Α΄ ΟΜΑΔΑ

5ο ΓΕΛ ΗΛΙΟΥΠΟΛΗΣ, 26/11/2024

Ωριαίο Διαγώνισμα Α΄ τετραμήνου στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου.

Β-Θετική-2 **Διδάσκων: Κώστας Χρυσανθόπουλος**

Ονοματεπώνυμο: _______________________________

ΘΕΜΑ Α (25 μονάδες)

Α. Θεωρούμε τα σημεία $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$ του καρτεσιανού επιπέδου. Αν $M(x_M, y_M)$ το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, τότε να γράψετε και να αποδείξετε τον τύπο που δίνει τις συντεταγμένες του Μ. **(10 μονάδες)**

βλέπε σχολικό σελ. 33

Β. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως **Σ** (Σωστή) ή **Λ** (Λάθος). **(5 x 2 = 10 μονάδες)**

Λ 1. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, τότε $\overrightarrow{AB} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Λ 2. $\vec{\alpha}^3 = |\vec{\alpha}|^3$ δεν υπάρχει $\vec{\alpha}^3$

Λ 3. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 y_1 + x_2 y_2$ $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

Σ 4. Το $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\gamma}$ παριστάνει διάνυσμα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ αριθμός, άρα $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$ διάνυσμα

Λ 5. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα και λ_1, λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσής τους, τότε ισχύει ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

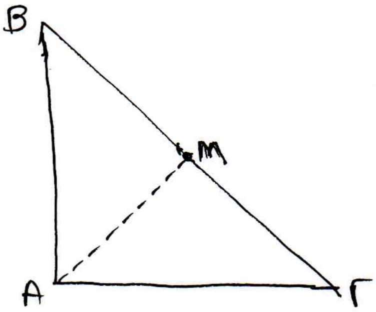
ΘΕΜΑ Β (14+13+12+10+13+13 = 75 μονάδες)

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ για το οποίο ισχύει ότι: Α(2, 0), $\overrightarrow{AB}=(3,1)$ και Μ(3, 2) το μέσο της πλευράς ΒΓ.

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ.

Αν Β(5, 1) και Γ(1, 3) οι άλλες δύο κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ, τότε:

2. Να υπολογίσετε τη γωνία $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}}\right)$
3. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
4. Βρείτε σημείο Δ ώστε το ΑΓΔΒ (τα γράμματα με κυκλική σειρά) να είναι τετράγωνο.
5. Βρείτε σημείο Κ ώστε $2\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BK}$.
6. Βρείτε σημείο Λ του άξονα y΄y το οποίο να ισαπέχει από τα σημεία Α και Γ.



1) $\vec{AB}=(3,1) \Leftrightarrow (x_B-x_A,\ y_B-y_A)=(3,1) \Leftrightarrow$

$(x_B-2,\ y_B-0)=(3,1) \Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{l} x_B-2=3 \\ y_B=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_B=5 \\ y_B=1 \end{array}$ άρα $\underline{B(5,1)}$

$M\left(\frac{x_B+x_\Gamma}{2},\ \frac{y_B+y_\Gamma}{2}\right)$ άρα

$\left.\begin{array}{l} x_M=\frac{x_B+x_\Gamma}{2} \\ y_M=\frac{y_B+y_\Gamma}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3=\frac{5+x_\Gamma}{2} \\ 2=\frac{1+y_\Gamma}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5+x_\Gamma=6 \\ 1+y_\Gamma=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_\Gamma=1 \\ y_\Gamma=3 \end{array}$ άρα $\underline{\Gamma(1,3)}$

2) $\vec{AB}=(3,1)$ $\quad \vec{AM}=(x_M-x_A,\ y_M-y_A)=(3-2,\ 2-0)=(1,2)$

$|\vec{AB}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$ $\quad |\vec{AM}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

$\vec{AB}\cdot\vec{AM}=|\vec{AB}|\,|\vec{AM}|\cdot συν(\widehat{\vec{AB},\vec{AM}}) \Rightarrow συν(\widehat{\vec{AB},\vec{AM}})=\dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{AM}}{|\vec{AB}|\,|\vec{AM}|} \Rightarrow$

$συν(\widehat{\vec{AB},\vec{AM}})=\dfrac{(3,1)\cdot(1,2)}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{3+2}{\sqrt{50}}=\dfrac{5}{\sqrt{25\cdot 2}}=\dfrac{\cancel{5}}{\cancel{5}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

άρα $\underline{(\widehat{\vec{AB},\vec{AM}})=45^\circ}$

3) Για να δείξουμε ότι είναι ορθογώνιο:

(α΄ τρόπος)

$\vec{AB}=(3,1)$ $\quad \vec{A\Gamma}=(1-2,\ 3-0)=(-1,3)$ οπότε:

$\vec{AB}\cdot\vec{A\Gamma}=(3,1)\cdot(-1,3)=-3+3=0$ άρα $\vec{AB}\perp\vec{A\Gamma}$

(β΄ τρόπος)

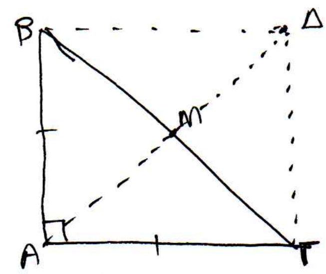
$|\vec{AB}|=\sqrt{10}$ (βλέπε το (2)), $\quad |\vec{A\Gamma}|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{1+9}=10$

$\vec{B\Gamma}=(1-5,\ 3-1)=(-4,2)$ άρα $|\vec{B\Gamma}|=\sqrt{(-4)^2+2^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$

άρα παρατηρούμε ότι $|\vec{AB}|^2+|\vec{A\Gamma}|^2=|\vec{B\Gamma}|^2 \Leftrightarrow \sqrt{10}^2+\sqrt{10}^2=\sqrt{20}^2 \Leftrightarrow$

$10+10=20$ άρα ισχύει πυθαγόρειο, οπότε $A\hat{B}\Gamma$ ορθογώνιο

Για να δείξουμε ότι είναι ισοσκελές αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $|\vec{AB}|=|\vec{A\Gamma}|=\sqrt{10}$, άρα είναι ισοσκελές

4) 

(α' τρόπος)

αφού $AB = A\Gamma$ & $\hat{A}=90^\circ$ για να είναι τετράγωνο

αρκεί $\vec{B\Delta}=\vec{A\Gamma}$

$\vec{B\Delta}=(x_\Delta-5,\ y_\Delta-1)$, $\vec{A\Gamma}=(-1,3)$ άρα:

$\vec{B\Delta}=\vec{A\Gamma} \Leftrightarrow (x_\Delta-5,\ y_\Delta-1)=(-1,3) \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x_\Delta-5=-1 \\ y_\Delta-1=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_\Delta=5-1 \\ y_\Delta=1+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_\Delta=4 \\ y_\Delta=4 \end{array}$$ άρα $\underline{\Delta(4,4)}$

(β' τρόπος)

Στο ΑΒΔΓ το Μ κέντρο του δηλαδή οι διαγώνιοι τα διχοτομούνται

άρα το Μ μέσο του ΑΔ. Άρα:

$$\left.\begin{array}{l} x_M=\dfrac{x_A+x_\Delta}{2} \\ y_M=\dfrac{y_A+y_\Delta}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3=\dfrac{2+x_\Delta}{2} \\ 2=\dfrac{0+y_\Delta}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2+x_\Delta=6 \\ y_\Delta=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_\Delta=4 \\ y_\Delta=4 \end{array}$$ άρα $\underline{\Delta(4,4)}$

5) (α' τρόπος)

$2\vec{AK}+\vec{AB}=\vec{BK} \Leftrightarrow 2(\vec{OK}-\vec{OA})+\vec{OB}-\vec{OA}=\vec{OK}-\vec{OB} \Leftrightarrow$

$2\vec{OK}-2\vec{OA}+\vec{OB}-\vec{OA}=\vec{OK}-\vec{OB} \Leftrightarrow \vec{OK}=3\vec{OA}-2\vec{OB} \Leftrightarrow \vec{OK}=3(2,0)-2(5,1)$

$\Leftrightarrow \vec{OK}=(6,0)-(10,2) \Leftrightarrow \vec{OK}=(-4,-2)$ άρα $\underline{K(-4,-2)}$

(β' τρόπος)

$2\vec{AK}+\vec{AB}=\vec{BK} \Leftrightarrow 2(x_K-x_A,\ y_K-y_A)+(x_B-x_A,\ y_B-y_A)=(x_K-x_B,\ y_K-y_B) \Leftrightarrow$

$2(x_K-2,\ y_K-0)+(5-2,\ 1-0)=(x_K-5,\ y_K-1) \Leftrightarrow$

$(2x_K-4,\ 2y_K)+(3,1)=(x_K-5,\ y_K-1) \Leftrightarrow (2x_K-4+3,\ 2y_K+1)=(x_K-5,\ y_K-1) \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_K-1=x_K-5 \\ \text{\&} \\ 2y_K+1=y_K-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_K=-4 \\ y_K=-2 \end{array}$$ Άρα $K(-4,-2)$

6) Αφού το Λ θέλω να είναι στον άξονα $y'y$, άρα θα έχει τη μορφή $\Lambda(0,y)$. Και αφού θέλω να ισαπέχει από τα Α & Γ άρα:

$(\Lambda A)=(\Lambda\Gamma) \Leftrightarrow |\vec{\Lambda A}|=|\vec{\Lambda\Gamma}|$ όπου:

$\vec{\Lambda A}=(2-0,\ 0-y)=(2,-y)$ & $\vec{\Lambda\Gamma}=(1-0,\ 3-y)=(1,3-y)$ Άρα:

$|\vec{\Lambda A}|=|\vec{\Lambda\Gamma}| \Leftrightarrow |(2,-y)|=|(1,3-y)| \Leftrightarrow \sqrt{2^2+(-y)^2}=\sqrt{1^2+(3-y)^2} \Leftrightarrow$

$\sqrt{4+y^2}=\sqrt{1+9+y^2-6y} \Leftrightarrow \sqrt{4+y^2}=\sqrt{10+y^2-6y} \Leftrightarrow$

$\left(\sqrt{\quad}\right)^2=\left(\sqrt{\quad}\right)^2 \Leftrightarrow 4+\cancel{y^2}=10+\cancel{y^2}-6y \Leftrightarrow$

$-6y=-6 \Leftrightarrow \underline{y=1}$ Άρα το σημείο Γ είναι το $\boxed{\Gamma(0,1)}$

Β' ΟΜΑΔΑ

5º ΓΕΛ ΗΛΙΟΥΠΟΛΗΣ, 26/11/2024

Ωριαίο Διαγώνισμα Α΄ τετραμήνου στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου.

Β-Θετική-2 **Διδάσκων: Κώστας Χρυσανθόπουλος**

Ονοματεπώνυμο: ______________________________

ΘΕΜΑ Α (25 μονάδες)

Α. Θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{A}(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$ του καρτεσιανού επιπέδου. Να γράψετε και να αποδείξετε τον τύπο που μας δίνει τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. **(15 μονάδες)**

βλέπε σχολικό σελ. 33

Β. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως **Σ** (Σωστή) ή **Λ** (Λάθος). **(5 x 2 = 10 μονάδες)**

Λ 1. Το $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})$ παριστάνει διάνυσμα Το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ αριθμός, το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ αριθμός, άρα και αυτό αριθμός

Σ 2. Αν $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$

Σ 3. Ισχύει $\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2$

Σ 4. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα και λ_1, λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσής τους, τότε ισχύει ότι $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2$

Λ 5. Αν $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία, τότε $d(\mathrm{A},\mathrm{B})=\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$

$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

ΘΕΜΑ Β **(14+13+12+10+13+13 = 75 μονάδες)**

Δίνεται τρίγωνο ΚΛΜ για το οποίο ισχύει ότι: Κ(2, 0), $\overrightarrow{K\Lambda} = (3,1)$ και Α(3, 2) το μέσο της πλευράς ΛΜ.

1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Λ και Μ.

Αν Λ(5, 1) και Μ(1, 3) οι άλλες δύο κορυφές του τριγώνου ΚΛΜ, τότε:

2. Να υπολογίσετε τη γωνία $\left(\widehat{\overrightarrow{K\Lambda},\overrightarrow{KA}}\right)$
3. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
4. Βρείτε σημείο Ν ώστε το ΚΛΝΜ (τα γράμματα με κυκλική σειρά) να είναι τετράγωνο.
5. Βρείτε σημείο Β ώστε $2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{\Lambda B}$.
6. Βρείτε σημείο Γ του άξονα y΄y το οποίο να ισαπέχει από τα σημεία Κ και Μ.

Η άσκηση αυτή είναι ίδια ακριβώς με της άλλης ομάδας, απλά αλλάζουν τα γράμματα.

Το ΑΒΓ γίνεται ⟶ ΚΛΜ