

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 8

**ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ -
ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**

Ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

- | | | |
|---|---|---|
| 1. * Οι πραγματικοί αριθμοί είναι σταθερά πολυώνυμα. | Σ | Λ |
| 2. * Το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται μηδενικό πολυώνυμο. | Σ | Λ |
| 3. * Κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό μηδέν. | Σ | Λ |
| 4. * Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού. | Σ | Λ |
| 5. * Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x . | Σ | Λ |
| 6. * Ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το γινόμενο των βαθμών των πολυωνύμων αυτών. | Σ | Λ |
| 7. * Αν σε μια διαίρεση πολυωνύμων το υπόλοιπο είναι μηδέν, η διαίρεση λέγεται τέλεια. | Σ | Λ |
| 8. * Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το ρ , ισχύει $P(\rho) = 0$. | Σ | Λ |
| 9. * Αν τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ έχουν για ρίζα το ρ , τότε και το πολυώνυμο $P(x) + Q(x)$ έχει για ρίζα το ρ . | Σ | Λ |
| 10. * Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει για ρίζα το 1, τότε και το πολυώνυμο $P(x - 1)$ έχει για ρίζα το 1. | Σ | Λ |
| 11. * Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει για ρίζα το ρ , τότε το $P(-x)$ έχει για ρίζα το $-\rho$. | Σ | Λ |
| 12. * Αν σε μια διαίρεση πολυωνύμων που δεν είναι τέλεια, ο διαιρέτης είναι τρίτου βαθμού, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι ακριβώς δευτέρου βαθμού. | Σ | Λ |
| 13. * Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρεθεί με το $x - \rho$ και η διαίρεση είναι τέλεια, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : \kappa(x - \rho)$, $\kappa \in \mathbb{R}^*$ είναι κ . | Σ | Λ |
| 14. * Ένα πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού κ διαιρούμενο με το $Q(x)$ βαθμού μ ($\kappa > \mu$) δίνει υπόλοιπο 0. Τότε κάθε ρίζα του $P(x)$ είναι ρίζα του $Q(x)$. | Σ | Λ |
| 15. * Το πολυώνυμο $P(x) = x^6 + 3x^4 + x^2 + 5$ διαιρούμενο με το διώνυμο $x - \rho$ δίνει υπόλοιπο 0. | Σ | Λ |
| 16. * Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το $(x - \rho)^2$ και η διαίρεση είναι τέλεια, τότε ισχύει $P(\rho) = 0$. | Σ | Λ |
| 17. * Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^6 + (x - 1)^2 + 5$ βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$. | Σ | Λ |
| 18. * Η εξίσωση $x^{14} + 3x^{12} + 7 = 0$ έχει ρίζα ακέραιο αριθμό. | Σ | Λ |
| 19. * Αν η εξίσωση $\sqrt{x - 2} = a + x$, $a \in \mathbb{R}^*$ έχει λύση τον αριθμό ρ , τότε ισχύει $\rho \geq 2$. | Σ | Λ |
| 20. * Η εξίσωση $\sqrt{x - 1} - \sqrt{1 - x} = 0$ είναι αδύνατη. | Σ | Λ |

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Το πολυώνυμο $P(x) = 3(x-1)^2 - 3x^2 + 5$ είναι
Α. μηδενικού βαθμού Β. πρώτου βαθμού Γ. δευτέρου βαθμού
Δ. το μηδενικό πολυώνυμο Ε. τρίτου βαθμού
2. Αν το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2 - 4)x^2 + (\lambda - 2)x - (\lambda + 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι πρώτου βαθμού τότε το λ είναι
Α. - 2 Β. - 1 Γ. 0 Δ. 1 Ε. $\sqrt{2}$
3. Το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2 - 1)x^3 + (1 - \lambda)x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda + 8$ είναι σταθερό πολυώνυμο, όταν το λ ισούται με
Α. - 1 Β. 0 Γ. 1
Δ. για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ Ε. για καμία τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$
4. Το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^5 - 1)x^3 + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x + \lambda - 1$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο όταν ο πραγματικός αριθμός λ ισούται με
Α. - 1 Β. 0 Γ. 1 Δ. - 5 Ε. 5
5. Αν το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^v - 1)x^5 + (1 - \lambda)x + 8$, $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι μηδενικού βαθμού, τότε το πολυώνυμο $q(x) = (\lambda^3 - 1)x^3 - (1 - \lambda^2)x^2 + (\lambda + 1)x - (1 - \lambda)$ είναι
Α. τρίτου βαθμού Β. δευτέρου βαθμού Γ. πρώτου βαθμού
Δ. μηδενικού βαθμού Ε. το μηδενικό πολυώνυμο
6. Τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 - \beta x + 5$ και $Q(x) = x^3 + \beta x^2 + 5 - \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$ είναι ίσα όταν ο β ισούται με
Α. - 1 Β. 0 Γ. 1 Δ. 5 Ε. - 5
7. Αν τα πολυώνυμα $P(x) = \lambda^{v+1}x^v + (2\lambda - 3)x^2 + x - 1$ και $q(x) = \lambda x^{1998} - 3x^2 + x - (\lambda + 1)$ είναι ίσα, τότε ο πραγματικός αριθμός λ είναι
Α. 1 Β. - 1 Γ. 0 Δ. 1998
Ε. κάθε πραγματικός αριθμός
8. Το πολυώνυμο $P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v+1} + \dots + a_0$ έχει για ρίζα το μηδέν. Τότε για το a_0 ισχύει
Α. $a_0 > 0$ Β. $a_0 < 0$ Γ. $a_0 = a_v$ Δ. $a_0 = 0$
Ε. κανένα από τα προηγούμενα
9. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι ψευδής;
Α. Αν $P(\rho) = 0$ τότε το ρ είναι ρίζα του $P(x)$
Β. Κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό μηδέν
Γ. Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός
Δ. Ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το γινόμενο των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.
Ε. Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x
10. Έστω $P(x)$ σταθερό πολυώνυμο και $P(2) = 5$. Τότε το $P(-2)$ ισούται με
Α. 5 Β. - 5 Γ. 2 Δ. - 2 Ε. 0

11. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^{1998} + 1$. Αν $P(\alpha + 1997) = 1$, τότε για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει
A. $\alpha > 1997$ **B.** $\alpha > 1998$ **Γ.** $\alpha = 1997$
Δ. $\alpha = -1997$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα
12. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει: $(x^2 - 1) \cdot P(x) = x^6 - 2x^4 + 5x - 8$, τότε το $P(x)$ είναι
A. τρίτου βαθμού **B.** τέταρτου βαθμού **Γ.** πέμπτου βαθμού
Δ. έκτου βαθμού **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα
13. Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το -2 , τότε διαιρείται με το διώνυμο
A. $x - 2$ **B.** $x + 2$ **Γ.** $2x + 1$ **Δ.** $2x - 1$ **Ε.** $2 - x$
14. Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και -1 , τότε διαιρείται με τα διώνυμα
A. $x - 2$ και $x - 1$ **B.** $x + 2$ και $x - 1$ **Γ.** $x + 2$ και $x + 1$
Δ. $x - 2$ και $x + 1$ **Ε.** $2x - 1$ και $2x + 1$
15. Αν η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το διώνυμο $2x + 1$ είναι τέλεια, τότε το $P(x)$ έχει ρίζα του τον αριθμό
A. 2 **B.** -2 **Γ.** 1 **Δ.** $-\frac{1}{2}$ **Ε.** $\frac{1}{2}$
16. Αν ένα πολυώνυμο πέμπτου βαθμού διαιρείται με ένα τρίτου βαθμού, τότε το πηλίκο είναι
A. το πολύ δευτέρου βαθμού **B.** τουλάχιστον δευτέρου βαθμού
Γ. ακριβώς δευτέρου βαθμού **Δ.** ακριβώς τρίτου βαθμού
Ε. τουλάχιστον τρίτου βαθμού
17. Αν σε μια διαίρεση πολυωνύμων που δεν είναι τέλεια, ο διαιρέτης είναι τρίτου βαθμού, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι
A. τουλάχιστον τρίτου βαθμού
B. ακριβώς τρίτου βαθμού
Γ. ακριβώς δευτέρου βαθμού
Δ. το πολύ δευτέρου βαθμού
Ε. τουλάχιστον δευτέρου βαθμού
18. Το πολυώνυμο $P(x) = x^8 + x^4 + x^2 + 3$ το διαιρούμε με το διώνυμο $x - \rho$. Αν είναι v το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης, τότε
A. $v > 0$ **B.** $v < 0$ **Γ.** $v = 0$ **Δ.** $v \leq 0$
Ε. κανένα από τα προηγούμενα
19. Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρεθεί με το $x - \rho$ και η διαίρεση είναι τέλεια, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) : \kappa(x - \rho)$, $\kappa \in \mathbb{R}^*$ είναι
A. κ **B.** $-\kappa$ **Γ.** 0
Δ. $-\kappa\rho$ **Ε.** $\kappa\rho$
20. Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $Q(x)$ δίνει υπόλοιπο 0 [ο βαθμός του $P(x)$ είναι μεγαλύτερος του βαθμού του $Q(x)$], τότε

- A.** Κάθε ρίζα του $P(x)$ είναι και ρίζα του $Q(x)$
B. Αν ρ δεν είναι ρίζα του $Q(x)$ τότε δεν είναι ρίζα και του $P(x)$
Γ. Ο ρ είναι ρίζα του $Q(x)$ αν και μόνο αν ο ρ είναι ρίζα του $P(x)$
Δ. Κάθε ρίζα του $Q(x)$ είναι και ρίζα του $P(x)$
Ε. Το $P(x)$ έχει ρίζες μόνο τις ρίζες του $Q(x)$
- 21.** Για ποιο από τα παρακάτω πολυώνυμα μπορείτε με βεβαιότητα και χωρίς δοκιμή να πείτε ότι δεν μπορεί να έχει παράγοντα της μορφής $x - \rho$;
A. $x^3 - 2x^2 + x - 1$ **B.** $4x^5 - 1$
Γ. $2x^4 - x^2 + x - 7$ **Δ.** $x^6 - x^4 + 2x^2 - 9$ **Ε.** $x^8 + 2x^6 + 5$
- 22.** Το πολυώνυμο $P(x)$ (βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του τρία) διαιρείται με το $(x - \rho)^3$ και η διαίρεση είναι τέλεια. Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - \rho)$ είναι
A. - 3 **B.** - 1 **Γ.** 0 **Δ.** 1 **Ε.** 3
- 23.** Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις δεν έχει ρίζα ακέραιο αριθμό
A. $x^2 - 5x + 6 = 0$ **B.** $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$
Γ. $3x^4 - 2x^3 + x - 2 = 0$ **Δ.** $3x^4 + x^2 + 7 = 0$
Ε. $2x^3 + x + 3 = 0$
- 24.** Ποιας συνάρτησης η γραφική παράσταση αποκλείεται να τέμνει τον άξονα $x'x$
A. $f(x) = (x - 2)^2 + 2x - 4$ **B.** $g(x) = x^3 - 3x$
Γ. $h(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ **Δ.** $k(x) = x^5 - 5x + 4$
Ε. $\Phi(x) = (x + 1)^4 + x^2 + 5$
- 25.** Για ποιας συνάρτησης τη γραφική παράσταση μπορείτε να πείτε με βεβαιότητα και χωρίς καμία δοκιμή ότι βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$
A. $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$ **B.** $g(x) = x^2 - 5x$
Γ. $h(x) = (x^3 - 1)^2 + x^4$ **Δ.** $k(x) = (x - 1)^2 - 2$
Ε. $\Phi(x) = x^4 + x^2 - 2$
- 26.** Η εξίσωση $x^3 - 3x^2 + \kappa x + 2 = 0$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ αποκλείεται να έχει ακέραια ρίζα τον αριθμό
A. - 1 **B.** 1 **Γ.** - 2 **Δ.** 2 **Ε.** 3
- 27.** Αν η εξίσωση $x^3 + \beta x^2 - x + \alpha = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, έχει ρίζα το 3, τότε ο α αποκλείεται να ισούται με
A. 6 **B.** 10 **Γ.** 12 **Δ.** 15 **Ε.** 18
- 28.** Η εξίσωση $\sqrt{3 - x} = x + \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}^*$ αποκλείεται να έχει ρίζα τον αριθμό
A. 1 **B.** - 1 **Γ.** $\frac{2}{3}$ **Δ.** 4 **Ε.** $\frac{5}{4}$
- 29.** Για να δεχθούμε το ρ για ρίζα της εξίσωσης $\sqrt{5 - x} = \kappa^2 x$, $\kappa \in \mathbb{R}^*$ πρέπει
A. $\rho \in (0, +\infty)$ **B.** $\rho \in (-\infty, 0)$ **Γ.** $\rho \in [5, +\infty)$

$$\Delta. \rho \in (-\infty, 5] \quad \text{E. } \rho \in [0, 5]$$

30. Αν η εξίσωση $\sqrt{x-3} + \sqrt{\kappa-x} = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, έχει οπωσδήποτε λύση, ποια τιμή δεν μπορεί να πάρει ο $\kappa \in \mathbb{R}^*$;
 Α. 2 Β. 3 Γ. 4 Δ. 5 Ε. 6

Ερωτήσεις ανάπτυξης

- Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = x^3 - 2x$, $Q(x) = x^2 - 3x - 1$. Να βρεθούν:
 α) $P(x) + Q(x)$
 β) $P(x) - Q(x)$
 γ) $P(x) \cdot Q(x)$
- Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το πολυώνυμο:
 $P(x) = (\lambda + 2)x^3 - (\lambda^2 + \lambda - 2)x + \lambda^2 - 4$
 να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
- Αν $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ και $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, δείξτε ότι το πολυώνυμο
 $P(x) = (\alpha - \beta)x^2 + (\beta - \gamma)x + \gamma - \alpha$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
- Να δειχθεί ότι το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa - 2)x^2 + (2\lambda + 6)x + \kappa + \lambda - 3$
 είναι διάφορο του μηδενικού.
- Να βρεθεί για ποιες τιμές των κ, λ, μ είναι ίσα τα πολυώνυμα:
 $P(x) = \lambda x^2 - (\lambda - \kappa)x + \mu - 2\lambda$
 $Q(x) = (\mu - \lambda)x^2 + 4x + \kappa + \lambda$.
- Να προσδιοριστεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο
 $P(x) = 9x^3 - 3x^2 + 8x - 27$
 να παίρνει τη μορφή $\alpha(x^3 + x) - 3x^2 + (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$.
- Να βρεθεί πολυώνυμο $K(x)$ τέτοιο ώστε το τετράγωνό του να ισούται με το: $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$.
- Να δειχθεί ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο
 $P(x) = (\kappa - 1)x^5 + (3\kappa^2 + 2)x^3 + \kappa x$
 δεν έχει ρίζα το $\frac{1}{2}$.
- Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + (\alpha - 1)x + 2\alpha$ έχει ρίζα το -1 αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει και για το $K(x) = x^3 + 4x^2 + (\alpha^2 - 1)x$. Το αντίστροφο ισχύει;
- Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:
 $(x^2 + 1)P(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 3$

11. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + 2x + 5$. Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός α αν ισχύει: $P(\alpha - 1) = 13$.
12. Να γίνουν οι διαιρέσεις:
- $(2x^5 - x^3 + 2x^2 - 9) : (x^2 - 1)$
 - $(x^4 - 7x^3 + 2x - 15) : (x^3 + 5)$
 - $(3x^3 - 4\alpha x + \alpha^2) : (x - 2\alpha)$
 - $[7x^3 - (9\alpha + 7\alpha^2)x + 9\alpha^2] : (x - \alpha)$
13. Να βρείτε το πολυώνυμο $f(x)$ το οποίο όταν διαιρεθεί με το $x^2 + 1$, δίνει πηλίκο $3x - 1$ και υπόλοιπο $2x + 5$.
14. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ ώστε αν το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$ διαιρεθεί με το πολυώνυμο $x^2 + \kappa x + \lambda$ να αφήνει υπόλοιπο 0.
15. Αν το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$ διαιρείται ακριβώς με το $x - 2$ και εάν επιπλέον $f(1) = 8$, να προσδιοριστούν τα α, β .
16. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$. Αν το $P(x)$ διαιρείται με το $x^2 - x - 6$, να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
17. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda^2 x^2 + 2(\lambda^2 - 3\lambda + 1)x - 3(4\lambda + 1)$. Δείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$ είναι ανεξάρτητο του λ .
18. Να αποδείξετε ότι αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 5$, τότε το πολυώνυμο $P(2x - 3)$ έχει παράγοντα το $x - 4$.
19. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:
- $(x^3 - 2x^2 + 5x - 6) : (x - 2)$
 - $(2x^5 - x^4 + 6x^2 + 3) : (x + 1)$
 - $[6x^3 - (2\alpha + 6\alpha^2)x + 3\alpha^2] : (x - \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$
 - $(x^6 - 4x^5 + x^2 - 2) : (2x - 1)$
 - $(x^5 - \frac{1}{\lambda^2} x^3 + \lambda x^2 - 2) : (\lambda x + 1), \lambda \in \mathbb{R}^*$
20. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \kappa x^2 + (\lambda - 1)x + 5$ να έχει για παράγοντα το $(x - 1)(x + 2)$.
21. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - (3 + \alpha)x + \beta + 10$ να έχει για παράγοντα το $(x - 2)^2$.
22. Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x - 2$ αφήνει υπόλοιπο 10 και διαιρούμενο με $x + 3$ αφήνει υπόλοιπο 5. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x - 2)(x + 3)$.
23. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι ακέραιες λύσεις των εξισώσεων:

- α) $x^3 - 8x + 7 = 0$
 β) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + x - 2 = 0$
 γ) $(x^3 - 2x)x + x + 2 = 0$
 δ) $(x - 1)(x^4 + 4) - 3(x + 4) = 0$
 ε) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$

24. Αν κ ακέραιος αριθμός να δειχθεί ότι η εξίσωση: $5x^{2\kappa} + 9\kappa x - 1 = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

25. Να λυθούν οι ανισώσεις:

- α) $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$
 β) $x^3 + 3x \geq 5x^2 - 9$
 γ) $3x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x - 2 \leq 0$
 δ) $x^4 - 3x^3 + 6x \leq 4$

26. Δίνεται η εξίσωση $x^5 - \alpha x^3 + \beta x^2 + x - 1 = 0$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η εξίσωση να έχει το ανώτερο δυνατό πλήθος ακέραιων ριζών.

27. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- α) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$
 β) $(x^2 + 3x - 2)^6 - 9(x^2 + 3x - 2)^3 + 8 = 0$
 γ) $(x + 2)^8 - 3(x + 2)^4 - 4 = 0$
 δ) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{x-1}{x}\right) + 6 = 0$

28. Να λυθούν οι εξισώσεις:

- α) $\frac{x}{x-1} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$ β) $\frac{x^2+2x-4}{x-2} = x^2$

29. Να λυθούν οι ανισώσεις:

- α) $\frac{x^3 + 2x - 4}{x - 2} < 1$ β) $\frac{x^2}{x+1} - \frac{4}{x-1} \leq \frac{2}{x^2-1}$

30. Να λυθούν οι εξισώσεις:

- α) $(2\eta\mu x - 1)^4 + 6(2\eta\mu x - 1)^2 - 7 = 0$
 β) $2\eta\mu^3 x + 5\eta\mu^2 x + 5\eta\mu x + 2 = 0$
 γ) $2\sigma\upsilon\nu^4 x - 5\sigma\upsilon\nu^3 x + 5\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$

31. Να λυθούν οι εξισώσεις:

- α) $\sqrt{x-3} = 5$
 β) $x - \sqrt{25-x^2} = 1$
 γ) $\sqrt{x} - \sqrt{x+1} = 2$
 δ) $2\sqrt{5-4x} = 5-4x$
 ε) $\sqrt{x^2-x+5} = x-3$

32. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\sqrt{x-2} < \sqrt{2x+1}$

β) $\sqrt{4x+1} < \sqrt{1-2x}$

konkris

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

konkris

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1.	Σ
2.	Σ
3.	Σ
4.	Λ
5.	Σ
6.	Λ
7.	Σ

8.	Σ
9.	Σ
10.	Λ
11.	Σ
12.	Λ
13.	Λ
14.	Λ

15.	Λ
16.	Σ
17.	Σ
18.	Λ
19.	Σ
20.	Λ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	B
2.	A
3.	E
4.	Γ
5.	Γ
6.	B
7.	Γ
8.	Δ
9.	Δ
10.	A

11.	Δ
12.	B
13.	B
14.	Δ
15.	Δ
16.	Γ
17.	Δ
18.	A
19.	Γ
20.	Δ

21.	E
22.	Γ
23.	Δ
24.	E
25.	Γ
26.	E
27.	B
28.	Δ
29.	Δ
30.	A

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. α) $x^3 + x^2 - 5x - 1$
 β) $x^3 - x^2 + x + 1$
 γ) $x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x$

2. $\lambda = -2$

3. Εφαρμόζουμε την ταυτότητα:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma) [(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2]$$

και επειδή $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ είναι $\alpha = \beta = \gamma$ κλπ.

4. Δεν υπάρχει τιμή των πραγματικών αριθμών κ, λ ώστε να μηδενίζονται συγχρόνως οι συντελεστές $\kappa - 2, 2\lambda + 6, \kappa + \lambda - 3$.
5. $\kappa = 2, \lambda = -2, \mu = -4$
6. $\alpha = 8$
7. Το $K(x)$ πρέπει να είναι 2ου βαθμού.
Έστω $K(x) = ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0$
 $(ax^2 + bx + \gamma)^2 = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$
Εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε: $a = \pm 1, b = \pm 1, \gamma = \mp 2$
8. Πρέπει $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Βρίσκουμε $12\kappa^2 + 17\kappa + 7 = 0$ και επειδή $\Delta < 0$, δεν υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε το $\frac{1}{2}$ να είναι ρίζα του πολωνύμου.
9. Ισχύει $P(-1) = 0$. Βρίσκουμε $\alpha = -2$. Για $\alpha = -2$ ισχύει και $K(-1) = 0$, άρα το -1 είναι ρίζα του $K(x)$. Το αντίστροφο δεν ισχύει, γιατί αν το -1 είναι ρίζα του $K(x)$ βρίσκουμε $\alpha = \pm 2$. Οπότε για $\alpha = 2$ το $P(x)$ δεν έχει ρίζα το -1 , διότι $P(-1) \neq 0$.
10. Το $P(x)$ είναι 3ου βαθμού.
Άρα πρέπει $(x^2 + 1)(ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 3$.
Βρίσκουμε $\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = -2, \delta = -3$.
11. $P(\alpha - 1) = 13 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 + 2(\alpha - 1) + 5 = 13$. Βρίσκουμε $\alpha = \pm 3$.
13. Το $f(x)$ θα είναι 3ου βαθμού.
Έστω $f(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta, a \neq 0$.
Θα ισχύει: $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 1) + 2x + 5$.
Βρίσκουμε $\alpha = 3, \beta = -1, \gamma = 5, \delta = 4$.
14. Η διαίρεση των πολωνύμων δίνει υπόλοιπο:
 $u(x) = (2\kappa\lambda - \kappa^3)x - \lambda(\kappa^2 - \lambda) + 1$
Πρέπει $2\kappa\lambda - \kappa^3 = 0$ και $-\lambda(\kappa^2 - \lambda) + 1 = 0$.
Βρίσκουμε $\lambda = 1$ και $\kappa = \pm \sqrt{2}$.
15. Λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} f(2)=0 \\ f(1)=8 \end{cases}$ βρίσκουμε $\alpha = -9, \beta = 12$.
16. Βρίσκουμε ότι οι ρίζες της $x^2 - x - 6 = 0$ είναι $-2, 3$.
Πρέπει $P(-2) = 0$ και $P(3) = 0$. Βρίσκουμε $\alpha = -1, \beta = -6$.

17. Το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι $v = P(-2) = -7$.

18. Αφού το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 5$, ισχύει $P(5) = 0$.

Για να έχει το $P(2x - 3)$ παράγοντα το $x - 4$ πρέπει το πολυώνυμο για $x = 4$ να μηδενίζεται. Πράγματι, για $x = 4$ έχουμε $P(2 \cdot 4 - 3) = P(5) = 0$.

19. α) $\pi(x) = x^2 + 5$,

$$v = 4$$

β) $\pi(x) = 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 3x - 3$,

$$v = 6$$

γ) $\pi(x) = 6x^2 + 6ax - 2a$,

$$v = a^2$$

δ) $\pi(x) = x^5 - \frac{7}{2}x^4 - \frac{7}{4}x^3 - \frac{7}{8}x^2 + \frac{9}{16}x + \frac{9}{32}$,

$$v = -\frac{119}{64}$$

ε) $\pi(x) = x^4 - \frac{1}{\lambda}x^3 + \lambda x - 1$,

$$v = \frac{1}{\lambda} - 2$$

20. Εργαζόμαστε με το σχήμα Horner

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -\kappa & \lambda - 1 & 5 & \\ \downarrow & 1 & 1 - \kappa & \lambda - \kappa & \\ \hline 1 & 1 - \kappa & \lambda - \kappa & \boxed{\lambda - \kappa + 5} & \end{array} \quad 1$$

$$\begin{array}{r|rr} 1 & 1 - \kappa & \lambda - \kappa \\ \downarrow & -2 & 2 + 2\kappa \\ \hline 1 & -1 - \kappa & \boxed{2 + \lambda + \kappa} \end{array} \quad -2$$

Πρέπει $\begin{cases} \lambda - \kappa + 5 = 0 \\ \lambda + \kappa + 2 = 0 \end{cases}$ Βρίσκουμε $\kappa = \frac{3}{2}, \lambda = -\frac{7}{2}$

21. $\begin{array}{r|rrrr} 1 & -1 & -3 - \alpha & \beta + 10 & \\ \downarrow & 2 & 2 & -2\alpha - 2 & \\ \hline 1 & 1 & -1 - \alpha & \boxed{\beta - 2\alpha + 8} & \end{array} \quad 2$

$$\begin{array}{r|rr} 1 & 1 & -1 - \alpha \\ \downarrow & 2 & 6 \\ \hline 1 & 3 & \boxed{5 - \alpha} \end{array} \quad 2$$

Πρέπει $\begin{cases} \beta - 2\alpha + 8 = 0 \\ 5 - \alpha = 0 \end{cases}$ Βρίσκουμε $\alpha = 5, \beta = 2$

22. Είναι $P(2) = 10$ και $P(-3) = 5$

Το πολυώνυμο $P(x)$ γράφεται: $P(x) = (x-2)(x+3)π(x) + αx + β$ (1)

Για $x = 2$ η (1) γίνεται: $P(2) = 2α + β$

Για $x = -3$ η (1) γίνεται: $P(-3) = -3α + β$

Βρίσκουμε $α = 1, β = 8$

23. α) Πιθανές ακέραιες λύσεις οι $±1, ±7$.

Εργαζόμαστε με σχήμα Horner και βρίσκουμε ακέραια λύση $x = 1$.

Ομοίως εργαζόμαστε και στα υπόλοιπα ερωτήματα.

24. Οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης (αν υπάρχουν) θα είναι οι $±1$.

Για $x = 1$ η εξίσωση γίνεται: $5 \cdot 1^{2ν} + 9κ \cdot 1 - 1 = 0$

Βρίσκουμε ότι $κ \notin \mathbb{Z}$, άρα το 1 δεν είναι λύση της εξίσωσης.

Ομοίως εργαζόμαστε και για $x = -1$.

25. α) Η ανίσωση, αν παραγοντοποιήσουμε το πρώτο μέλος, γράφεται:

$$(x+1)(x-1)(x-2) > 0$$

Βρίσκουμε τα πρόσημα των παραγόντων $x+1, x-1, x-2$ και με πίνακα καταλήγουμε ότι η ανίσωση αληθεύει όταν $-1 < x < 1$ ή $x > 2$.

β) Εργαζόμενοι αναλόγως βρίσκουμε $x \geq -1$.

γ) $-2 \leq x \leq \frac{1}{3}$

δ) $-\sqrt{2} \leq x \leq 1$ ή $\sqrt{2} \leq x \leq 2$

26. Το ανώτερο πλήθος ακέραιων ριζών της εξίσωσης είναι 2, δηλαδή οι διαιρέτες του 1.

Για $x = 1$ η εξίσωση γράφεται: $1 - α + β = 0$

Για $x = -1$ η εξίσωση γράφεται: $-1 + α + β - 2 = 0$

Βρίσκουμε $α = 2, β = 1$

27. α) Θέτουμε $x^3 = ω$ οπότε η εξίσωση γράφεται $ω^2 - 9ω + 8 = 0$.

Βρίσκουμε $ω = 1$ ή $ω = 8$, άρα $x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$

Ομοίως εργαζόμαστε και στα υπόλοιπα ερωτήματα.

28. α) Πρέπει $x \neq \pm 1$. Μετά την απαλοιφή παρονομαστών η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $x^2 + x - 2 = 0$.

Βρίσκουμε $x = -2$ ή $x = 1$ (απορρίπτεται).

β) Πρέπει $x \neq 2$. Μετά την απαλοιφή του παρονομαστή η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $x^3 - 3x^2 - 2x + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 4) = 0. \text{ Βρίσκουμε } x = 1 \text{ ή } \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}.$$

29. α) Πρέπει $x \neq 2$.

$$\frac{x^3 + 2x - 4}{x - 2} < 1 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 2x - 4}{x - 2} - 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^3 + 2x - 4 - x + 2}{x - 2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + x - 2}{x - 2} < 0 \text{ άρα}$$

$$(x - 2)(x^3 + x - 2) < 0.$$

Βρίσκουμε $1 < x < 2$.

β) Πρέπει $x \neq \pm 1$, εργαζόμενοι αναλόγως με το (α) ερώτημα, βρίσκουμε ότι η ανίσωση γράφεται $(x^2 - 1)(x - 3)(x^2 + 2x + 2) \leq 0$.

x					
$x^2 - 1$	+	1	—	1	+
$x - 3$	—		—	0	+
$x^2 + 2x + 2$	+		+	+	+
Γ	—		+	—	0

Βρίσκουμε $x < -1$ ή $1 < x \leq 3$.

30. α) Θέτουμε $(2\eta\mu x - 1)^2 = y$.

Βρίσκουμε $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ή $x = \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

β) Θέτουμε $\eta\mu x = y$ και η εξίσωση γίνεται

$$2y^3 + 5y^2 + 5y + 2 = 0 \Leftrightarrow (y + 1)(2y^2 + 3y + 2) = 0 \Leftrightarrow y = -1$$

$$\text{άρα } \eta\mu x = -1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

γ) Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x = y$. Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$(y - 1)(y + 1)(2y^2 - 5y + 2) = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ή } y = -1 \text{ ή } y = \frac{1}{2}$$

ή $y = 2$ (απορρίπτεται) κλπ.

31. α) Πρέπει $x \geq 3$. Υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε:

$$x - 3 = 25 \Leftrightarrow x = 28, \text{ η οποία επαληθεύει την εξίσωση.}$$

β) Πρέπει $-5 \leq x \leq 5$. Υψώνουμε στο τετράγωνο και προκύπτει:

$$25 - x^2 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ ή } x = 4$$

Δεχόμαστε μόνο την $x = 4$ που επαληθεύει την εξίσωση.

γ) Πρέπει $x \geq 0$ και $x \geq -1$.

$$\text{Εργαζόμενοι αναλόγως βρίσκουμε } x = \frac{9}{16}.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση βλέπουμε ότι δεν την επαληθεύει.

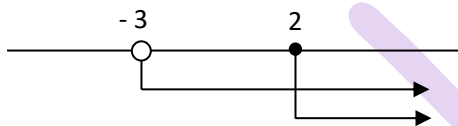
Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

δ) $x = \frac{5}{4}$ ή $x = \frac{1}{4}$

ε) αδύνατη.

32. α) Πρέπει $x \geq 2$ και $x \geq -\frac{1}{2}$ που συναληθεύουν για $x \geq 2$.

Υψώνουμε στο τετράγωνο και βρίσκουμε: $x - 2 < 2x + 1 \Leftrightarrow x > -3$.



Τελικά, όπως φαίνεται από το σχήμα, είναι $x \geq 2$.

β) $-\frac{1}{4} \leq x < 0$

Βασικές Ασκήσεις στο 4.1 - Πολυώνυμα

1. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι μονώνυμα του x :

$$2x^5, 3x^{-2}, -\frac{1}{2}x^3, 4 \cdot \frac{1}{x}, \sqrt{3}x, 4\sqrt{x}, -5x^2, -7, 0, 2x^0$$

2. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι πολυώνυμα του x :

α) $2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \sqrt{3}x - 1$

β) $x^2 - \frac{3}{x}$

γ) $2x^3 - 7\sqrt{x}$

δ) $\sqrt{a} \cdot x^2 + \frac{1}{a}x$

ε) -5

στ) 0

3. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = -3x^4 + \sqrt{5}x^2 - \frac{4}{9}x + 6$. Να γράψετε τους όρους, τους συντελεστές, τον σταθερό όρο και τον βαθμό του πολυωνύμου.

4. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 2\lambda)x + \lambda - 2$. Να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

5. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 3x + 2$.

α) Να βρείτε την τιμή του πολυωνύμου για $x = 2$.

β) Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς 1 και -1 είναι ρίζες του.

6. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

α) Να βρείτε την αριθμητική τιμή του $P(x)$ για $x = -3$.

β) Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς 1, -1 και -2 είναι ρίζες του $P(x)$.

7. Να βρείτε τις τιμές των α, β , για τις οποίες η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου

$P(x) = \alpha x^3 + \beta x + 1$ για $x = 2$ είναι 5 και επίσης ο αριθμός 1 είναι ρίζα του.

8. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x-1)^{2017} - x^{2018}$. Να βρείτε:

α) τον σταθερό όρο του $P(x)$.

β) το άθροισμα των συντελεστών του $P(x)$.

9. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 - x$ και $Q(x) = 2x - 1$. Να βρείτε τα παρακάτω πολυώνυμα και το βαθμό τους:

α) $R(x) = 2P(x) - 3Q(x)$

β) $H(x) = P(x) \cdot Q(x)$

γ) $\Phi(x) = (Q(x))^2$

10. Να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου: $P(x) = (2x^2 - 5)^4 (x^3 + 5x - 6)^2$

11. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x+1)\lambda^2 + (x^2-1)\lambda - x^2 - x + 2$

α) Να βρείτε τους συντελεστές του πολυωνύμου $P(x)$ και τον σταθερό του όρο.

β) Να δείξετε ότι ο σταθερός όρος του είναι μη μηδενικός για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x)$ είναι σταθερό πολυώνυμο.

12. Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = (a^2 - 4)x^3 + (a^2 + 2a)x^2 - a^2x + 3a - 8$ και $Q(x) = (3a + 2)x^2 - 2ax + a - a^2$. Να βρείτε για ποια τιμή του $a \in \mathbb{R}$ τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.
13. Να βρείτε τις τιμές του μ , για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x) = (\mu^3 - 1)x^3 + (\mu^2 - \mu)x + |\mu| - 1$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
14. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α, β, γ , για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x) = (a - 2)x^2 - 3x$ και $Q(x) = (\beta - 1)x + \gamma - a$ είναι ίσα.
15. Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = a^2x^3 + (a^2 + 5a)x^2 + a^2x - 10$ και $Q(x) = 4x^3 + 2(a - 1)x^2 - 2ax - a^2 + 3a$.
- α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ οι αριθμοί $P(1)$ και $Q(0)$ είναι αντίθετοι.
 β) Για ποια τιμή του $a \in \mathbb{R}$ τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα;
16. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, για τους οποίους το πολυώνυμο $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ παίρνει τη μορφή: $f(x) = \alpha x(x^2 - 1) + \beta x^2 + \gamma x + \delta$.
17. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2 - 4)x - \lambda + 2$. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες:
- α) Το $P(x)$ είναι 1^{ου} βαθμού.
 β) Το $P(x)$ είναι μηδενικού βαθμού.
 γ) Δεν ορίζεται βαθμός του $P(x)$.
18. Να βρείτε πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $-1, 0$ και να ισχύει $P(1) = 4$.
19. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x - 1)^{10} - x^9 + \alpha x + \beta$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε ο σταθερός όρος του $P(x)$ να είναι 6 και το άθροισμα των συντελεστών του $P(x)$ να είναι 7.
20. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^3 - \lambda)x^2 + (\lambda^2 + \lambda)x + \lambda^2 - 2\lambda - 3$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$:
- α) το $P(x)$ είναι σταθερό πολυώνυμο,
 β) το $P(x)$ είναι μηδενικό πολυώνυμο,
 γ) το $P(x)$ έχει βαθμό μηδέν,
 δ) το $P(x)$ έχει ρίζα το 2,
 ε) η αριθμητική τιμή του $P(x)$ για $x = -1$ είναι -3 .
21. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = (\alpha - 4)x^3 + (2\beta + \alpha)x^2 + (2\gamma + \alpha + \beta)x + \delta + \gamma$. Να ορίσετε τι πρέπει να ισχύει για τους αριθμούς α, β, γ και δ , ώστε το $P(x)$:
- α) να είναι 3^{ου} βαθμού,
 β) να είναι το πολύ 2^{ου} βαθμού,
 γ) να είναι 2^{ου} βαθμού,
 δ) να είναι μηδενικού βαθμού,
 ε) να στερείται βαθμού.
22. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^2 - 2x$ και $Q(x) = x^3 + 3x - 1$. Να βρείτε τα παρακάτω πολυώνυμα και να προσδιορίσετε τον βαθμό τους:
- α) $xP(x) - 2Q(x)$ β) $P(x + 2)Q(x^2)$

23. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει: $(3x - 2)P(x) = 3x^3 - 14x^2 + 17x - 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
24. Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου $P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 2\lambda)x - \lambda + 2$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
25. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει: $(x^2 + 1) \cdot P(x) = 2x^3 - x(x - 2) - 1$
26. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1, να δείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P(x^2 - 3) + (x - 2)P(3x)$ έχει ρίζα το 2.
27. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει: $P(x + 1) = x^3 - 3x + 1$.
28. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$, για το οποίο ισχύει: $[P(x)]^2 - P(x) = x^2 + x$, (1)
29. Να γράψετε το κλάσμα $\frac{x + 13}{x^2 + x - 6}$ ως άθροισμα απλών κλασμάτων.
30. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει: $\frac{-3x + 17}{(x - 4)(x + 1)} = \frac{\alpha}{x - 4} + \frac{\beta}{x + 1}$
31. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = \lambda x^3 + (\lambda - \mu)x^2 - 4\lambda x + 3$. Το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και η αριθμητική του τιμή για $x = -2$ είναι 15.
- α) Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ .
- β) Δίνεται πολυώνυμο $Q(x)$ για το οποίο ισχύει: $(2x - 1)Q(x) = P(x)$
- i) Να βρείτε το πολυώνυμο $Q(x)$.
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $P(-1)\eta\mu^2 x - 18\sigma\nu x = P(Q(-2))$

Βασικές Ασκήσεις στο 4.2 – Διαίρεση Πολυωνύμων

32. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις και σε κάθε περίπτωση να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης:
- α) $(2x^4 - 7x^3 + 18x + 2) : (x^2 - 3x + 1)$
- β) $(2x^3 - 3x^2 - x + 7) : (2x + 3)$
- γ) $(-3x^3 - 3x^2 + x^4 + 12x - 4) : (x^2 - 3x + 2)$
- δ) $x^5 : (x^2 - x + 1)$
33. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 3x + 1$.
- α) Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ δια του $x^2 - 1$
- β) Να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ της παραπάνω διαίρεσης.
- γ) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.
- δ) Να εξετάσετε, αν η παραπάνω διαίρεση είναι τέλεια.
- ε) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P(x) - (4x + 1)$ διαιρείται από το $x^2 - 1$.
34. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (x^2 - 1)(3x - 2) + 5x - 1$
- α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $[P(x) : (x^2 - 1)]$
- β) Η παραπάνω ισότητα είναι η ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $3x - 2$;
35. α) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x) = x^3 - 5x + 1$ με το $x + 1$.
- β) Να βρείτε τις τιμές του a , για τις οποίες το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) = 2x^2 - ax + a$ με το $x + 2a$ είναι 11
36. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 1$ είναι 2, να δείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P(3x + 7) - x^2 + 2$ έχει ρίζα το -2 .
37. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $3x^2 - x - 4$ είναι $2x + 5$, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$.
38. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - 22x + 24$
- α) Να αποδείξετε ότι το $2x - 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$.
- β) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.
39. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + (a^2 - 4a - 8)x + a^2 - 21$
- α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 + 1)$
- β) Αν η παραπάνω διαίρεση είναι τέλεια, να βρείτε τον αριθμό a .
40. α) Να εξετάσετε αν τα πολυώνυμα $x + 1$ και $x - 1$ είναι παράγοντες του πολυωνύμου $P(x) = x^3 - x^2 + 2$.
- β) Να βρείτε τις τιμές του a , για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x) = a^3x^3 - 5x + 2$ έχει παράγοντα το $x - 2$.
41. Να δείξετε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα δεν έχουν παράγοντα της μορφής: $x - p$.

$$\alpha) P(x) = 3x^6 + 5x^2 + 3$$

$$\beta) Q(x) = -3x^4 - 5x^2 - 3$$

42. Να βρείτε τις τιμές των α και β , για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x) = -x^3 + 2ax - \beta + a$, έχει παράγοντα το $x + 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$ είναι 3.
43. Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax - a + \beta$ έχει παράγοντες όλους τους παράγοντες του πολυωνύμου $x^2 - 2x$, να βρείτε τις τιμές των α και β .
44. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner, να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ των παρακάτω διαιρέσεων και να γράψετε τις ταυτότητες των διαιρέσεων:
- α) $(x^3 - 5x + 3) : (x + 2)$
- β) $(2x^3 - 3x^2 + 5) : (x - 2)$
- γ) $-2x^3 : (x + 1)$
- δ) $(x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x - 12) : (x^2 - 4)$
- ε) $(x^3 - 7x + 6) : (x - 1)(x + 3)$
- στ) $(x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3) : (x + 1)(x - 3)$
- ζ) $(x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18) : (x^2 - 9)$
- η) $(x^v + x^{v-1} - 1) : (x - 1)$
- θ) $(2x^v + x^2 - 2x - 1) : (x - 1)$
45. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x + 3)^{10} - (x + 1)^9 + (3x + 5)^8$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$.
46. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^8 - 2x^7 + x^3 - 3x - 2$. Να εξετάσετε αν τα πολυώνυμα $x - 2$ και $x + 1$ είναι παράγοντες του $P(x)$.
47. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 + x$, όταν ισχύει ότι $P(0) = 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$ είναι 3.
48. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 - 14x + \beta$. Το $x - 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$ είναι 36.
- α) να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- β) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.
49. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 4x^2 + ax + \beta$. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x^2 + 2x - 3$.
50. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + \beta$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x^2 - 4x - 4$.
51. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 8x^3 - 16x^2 + \kappa x + \lambda$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(2x + 1)$ είναι -12 και το $2x - 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$.
- α) Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$
- β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης: $P(x) : (2x - 1)$

52. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 2$ είναι 1 και με το $x + 3$ είναι -14 .
Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^2 + x - 6$.
53. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x^2 - 3x - 10$ είναι $-2x + 7$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 2$ και της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 5$.
54. Έστω $P(x)$ πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού, το οποίο διαιρείται με το $x^2 + 3$.
α) Να βρείτε τη μορφή του πηλίκου $\pi(x)$.
β) Αν επιπλέον έχει ρίζα το -1 και ισχύει $P(-2) = 14$, να βρείτε το $P(x)$.
55. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 - (a + 2)x^2 + \beta x + 4$.
α) Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ δια του $x^2 - 2$ και στη συνέχεια, να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.
β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε:
i) το υπόλοιπο $u(x)$ της παραπάνω διαίρεσης, να είναι $u(x) = 5x + 6$.
ii) το $x^2 - 2$, να είναι παράγοντας του $P(x)$.
56. Να βρείτε τα α, β , ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x + \beta$, να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x^2 - 3x + 2$.
57. Να βρείτε τα α, β , ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x + \beta$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x - 1)^2$.
58. Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = (x - 2)^{10} - (4 - 3x)^5 + (x - x^2)^5$ και $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντες όλους τους παράγοντες του $Q(x)$.
59. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - \beta + 1$. Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 3$, ενώ το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$ είναι 8.
α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
β) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.
60. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2\beta - 4$. Το $P(x)$ έχει για παράγοντες τα $x - 3$ και $x + 1$.
α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
β) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.
61. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 - (5\alpha - 3)x + \beta - 1$. Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ το $P(x)$ έχει για παράγοντα το $x^2 - 4$.
62. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 12$. Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ το $P(x)$ έχει για παράγοντα το $(x + 2)^2$.

Βασικές Ασκήσεις στο 4.3 – Πολυωνυμικές Εξισώσεις και Ανισώσεις

63. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^3 - 12 = 4x - 3x^2$

β) $x^4 = 8x$

γ) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$

δ) $(x-1)^3 - 3(x^2-1) + 2(x-1) = 0$

ε) $(2x+1)^3 = 27$

στ) $(x^2-2)^4 - 16 = 0$

ζ) $(x^2-11)^5 + 32 = 0$

η) $(5x-3)^6 + 4 = 0$

θ) $(2x-1)^6 - 81(2x-1)^2 = 0$

ι) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

ια) $(3x+1)^8 - 15(3x+1)^4 - 16 = 0$

ιβ) $(x^2-x-1)^2 - 6(x^2-x-3) - 7 = 0$

ιγ) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

ιδ) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 - 2x + 1 = 0$

64. Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες των εξισώσεων:

α) $x^3 - 5x + 2 = 0$

β) $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$

65. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν ακέραιες ρίζες:

α) $x^3 + 3x + 2 = 0$

β) $x^3 - 5x^2 + x - 2 = 0$

γ) $x^4 - 3x^2 + 7x + 1 = 0$

66. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^3 - 3x + 2 = 0$

β) $3x^3 - 17x^2 + 6x + 4 = 0$

γ) $2x^4 - 3x^3 - 17x^2 + 27x - 9 = 0$

δ) $x^6 - 7x^2 - 6 = 0$

ε) $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$

στ) $2x^3 - x^2 - 7x + 6 = 0$

ζ) $x^4 - 9x^2 + 4x + 12 = 0$

η) $(x-1)^3 - 15x = 3 - 3(x-2)(x+2)$

θ) $x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x = 0$

ι) $\frac{1}{2}x^3 + \frac{17}{6}x^2 + 3x - \frac{4}{3} = 0$

ια) $\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{12}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = 0$

67. Αν η εξίσωση $x^3 - (\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ έχει ακέραια ρίζα, να βρείτε το λ και μετά να λύσετε την εξίσωση.

68. Να βρείτε τα κοινά σημεία των παρακάτω γραφικών παραστάσεων με τον άξονα $x'x$:

α) $f(x) = -x^3 - x + 2$

β) $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 9x - 6$

69. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^4 - 15x^2 + 10x + 24}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

70. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = 2x^4 - x^3 + ax^2 - 5x + 6$ διέρχεται από το σημείο $M(-2, 0)$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $a = -14$,

β) να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

71. Να βρείτε τα κοινά σημεία των παρακάτω γραφικών παραστάσεων:

α) $f(x) = x^3 + 9$ και $g(x) = 5x^2 - 3x$

β) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 7x$ και $g(x) = 2x^3 + x^2 + 6$

72. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 - 5x + \beta$, $a, \beta \in \mathbb{R}$

α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει για ρίζα του το 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x - 2$ είναι ίσο με -4 , να βρείτε τις τιμές των a και β .

β) Αν $a = -2$ και $\beta = 6$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

73. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

β) $4x^2 + 4x + 1 > 0$

γ) $x^2 - 3x + 4 \leq 0$

74. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω γινομένων:

α) $P(x) = (x-1)(x^2-4)$ β) $P(x) = (-x+2)(x-1)^2$ γ) $P(x) = x^3(x^2+1)$

75. Να κάνετε τον πίνακα προσήμων των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^3 - x$

β) $f(x) = -x^3 + 5x^2$

γ) $f(x) = x^3 - 8$

δ) $f(x) = x^5 - x$

ε) $f(x) = x^3 + x - 2$

76. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου: $P(x) = (x-2)(x^2-3x-4)(x^2+6x+9)(x^2-x+2)$. Στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

77. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$P(x) = (x^2+3x+2)(1-x^2)(-x^2+2x+3)(x^2-2x+1)(x^2+x-2)$. Στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$.

78. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $x^4 \leq x^3$

β) $(x-1)(4x-x^2-4) \geq 0$

γ) $x^3+1 < 0$

δ) $x^3+2 \geq 0$

ε) $x^4-16 < 0$

στ) $x^3 > 7x+6$

ζ) $2x^3+3x^2+4 \leq x^4+8x$ η) $x^4-3x^3-15x^2+19x+30 \leq 0$

θ) $-4x^3-4x^2+7x-2 \geq 0$ ι) $x^4-x^3-7x^2+13x-6 \geq 0$ ια) $x^4+5x-6 \geq 0$

ιβ) $x^4-3x^3-3x^2+7x+6 \leq 0$ ιγ) $x^4+3x^3+3x^2+8x+12 \leq 0$

79. Να βρείτε τα διαστήματα του x , στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = x^3 + x - 2$ βρίσκεται πάνω (κάτω / όχι πάνω / όχι κάτω) από τον άξονα x' .

80. Να βρείτε τα διαστήματα του x , στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = -x^3 + 5x^2$ βρίσκεται πάνω (κάτω) από την ευθεία $\epsilon: y = 3x + 9$.

81. α) Να λύσετε την ανίσωση: $(|x|-2)(x-1) < 0$

β) Να κάνετε τον πίνακα προσήμων της συνάρτησης $f(x) = x \cdot \eta\mu x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

82. Το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \lambda x^2 - 20x + \mu$ έχει παράγοντα το $x+2$, ενώ διαιρούμενο με το $x-1$ αφήνει υπόλοιπο -15 .

α) Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

γ) να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$

83. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$. Να βρείτε:
- α) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.
 - β) τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω (βρίσκεται κάτω / δεν βρίσκεται πάνω / δεν βρίσκεται κάτω) από τον άξονα $x'x$.
84. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4$ και $g(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 8$. Να βρείτε:
- α) τα σημεία τομής των C_f και C_g .
 - β) τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω (βρίσκεται κάτω / δεν βρίσκεται πάνω / δεν βρίσκεται κάτω) από την C_g .
85. Το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + ax^2 + \beta x + a$ έχει παράγοντα το $x + 2$. Επίσης η διαίρεση του $P(x)$ με το $x - 1$ αφήνει υπόλοιπο -18 .
- α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
 - β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$
 - γ) Να λύστε την ανίσωση $P(x) \geq 0$ ($P(x) \leq 0$ / $P(x) > 0$ / $P(x) < 0$)
86. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + ax^2 - 13x + \beta$. Το $P(x)$ έχει για παράγοντα το $x + 1$, ενώ η διαίρεση του $P(x)$ με το $x - 2$ αφήνει υπόλοιπο $P(1) - 4$.
- α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
 - β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$
 - γ) Να λύστε την ανίσωση $P(x) < 0$ ($P(x) \leq 0$ / $P(x) > 0$ / $P(x) \geq 0$)
87. Το πολυώνυμο $P(x) = 6x^4 + 23x^3 + ax^2 + \beta x - 3$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ έχει δύο ακέραιες και αρνητικές ρίζες.
- α) να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.
 - β) να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
 - γ) να λύστε την ανίσωση $P(x) < 0$ ($P(x) \leq 0$ / $P(x) > 0$ / $P(x) \geq 0$)
88. Έστω $P(x)$ πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο $x^2 + 2x$ και είναι τέτοιο, ώστε $P(1) = 0$ και $P(2) = 8$.
- α) Να αποδείξετε ότι $P(x) = x^3 + x^2 - 2x$
 - β) Να λύστε την εξίσωση $P(x) = 8$.
 - γ) Να λύστε την ανίσωση $P(x) > 2$.

Βασικές Ασκήσεις στο 4.4 –Εξισώσεις και Ανισώσεις

89. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{1}{x+2} - \frac{3x-10}{x^2-4} = 2x - \frac{x-3}{x-2}$$

$$\beta) \frac{8}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x^3+15}{x^2-1}$$

$$\gamma) x + \frac{3}{x-2} = 1 - \frac{4-5x}{x^2-2x}$$

$$\delta) \frac{x^2-3x+2}{x} - \frac{1-3x^2}{x-1} = \frac{2}{x^2-x}$$

90. Να βρείτε τις ρίζες και τον πίνακα προσήμων των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\beta) f(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$\gamma) f(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$\delta) f(x) = x - \frac{1}{x}$$

$$\epsilon) f(x) = x - \frac{1}{x^2}$$

$$\sigma\tau) f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$$

$$\zeta) f(x) = 1 - \frac{x-1}{x^2}$$

$$\eta) f(x) = \frac{|x|-2}{x-1}$$

$$\theta) f(x) = \frac{\sin x}{2x-\pi}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

91. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) \frac{x-2}{x-1} > 0$$

$$\beta) \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\gamma) \frac{1}{x} > 1$$

$$\delta) \frac{x+3}{x^2+x+1} < 1$$

$$\epsilon) \frac{(x+2)(x^2-9)}{-x^2-2x+3} \geq 0$$

$$\sigma\tau) \frac{-2}{3-x} < 0$$

$$\zeta) \frac{5-x}{x+1} \geq 0$$

$$\eta) \frac{3x-1}{x+2} \geq 2$$

$$\theta) x - \frac{x+8}{x-1} \geq 0$$

$$\iota) 2x^2 + \frac{5x^2}{x-3} + \frac{6}{x} \leq \frac{7x^2-18}{x^2-3x}$$

$$\iota\alpha) \frac{x^3+6x^2-x}{x^2-x+3} < 2$$

$$\iota\beta) \left| \frac{x^2-2}{3x+2} \right| < 1$$

$$\iota\gamma) \frac{|x-2|+2x-3}{x-2} > 2x-2$$

$$\iota\delta) \frac{|x|-1}{|x|-2} \leq 0$$

$$\iota\epsilon) x^2 + \frac{3x^2-x-1}{x-1} - \frac{x^2-2}{x-x^2} > 0$$

92. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής

παράστασης της f , για τις οποίες:

α) βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$,

β) βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$,

γ) δεν βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$,

δ) δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$,

ε) βρίσκεται πάνω (βρίσκεται κάτω / δεν βρίσκεται πάνω / δεν βρίσκεται κάτω) από τη την παραβολή $y = x^2 - 1$

93. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής

παράστασης της f , για τις οποίες:

- α) βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$,
 β) βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$,
 γ) δεν βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$,
 δ) δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$,
 ε) βρίσκεται κάτω (βρίσκεται πάνω / δεν βρίσκεται πάνω / δεν βρίσκεται κάτω) από τη την ευθεία $\epsilon: y = x - 1$.

94. Βρείτε τις τετμημένες των σημείων της παραβολής $y = x^2 + 3x + 3$ που βρίσκονται κάτω

(βρίσκονται πάνω / δεν βρίσκονται κάτω / δεν βρίσκονται πάνω) από την υπερβολή $y = -\frac{1}{x}$.

95. Θεωρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{ax-1}{x-2}$ διέρχεται από το σημείο

$A(3, 5)$.

α) Να δείξετε ότι $a = 2$.

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες.

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από την ευθεία $\epsilon: y = 3$.

96. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{a^3}{x^2}$

α) Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(1, 1)$, να βρείτε τις τιμές του a .

β) Αν $a = 1$, να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από την ευθεία $y = 1$.

97. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax}{x^2-1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να βρείτε τις τιμές του a , για τις οποίες η C_f διέρχεται από το $M(2, 2)$.

Αν $a = 3$, τότε:

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες.

δ) να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$

98. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\sqrt{x-1} - 3 = 0$

β) $\sqrt{2x+11} + 7 = 0$

γ) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x}$

δ) $\sqrt{x+2} + x = 4$

ε) $\sqrt{x+6} = x$

στ) $\sqrt{2x^2-1} - x = x-3$

ζ) $x - \sqrt{14-2x} = 3$

η) $x + \sqrt{4-11x} = 2$

θ) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$

ι) $\sqrt{x+6} = \sqrt{7x+4} - \sqrt{x+1}$

ια) $\sqrt{x-5} - 3 = \sqrt{x-8}$

ιβ) $\sqrt{x+7} + \sqrt{6-x} = 5$

ιγ) $\sqrt{9-x^2} - \sqrt{x-5} = 2$

ιδ) $\sqrt{x+6} = \sqrt{7x+4} - \sqrt{x+1}$

99. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\sqrt{x-1} - 3 < 0$

β) $\sqrt{2x+11} \geq 7 = 0$

γ) $\sqrt{2x-1} \leq \sqrt{x}$

δ) $\sqrt{x+2} < x = 4$

ε) $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} > 0$

στ) $\sqrt{x-1} > x-3$

$$\zeta) \sqrt{2x+6} - \sqrt{9-x} \leq 0$$

$$\eta) \sqrt{x+10} \geq x-2$$

$$\theta) \sqrt{x+7} \leq x+1$$

100. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+2}$ και $g(x) = x$.

α) Να βρείτε αλγεβρικά τα κοινά σημεία των C_f και C_g .

β) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $x - \sqrt{x+2} = 0$

γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η C_f είναι κάτω από την C_g .

101. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{4x-4} - 5x + 13 = 0$$

$$\beta) 4\sigma\nu\nu^4 x + 4\sigma\nu\nu^3 x + 9\eta\mu^2 x - \sigma\nu\nu x - 7 = 0$$

$$\gamma) x + 2\sqrt{x} - 3 = 0$$

$$\delta) \sqrt{2x^2 + x + 1} = 2x^2 + x - 1$$

$$\epsilon) x + 2\sqrt[3]{x} - 3 = 0$$

$$\sigma\tau) \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - 4 = 0$$

$$\zeta) 2\eta\mu^3 x + 5\sigma\nu\nu^2 x + \eta\mu x - 3 = 0$$

102. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 + \kappa x^2 + x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ όταν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το $x+2$.

β) Για $\kappa = -7$ και $\lambda = 6$ να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

γ) Για $\kappa = -7$ και $\lambda = 6$ να λυθεί η ανίσωση $\frac{P(x)}{x-5} \geq 0$

103. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x-2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x+1$ είναι ίσο με -6 , να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β) Αν $\alpha = -5$ και $\beta = 1$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\nu\nu^3 \omega + 5\eta\mu^2 \omega + \sigma\nu\nu \omega - 3 = 0$

104. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 7x + \alpha + 5$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x είναι ίσο με 6 και ότι έχει ρίζα το 1.

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β .

β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$, να λύσετε:

i) την ανίσωση $P(x) \geq 0$

ii) την εξίσωση $\sqrt{P(x)} = x - 1$