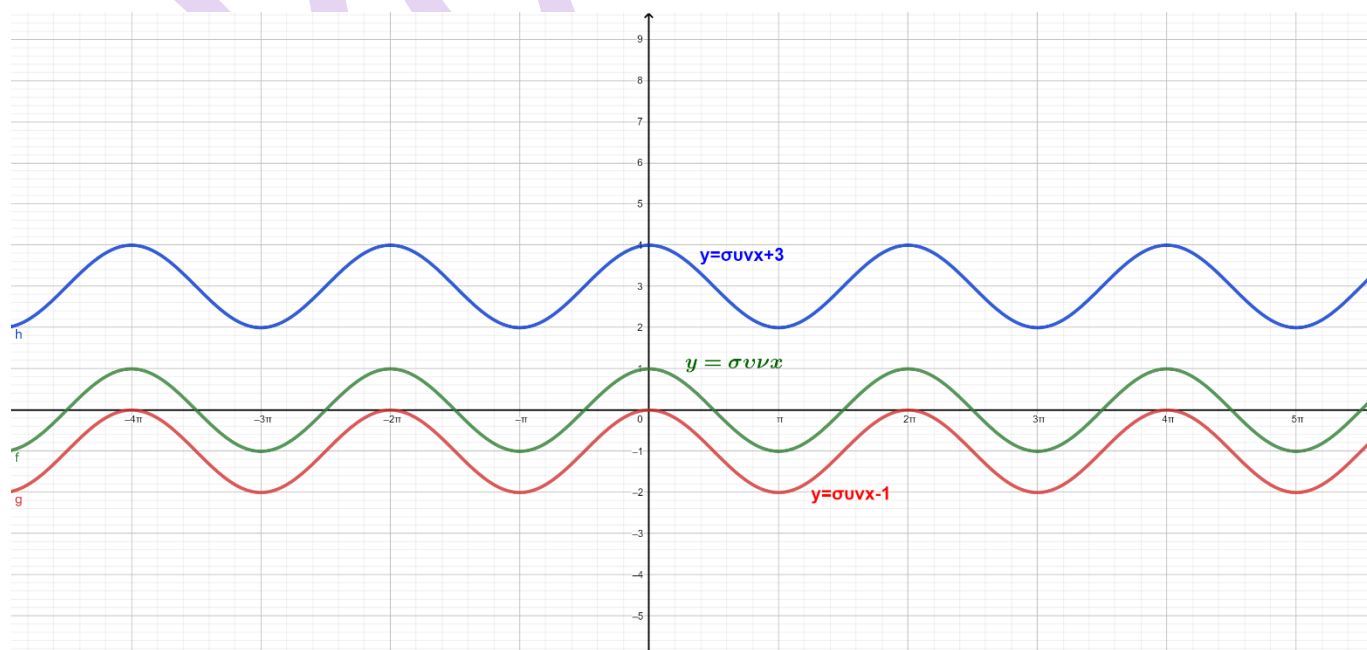
Παράδειγμα 4.

Σχεδιάστε τις συναρτήσεις: $f(x) = \eta\mu x$, $f(x) = \eta\mu x + 2$, $f(x) = \eta\mu x - 1$



Παράδειγμα 5.

Σχεδιάστε τις συναρτήσεις: $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1$, $f(x) = \sigma\upsilon\nu x + 3$



Γ. Πολλαπλασιάζω το x με έναν αριθμό ω

Αν στη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ ή στην $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ βάλω μπροστά από το x έναν αριθμό ω (άρα φτιάχνω τις συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu\omega x$ ή $f(x) = \sigma\upsilon\nu\omega x$), τότε αλλάζει η περίοδος της συνάρτησης και στην πραγματικότητα η συνάρτηση γίνεται σαν ακορντεόν, δηλαδή συμπύσσεται ή επιμηκύνεται.

Πιο συγκεκριμένα, η περίοδος της συνάρτησης αλλάζει και αντί να είναι $T = 2\pi$, η νέα περίοδος γίνεται

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Παράδειγμα 6.

Αν μου ζητήσουν να χαράξω την $f(x) = \eta\mu 2x$, τότε θα υπολογίσω την περίοδό της που θα είναι:

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi. \text{ Τι σημαίνει ότι η περίοδος έγινε } T = \pi; \text{ Σημαίνει ότι ενώ η } f(x) = \eta\mu x \text{ έκανε ένα κύκλο κάθε}$$

2π , δηλαδή επαναλάμβανε τον εαυτό της κάθε 2π , τώρα η $f(x) = \eta\mu 2x$ θα επαναλαμβάνει τον εαυτό της κάθε π . Άρα, μέσα στο διάστημα $[0, 2\pi]$ που η $f(x) = \eta\mu x$ έκανε έναν κύκλο, η $f(x) = \eta\mu 2x$ θα κάνει δύο κύκλους.

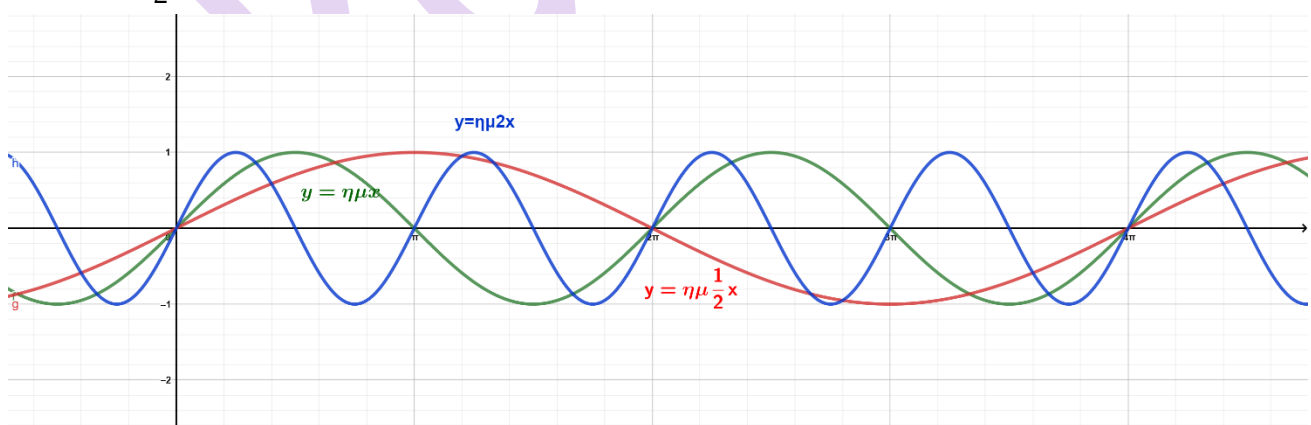
Παράδειγμα 7.

Αντίστοιχα, αν μου ζητήσουν να χαράξω την $f(x) = \eta\mu \frac{1}{2}x$, τότε θα υπολογίσω την περίοδό της που θα

είναι: $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$. Τι σημαίνει ότι η περίοδος έγινε $T = 4\pi$; Σημαίνει ότι ενώ η $f(x) = \eta\mu x$ έκανε ένα

κύκλο κάθε 2π , δηλαδή επαναλάμβανε τον εαυτό της κάθε 2π , τώρα η $f(x) = \eta\mu \frac{1}{2}x$ θα επαναλαμβάνει τον εαυτό της κάθε 4π . Άρα, μέσα στο διάστημα $[0, 2\pi]$ που η $f(x) = \eta\mu x$ έκανε έναν κύκλο, η

$f(x) = \eta\mu \frac{1}{2}x$ θα κάνει μισό κύκλο. Ας δούμε τις γραφικές παραστάσεις



Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, η $f(x) = \eta\mu x$ μέχρι το 2π κάνει ένα κύκλο. Αντίθετα, η $f(x) = \eta\mu 2x$

κάνει έναν κύκλο μέχρι το π , οπότε μέχρι το 2π έχει κάνει δύο κύκλους. Τέλος, η $f(x) = \eta\mu \frac{1}{2}x$ κάνει έναν κύκλο μέχρι το 4π , οπότε μέχρι το 2π έχει κάνει μισό κύκλο.

Δ. Προσθέτω στο x έναν αριθμό ρ

Αν στη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ ή στην $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ προσθέσω στο x έναν αριθμό ρ (άρα φτιάχνω τις συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu(x+\rho)$ ή $f(x) = \sigma\upsilon\nu(x+\rho)$), τότε η γραφική παράσταση μετακινείται δεξιά ή αριστερά όσο λέει το ρ αλλά αντίθετα από το πρόσημο.

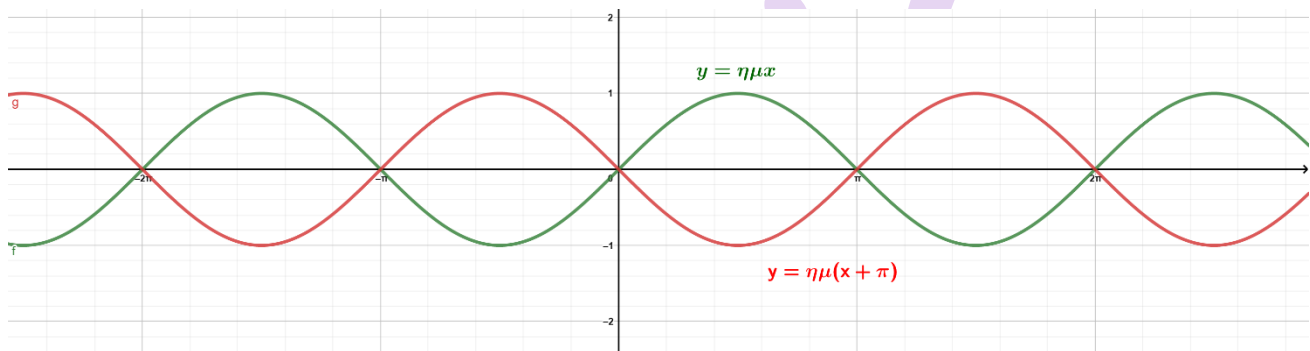
Έτσι για παράδειγμα, αν θέλω να χαράξω την $f(x) = \eta\mu(x-1)$, τότε θα πάρω την $f(x) = \eta\mu x$ και θα την 'σπρώξω' προς τα δεξιά κατά 1.

Αν θέλω να φτιάξω την $f(x) = \sigma\upsilon\nu(x+\pi)$, θα πάρω την $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και θα την 'σπρώξω' προς τα αριστερά κατά π .

Ας δούμε και πάλι κάποια παραδείγματα.

Παράδειγμα 8.

Να χαράξετε τις συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$, $f(x) = \eta\mu(x + \pi)$



Όπως βλέπουμε στο σχήμα, 'σπρώξαμε' την $f(x) = \eta\mu x$ κατά π προς τα αριστερά.

Επίσης παρατηρούμε και κάτι άλλο. Η $f(x) = \eta\mu(x + \pi)$ παρατηρούμε ότι είναι απολύτως συμμετρική της $f(x) = \eta\mu x$ ως προς τον άξονα $x'x$. Πώς εξηγείται αυτό; Αρκεί να θυμηθούμε από τους τύπους ότι $\eta\mu(x + \pi) = -\eta\mu x$, οπότε όταν μας ζητάνε να φτιάξουμε την $f(x) = \eta\mu(x + \pi)$ είναι το ίδιο σαν να μας ζητάνε να φτιάξουμε την $f(x) = -\eta\mu x$ που όπως είδαμε και το παράδειγμα 3 αρκεί να φτιάξουμε τη συμμετρική της $f(x) = \eta\mu x$ ως προς τον άξονα $x'x$.

Παράδειγμα 9.

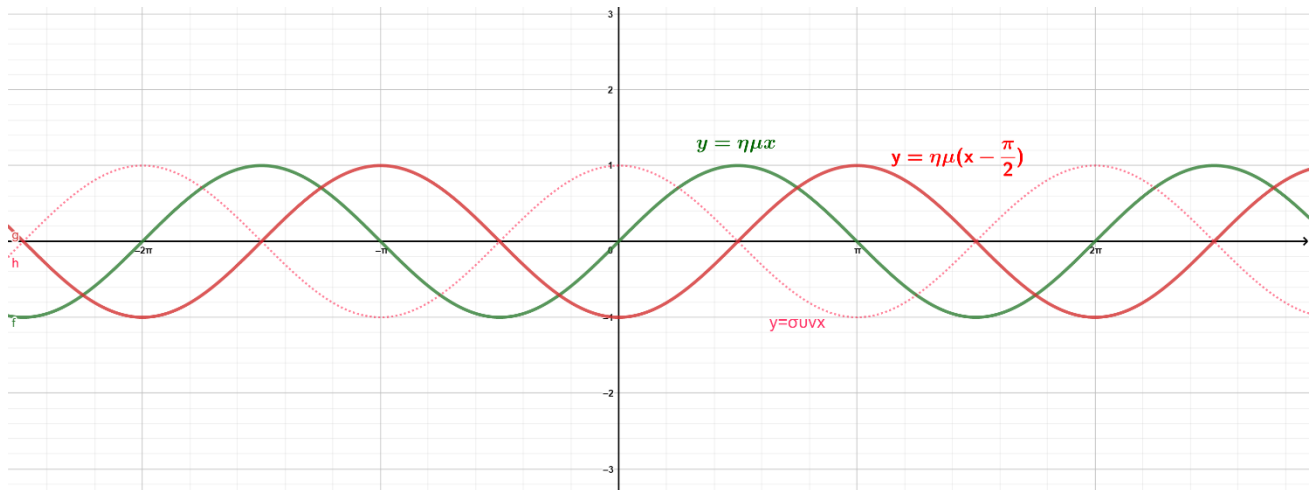
Να χαράξετε τις συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$, $f(x) = \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Πριν φτιάξουμε τη γραφική παράσταση ας σκεφτούμε λίγο τι θα προκύψει.

Αφού στο x αφαιρούμε το $\frac{\pi}{2}$, άρα θα 'σπρώξουμε' τη γραφική παράσταση της $f(x) = \eta\mu x$ προς τα δεξιά κατά $f(x) = \eta\mu x$. Μήπως μπορούμε να σκεφτούμε τι θα προκύψει; Ας θυμηθούμε λίγο τους τύπους.

$$\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \overset{\substack{\text{βγάζουμε κοινό} \\ \text{παράγοντα το } -}}{=} \eta\mu\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] \overset{\eta\mu(-\varphi) = -\eta\mu\varphi}{=} -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sigma\upsilon\nu x$$

Άρα τι θα προκύψει; Σύμφωνα με το παράδειγμα 3 θα βγάλουμε την συμμετρική της $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ ως προς τον άξονα $x'x$. Ας το δούμε:



Με τη διακεκομμένη κόκκινη γραμμή φτιάξαμε τη συνάρτηση $y = \sin x$ ώστε να δείτε αυτό που είπαμε, ότι τελικά η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ βγαίνει συμμετρική της $f(x) = \sin x$ ως προς τον άξονα x' .

Άρα συνοψίζοντας, όταν μου δίνουν μια συνάρτηση της μορφής:

$$f(x) = a\eta\mu(\omega x + \rho) + \beta \quad \text{ή} \quad f(x) = a\sigma\upsilon\nu(\omega x + \rho) + \beta \quad \text{τότε:}$$

- Το ω αλλάζει την περίοδο της συνάρτησης και την 'συμπτύσσει' ή την 'απλώνει' σαν ακορντεόν.
- Το ρ την πάει δεξιά ή αριστερά αλλά ανάποδα από το πρόσημο του ρ .
- Το a τη 'φουσκώνει' ή την 'συμπιέζει' τόσο όσο λέει το a . Αν μάλιστα το a είναι αρνητικός αριθμός τότε τη γυρίζει συμμετρικά ως προς τον άξονα x' .
- Τέλος, το β την μετακινεί ολόκληρη πάνω ή κάτω τόσο όσο λέει το β

ΠΡΟΣΟΧΗ! Τα βήματα πρέπει να γίνουν με αυτή ακριβώς τη σειρά! Δηλαδή, πρώτα θα ασχοληθούμε με το ω , μετά με το ρ , στη συνέχεια με το a και στο τέλος με το β . Αν αλλάξουμε τη σειρά θα προκύψει λάθος συνάρτηση. Αυτό δεν σημαίνει ότι σε ένα παράδειγμα θα πρέπει να υπάρχουν και οι τέσσερις αλλαγές, απλά όσες υπάρχουν θα πρέπει να τις κάνω με τη σειρά που είπαμε.

Ας δούμε τώρα μερικές ασκήσεις

Ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu\frac{x}{2}$

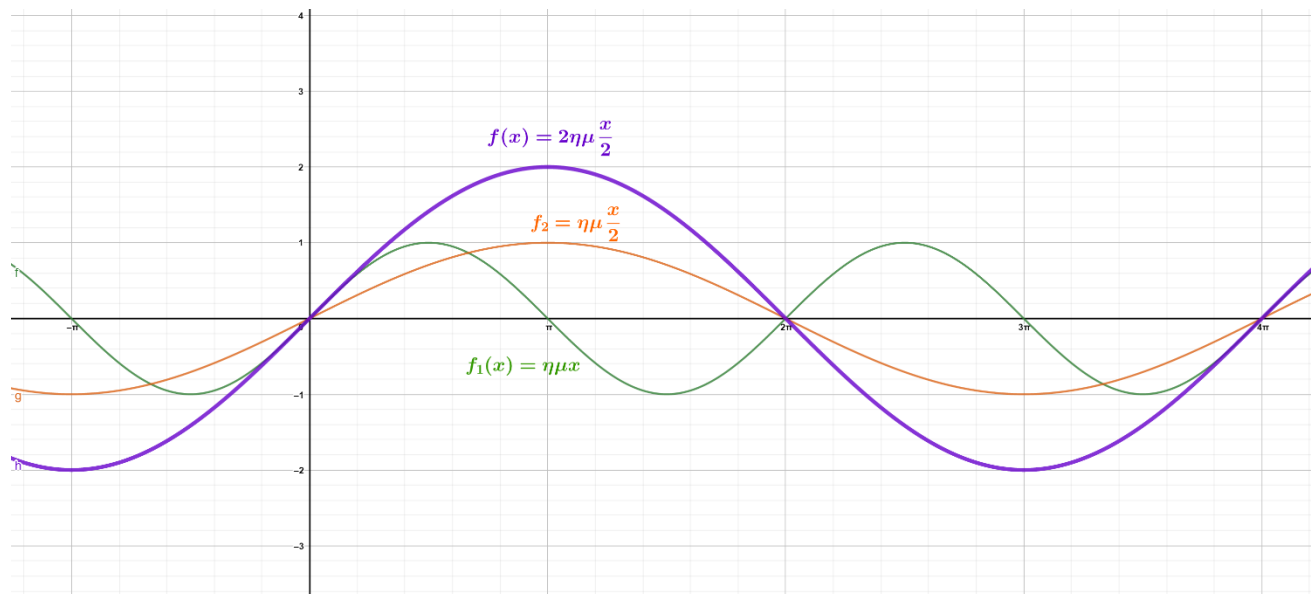
Λύση

Η συνάρτηση στην πραγματικότητα είναι η $f(x) = 2\eta\mu\frac{1}{2}x$, άρα το $\omega = \frac{1}{2}$ και το $a = 2$, άρα ξεκινάμε με

την $f_1(x) = \eta\mu x$, θα αλλάξουμε πρώτα την περίοδο και θα φτιάξουμε την $f_2(x) = \eta\mu\frac{1}{2}x$ που θα έχει

περίοδο $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ και μετά θα πολλαπλασιάσουμε μπροστά με το 2 για να φτιάξουμε την τελική

μας συνάρτηση, την $f(x) = 2\eta\mu\frac{1}{2}x$, δηλαδή την $f(x) = 2\eta\mu\frac{x}{2}$. Ας δούμε τις γραφικές παραστάσεις:



2. Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

Λύση

Το παράδειγμα αυτό είναι η συνέχεια του προηγούμενου και περιλαμβάνει όλα τα στάδια.

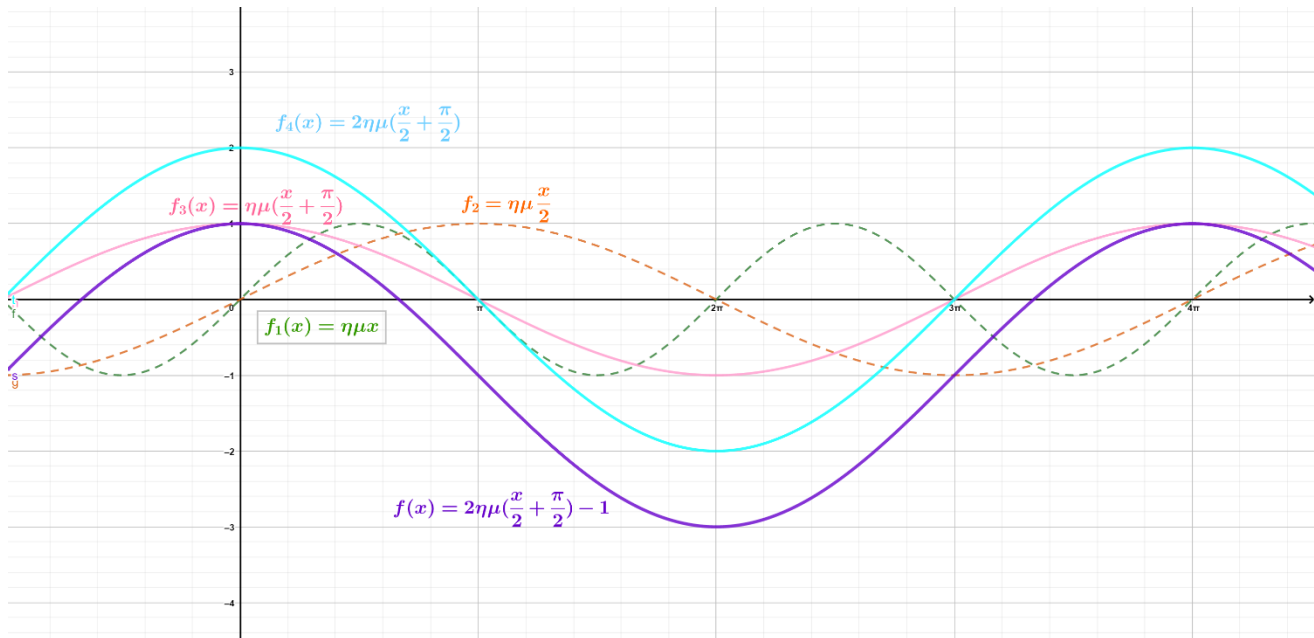
Ξεκινάμε με την $f_1(x) = \eta\mu x$, βάζουμε $\omega = \frac{1}{2}$ και πάμε στην $f_2(x) = \eta\mu\frac{1}{2}x$, μετά 'σπρώχνουμε' προς

τα αριστερά κατά $\frac{\pi}{2}$ και φτιάχνουμε την $f_3(x) = \eta\mu\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$, στη συνέχεια την 'τραβάμε' προς τα

πάνω και κάτω για να την κάνουμε $f_4(x) = 2\eta\mu\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ και στο τέλος την σπρώχνουμε προς τα κάτω

κατά 1 και φτάνουμε στην τελική συνάρτηση, την $f(x) = 2\eta\mu\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

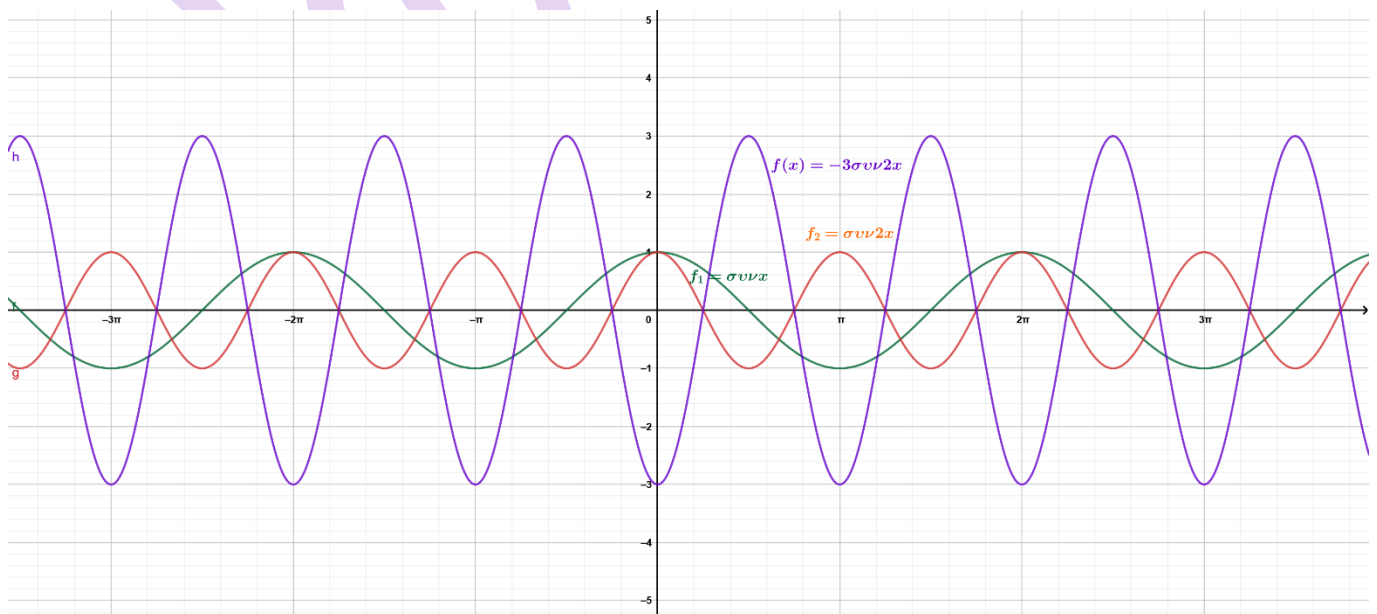
Ας δούμε στο επόμενο γράφημα όλα τα στάδια:



3. Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$

Λύση

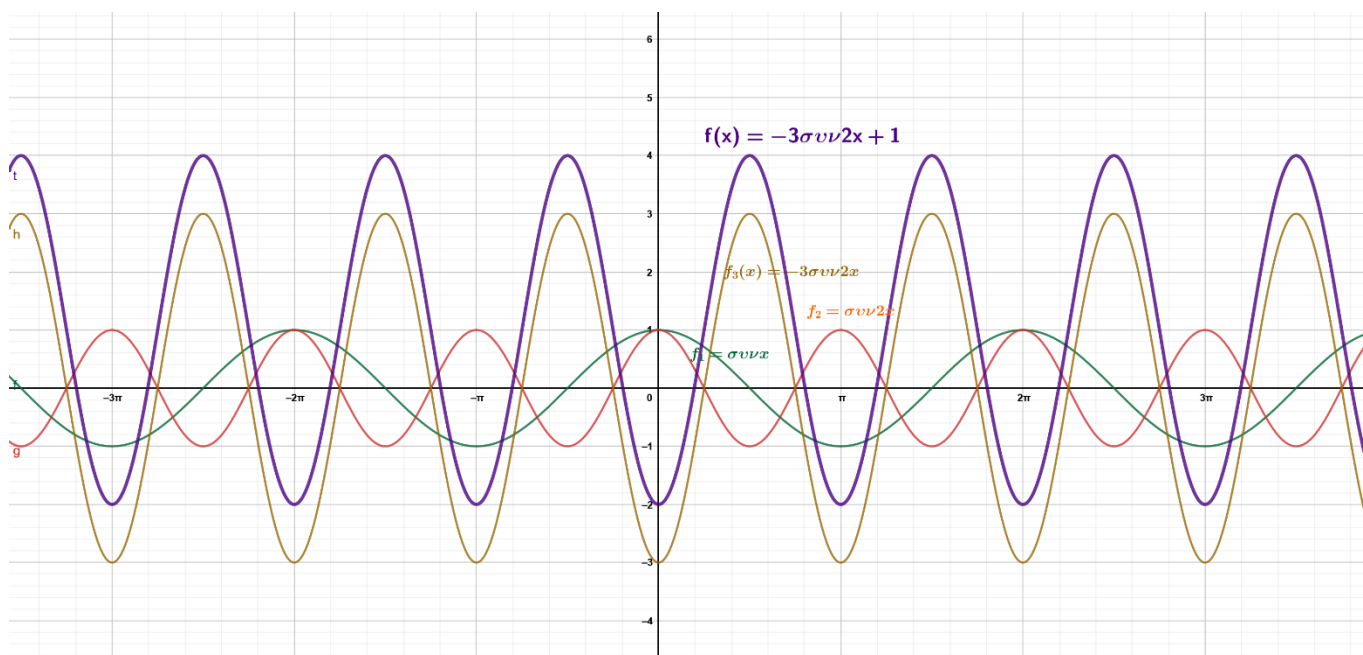
Η συνάρτηση έχει $\omega = 2$ και $\alpha = -3$, άρα ξεκινάμε με την $f_1(x) = \sigma\upsilon\nu x$, θα αλλάξουμε πρώτα την περίοδο και θα φτιάξουμε την $f_2(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$ που θα έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ και μετά θα πολλαπλασιάσουμε μπροστά με το -3 για να φτιάξουμε την τελική μας συνάρτηση, την $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$. Ας δούμε τις γραφικές παραστάσεις:



4. Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x + 1$

Λύση

Συνεχίζω από το προηγούμενο παράδειγμα σπρώχνοντας τη συνάρτηση της άσκησης 3 προς τα πάνω κατά 1.



5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 + 2\eta\mu 3x$

α. Βρείτε την περίοδο της συνάρτησης.

β. Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .

γ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f για $0 \leq x \leq 2\pi$

Λύση

α. Η περίοδος είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$.

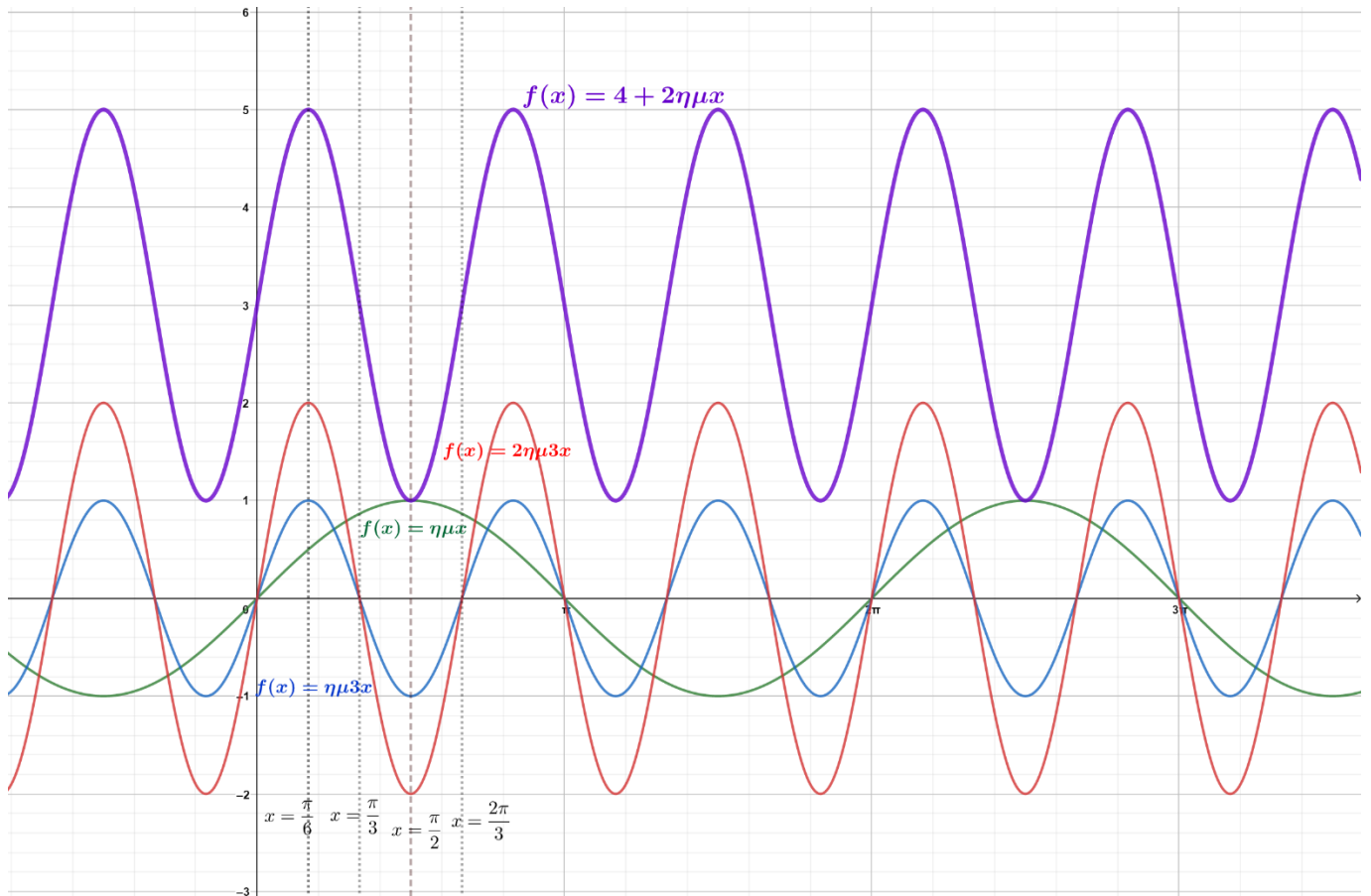
Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση ολοκληρώνει ένα κύκλο μέχρι το $\frac{2\pi}{3}$ ή για να το πούμε αλλιώς μέχρι το 2π που η $f(x) = \eta\mu x$ κάνει έναν κύκλο, η $f(x) = \eta\mu 3x$ θα κάνει 3 κύκλους.

β. $-1 \leq \eta\mu 3x \leq 1$ $\Leftrightarrow$ $-2 \leq 2\eta\mu 3x \leq 2$ $\Leftrightarrow$ $3 - 2 \leq 3 + 2\eta\mu 3x \leq 3 + 2 \Leftrightarrow 1 \leq 3 + 2\eta\mu 3x \leq 5$

Άρα $1 \leq f(x) \leq 5$, δηλαδή η ελάχιστη τιμή της είναι το 1 και η μέγιστη τιμή της είναι το 5.

γ. Για τη γραφική παράσταση ξεκινάμε πρώτα από την $f_1(x) = \eta\mu x$, στη συνέχεια σχεδιάζουμε την $f_2(x) = \eta\mu 3x$, μετά την $f_3(x) = 2\eta\mu 3x$ και στο τέλος την 'σπρώχνουμε' προς τα πάνω κατά 4 και φτιάχνουμε την $f(x) = 3 + 2\eta\mu 3x$.

Η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω:



6. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha + \beta \cdot \eta\mu(\omega x)$ με $\beta > 0$ έχει περίοδο 4π , μέγιστη τιμή το 5 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{7}{2}\right)$

α. Να βρείτε τους αριθμούς ω , α και β

β. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Λύση

$$\alpha. T = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{4\pi} \Leftrightarrow \omega = \frac{2}{4} \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2} \text{ Άρα η συνάρτηση γίνεται } f(x) = \alpha + \beta \cdot \eta\mu \frac{1}{2}x$$

Τώρα σε σχέση με την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή ισχύει:

$$-1 \leq \overset{\substack{\text{πολλαπλασιάζω} \\ \text{με } \beta > 0}}{\eta\mu \frac{1}{2}x} \leq 1 \Leftrightarrow -\beta \leq \overset{\substack{\text{προσθέτω} \\ \text{παντού το } \alpha}}{\beta \eta\mu \frac{1}{2}x} \leq \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \leq \alpha + \beta \eta\mu \frac{1}{2}x \leq \alpha + \beta$$

Άρα η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι το $\alpha + \beta$.

Οπότε σύμφωνα με την υπόθεση $\alpha + \beta = 5$ (1).

Τέλος μας λένε ότι συνάρτηση περνάει από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{7}{2}\right)$, οπότε $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{7}{2}$, άρα:

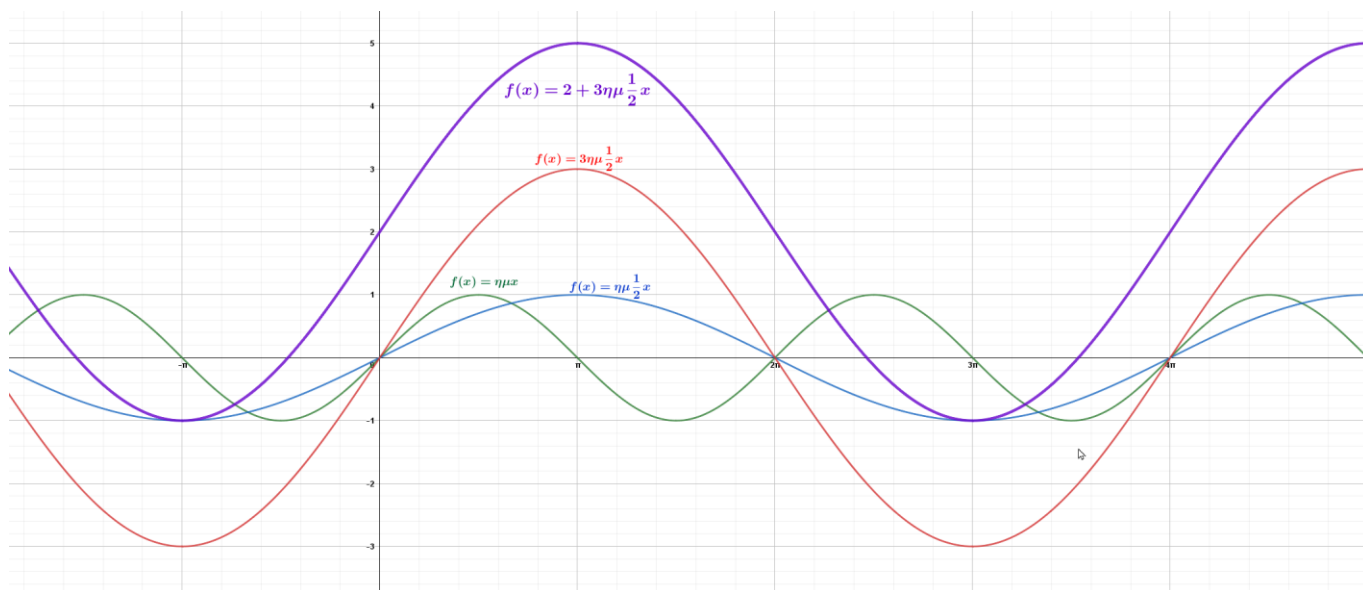
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \alpha + \beta \cdot \eta\mu \frac{\pi}{2} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \alpha + \beta \cdot \eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \alpha + \beta \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 7.$$

Άρα $2\alpha + \beta = 7$ (2) Και τώρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2).

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 5 \\ 2\alpha + \beta = 7 \end{array} \right\} \overset{\text{αφαιρούμε κατά μέλη}}{\Leftrightarrow} \alpha - 2\alpha = 5 - 7 \Leftrightarrow -\alpha = -2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

και αντικαθιστώντας σε μια από τις δύο αρχικές: $\alpha + \beta = 5 \Leftrightarrow 2 + \beta = 5 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 3}$

β. Άρα η συνάρτηση είναι η $f(x) = 2 + 3\eta\mu\frac{1}{2}x$ και η γραφική παράσταση είναι:



7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi - 3x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$ όπου $x \in \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu 3x$

β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Λύση

α. $f(x) = \eta\mu(\pi - 3x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \eta\mu 3x + \eta\mu 3x = 2\eta\mu 3x$

β. Θα φτιάξουμε πρώτα την $f_1(x) = \eta\mu x$, στη συνέχεια την $f_2(x) = \eta\mu 3x$ και τελικά την $f(x) = 2\eta\mu 3x$.



Ας δούμε τώρα τις συναρτήσεις $f(x) = \varepsilon\varphi x$ και $f(x) = \sigma\varphi x$

Οι συναρτήσεις αυτές έχουν μια βασική διαφορά από τις προηγούμενες. Θυμηθείτε ότι δεν ορίζεται εφαπτομένη στο $\frac{\pi}{2}$, στο $\frac{3\pi}{2}$ και γενικά δεν ορίζεται εφαπτομένη κάθε μισό κύκλο $\pm \frac{\pi}{2}$.

Ομοίως, η συνεφαπτομένη δεν ορίζεται στο 0 και στο π και γενικά κάθε μισό κύκλο.

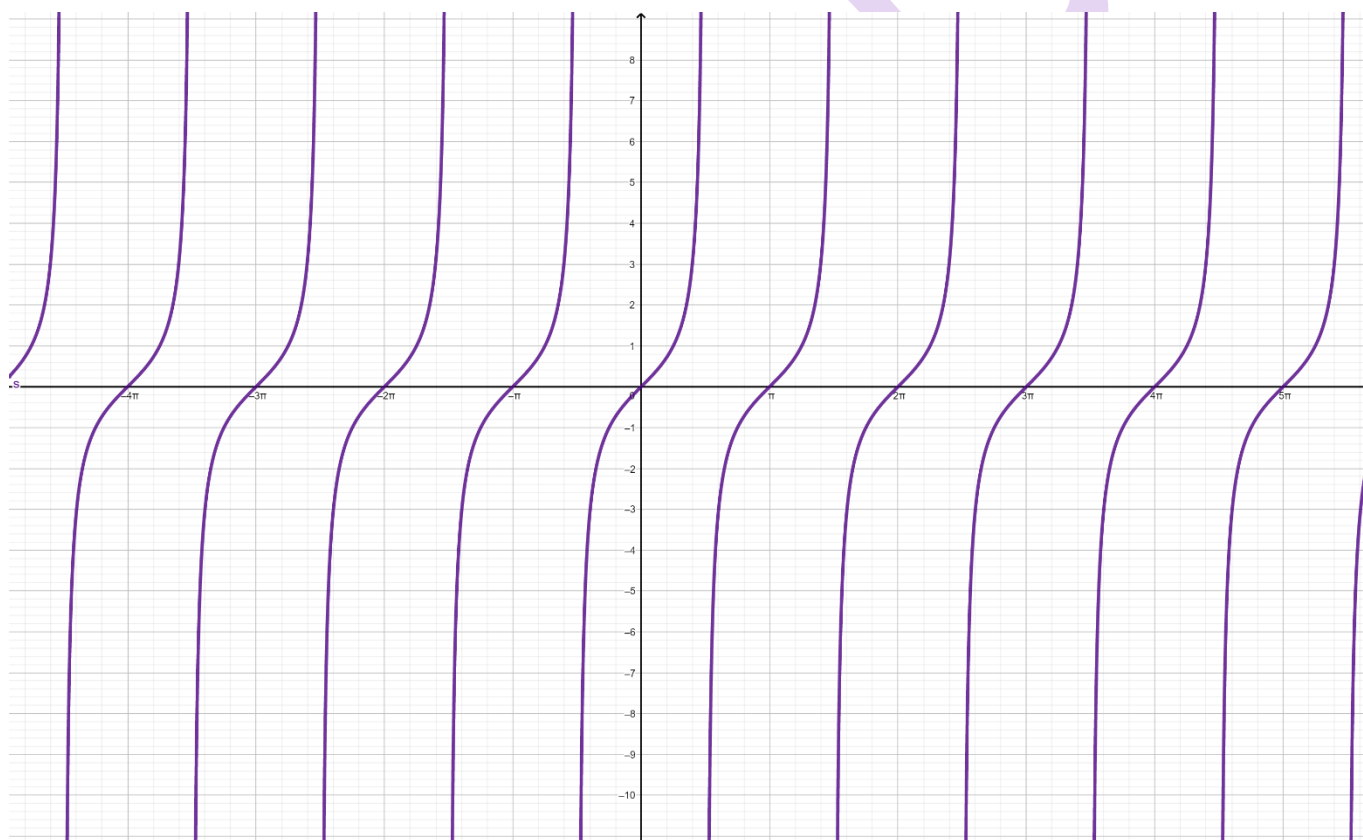
Άρα για την $f(x) = \varepsilon\varphi x$ ισχύει: $f : \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$

Τώρα όπως βλέπετε το σύνολο τιμών είναι όλο το σύνολο $\mathbb{R}$

Η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.

Η συνάρτηση είναι περιττή, γνησίως αύξουσα και χωρίς ακρότατα.

Παρακάτω βλέπετε τη γραφική της παράσταση



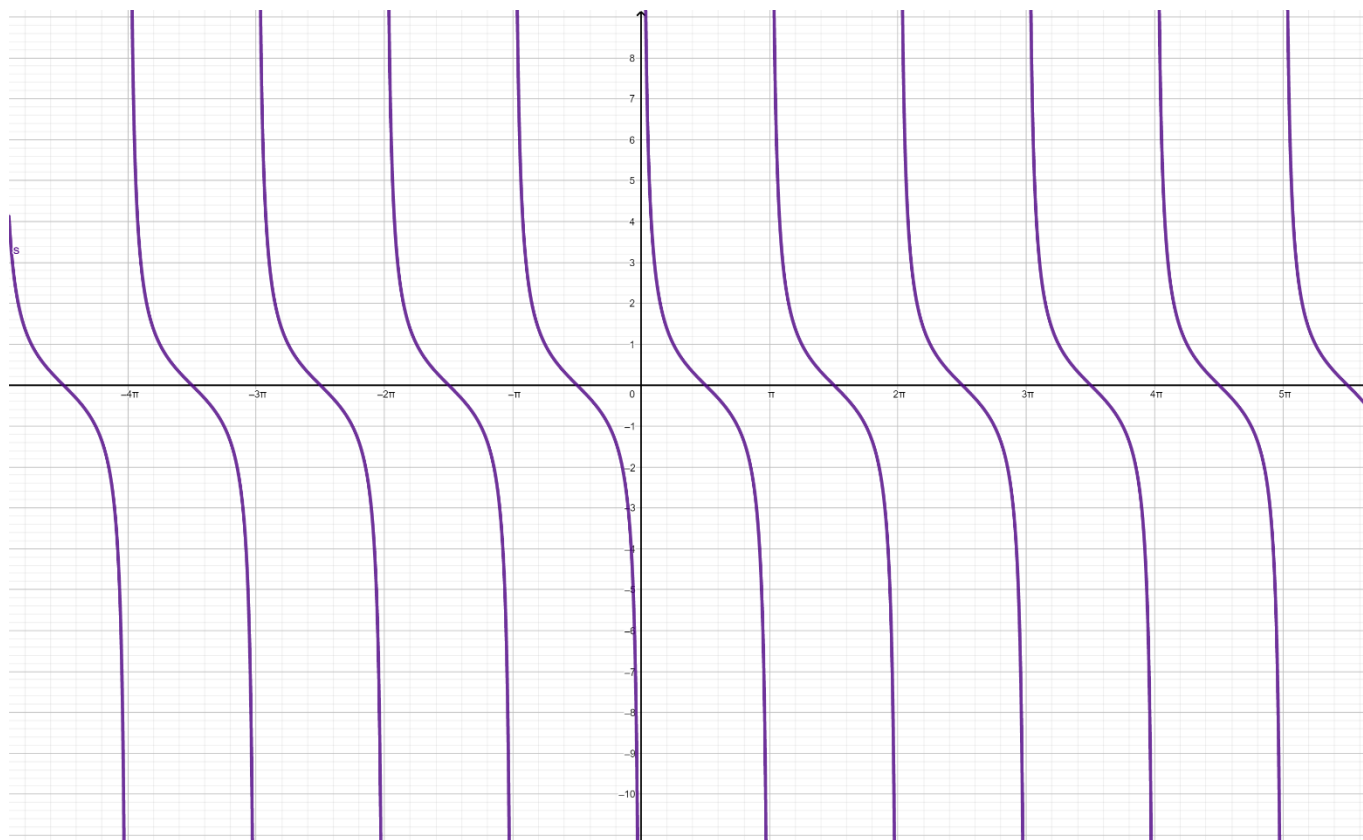
Για την $f(x) = \sigma\varphi x$ ισχύει: $f : \{x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$

Τώρα όπως βλέπετε το σύνολο τιμών είναι όλο το σύνολο $\mathbb{R}$

Η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.

Η συνάρτηση και αυτή είναι περιττή, γνησίως φθίνουσα και χωρίς ακρότατα.

Παρακάτω βλέπετε τη γραφική της παράσταση



Και για τις συναρτήσεις $f(x) = \varepsilon\varphi x$ και $f(x) = \sigma\varphi x$ ισχύουν όσα αναφέραμε στην αρχή, δηλαδή μπορούμε να φτιάξουμε την $f(x) = a \cdot \varepsilon\varphi(\omega x + \rho) + \beta$ κάνοντας όλα όσα περιγράψαμε πιο πριν.