

ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 7

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1. * Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$. Σ Λ
2. * Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι περιττή. Σ Λ
3. * Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid \eta\mu x \neq 0\}$. Σ Λ
4. * Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα πλάτους 2π . Σ Λ
5. * Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$ έχει άπειρες κατακόρυφες ασύμπτωτες. Σ Λ
6. * Οι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu x = 1$ είναι $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. Σ Λ
7. * Οι λύσεις της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x = -1$ είναι $x = (2\kappa + 1)\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. Σ Λ
8. * Οι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu x = 0$ είναι $x = \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. Σ Λ
9. * Οι λύσεις της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x = 0$ είναι $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. Σ Λ
10. * Η εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ έχει λύσεις τις: $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$,
 $x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. Σ Λ
11. * Η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$ έχει στο διάστημα $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ λύση τη
γωνία $\frac{2\pi}{3}$. Σ Λ
12. * Η εξίσωση $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$ έχει λύσεις τις γωνίες $x = \lambda\pi - \frac{\pi}{3}$,
 $\lambda \in \mathbb{Z}$. Σ Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ έχει πεδίο ορισμού
Α. το διάστημα $(-1, 1)$ Β. το διάστημα $[-1, 1]$
Γ. το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ Δ. το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1\}$
Ε. το σύνολο $\mathbb{R}$

2. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \varepsilon\phi x$ είναι
Α. το σύνολο $\mathbb{R}$
Β. το διάστημα $[-1, 1]$
Γ. το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid \eta\mu x \neq 0\}$
Δ. το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$
Ε. το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
3. * Για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $h(x) = \varepsilon\phi x$, ισχύει
Α. η f είναι άρτια
Β. η g είναι περιττή
Γ. η h είναι άρτια
Δ. οι f και g είναι άρτιες
Ε. οι f και h είναι περιττές και η g άρτια

4. * Η συνάρτηση του σχήματος είναι

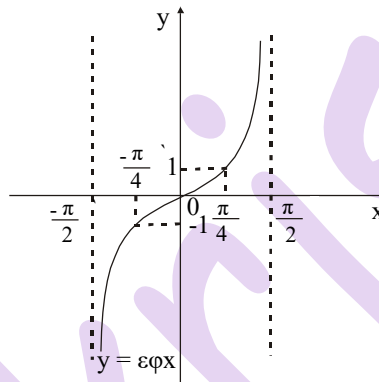
A. γνησίως φθίνουσα στο $[0, \frac{\pi}{2})$

B. γνησίως αύξουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Γ. γνησίως φθίνουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, 0]$

Δ. γνησίως φθίνουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Ε. σταθερή στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



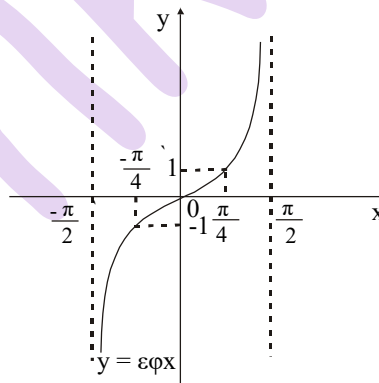
5. ** Η λύση της εξίσωσης $\epsilon\phi x = -1$ στο

διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ είναι η

A. $x = -1$ **B.** $x = \frac{\pi}{4}$

$$\Gamma_x = -\frac{\pi}{4} \quad \Delta_x = 0$$

E. $x = 1$



- ### 6. * Η λύση της εξίσωσης

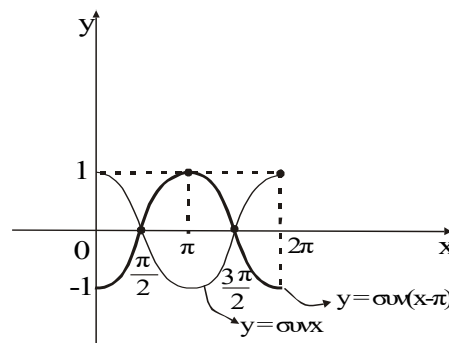
$$\sigma_{UV}(X - \pi) = -1$$

στο διάστημα $(0, 2\pi]$ είναι η

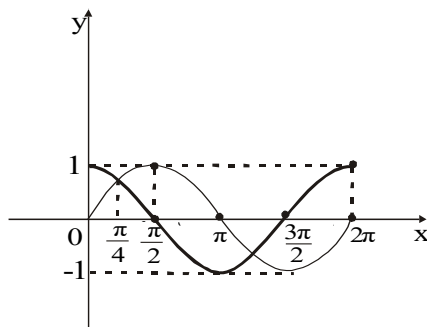
A. $x = \frac{3\pi}{2}$ **B.** $x = \pi$

$$\Gamma_{\mathbf{x}} = 2\pi \qquad \Delta_{\mathbf{x}} = \frac{\pi}{2}$$

E. $x = -\pi$



7. ** Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$, $x \in [0, 2\pi]$ είναι



A. $x = \frac{\pi}{2}$ ή $x = \frac{3\pi}{2}$

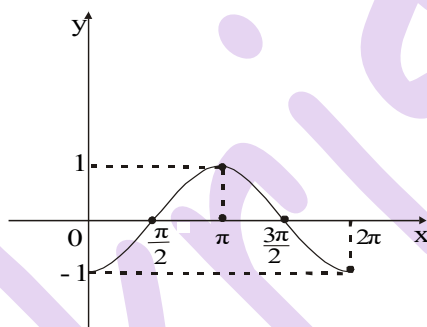
B. $x = \pi$ ή $x = 2\pi$

Γ. $x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = -\frac{\pi}{4}$

Δ. $x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{3\pi}{2}$

Ε. $x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{5\pi}{4}$

8. ** Στο διπλανό σχήμα, για $x \in [0, 2\pi]$ φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης



A. $f(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$

B. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(x + 2\pi)$

Γ. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(-x)$

Δ. $f(x) = -\sigma\upsilon\nu x$

Ε. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(x + \frac{\pi}{2})$

9. * Οι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$ είναι

A. $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$

B. $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$

Γ. $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$ $\kappa \in \mathbb{Z}$

Δ. $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}$

Ε. καμία από τις προηγούμενες

10. * Οι λύσεις της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι

A. $x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}$

B. $x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}$

Γ. $x = 2\kappa\pi \pm \frac{3\pi}{4}$

Δ. $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4}$

Ε. $x = (\kappa + 1)\pi \pm \frac{3\pi}{4}$

$\kappa \in \mathbb{Z}$

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. ** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα (II), ώστε σε κάθε εξίσωση της στήλης Α να αντιστοιχούν οι λύσεις της που βρίσκονται στη στήλη Β.

Πίνακας (I)

στήλη Α	στήλη Β
1. $\eta\mu x = \eta\mu 15^\circ$	$\text{A. } x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}$ $\text{B. } x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}$ $\text{Γ. } x = 360^\circ \kappa \pm 120^\circ$ $\text{Δ. } x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}$ $\text{Ε. } x = 360^\circ \kappa + 15^\circ \text{ ή } x = 360^\circ \kappa + 165^\circ$ $\text{Ζ. } x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ $\text{Η. } x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$ $\text{Θ. } x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ $\text{Ι. } x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}$ $\text{Κ. } x = 360^\circ \kappa - 15^\circ \text{ ή } x = 360^\circ \kappa + 195^\circ$
2. $\eta\mu x = \frac{1}{2}$	
3. $\sigma\upsilon\nu x = 0$	
4. $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$	
5. $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$	
6. $\epsilon\phi x = -1$	

Πίνακας (II)

1	2	3	4	5	6

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ
ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 1ο: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1.	Σ
2.	Λ
3.	Σ
4.	Λ
5.	Σ
6.	Σ
7.	Σ
8.	Σ

9.	Σ
10.	Σ
11.	Σ
12.	Λ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	Ε
2.	Δ
3.	Ε
4.	Β
5.	Γ
6.	Γ
7.	Ε
8.	Δ
9.	Δ

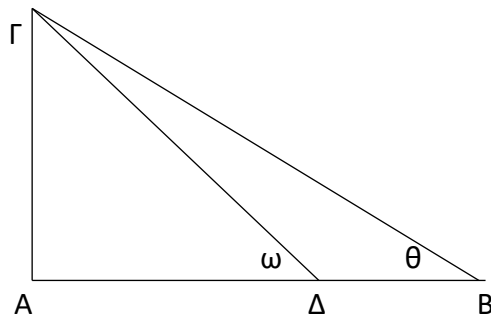
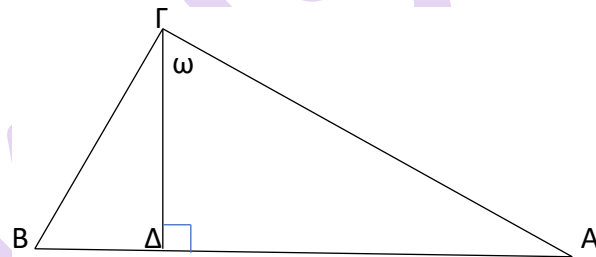
10.	Γ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.	1	Ε
	2	Η
	3	Ζ
	4	Γ
	5	Β
	6	Δ

Βασικές Ασκήσεις στο 3.1 – Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

1. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $A = 90^\circ$, ισχύουν $B\Gamma = 20$ cm και $\eta\mu B = \frac{4}{5}$. Να βρείτε:
α) τις πλευρές $A\Gamma$ και AB ,
β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{\Gamma}$.
2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $A = 90^\circ$, ισχύουν $AB = 16$ cm και $\epsilon\varphi\Gamma = \frac{4}{3}$. Να βρείτε:
α) τις πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$,
β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{B}$.
3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $A = 90^\circ$, ισχύουν $B\Gamma = 17$ cm και $\sigma\upsilon\nu B = \frac{8}{17}$. Να υπολογίσετε τα AB , $A\Gamma$ καθώς και την $\epsilon\varphi\omega$.
4. Στο διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$, το $\Gamma\Delta$ είναι ύψος. Ισχύουν επίσης οι σχέσεις $A\Gamma = 17$ cm, $\eta\mu\omega = \frac{15}{17}$ και $\epsilon\varphi B = \frac{4}{3}$. Να βρείτε τα μήκη των $A\Delta$, $\Gamma\Delta$, AB και $B\Gamma$.
5. Στο διπλανό σχήμα ισχύουν: $\epsilon\varphi\omega = 0,8$, $\epsilon\varphi\theta = 0,6$ και $A\Gamma = 24$ cm. Να βρείτε το μήκος του τμήματος $B\Delta$.
6. Σε τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι $B\Gamma = 14$ cm, $\sigma\varphi B = \frac{5}{12}$ και $\sigma\varphi\Gamma = \frac{3}{4}$. Να βρείτε:
α) τα μήκη των πλευρών AB και $A\Gamma$,
β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας A .
7. Βρείτε τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών:
α) 70° , 110° , 230° β) $\frac{7\pi}{6}$ rad, $\frac{8\pi}{3}$ rad.
8. Να μετατρέψετε σε rad τις γωνίες:
α) 20° , β) 75° , γ) 135° , δ) 180° , ε) 240° , στ) 780° , ζ) -1125° , η) -1500°
θ) 1530° , ι) 4500° , ια) -675° , ιβ) -1770° , ιγ) -4590°
9. Να μετατρέψετε σε μοίρες τις γωνίες:



$$\alpha) \frac{\pi}{5} \text{ rad}, \beta) \frac{7\pi}{9} \text{ rad}, \gamma) \frac{7\pi}{5} \text{ rad}, \delta) \frac{7\pi}{3} \text{ rad}, \epsilon) \frac{9\pi}{4} \text{ rad}, \sigma\tau) -\frac{35\pi}{6} \text{ rad}, \zeta) -\frac{23\pi}{3} \text{ rad},$$

$$\eta) -\frac{39\pi}{4} \text{ rad}, \theta) \frac{73\pi}{8} \text{ rad}, \iota) \frac{127\pi}{10} \text{ rad}, \iota\alpha) -\frac{111\pi}{5} \text{ rad}, \iota\beta) \frac{49\pi}{6} \text{ rad}$$

10. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) A = \eta\mu 390^\circ + \eta\mu 780^\circ \cdot \epsilon\varphi 1140^\circ$$

$$\beta) B = \eta\mu 90^\circ - \sigma\upsilon\nu 60^\circ + \sigma\varphi 45^\circ - \sigma\upsilon\nu 180^\circ$$

$$\gamma) \Gamma = \eta\mu 0^\circ + \sigma\upsilon\nu 0^\circ - \epsilon\varphi 0^\circ$$

$$\delta) \Delta = 2\eta\mu 30^\circ - 2\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu 30^\circ - \sqrt{3}\epsilon\varphi 30^\circ$$

$$\epsilon) E = \eta\mu^2 60^\circ - 2\sigma\upsilon\nu 60^\circ - \epsilon\varphi^2 60^\circ$$

$$\sigma\tau) \Sigma T = \eta\mu \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\epsilon\varphi \frac{\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu \pi + \eta\mu \frac{\pi}{2}$$

$$\zeta) Z = \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{4} - \sigma\varphi \frac{\pi}{4} + \epsilon\varphi \pi - \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2}$$

$$\eta) H = \frac{8\eta\mu 30^\circ - 2\sigma\upsilon\nu^2 45^\circ + 3\epsilon\varphi^2 30^\circ}{4\eta\mu^2 30^\circ - 2\sigma\upsilon\nu 60^\circ + \epsilon\varphi 45^\circ}$$

$$\theta) \Theta = \sigma\upsilon\nu^2 \frac{61\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{73\pi}{6} - \sigma\varphi \frac{9\pi}{4}$$

$$\iota) I = \frac{\epsilon\varphi^2 \frac{9\pi}{4} - \sigma\upsilon\nu^2 \frac{55\pi}{3}}{\eta\mu^2 \frac{129\pi}{4} \cdot \sigma\varphi \frac{73\pi}{6} \cdot \eta\mu \frac{127\pi}{3}}$$

11. Να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:

$$\alpha) A = \epsilon\varphi 140^\circ \cdot \eta\mu 240^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 340^\circ$$

$$\beta) B = \sigma\upsilon\nu 89^\circ \cdot \eta\mu 91^\circ \cdot \sigma\varphi 275^\circ \cdot \epsilon\varphi 265^\circ$$

$$\gamma) \Gamma = \eta\mu 15^\circ - \epsilon\varphi 115^\circ - \sigma\upsilon\nu 215^\circ$$

$$\delta) \Delta = \sigma\varphi 130^\circ - \epsilon\varphi 230^\circ - \sigma\upsilon\nu 330^\circ$$

$$\epsilon) E = \eta\mu 100^\circ - \sigma\upsilon\nu 200^\circ - \epsilon\varphi 1000^\circ$$

$$\sigma\tau) \Sigma T = \eta\mu 1 - \sigma\upsilon\nu 2$$

$$\zeta) Z = \sigma\upsilon\nu 3 \cdot \epsilon\varphi 5$$

12. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων:

$$\alpha) A = 3 + 2\eta\mu\omega \quad \beta) B = -2 + 5\eta\mu\chi \quad \gamma) \Gamma = 5 - 3\sigma\upsilon\nu\chi \quad \delta) \Delta = 2\eta\mu\phi - 3\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\epsilon) E = 2 - \eta\mu^2\omega \quad \sigma\tau) \Sigma T = \frac{5}{\eta\mu\omega + 2} \quad \zeta) Z = \frac{\eta\mu\varphi + 3}{2 - \sigma\upsilon\nu\omega}$$

13. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - x + \eta\mu\theta - 2 = 0$, έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, για κάθε γωνία θ .

14. Για κάθε $x, \theta \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $x^2 - x + 2 - \eta\mu\theta > 0$.

15. Δίνεται η εξίσωση $4x^2 - 4(1 + 2\eta\mu\theta)x + \eta\mu\theta = 0$, (1)

α) Να δείξετε ότι, για κάθε γωνία θ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), να δείξετε ότι $-1 \leq x_1 + x_2 \leq 3$.

Βασικές Ασκήσεις στο 3.2 – Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

16. Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία ϕ για την οποία να ισχύει:

α) $\eta\mu\phi = 0$ και $\sigma\upsilon\nu\phi = 0$.

β) $\eta\mu\phi = 1$ και $\sigma\upsilon\nu\phi = -1$

γ) $\eta\mu\phi = \frac{2}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\phi = -\frac{3}{5}$

δ) $\eta\mu\chi = \frac{2}{3}$ και $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1}{3}$

17. Δίνεται γωνία ω για την οποία ισχύουν: $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$ και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$. Να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

18. Δίνεται γωνία ω για την οποία ισχύουν: $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$. Να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

19. Δίνεται γωνία ω για την οποία ισχύουν: $\sigma\phi\omega = -\frac{5}{12}$ και $270^\circ < \omega < 360^\circ$. Να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

20. Δίνεται γωνία ω για την οποία ισχύουν: $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$ και $4\epsilon\phi\omega - 6\sigma\phi\omega + 5 = 0$. Να βρείτε:

α) την $\epsilon\phi\omega$ και τη $\sigma\phi\omega$

β) το $\eta\mu\omega$ και το $\sigma\upsilon\nu\omega$.

21. Αν ισχύει $2\sigma\upsilon\nu^2\chi + 5\eta\mu\chi - 4 = 0$ και $0 < \chi < \frac{\pi}{2}$, να βρείτε:

α) το $\eta\mu\chi$

β) το $\sigma\upsilon\nu\chi$, την $\epsilon\phi\chi$ και την $\sigma\phi\chi$.

22. Αν ισχύει $\sigma\phi\chi = \frac{\sqrt{2}}{4}$ και $180^\circ < \chi < 270^\circ$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας χ .

23. Αν ισχύει $(\eta\mu\chi - 2)\left(\eta\mu\chi - \frac{3}{5}\right) = 0$ και $\chi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, τότε:

α) Να βρείτε το $\eta\mu\chi$,

β) να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας χ .

24. Αν $\varepsilon\varphi x = 9\sigma\varphi x$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{1 + \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{1 + \sigma\varphi x}$

25. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x , όταν ισχύει:

α) $3\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x - 2 = 0$ και $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

β) $3\sigma\upsilon\nu^2 x + 7\eta\mu x - 5 = 0$ και $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

γ) $6\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x - 5 = 0$ και $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

δ) $\varepsilon\varphi^2 x - \frac{2}{\sigma\varphi x} = 8$ και $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

26. Αν $2\varepsilon\varphi\theta - \sigma\varphi\theta = 1$ και $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 2\varepsilon\varphi\theta - \sqrt{5} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta.$$

27. Αν $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ και $2\varepsilon\varphi^2 x + \frac{3}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 8$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \varepsilon\varphi x - \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sigma\varphi x.$$

28. Αν ισχύει $x = 3\eta\mu\theta$ και $y = 2\sigma\upsilon\nu\theta$, να δείξετε ότι: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

29. Αν ισχύει: $x = 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\phi$, $y = 2\eta\mu\theta\eta\mu\phi$ και $z = 2\sigma\upsilon\nu\theta$, να δείξετε ότι $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

30. Να δείξετε ότι:

α) $\frac{1 - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \eta\mu\alpha}$

β) $\frac{\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x - 1}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x + 1}$

γ) $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 1 + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

δ) $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) + 2\sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

31. Να δείξετε ότι:

α) $\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^3 x - \eta\mu x} = \varepsilon\varphi x$

β) $\frac{\eta\mu^4 x - \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x - \sigma\upsilon\nu^2 x} = 1$

γ) $\frac{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha - \sigma\upsilon\nu^2 \beta}{\eta\mu^2 \alpha - \eta\mu^2 \beta} = -1$

32. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $\frac{(1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \varepsilon\varphi^2 x$

β) $(\eta\mu\varphi - \sigma\upsilon\nu\varphi)^2 + (\eta\mu\varphi + \sigma\upsilon\nu\varphi)^2 = 2$

γ) $\varepsilon\varphi^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

δ) $\varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi x \cdot \eta\mu^2 x = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

ε) $\frac{1}{\eta\mu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\varepsilon\varphi x} = \eta\mu x$

στ) $\frac{1 - \varepsilon\varphi^2 x}{1 + \varepsilon\varphi^2 x} = 1 - 2\eta\mu^2 x$

ζ) $\frac{1 + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 2\varepsilon\varphi^2 x = 1$

η) $\frac{1}{\eta\mu^2 \omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \omega} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 \omega} = \frac{1}{\eta\mu^2 \omega}$

$$\theta) \frac{1}{\sigma \nu^2 \varphi} - \frac{1}{\sigma \varphi^2 \varphi} = 1$$

$$\iota) \frac{\sigma \nu \varphi}{1 - \eta \mu \varphi} + \frac{\sigma \nu \varphi}{1 + \eta \mu \varphi} = \frac{2}{\sigma \nu \varphi}$$

$$\kappa\alpha) \left(1 + \frac{1}{\sigma \varphi \omega}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{\sigma \varphi \omega}\right)^2 = \frac{2}{\sigma \nu^2 \omega}$$

$$\iota\beta) \eta \mu^2 x \cdot \varepsilon \varphi x - \frac{\sigma \nu^2 x}{\varepsilon \varphi x} + \frac{1}{\varepsilon \varphi x} = \varepsilon \varphi x$$

33. Να δείξετε ότι:

$$\alpha) \eta \mu^4 \alpha - \sigma \nu^4 \alpha = \eta \mu^2 \alpha - \sigma \nu^2 \alpha = 1 - 2 \sigma \nu^2 \alpha = 2 \eta \mu^2 \alpha - 1$$

$$\beta) \frac{\sigma \nu \alpha}{1 - \eta \mu \alpha} - \frac{1 - \eta \mu \alpha}{\sigma \nu \alpha} = 2 \varepsilon \varphi \alpha$$

$$\gamma) \frac{\eta \mu \varphi}{1 + \sigma \nu \varphi} + \frac{\eta \mu \varphi}{1 - \sigma \nu \varphi} = \frac{2}{\eta \mu \varphi}$$

$$\delta) \frac{\sigma \nu^3 x - \sigma \nu x + \eta \mu x}{\sigma \nu x} = \varepsilon \varphi x - \eta \mu^2 x$$

$$\varepsilon) \varepsilon \varphi x + \sigma \varphi x = \frac{1}{\eta \mu x \cdot \sigma \nu x}$$

$$\sigma\tau) \varepsilon \varphi^2 x + \sigma \varphi^2 x + 2 = \frac{1}{\eta \mu^2 x \cdot \sigma \nu^2 x}$$

$$\zeta) \sigma \varphi^2 x - \sigma \nu^2 x = \sigma \varphi^2 x \cdot \sigma \nu^2 x$$

$$\eta) \frac{\eta \mu x}{1 + \sigma \varphi x} - \frac{\sigma \nu x}{1 + \varepsilon \varphi x} = \eta \mu x - \sigma \nu x$$

$$\theta) \left(1 + \frac{\eta \mu \theta - 1}{\sigma \nu \theta}\right) \left(1 + \frac{\sigma \nu \theta + 1}{\eta \mu \theta}\right) = 2$$

34. Να δείξετε ότι:

$$\alpha) \eta \mu^2 x \cdot \varepsilon \varphi x - \sigma \nu^2 x \cdot \sigma \varphi x = \varepsilon \varphi x - \sigma \varphi x$$

$$\beta) \eta \mu^2 x \cdot \varepsilon \varphi x + \sigma \nu^2 x \cdot \sigma \varphi x + 2 \eta \mu x \cdot \sigma \nu x = \varepsilon \varphi x + \sigma \varphi x$$

$$\gamma) \frac{1 + \varepsilon \varphi \alpha}{1 - \varepsilon \varphi \alpha} = \frac{1 + \sigma \varphi \alpha}{\sigma \varphi \alpha - 1}$$

35. Να αποδείξετε ότι οι επόμενες παραστάσεις έχουν σταθερή τιμή:

$$\alpha) A = \frac{\eta \mu^2 x}{1 - \sigma \nu x} + \frac{\eta \mu^2 x}{1 + \sigma \nu x}$$

$$\beta) B = \frac{\eta \mu^4 \varphi - \sigma \nu^4 \varphi + \sigma \nu^2 \varphi}{1 - \sigma \nu \varphi} - \sigma \nu \varphi$$

$$\gamma) \Gamma = \frac{5 \sigma \nu \alpha - 4}{3 - 5 \eta \mu \alpha} - \frac{3 + 5 \eta \mu \alpha}{5 \sigma \nu \alpha + 4}$$

$$\delta) \Delta = \frac{\sigma \nu^2 \omega}{\varepsilon \varphi^2 \omega} + \sigma \nu^2 \omega - \sigma \varphi^2 \omega$$

Βασικές Ασκήσεις στο 3.3 – Αναγωγή στο 1^ο τεταρτημόριο

36. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των παρακάτω γωνιών:

$$\alpha) 135^\circ, \quad \beta) -60^\circ, \quad \gamma) 240^\circ, \quad \delta) -\frac{\pi}{6} \text{ rad}, \quad \varepsilon) \frac{22\pi}{3} \text{ rad}, \quad \sigma\tau) -\frac{31\pi}{4} \text{ rad},$$

37. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

$$\alpha) \frac{\pi}{2} + \omega \quad \beta) \frac{3\pi}{2} + \omega \quad \gamma) \frac{3\pi}{2} - \omega$$

38. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

$$\alpha) \eta\mu(2\pi-\omega) \quad \beta) \sigma\upsilon\nu(13\pi-\omega) \quad \gamma) \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right) \quad \delta) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2}-\omega\right) \quad \epsilon) \varepsilon\varphi\left(\frac{11\pi}{2}+\omega\right)$$

39. Αν δίνεται ότι $\eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 75° .

40. Αν δίνεται ότι $\eta\mu 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 72° .

41. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) A = \eta\mu(\omega - \pi) + \sigma\upsilon\nu\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\beta) B = \eta\mu(-750^\circ) + \sigma\upsilon\nu 1200^\circ - \varepsilon\varphi 1395^\circ$$

$$\gamma) \Gamma = \varepsilon\varphi(50^\circ + \omega) \cdot \sigma\varphi(130^\circ - \omega)$$

$$\delta) \Delta = \eta\mu^2 20^\circ + \varepsilon\varphi 10^\circ \cdot \varepsilon\varphi 100^\circ + \eta\mu^2 70^\circ$$

$$\epsilon) E = \eta\mu^2\left(\frac{5\pi}{6} - \omega\right) + \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{3} - \omega\right)$$

$$\sigma\tau) \Sigma\Gamma = \eta\mu^2(13\pi + \omega) + \eta\mu^2\left(\frac{11\pi}{2} + \omega\right)$$

$$\zeta) Z = \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4} \cdot \eta\mu \frac{5\pi}{6} \cdot \varepsilon\varphi \frac{2\pi}{3}$$

$$\eta) H = \eta\mu \frac{5\pi}{4} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{3} \cdot \sigma\varphi \frac{7\pi}{6}$$

$$\theta) \Theta = \eta\mu 10^\circ + \sigma\upsilon\nu 70^\circ + \sigma\upsilon\nu 110^\circ + \eta\mu 190^\circ$$

$$\iota) I = \eta\mu 20^\circ - \sigma\upsilon\nu 40^\circ - \sigma\upsilon\nu 70^\circ + \eta\mu 50^\circ$$

$$\iota\alpha) I\alpha = \eta\mu^2 36^\circ + \varepsilon\varphi 130^\circ \cdot \varepsilon\varphi 40^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 216^\circ$$

$$\iota\beta) I\beta = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{7} \varepsilon\varphi \frac{3\pi}{7} \varepsilon\varphi \frac{5\pi}{14} \varepsilon\varphi \frac{\pi}{14}$$

$$\iota\gamma) I\gamma = \eta\mu^2 \frac{\pi}{12} + \varepsilon\varphi \frac{\pi}{8} \cdot \varepsilon\varphi \frac{3\pi}{8} + \eta\mu^2 \frac{5\pi}{12}$$

42. Να δείξετε ότι οι παρακάτω παραστάσεις είναι ανεξάρτητες του x:

$$\alpha) A = \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) + \eta\mu^2\left(\frac{3\pi}{8} - x\right)$$

$$\beta) B = \eta\mu(x + 50^\circ) + \eta\mu(x + 40^\circ) + \eta\mu(x + 220^\circ) + \eta\mu(x - 130^\circ)$$

$$\gamma) \Gamma = \sigma\upsilon\nu(x - 20^\circ) - \eta\mu(x + 70^\circ) + \varepsilon\varphi(x - 45^\circ) \cdot \varepsilon\varphi(x + 45^\circ)$$

$$\delta) \Delta = 3\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) + \varepsilon\varphi(\pi + x) \cdot \sigma\varphi(\pi - x) + 3\eta\mu^2(-x)$$

43. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) A = \frac{\eta\mu \frac{\pi}{7} \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{7} \cdot \eta\mu \frac{4\pi}{7}}{\eta\mu \frac{6\pi}{7} \cdot \eta\mu \frac{3\pi}{7} \cdot \eta\mu \frac{5\pi}{7}}$$

$$\beta) B = \frac{\eta\mu(-\theta) \cdot \varepsilon\varphi(\pi - \theta)}{\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \eta\mu(\pi - \theta)}$$

$$\gamma) \Gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \theta) \cdot \varepsilon\varphi(360^\circ + \theta)}{\varepsilon\varphi(180^\circ + \theta) \cdot \eta\mu(180^\circ - \theta)}$$

$$\delta) \Delta = \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi + x)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \eta\mu(\pi - x)}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon) E &= \frac{\varepsilon\varphi(180^\circ + x) \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - x)}{\sigma\varphi(180^\circ - x) \cdot \varepsilon\varphi(-x)} & \sigma\tau) \Sigma T &= \frac{\varepsilon\varphi(\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\eta\mu(-x) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \\ \zeta) Z &= \frac{\sigma\upsilon\nu(-x) \cdot \varepsilon\varphi(180^\circ - x)}{\sigma\varphi(90^\circ - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ - x)} & \eta) H &= \frac{\eta\mu\frac{\pi}{9} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{9} \cdot \eta\mu\frac{4\pi}{7}}{\eta\mu\frac{8\pi}{9} \cdot \eta\mu\frac{3\pi}{7} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{9}} \\ \theta) \Theta &= \frac{\eta\mu 380^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 950^\circ \cdot \varepsilon\varphi 850^\circ}{\eta\mu 1220^\circ \cdot \sigma\varphi 400^\circ \cdot \eta\mu 340^\circ} & \iota) I &= \frac{\eta\mu(13\pi + \theta) \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{11\pi}{2} + \theta\right)}{\sigma\varphi(17\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{13\pi}{2} - \theta\right)} \\ \iota\alpha) IA &= \frac{\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cdot \varepsilon\varphi(2\pi - \theta)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\varphi(-\theta)} \\ \iota\beta) IB &= \frac{\eta\mu(2\pi + \theta) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(3\pi + \theta)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) \cdot \varepsilon\varphi(\pi + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} \\ \iota\gamma) I\Gamma &= \frac{\eta\mu(24\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(37\pi - \theta) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{21\pi}{2} - \theta\right) \cdot \varepsilon\varphi(15\pi + \theta)}{\eta\mu\left(\frac{17\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{23\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{27\pi}{2} + \theta\right) \cdot \varepsilon\varphi(\theta - 12\pi)} \end{aligned}$$

44. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ABΓ ισχύει:

$$\begin{aligned} \alpha) \eta\mu A &= \eta\mu(B + \Gamma) & \beta) \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} &= \eta\mu \frac{B + \Gamma}{2} & \gamma) \eta\mu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2(B + \Gamma) &= 1 \\ \delta) \varepsilon\varphi \frac{A}{2} \cdot \varepsilon\varphi \frac{B + \Gamma}{2} &= 1 & \varepsilon) \varepsilon\varphi(B + \Gamma) \cdot \sigma\varphi A &= -1 & \sigma\tau) \eta\mu(A + 2B + \Gamma) + \eta\mu B &= 0 \end{aligned}$$

45. Να δείξετε ότι:

$$\begin{aligned} \alpha) \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) &= 1 & \beta) \varepsilon\varphi(35^\circ - x) \cdot \varepsilon\varphi(55^\circ + x) &= 1 \\ \gamma) \eta\mu^2(2\pi - x) + \eta\mu^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \varepsilon\varphi \frac{3\pi}{5} \sigma\varphi \frac{2\pi}{5} &= 0 \\ \delta) \sigma\upsilon\nu 0^\circ + \sigma\upsilon\nu 1^\circ + \sigma\upsilon\nu 2^\circ + \dots + \sigma\upsilon\nu 179^\circ + \sigma\upsilon\nu 180^\circ &= 0 \\ \varepsilon) \eta\mu 0^\circ + \eta\mu 10^\circ + \eta\mu 20^\circ + \dots + \eta\mu 350^\circ + \eta\mu 360^\circ &= 0 \\ \sigma\tau) \varepsilon\varphi 1^\circ \cdot \varepsilon\varphi 2^\circ \cdot \varepsilon\varphi 3^\circ \cdot \dots \cdot \varepsilon\varphi 88^\circ \cdot \varepsilon\varphi 89^\circ &= 1 \end{aligned}$$

46. Έστω μια γωνία x με $\eta\mu x = -\frac{5}{13}$ και $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

α) Να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{\eta\mu(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(\pi + x)}{2\varepsilon\varphi(-x) + \sigma\varphi(\pi + x)}$

γ) Αν επιπλέον η γωνία $\omega = x - \frac{\pi}{2}$ είναι η γωνία Α ενός τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)$.

47. Έστω $\alpha = \eta\mu(-1110^\circ)$ και $\beta = \varepsilon\varphi\frac{17\pi}{4}$

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς α και β .

β) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2\omega - \varepsilon\varphi^2\omega = 2\alpha\beta\varepsilon\varphi^2\omega \cdot \eta\mu^2\omega$.

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $A = \frac{1}{\eta\mu^2 5^\circ} - \frac{1}{\varepsilon\varphi^2 5^\circ}$.

Βασικές Ασκήσεις στο 3.4 – Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

48. Να υπολογίσετε την περίοδο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \eta\mu\frac{x}{3}$

β) $f(x) = \varepsilon\varphi 3x$

γ) $f(x) = \sigma\upsilon\nu 4x$

49. Να δείξετε ότι η συνάρτηση:

α) $f(x) = \eta\mu 8x + |\sigma\upsilon\nu 6x|$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{\pi}{2}$.

β) $f(x) = 2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$ είναι περιοδική με περίοδο $T = 4\pi$.

γ) $f(x) = \eta\mu 2x + \varepsilon\varphi x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.

δ) $f(x) = 2\eta\mu 8x - 3\sigma\upsilon\nu 4x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{\pi}{2}$.

50. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές:

α) $f(x) = x\eta\mu\frac{1}{x} - 3\sigma\upsilon\nu x$

β) $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x^2}$

γ) $f(x) = 2\eta\mu x - \varepsilon\varphi x$

δ) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - |x|$

ε) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - |\eta\mu x|$

στ) $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$

ζ) $f(x) = \frac{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu x}{3 + \sigma\upsilon\nu x}$

η) $f(x) = x - \eta\mu x$

θ) $f(x) = x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$

ι) $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{1 + \eta\mu^2 x}$

ια) $f(x) = \frac{|x| + x^4}{2 - \sigma\upsilon\nu x}$

ιβ) $f(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)$

ιγ) $f(x) = x\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)$

51. Για τις παρακάτω συναρτήσεις να υπολογίσετε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή. Στη συνέχεια να τις παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα αξόνων.

α) $f(x) = \eta\mu x, \quad g(x) = \eta\mu x + 2, \quad h(x) = \eta\mu x - 3$

β) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x, \quad g(x) = \sigma\upsilon\nu x - 2, \quad h(x) = \sigma\upsilon\nu x + 3$

γ) $f(x) = \eta\mu x, \quad g(x) = 2 - \eta\mu x, \quad h(x) = 2\eta\mu x - 3$

δ) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x, \quad g(x) = 2 + 3\sigma\upsilon\nu x, \quad h(x) = 1 - 2\sigma\upsilon\nu x, \quad s(x) = 3\sigma\upsilon\nu x - 3$

ε) $f(x) = \eta\mu x, \quad g(x) = \eta\mu 2x + 2, \quad h(x) = \eta\mu \frac{x}{2} - 3, \quad s(x) = 3 - 2\eta\mu \frac{x}{2}$

στ) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x, \quad g(x) = 1 - 2\sigma\upsilon\nu 2x, \quad h(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} - 1, \quad s(x) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x - 3$

ζ) $f(x) = \eta\mu x, \quad g(x) = \eta\mu(2x + \pi), \quad h(x) = 2\eta\mu\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right), \quad s(x) = 3 - 2\eta\mu\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$

η) $f(x) = 1 - 2\sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right), \quad g(x) = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2} - \pi\right) - 1, \quad h(x) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 3$

θ) $f(x) = 1 + 2\eta\mu \frac{x}{2}, \quad f(x) = 2 - 3\sigma\upsilon\nu 2x, \quad f(x) = -2 + 3\eta\mu 3x, \quad f(x) = -1 - 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{3}$

ι) $f(x) = \varepsilon\varphi x, \quad g(x) = -1 + \varepsilon\varphi x, \quad h(x) = 2 - \varepsilon\varphi x$

ια) $f(x) = \sigma\varphi x, \quad g(x) = -2 + \sigma\varphi x, \quad h(x) = 3 - \sigma\varphi x$

ιβ) $f(x) = \varepsilon\varphi x, \quad g(x) = -1 + \varepsilon\varphi 2x, \quad h(x) = 2 - \varepsilon\varphi \frac{x}{2}$

ιγ) $f(x) = \sigma\varphi x, \quad g(x) = -1 - \sigma\varphi 2x, \quad h(x) = 2 + \sigma\varphi \frac{x}{2}$

52. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha + \beta \cdot \eta\mu(\omega x)$, με $\beta > 0$, έχει περίοδο $T = 4\pi$, μέγιστη τιμή το 5 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{7}{2}\right)$.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς ω , α και β .

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης της f για $0 \leq x \leq 4\pi$

53. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha\eta\mu(\omega x)$, έχει περίοδο $T = 6\pi$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς ω και α .

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης της f για διάστημα μιας περιόδου.

54. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha + 2\eta\mu(\omega x)$, έχει περίοδο $T = \pi$ και μέγιστη τιμή το -1 .

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς ω και α .

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης της f για $-\pi \leq x \leq 2\pi$

55. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha - 3\eta\mu(\omega x)$, έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{3}$ και ισχύει ότι

$$f\left(\frac{17\pi}{9}\right) + f\left(\frac{26\pi}{9}\right) = 8.$$

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς α και β.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης της f.

56. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu \frac{x}{2} + \beta$, με $\alpha > 0$ έχει μέγιστη τιμή το 2 και ελάχιστη τιμή το -4.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς α και β.

β) Να βρείτε την περίοδο της f.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης της f για $-4\pi \leq x \leq 4\pi$

57. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega x)$, με $\beta < 0$ έχει περίοδο $T = \pi$, μέγιστη τιμή το 5 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς ω, α και β.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης της f για $-\pi \leq x \leq 2\pi$

58. Η συνάρτηση $f(x) = \gamma + 2\alpha \cdot \eta\mu(\beta x)$, με $\beta > 0$ έχει περίοδο $T = 3$, ελάχιστη τιμή το $3 - \alpha$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς α, β και γ.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης της f για $-\pi \leq x \leq 2\pi$

59. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha - 2 + (\beta - 1) \cdot \sigma\upsilon\nu(\gamma x)$, με $\alpha < 2$, $\beta > 1$ και $\gamma > 0$ η οποία έχει περίοδο $T = \frac{1}{3}$, ελάχιστη τιμή το -14 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{1}{18}, 1\right)$.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς α, β και γ.

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης της f.

Βασικές Ασκήσεις στο 3.5 – Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

60. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\eta\mu x = 0$

β) $\sigma\upsilon\nu x = 1$

γ) $\epsilon\phi x = 1$

δ) $\sigma\upsilon\nu x = -1$

ε) $\sigma\phi x = 0$

στ) $\eta\mu x = \frac{1}{2}$

ζ) $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

η) $2\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$

θ) $\epsilon\phi x - \sqrt{3} = 0$

ι) $\sqrt{3}\sigma\phi x - 1 = 0$

ια) $\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$

ιβ) $3\sigma\upsilon\nu x + 4 = 0$

61. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $(\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x)(\epsilon\phi x + 1) = 0$

β) $(\eta\mu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$

γ) $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x$

δ) $1 + \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0$

ε) $2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1 = 2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$

στ) $2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x = -\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

ζ) $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x \cdot \epsilon\phi x - 1 = \eta\mu x - \sqrt{3} \cdot \epsilon\phi x$

62. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $6\eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 3 = 0$

β) $\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$$\gamma) \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\epsilon) \eta\mu 3x = \sigma\upsilon\nu 2x$$

$$\zeta) \sigma\varphi 2x - \sigma\varphi\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\theta) \sigma\varphi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\varphi x = 0$$

$$\iota\alpha) \eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu x = 0$$

63. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) 2\eta\mu^2 x - 1 = 0$$

$$\gamma) 4\sigma\upsilon\nu^2 x + 8\eta\mu x - 7 = 0$$

$$\epsilon) 2\sigma\upsilon\nu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$$

$$\zeta) 2\eta\mu^2 x - 3|\eta\mu x| + 1 = 0$$

64. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \eta\mu x \cdot \epsilon\varphi x = 1 + \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

$$\gamma) \sigma\upsilon\nu x - \epsilon\varphi x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

$$\epsilon) \eta\mu x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \eta\mu x \cdot \epsilon\varphi x$$

$$\zeta) \frac{1}{\eta\mu^2 x} + 2\sqrt{3} \cdot \sigma\varphi x + 2 = 0$$

65. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \sqrt{2}\eta\mu x + 1 = 0 \text{ στο διάστημα } [-\pi, \pi].$$

$$\gamma) \epsilon\varphi x = \sqrt{3} \text{ στο διάστημα } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

66. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{7 - 4|\sigma\upsilon\nu x|}{4} - \frac{|\sigma\upsilon\nu x| + 2}{2} = 1 - 2|\sigma\upsilon\nu x|$$

$$\beta) |\eta\mu x| = |3\eta\mu x - 2|$$

$$\gamma) |\eta\mu x| = |\sigma\upsilon\nu 2x|$$

$$\delta) \eta\mu\left(\frac{21\pi}{2} + x\right) - \eta\mu\left(\frac{27\pi}{2} - x\right) = 2$$

$$\epsilon) \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{3\pi}{8}\right) + 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = -2$$

$$\delta) \eta\mu 3x = \eta\mu 2x$$

$$\sigma\tau) \epsilon\varphi 3x = \epsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\eta) \epsilon\varphi 2x - \sigma\varphi\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\iota) \eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0$$

$$\iota\beta) \eta\mu x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x = 0$$

$$\beta) 2\eta\mu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x = 0$$

$$\delta) \sqrt{3} \cdot \eta\mu^2 x - 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x = 0$$

$$\sigma\tau) 3\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu x + 1 = 0$$

$$\eta) 2\eta\mu^2 x - |\sigma\upsilon\nu x| - 1 = 0$$

$$\beta) \epsilon\varphi x - \eta\mu x = 1 - \eta\mu x \cdot \epsilon\varphi x$$

$$\delta) \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \eta\mu x} - \epsilon\varphi x = 2$$

$$\sigma\tau) 2\eta\mu x + 5\sigma\varphi x = \frac{4}{\eta\mu x}$$

$$\beta) \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x) = 0$$

$$\delta) 2\eta\mu x + 1 = 0 \text{ στο διάστημα } (-\pi, 2\pi]$$

67. Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παρακάτω συναρτήσεων και που την παρουσιάζουν:

α) $f(x) = 2\eta\mu x - 1, \quad x \in [0, 2\pi]$

β) $f(x) = 1 + 3\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \quad x \in [0, 2\pi]$

γ) $f(x) = \frac{1}{2 - \eta\mu x}, \quad x \in [0, \pi]$

δ) $f(x) = \frac{1}{3 + 2\eta\mu x}, \quad x \in [0, \pi]$

konkris