5° ΓΕΛ ΗΛΙΟΥΠΟΛΗΣ, 5/11/2024

Πρόχειρο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης. **Β-ΘΕΤΙΚΗ-2**

Διδάσκων: Χρυσανθόπουλος Κώστας

Ονοματεπώνυμο: ________________________________

ΘΕΜΑ Α **(8 μονάδες)**

Δίνονται τα σημεία Α(3, -1) και Β(2, -2). Να βρεθεί το σημείο Μ για το οποίο ισχύει:

$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{MB}$

ΘΕΜΑ Β **(4 x 3 = 12 μονάδες)**

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Α (-1, 2) και Γ(0, 2) οι δύο κορυφές του και Μ(2, 0) το μέσο της πλευράς ΒΓ.

1. Να αποδείξετε ότι η κορυφή Β έχει συντεταγμένες Β(4, -2).
2. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Ν της πλευράς ΑΓ.
3. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$.
4. Βρείτε σημείο Κ του άξονα x΄x που να ισαπέχει από τα σημεία Α και Μ.

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ Α}}$

$A(3,-1) \quad B(2,-2) \quad M(x,y)$

α΄ τρόπος

$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}+3(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}+3\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=2(3,-1)-(2,-2)=(6,-2)-(2,-2) \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OM}=(6-2,-2+2)=(4,0)$ άρα $\underline{M(4,0)}$

β΄ τρόπος

$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow$

$(x_A-x_M, y_A-y_M)+3(x_B-x_A, y_B-y_A)=2(x_B-x_M, y_B-y_M) \Leftrightarrow$

$(3-x,-1-y)+3(2-3,-2+1)=2(2-x,-2-y) \Leftrightarrow$

$(3-x,-1-y)+3(-1,-1)=(4-2x,-4-2y) \Leftrightarrow$

$(3-x,-1-y)+(-3,-3)=(4-2x,-4-2y) \Leftrightarrow$

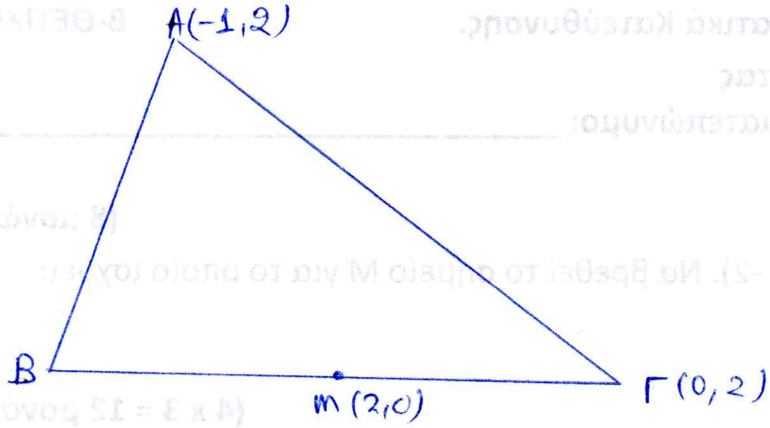
$(3-x-3,-1-y-3)=(4-2x,-4-2y) \Leftrightarrow$

$(-x,-y-4)=(4-2x,-4-2y) \Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{l} -x=4-2x \\ -y-4=-4-2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-x=4 \\ 2y-y=-4+4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=4 \\ y=0 \end{array}$

άρα $\underline{M(4,0)}$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ Β}}$



1) $M\left(\dfrac{x_B+x_\Gamma}{2}, \dfrac{y_B+y_\Gamma}{2}\right)$ άρα

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{x_B+x_\Gamma}{2} \\ y_M &= \frac{y_B+y_\Gamma}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2 &= \frac{x_B+0}{2} \\ 0 &= \frac{y_B+2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &x_B = 4 \\ &y_B+2=0 \Rightarrow y_B=-2 \end{aligned}$$

Άρα $\boxed{B(4,-2)}$

2) $N\left(\dfrac{x_A+x_\Gamma}{2}, \dfrac{y_A+y_\Gamma}{2}\right)$ άρα

$$x_N = \frac{x_A+x_\Gamma}{2} = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$y_N = \frac{y_A+y_\Gamma}{2} = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

άρα $\boxed{N\left(-\frac{1}{2}, 2\right)}$

3) $\vec{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A) = (2-(-1), 0-2) = (3,-2)$

άρα $|\vec{AM}| = |(3,-2)| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

άρα $\boxed{|\vec{AM}| = \sqrt{13}}$

4) Αφού το Κ είναι στον άξονα x'x άρα έχει τη μορφή $K(x,0)$

Αφού θα ισαπέχει από τα Α, Μ άρα:

$$d(A,K) = d(M,K) \iff |\vec{AK}| = |\vec{MK}| \iff$$

$$\sqrt{(x_K-x_A)^2+(y_K-y_A)^2} = \sqrt{(x_K-x_M)^2+(y_K-y_M)^2} \iff$$

$$\cancel{\sqrt{\quad}}^{2} = \cancel{\sqrt{\quad}}^{2} \iff$$

$$(x+1)^2+(0-2)^2 = (x-2)^2+(0-0)^2 \iff$$

$$\cancel{x^2}+1+2x+4 = \cancel{x^2}+4-4x \iff$$

$$4x+2x = \cancel{4}-1-\cancel{4} \iff 6x=-1 \iff x=-\frac{1}{6}$$

άρα το Κ είναι $\boxed{K\left(-\frac{1}{6}, 0\right)}$