

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Β' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»

1. * Αν $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$, τότε τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά. Σ Λ
2. * Αν $|\vec{a}| = |\vec{\beta}|$, τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$. Σ Λ
3. * Αν $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GA} = \vec{0}$, τότε $\overrightarrow{AD} = \vec{0}$. Σ Λ
4. * Αν $|\vec{a}| = \lambda |\vec{\beta}|$, τότε $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$. Σ Λ
5. * Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$, τότε $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Σ Λ
6. * Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ είναι ίσα. Σ Λ
7. * Αν $\vec{u} = (x_1, -y_1)$ και $\vec{v} = (-x_1, y_1)$, τότε $\vec{u} = -\vec{v}$. Σ Λ
8. * Το διάνυσμα $\vec{a} = (-2, 2)$ είναι παράλληλο με το $\vec{\beta} = (3, -3)$. Σ Λ
9. * Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα. Σ Λ
10. * Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διευθύνσεως. Σ Λ
11. * Αν $\vec{a} = -\vec{\beta}$, τότε $(\vec{a}, \vec{\beta}) + (\vec{\beta}, \vec{a}) = 2\pi$. Σ Λ
12. * Αν το $\vec{a} + \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικό του $\vec{a}$, τότε το $\vec{a} + \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικό του $\vec{\beta}$. Σ Λ
13. * Αν $|\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$, τότε τα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι πάντα συγγραμμικά. Σ Λ
14. * Αν $\vec{a} = \kappa \vec{\beta} + \lambda \vec{\gamma}$ και $\kappa, \lambda > 0$, τότε τα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά. Σ Λ
15. * Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy το διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = \lambda \vec{i} + \lambda \vec{j}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας xOy. Σ Λ
16. * Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} > 0$, τότε $(\vec{a}, \vec{\beta})$ είναι οξεία. Σ Λ
17. * Το $(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$ παριστάνει διάνυσμα. Σ Λ
18. * Το $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει διάνυσμα. Σ Λ
19. * Το $(\vec{a} \cdot \lambda) \cdot \vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει διάνυσμα. Σ Λ
20. * Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ ισχύει: $|\vec{a} + \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$. Σ Λ
21. * Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ ισχύει: $||\vec{a}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{a} + \vec{\beta}|$. Σ Λ

22. * Για τα ομόρροπα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ ισχύει: $||\vec{a}| - |\vec{\beta}|| = \Sigma \quad \Lambda$
 $|\vec{a} + \vec{\beta}|$.
23. * Το διάνυσμα $\lambda \vec{a}, \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda < 0$ είναι συγγραμμικό του $\vec{a}$. $\Sigma \quad \Lambda$
24. * Αν $\lambda \vec{a} = \vec{0}, \lambda \in \mathbb{R}$ τότε οπωσδήποτε $\vec{a} = \vec{0}$. $\Sigma \quad \Lambda$
25. * Η ισότητα $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$ ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. $\Sigma \quad \Lambda$
26. * Αν $\kappa \vec{a} = \lambda \vec{a}$, τότε $\kappa = \lambda$ για κάθε διάνυσμα $\vec{a}$. $\Sigma \quad \Lambda$
27. * Ισχύει η ισοδυναμία: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow M$ μέσο του $\overrightarrow{AB}$. $\Sigma \quad \Lambda$
28. * Αν $\kappa \vec{a} = \lambda \vec{\beta}, \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{a}, \vec{\beta}$ μη συγγραμμικά, τότε $\lambda = \kappa = 0$. $\Sigma \quad \Lambda$
29. * Αν $\lambda \vec{a} + \mu \vec{\beta} = \vec{0}$ και $\vec{a}, \vec{\beta}$ μη συγγραμμικά, τότε $\lambda = \mu = 0$. $\Sigma \quad \Lambda$
30. * Με πλευρές οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τέτοια ώστε $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ ορίζεται τρίγωνο. $\Sigma \quad \Lambda$
31. * Αν AM διάμεσος τριγώνου ABΓ τότε $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG}}{2}$. $\Sigma \quad \Lambda$
32. * Κάθε διάνυσμα είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του τέλους του συν τη διανυσματική ακτίνα της αρχής του. $\Sigma \quad \Lambda$
33. * Αν $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$ όπου A, B σταθερά σημεία, τότε ο γεωμετρικός τόπος του M είναι η μεσοκάθετη ευθεία του AB. $\Sigma \quad \Lambda$
34. * Μπορούμε να γράφουμε: $\vec{a} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) = (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$. $\Sigma \quad \Lambda$
35. * Αν $\vec{a} = (3, 5)$ και $\vec{\beta} = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{5})$ τότε $\vec{a} \perp \vec{\beta}$. $\Sigma \quad \Lambda$
36. * Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} \neq 0$ τότε είναι πάντα $(\vec{a}, \vec{\beta}) \neq \frac{\pi}{2}$. $\Sigma \quad \Lambda$
37. * Τα διανύσματα $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{\beta} = -\vec{i} + \vec{j}$ είναι κάθετα. $\Sigma \quad \Lambda$
38. * Δυο διανύσματα με ίσους συντελεστές διεύθυνσεως είναι ομόρροπα. $\Sigma \quad \Lambda$
39. * Αν $\vec{a} = (1, -3), \vec{\beta} = (-1, -3)$ και $\vec{\gamma} = (2, -6)$ είναι $\vec{a} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$. $\Sigma \quad \Lambda$
40. * Τα ζεύγη $\vec{a}, \vec{\beta}$ και $-\vec{a}, -\vec{\beta}$ των διανυσμάτων έχουν ίσα εσωτερικά γινόμενα. $\Sigma \quad \Lambda$
41. * Αν είναι $(\vec{a}, \vec{\beta}) > \frac{\pi}{2}$, τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} < 0$. $\Sigma \quad \Lambda$
42. * Όταν οι συντελεστές δυο διανυσμάτων είναι αντίστροφοι αριθμοί τότε τα διανύσματα είναι κάθετα. $\Sigma \quad \Lambda$
43. * Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$ τότε είναι $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$. $\Sigma \quad \Lambda$

44. * Υπάρχουν $x \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{a} = (x + 1, 3)$

και $\vec{\beta} = (x, 1)$ να είναι κάθετα.

Σ Λ

45. * Υπάρχουν $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{a}$

$(\frac{1}{\sin\theta}, \frac{1}{\eta\mu\theta})$ και $\vec{\beta}$ ($\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta$) να είναι κάθετα.

Σ Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. * Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι: $\vec{AB} = \vec{a}$,

$\vec{AD} = \vec{\beta}$.

α) Το διάνυσμα $\vec{AG}$ ισούται με

Α. $\vec{a} - \vec{\beta}$

Β. $\vec{\beta} - \vec{a}$

Γ. $\frac{\vec{a} + \vec{\beta}}{2}$

Δ. $\vec{a} + \vec{\beta}$

Ε. $\frac{\vec{a} - \vec{\beta}}{2}$

β) Το διάνυσμα $\vec{BD}$ ισούται με

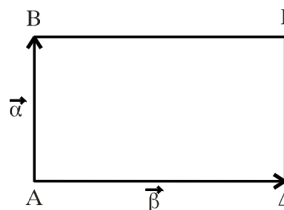
Α. $\vec{a} + \vec{\beta}$

Β. $\frac{\vec{a} + \vec{\beta}}{2}$

Γ. $\frac{\vec{a} - \vec{\beta}}{2}$

Δ. $\frac{\vec{\beta} - \vec{a}}{2}$

Ε. $\vec{\beta} - \vec{a}$



2. * Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ το Μ είναι μέσο

της ΑΒ. Αν $\vec{AD} = \vec{a}$ και $\vec{AG} = \vec{\beta}$, τότε:

α) Το διάνυσμα $\vec{DM}$ ισούται με

Α. $\frac{\vec{a} + \vec{\beta}}{2}$

Β. $\frac{\vec{\beta} - \vec{a}}{2}$

Γ. $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{\beta}$

Δ. $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{\beta}$

Ε. $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{\beta}$

β) Το διάνυσμα $\vec{MG}$ ισούται με

Α. $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{\beta}$

Β. $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{\beta}$

Γ. $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{\beta}$

Δ. $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{\beta}$

Ε. $\frac{\vec{a} + \vec{\beta}}{2}$

γ) Με $\vec{a} + \vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα

Α. $\vec{AB}$

Β. $\vec{BD}$

Γ. $\vec{AB}$

Δ. $\vec{GA}$

Ε. $\vec{AG}$

δ) Με $\vec{a} - \vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα

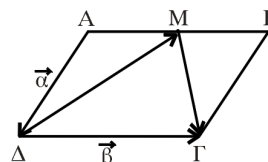
Α. $\vec{AG}$

Β. $\vec{GA}$

Γ. $\vec{BA}$

Δ. $\vec{AB}$

Ε. $\vec{BD}$

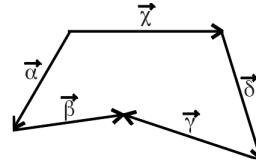


3. * Στο διπλανό σχήμα το διάνυσμα $\vec{x}$ ισούται με

A. $\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma} - \vec{\delta}$ B. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} - \vec{\delta}$

Γ. $\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma} - \vec{\delta}$ Δ. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} - \vec{\delta}$

E. $\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma} + \vec{\delta}$



4. * Για κάθε τετράδα σημείων A, B, Γ, Δ ισχύει

A. $\vec{AD} + \vec{AG} = \vec{BG} + \vec{BD}$

B. $\vec{AD} + \vec{BG} = \vec{AG}$

Γ. $\vec{AD} + \vec{BD} = \vec{AG} + \vec{BG}$

Δ. $\vec{AD} + \vec{BG} = \vec{AG} + \vec{BD}$

E. $\vec{AD} - \vec{AG} = \vec{BG} + \vec{BD}$

5. * Στο κανονικό εξάγωνο ABΓΔEZ είναι

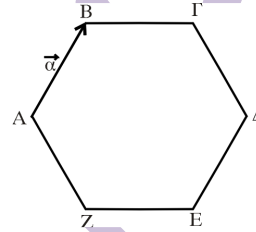
A. $\vec{AG} = \vec{AE}$

B. $\vec{AG} = -\vec{EA}$

Γ. $\vec{AG} = -2\vec{\alpha}$

Δ. $\vec{AG} = -4\vec{\alpha}$

E. $\vec{AG} = \vec{ZD}$



6. * Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ομόρροπα διανύσματα, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$ διάφοροι του ± 1 και $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε

A. κ, λ θετικοί

B. κ, λ αρνητικοί

Γ. κ, λ αντίστροφοι

Δ. κ, λ ετερόσημοι

E. κανένα από τα προηγούμενα

7. * Αν ισχύει: $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0}$, κ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός, τότε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σε κάθε περίπτωση σωστή;

A. Τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουν την ίδια φορά

B. Τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι κάθετα

Γ. Τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα

Δ. Τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουν το ίδιο μέτρο

E. Τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουν την ίδια διεύθυνση

8. * Το διάνυσμα $\vec{a} = (\lambda^2 - 3\lambda - 4, \lambda - 2)$ είναι μηδενικό με

A. $\lambda = 2$

B. $\lambda = 1$

Γ. $\lambda = -4$

Δ. $\lambda = 0$

E. για κανένα πραγματικό αριθμό λ

9. * Το διάνυσμα $\vec{a} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\upsilon\eta\theta)$ είναι το μηδενικό με

A. $\theta = 2\kappa\pi$

B. $\theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$

Γ. $\theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

Δ. $\theta = 2\kappa\pi + \pi$

E. καμία τιμή του θ

10. * Είναι $\vec{a} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\upsilon\eta\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$ και $\kappa \in \mathbb{Z}$. Το $\vec{a}$ είναι παράλληλο στον άξονα x'x με

A. $\theta = \kappa\pi$

B. $\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$

Γ. $\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

$$\Delta. \theta = \kappa\pi + \pi \quad \text{E. } \theta = \kappa\pi - \pi$$

11. * Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$, είναι παράλληλο στο $\vec{\beta} = (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$ με

$$\text{A. } \theta = 0 \quad \text{B. } \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{Γ. } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta. \theta = \pi \quad \text{E. } \theta = \frac{2\pi}{3}$$

12. * Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, \lambda)$, και $\vec{\beta} = (4, -\lambda)$ είναι παράλληλα με

$$\text{A. } \lambda = -1 \quad \text{B. } \lambda = 0 \quad \text{Γ. } \lambda = 1$$

$$\Delta. \lambda = 4 \quad \text{E. } \lambda = -4$$

13. * Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, \frac{1}{\lambda})$ και $\vec{\beta} = (-1, \frac{8}{\lambda})$ είναι κάθετα με

$$\text{A. } \lambda = -1 \quad \text{B. } \lambda = 0 \quad \text{Γ. } \lambda = 1$$

$$\Delta. \lambda = 2 \quad \text{E. } \lambda = 8$$

14. * Με $\vec{\alpha} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (-1, -3)$ και $\vec{\gamma} = (0, -6)$ ισχύει

$$\text{A. } \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma} \quad \text{B. } 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\gamma} \quad \text{Γ. } \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{\alpha}$$

$$\Delta. \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \quad \text{E. } \vec{\alpha} - \vec{\gamma} = \vec{\beta}$$

15. * Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -2)$, $\vec{\beta} = (1, -1)$ και $\vec{\gamma} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Σωστή είναι η σχέση

$$\text{A. } \vec{\alpha} = \vec{\beta} \quad \text{B. } \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta} \quad \text{Γ. } \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \parallel \vec{\gamma}$$

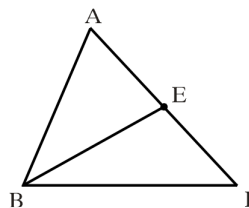
$$\Delta. \vec{\alpha} \perp \vec{\gamma} \quad \text{E. } \vec{\alpha} = \vec{\beta} - 2\vec{\gamma}$$

16. * Στο τρίγωνο ABΓ η BE είναι διάμεσος.

Το άθροισμα $\vec{BA} + \vec{BG}$ ισούται με

$$\text{A. } \vec{BE} \quad \text{B. } \vec{GA} \quad \text{Γ. } 2\vec{EB}$$

$$\Delta. 2\vec{BE} \quad \text{E. } 2\vec{AG}$$



17. * Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, 4)$ και $\vec{\beta} = (\lambda - 4, 1)$ είναι κάθετα. Ο πραγματικός αριθμός λ ισούται με

$$\text{A. } 0 \quad \text{B. } -2 \quad \text{Γ. } 2 \quad \Delta. 4 \quad \text{E. } \frac{1}{4}$$

18. * Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda^2, 2\lambda)$ και $\vec{\beta} = (1, -2)$ είναι παράλληλα ($\lambda \neq 0$).

Ο λ ισούται με

$$\text{A. } -2 \quad \text{B. } -1 \quad \text{Γ. } \sqrt{2} \quad \Delta. 1 \quad \text{E. } 2$$

19. * Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-2, 4)$ και $\vec{b} = (3, -2)$. Η σχέση $\vec{a} + \kappa\vec{b} = \vec{0}$ ισχύει με

A. $\kappa = \frac{2}{3}$ B. $\kappa = -\frac{2}{3}$ Γ. $\kappa = -2$ Δ. $\kappa = 2$

E. κανένα $\kappa \in \mathbb{R}$

20. * Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a} = (2, -\sqrt{2})$. Παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{a}$ είναι το

A. $\vec{x} = (-2, \sqrt{2})$ B. $\vec{y} = (\frac{1}{2}, \sqrt{2})$ Γ. $\vec{z} = (-\sqrt{2}, 2)$

Δ. $\vec{w} = (1, -\sqrt{2})$ E. $\vec{v} = (\sqrt{2}, -2)$

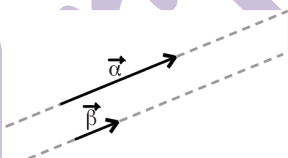
21. * Αν $|\vec{k}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$, $\vec{k} \cdot \vec{v} = -3$ και $0 \leq \hat{\theta} = (\vec{k}, \vec{v}) < \pi$, τότε η γωνία θ ισούται με

A. 0° B. 30° Γ. 60° Δ. 120° E. 150°

22. * Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ισούται με

A. $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ B. $-|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ Γ. 0

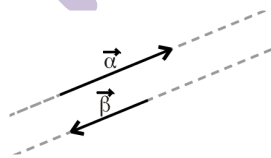
Δ. $\frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ E. $-\frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$



23. * Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ισούται με

A. 0 B. $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ Γ. $-|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

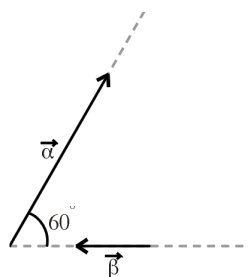
Δ. $\frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ E. $-\frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$



24. * Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ισούται με

A. $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ B. $\frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ Γ. $\frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

Δ. $-\frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ E. $-\frac{\sqrt{3}}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$



25. * Στο σχήμα το ABΓΔ είναι τετράγωνο με πλευρά 4 cm. Ποια από τις παρακάτω ισότητες είναι λανθασμένη;

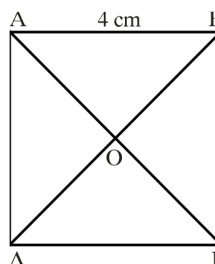
A. $\vec{AB} \cdot \vec{GB} = 0$

B. $\vec{AO} \cdot \vec{AB} = 8$

Γ. $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = 16$

Δ. $\vec{AB} \cdot \vec{GD} = -16$

E. $\vec{OB} \cdot \vec{BA} = 8$

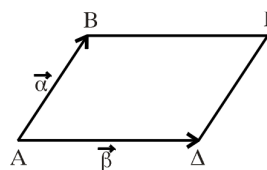


26. * Τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά. Το $\sin(\vec{a}, \vec{\beta})$ ισούται με

Α. $\frac{|\vec{a}| |\vec{\beta}|}{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}$
 Β. $\frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| |\vec{\beta}|}$
 Γ. $\frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| |\vec{\beta}|}$
 Δ. $\frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| + |\vec{\beta}|}$
 Ε. $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{\beta}|}{|\vec{a}| + |\vec{\beta}|}$

Ερωτήσεις αντιστοίχισης

1. * Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι: $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{\beta}$. Να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (Ι) με το ίσο του της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).



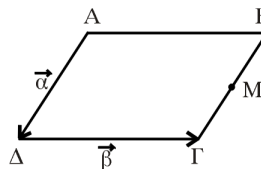
Πίνακας (Ι)

στήλη Α	στήλη Β
1. $\vec{AG}$	Α. $-\vec{a}$
2. $\vec{GB}$	Β. $\vec{a} + \vec{\beta}$
3. $\vec{GD}$	Γ. $\vec{\beta} - \vec{a}$
4. $\vec{BD}$	Δ. $\vec{a} - \vec{\beta}$
	Ε. $-\vec{\beta}$
	Ζ. $\frac{\vec{a} - \vec{\beta}}{2}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4

2. * Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι: $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \vec{\beta}$ και Μ μέσο της ΒΓ. Να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (Ι) με το ίσο του της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).



Πίνακας (Ι)

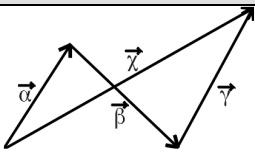
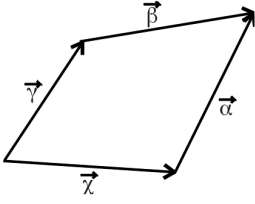
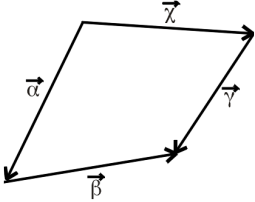
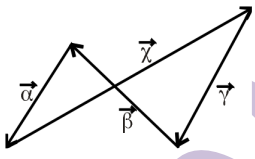
στήλη Α	στήλη Β
1. $\overrightarrow{A\Gamma}$	Α. $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$
2. $\overrightarrow{B\Delta}$	Β. $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
3. $\overrightarrow{\Delta M}$	Γ. $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
4. $\overrightarrow{AM}$	Δ. $\vec{\beta} - \frac{1}{2} \vec{\alpha}$
	Ε. $\vec{\beta} + \frac{1}{2} \vec{\alpha}$
	Ζ. $\frac{1}{2} \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4

3. * Σε κάθε σχήμα που βρίσκεται στη στήλη Α του πίνακα (I) να αντιστοιχίσετε μια τιμή του διανύσματος $\vec{x}$ που βρίσκεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α	στήλη Β
1. 	A. $\vec{a} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}$
2. 	B. $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$
3. 	Γ. $-(\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma})$
4. 	Δ. $\vec{a} - \vec{\beta} - \vec{\gamma}$
	Ε. $\vec{\beta} + \vec{\gamma} - \vec{a}$
	Ζ. $\vec{\beta} - \vec{\gamma} - \vec{a}$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

4. * Κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (I) έχει μέτρο έναν αριθμό που βρίσκεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α διάνυσμα	στήλη Β μέτρο
1. $-\sqrt{8} \vec{i} + \vec{j}$	Α. $\sqrt{2}$
2. $x \vec{i} + \psi \vec{j}$	Β. $\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta$
3. $(2\eta\mu\theta) \vec{i} - (2\sigma\upsilon\nu\theta) \vec{j}$	Γ. 3
4. $(x - \psi) \vec{i} + 2\sqrt{x\psi} \vec{j}$	Δ. $\sqrt{x^2 + \psi^2}$
	Ε. $\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta$
	Ζ. 2
	Η. $ x + \psi $

Πίνακας (II)

1	2	3	4

5. * Κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (I) έχει συντελεστή διεύθυνσης έναν αριθμό που βρίσκεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α διάνυσμα	στήλη Β συντελεστής διεύθυνσης
1. $2\vec{i} + 2\vec{j}$	Α. $\sqrt{2}$
2. $2\vec{i}$	Β. 2
3. $\frac{2}{\sqrt{2}}\vec{j}$	Γ. 0
4. $2\vec{i} - 2\vec{j}$	Δ. 4
	Ε. δεν ορίζεται
	Ζ. 1
	Η. -1

Πίνακας (II)

1	2	3	4

6. * Κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (I) σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Οx γωνία θ , η οποία γράφεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α διάνυσμα $\vec{u}$	στήλη Β ($O\vec{x}, \vec{u}$)
1. $-3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$	Α. $\frac{3\pi}{4}$
2. (1, 1)	Β. $\frac{\pi}{3}$
3. $(1, \sqrt{3})$	Γ. $\frac{2\pi}{3}$
4. (-1, 1)	Δ. $\frac{\pi}{4}$
	Ε. $\frac{5\pi}{6}$
	Ζ. $\frac{\pi}{6}$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

7. * Κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (I) είναι κάθετο με ένα διάνυσμα της στήλης Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α διάνυσμα	στήλη Β κάθετο διάνυσμα
1. $\vec{\alpha} = (2\kappa, 1)$	A. $\vec{e} = (0, \kappa)$
2. $\vec{\beta} = (\kappa, -1)$	B. $\vec{u} = (\frac{1}{\kappa}, 1)$
3. $\vec{\gamma} = (\kappa + 1, \kappa)$	Γ. $\vec{v} = (1, \frac{1}{\kappa})$
4. $\vec{\delta} = (0, \frac{1}{\kappa})$	Δ. $\vec{w} = (1, -2\kappa)$
	E. $\vec{r} = (\kappa, -\kappa - 1)$
	Z. $\vec{m} = (\kappa^2, 0)$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

8. * Να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα που βρίσκεται στην αριστερή στήλη Α του πίνακα (Ι) με το μέτρο του, που βρίσκεται στη δεξιά στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

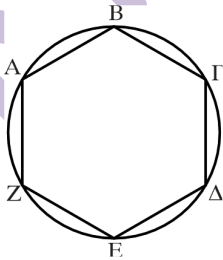
Πίνακας (Ι)

στήλη Α διάνυσμα	στήλη Β μέτρο
1. $(1, - 1)$	Α. 2
2. $(2\eta\mu\theta, 2\sigma\upsilon\nu\theta)$	Β. 0
3. $(\sqrt{2}, 1)$	Γ. 1
4. $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	Δ. 3
	Ε. $\sqrt{3}$
	Ζ. $\sqrt{2}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4

9. * Στο κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα της στήλης Α του πίνακα (Ι) με το ίσο του της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).



Πίνακας (Ι)

στήλη Α	στήλη Β
1. $\overrightarrow{AB}$	Α. $\overrightarrow{Z\Delta}$
2. $\overrightarrow{A\Gamma}$	Β. $\overrightarrow{A\Gamma}$
3. $\overrightarrow{\Gamma B}$	Γ. $\overrightarrow{B\Delta}$
4. $\overrightarrow{AE}$	Δ. $\overrightarrow{E\Delta}$
	Ε. $\overrightarrow{EZ}$
	Ζ. $\overrightarrow{\Gamma Z}$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4

10. * Δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = \pi$.

Να αντιστοιχίσετε κάθε εσωτερικό γινόμενο που βρίσκεται στη στήλη Α του πίνακα (I) με την τιμή του που βρίσκεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

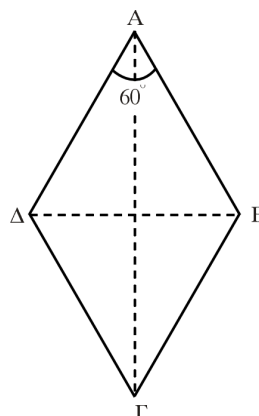
Πίνακας (I)

στήλη Α εσωτερικό γινόμενο	στήλη Β τιμή
1. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$	A. - 1
2. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$	B. 0
3. $\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta}$	Γ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
	Δ. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
	Ε. $\frac{1}{2}$

Πίνακας (II)

1	2	3

11. * Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος με γωνία $A = 60^\circ$ και πλευρά 6 cm. Αν Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του, να αντιστοιχίσετε τα εσωτερικά γινόμενα της στήλης Α του πίνακα (I) με τις αντίστοιχες τιμές της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).



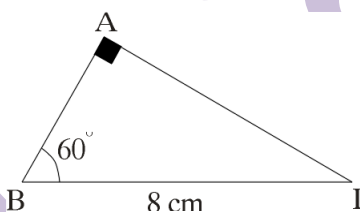
Πίνακας (I)

στήλη Α	στήλη Β
1. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$	A. 18
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$	B. 36
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GD}$	Γ. 0
4. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{GD}$	Δ. - 36
	E. - 18
	Z. $18 \cdot \sqrt{3}$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

12. * Στο σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο στο A και έχει γωνία B = 60°. Αν η υποτείνουσά του BΓ είναι 8 cm. Να αντιστοιχίσετε τα εσωτερικά γινόμενα της στήλης Α του πίνακα (I) με τις αντίστοιχες τιμές της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).



Πίνακας (I)

στήλη Α	στήλη Β
1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GA}$	A. - 16
2. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BG}$	B. $16\sqrt{3}$
3. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{GB}$	Γ. 16
	Δ. 0
	E. $-16\sqrt{3}$

Πίνακας (II)

1	2	3

1. * Να γράψετε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{\delta}$ σε μια σειρά, ώστε καθένα να έχει μικρότερο μέτρο από το επόμενο του, αν $\vec{\alpha} = (3, 0)$, $\vec{\beta} = (1, -3)$, $\vec{\gamma} = (\frac{3}{2}, 1)$, $\vec{\delta} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$.
2. * Δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = |\vec{\delta}|$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{4}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\delta}) = \frac{2\pi}{3}$. Να γράψετε σε μια σειρά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τα εσωτερικά γινόμενα: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta}$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$, $\vec{\beta} \cdot \vec{\delta}$, $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$
3. * Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{\alpha} = (1, \sqrt{2})$, $\vec{\beta} = (-\sqrt{2}, \frac{1}{2})$, $\vec{\gamma} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\vec{\delta} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$. Να τα γράψετε σε μια σειρά, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσεως καθενός να είναι μικρότερος από τον συντελεστή διεύθυνσεως του επομένου του.

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. * Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

Διάνυσμα	μέτρο διανύσματος	γωνία ($\vec{Ox}$, $\vec{\alpha}$)
$\vec{\alpha} = (-1, 1)$		
$\vec{\beta} = (1, -\sqrt{3})$		
$\vec{\gamma} = (-3, 3\sqrt{3})$		
$\vec{\delta} = (\sqrt{3}, 1)$		
$\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2})$		

2. * Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας, εάν τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα σε καθεμιά από τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

	Διανύσματα	τιμή του x
1.	$\vec{u} = (3, -5)$ και $\vec{v} = (10, x)$	
2.	$\vec{u} = (x, 4)$ και $\vec{v} = (2, -1)$	
3.	$\vec{u} = (3x, -3)$ και $\vec{v} = (x, 4)$	

3. Να συμπληρωθούν οι στήλες στους παρακάτω πίνακες:

Διανύσματα		Σχετική θέση του $\vec{a}$ ως προς τους άξονες x', y' , (γωνία που σχηματίζει)	Σχετική θέση του $\vec{b}$ ως προς τους άξονες x', y' , (γωνία που σχηματίζει)	Σχετική θέση των $\vec{a}$ και $\vec{b}$ μεταξύ τους (κάθετα ή παράλληλα)
$\vec{a}$	$\vec{b}$			
(2, 0)	(0, - 3)			
(2, 2)	(- 3, 3)			
(2, 2)	(3, 3)			
(0, 2)	(-2, 0)			

Διανύσματα		μέτρο: $ \vec{a} $	μέτρο: $ \vec{b} $	εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{b}$
$\vec{a}$	$\vec{b}$			
(- 1, 4)	(2, - 3)			
(3, 2)	(- 1, $\sqrt{2}$)			
(1, $\sqrt{3}$)	(1, 1)			
($\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{6}}{2}$)	($\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$)			

1. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΑ να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG})$$

$$\beta) \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA}$$

2. ** Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A'B'}$. Αν Μ και Μ' είναι μέσα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A'B'}$ να αποδείξετε ότι:
 $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{MM'}$

3. ** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Αν Μ και Ν είναι αντιστοίχως τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BG}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GD})$$

$$\beta) 4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GB}$$

4. ** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Μ, Ν τέτοια ώστε να είναι: $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD}$ και $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Γ και Ν είναι συνευθειακά.

5. ** Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας και αντιστρόφως: αν η διάμεσος ενός τριγώνου είναι ίση με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

6. ** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του. Να αποδειχθεί ότι:

α) Το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ είναι παράλληλο προς τις βάσεις του

$$\beta) \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DG})$$

7. ** Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AG}^2 = \overrightarrow{BG}^2 \text{ και αντιστρόφως:}$$

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AG}^2 = \overrightarrow{BG}^2$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Α.

8. ** Αν ΑΔ είναι ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) να αποδείξετε ότι ισχύει $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BD}$ και αντιστρόφως: Αν ΑΔ είναι το ύψος τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BD}$ να αποδείξετε ότι $A = 90^\circ$.

9. ** Αν ΑΔ είναι ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) να αποδείξετε ότι ισχύει $\overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{DB}$ και αντιστρόφως: Αν ΑΔ είναι το ύψος τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει $\overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{DB}$ τότε να αποδείξετε ότι $A = 90^\circ$.

11. ** Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\frac{5}{2} (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - \frac{1}{2} [\vec{\alpha} - 3(2\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 6\vec{\gamma}) + 4(3\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma})] - \frac{1}{2} \vec{\beta} - 10\vec{\gamma}$$

12. ** Έστω παραλληλόγραμμο ABΓΔ, Κ το κέντρο του, Μ το μέσον του ΚΓ. Δείξτε ότι:

$$\vec{AB} + \vec{AD} = 4\vec{AM} - 2\vec{AG}$$

13. ** Αν ABΓΔΕΖ κανονικό εξάγωνο, με $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{BG} = \vec{\beta}$

α) Υπολογίστε τα $\vec{GD}$ και $\vec{AE}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$

β) Δείξτε ότι $\vec{AB} + \vec{AG} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AZ} = 6\vec{BG}$

14. ** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ, Δ ισχύει:

$$\vec{AD} + \vec{BG} = \vec{AG} + \vec{BD}$$

15. ** Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ και σημείο Ρ τέτοιο ώστε $\vec{PG} = -2\vec{PB}$. Να αποδειχτεί ότι:

$$\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PD} + 2\vec{AB} = \vec{0}$$

16. ** Δίνεται τετράπλευρο ABΓΔ και τα μέσα Κ, Λ των ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχως. Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{AL} + \vec{BK} = 2\vec{KL}$$

17. ** Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Να προσδιοριστεί σημείο Ρ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PG} = \vec{0}$$

18. ** Στο παραλληλόγραμμο ABΓΔ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ της διαγωνίου ΑΓ έτσι ώστε: $AE = ZG =$

$$\frac{1}{4} AG$$

α) Αν $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{BG} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{DE}$ και $\vec{DZ}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Να δείξετε ότι το EBΖΔ είναι παραλληλόγραμμο

19. ** Αν ισχύει $2\vec{PA} + 3\vec{PB} - 5\vec{PG} = \vec{0}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

20. ** Αν $\vec{\alpha} = (1, 2)$, $\vec{\beta} = (3, -7)$, $\vec{\gamma} = (-2, 5)$ να βρεθούν τα διανύσματα:

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma} \text{ και } \vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - 8\vec{\gamma}$$

21. ** Να εξετασθεί αν τα σημεία $M_1(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$, $M_2(\alpha, -\beta)$ και

$M_3(\alpha + 2\beta, 2\alpha - \beta)$ είναι συνευθειακά.

22. ** Δίνονται τέσσερα σημεία Ο, Α, Β, Γ τέτοια ώστε τα Ο, Α, Β δεν είναι συνευθειακά. Να δείξετε ότι, αν

και $\vec{OG} = (1 - \lambda)\vec{OA} + \lambda\vec{OB}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

24. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Κ, Λ, Μ είναι μέσα αντιστοίχως των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ και Σ σημείο του επιπέδου του τριγώνου να αποδειχθεί ότι:
- $$\overrightarrow{\Sigma K} + \overrightarrow{\Sigma \Lambda} + \overrightarrow{\Sigma M} = \overrightarrow{\Sigma A} + \overrightarrow{\Sigma B} + \overrightarrow{\Sigma \Gamma}$$
25. ** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζ ώστε να ισχύει
- $$\overrightarrow{A\Delta} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AZ} = \frac{4}{5} \overrightarrow{AG} \text{ και } \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{BG}.$$
- α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$.
- β) Να εξετάσετε αν τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.
26. ** Να αποδείξετε ότι αν:
- $$(\kappa + 2) \overrightarrow{PA} + 3 \overrightarrow{PB} = (\kappa + 5) \overrightarrow{PG}$$
- τότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.
27. ** Εάν $2 \overrightarrow{A\Lambda} + 3 \overrightarrow{B\Lambda} + 2 \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{KL}$ και $\overrightarrow{ML}$ είναι αντίρροπα.
28. ** Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων Οχψ θεωρούμε τα σημεία Α, Β του χ'χ, τα οποία έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (\lambda^2 - 5\lambda + 20)x - 1998 = 0$. Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το μέσο του ΑΒ να έχει τετμημένη 7.
29. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (-1, 3)$ και $\vec{v} = (2, -1)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{w} = (x, y)$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:
- α) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$
- β) $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v}$
- γ) $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w} = \vec{0}$
- δ) $\vec{w} = \kappa \vec{u} + \lambda \vec{v}$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$
30. ** Δίνονται τα σημεία Α (5, -1), Β (1, 1) και Γ (2, 3). Να μελετηθεί το είδος του τριγώνου ΑΒΓ.
31. ** Δίνονται τα σημεία Α (3, 2), Β (7, -4). Να βρεθεί σημείο Μ του χ'χ, ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι:
- α) ισοσκελές με κορυφή το Μ
- β) ορθογώνιο στο Μ
32. ** Να εξετάσετε αν τα σημεία Α (-6, 1), Β (-2, 3) και Γ (-10, -1) είναι συνευθειακά.
33. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-2, 4)$ και $\vec{\beta} = (3, -2)$. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{u} = (x, y)$ έτσι ώστε να είναι:
- α) $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$
- β) $\vec{\alpha} + \vec{u} = \vec{\beta}$
- γ) $\vec{u} = \kappa \vec{\alpha}, \kappa \in \mathbb{R}$
- δ) $\vec{u} = \kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}, \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\varepsilon) \vec{a} + \vec{\beta} + \vec{u} = 0$$

34. ** Αν $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{\beta} = (-1, 1)$ και $\vec{\gamma} = (-2, 3)$ να υπολογιστούν τα:

$$\alpha) |\vec{a} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}|$$

$$\beta) |\vec{a} + \vec{\beta}| + |\vec{\beta} + \vec{\gamma}| + |\vec{\gamma} + \vec{a}|$$

36. ** Να υπολογιστεί το γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\alpha) |\vec{a}| = 1, |\vec{\beta}| = \sqrt{3} \text{ και } (\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$$

$$\beta) |\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{\beta}| = \sqrt{2} \text{ και } (\vec{a}, \vec{\beta}) = 75^\circ$$

$$\gamma) |\vec{a}| = 2\sqrt{3}, |\vec{\beta}| = \sqrt{12} \text{ και } (\vec{a}, \vec{\beta}) = 135^\circ$$

37. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$. Αν $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ και

$$|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2} \text{ να βρεθούν:}$$

$$\alpha) \vec{a} \cdot \vec{\beta}$$

$$\beta) \vec{a}^2 + \vec{\beta}^2$$

$$\gamma) (\vec{a} + \vec{\beta})^2$$

$$\delta) |\vec{a} + \vec{\beta}|$$

$$\varepsilon) (2\vec{a} + 3\vec{\beta})(4\vec{a} - 5\vec{\beta})$$

38. ** Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ αν $(\vec{a}, \vec{\beta}) = (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{4}$ και $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\gamma}| = 2$ ($\vec{a}, \vec{\gamma}$ μη συγγραμμικά).

39. ** Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων:

$$\vec{a} = (-1, 4) \text{ και } \vec{\beta} = (1, -2).$$

40. ** Αν $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$, $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 45^\circ$ να βρείτε τη γωνία $(\vec{\beta} - \vec{a}, \vec{a})$.

41. ** Αν $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι μοναδιαία διανύσματα και θ η μεταξύ τους γωνία, να αποδείξετε ότι: $|\vec{a} + \vec{\beta}| = 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$.

42. ** Αν $\vec{a} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{a} + \vec{\beta}) \perp (\vec{a} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{a} - \vec{\beta}| = 2$, δείξτε ότι $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}| = 1$.

43. ** Αν $\vec{u}(-3 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$ και $\vec{v}(-1 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$ και $0 < (\vec{u}, \vec{v}) < \pi$ να αποδείξετε ότι: $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{12}$.

44. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (-2, 3)$ και $\vec{v} = (4, -3)$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{w}$ ώστε να είναι $\vec{w} \perp (3\vec{v} - 5\vec{u})$.
45. ** Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, με $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο ώστε $\vec{x} \parallel (\vec{a} + \vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{a} + \vec{x})$.
46. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 1)$ και $\vec{\beta} = (5, 10)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{a}$.
47. ** Αν $\vec{x} + (\vec{x} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ με $1 + \vec{a} \cdot \vec{\beta} \neq 0$ να αποδείξετε ότι $\vec{x} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\gamma}}{1 + \vec{a} \cdot \vec{\beta}}$.
48. ** α) Αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$|\vec{a} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$$

 β) Χρησιμοποιώντας το (α) ερώτημα να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A = 6x - 8y$ αν $x^2 + y^2 = 36$.
 γ) Με τη βοήθεια του (α) ερωτήματος αποδείξτε ότι: $|6 \cdot \eta \mu x - 8 \cdot \sigma \upsilon \nu x| \leq 10$
49. ** Θεωρούμε το τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων M του επιπέδου του για τα οποία ισχύει:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{AM} = 0.$$
50. ** Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{a} = \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta} - \vec{x}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$ για κάθε διάνυσμα $\vec{x}$.
51. ** Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, να εξετάσετε αν τα διανύσματα που δίνονται είναι κάθετα μεταξύ τους.
 α) $\vec{\beta} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{\beta})}{\vec{\beta}^2} \vec{a}$ και $\vec{\beta}$
 β) $(\vec{\beta} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{\gamma} - (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \vec{\gamma}$ και $\vec{a}$
 γ) $\vec{\beta} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{\beta})}{\vec{a}^2} \vec{a}$ και $\vec{a}$
52. ** Αν $\vec{a} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (3, 4)$ να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{q}$ ώστε να ισχύουν συγχρόνως:
 α) $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$
 β) $\vec{p} \parallel \vec{a}$
 γ) $\vec{q} \perp \vec{\beta}$
53. ** Αν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ και $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$ με $\vec{p} \parallel \vec{\beta}$ και $\vec{q} \perp \vec{\beta}$ να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha) \vec{p} = \frac{\vec{a}\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta}$$

$$\beta) \vec{q} = \vec{a} - \frac{\vec{a}\vec{\beta}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta}$$

54. ** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ τέτοια ώστε να είναι:

$$(\lambda \vec{a} + \kappa \vec{\beta}) \perp (\kappa \vec{a} - 2\lambda \vec{\beta}) \text{ για κάθε } \kappa, \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \perp \vec{\beta}$.

β) Να βρεθεί το $|\vec{\beta}|$ στην περίπτωση που είναι $|\vec{a}| = 2$.

55. ** Αν ισχύει $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = |\vec{a} + \vec{\beta}|$ τότε να δείξετε ότι: $|\vec{a} - \vec{\beta}| = |\vec{a}| \cdot \sqrt{3}$

56. ** Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ με $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = 0$. Αν $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $|\vec{\gamma}| = 5$ υπολογίστε το:

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{a}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 1ο:

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό - Λάθος”

1.	Λ	13.	Σ	25.	Σ	36.	Σ
2.	Λ	14.	Λ	26.	Λ	37.	Σ
3.	Σ	15.	Σ	27.	Σ	38.	Λ
4.	Λ	16.	Σ	28.	Σ	39.	Λ
5.	Σ	17.	Σ	29.	Σ	40.	Σ
6.	Λ	18.	Λ	30.	Σ	41.	Σ
7.	Σ	19.	Λ	31.	Σ	43.	Λ
8.	Σ	20.	Σ	32.	Λ	43.	Λ
9.	Σ	21.	Σ	33.	Σ	44.	Λ
10.	Λ	22.	Λ	34.	Λ	45.	Λ
11.	Σ	23.	Σ	35.	Σ		
12.	Σ	24.	Λ				

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. α)	Δ	4.	Δ	12.	Β	20.	Α
β)	Ε	5.	Ε	13.	Δ	21.	Δ
2. α)	Γ	6.	Δ	14.	Α	22.	Α
β)	Δ	7.	Ε	15.	Γ	23.	Γ
γ)	Ε	8.	Ε	16.	Δ	24.	Δ
δ)	Ε	9.	Ε	17.	Γ	25.	Ε
3.	Δ	10.	Γ	18.	Β	26.	Γ
		11.	Β	19.	Ε		

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.	1	Β	2.	1	Β
	2	Ε		2	Γ
	3	Α		3	Δ
	4	Γ		4	Ε
3.	1	Β	4.	1	Γ

2	E
3	A
4	Γ

2	Δ
3	Z
4	H

5.

1	Z
2	Γ
3	E
4	H

6.

1	Γ
2	Δ
3	B
4	A

7.

1	Δ
2	B
3	E
4	Z

8.

1	Z
2	A
3	E
4	Γ

9.

1	Δ
2	A
3	E
4	Γ

10.

1	E
2	A
3	Δ

11.

1	Γ
2	A
3	Δ
4	E

12.

1	Δ
2	Γ
3	A

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. $\vec{\delta}, \vec{\gamma}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}$

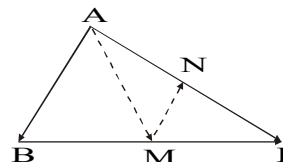
2. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\delta}, \vec{\beta} \cdot \vec{\delta}, \vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}, \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}, \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

3. $\vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\alpha}, \vec{\delta}$

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. α) $\vec{AB} + \vec{AG} = \vec{AD}$ όπου $\vec{AD}$ η διαγώνιος του παραλληλογράμμου με πλευρές AB, AG, ΓΔ, ΔB και $\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AD}$.

β) $\vec{MN} = \vec{GN} - \vec{GM} = \frac{1}{2} (\vec{GA} - \vec{GB}) = \frac{1}{2} \vec{BA}$



2. $\vec{AA'} + \vec{BB'} = \vec{AM} + \vec{MM'} + \vec{M'A'} + \vec{BM} + \vec{MM'} + \vec{M'B} = 2\vec{MM'}$

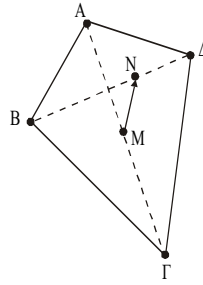
3. α) $\overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{BA} = 2 \overrightarrow{NA}$ (1)

$$\overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = 2 \overrightarrow{N\Gamma} \quad (2)$$

Ακόμη: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B} = 0$ (3)

Από (1), (2) με πρόσθεση και λόγω της (3) προκύπτει η (α).

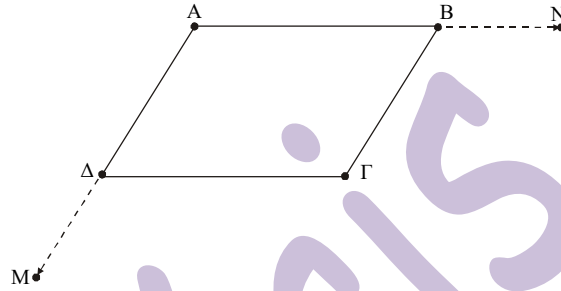
β) Πρόσθεση των (1), (2).



4. $\overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{M\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$

$$\overrightarrow{\Gamma N} = \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{\Delta\Gamma},$$

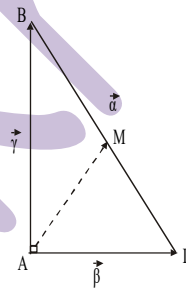
άρα $\overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma N}$.



5. Αν $\hat{A} = 1^\perp$ τότε $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 0$

Ακόμη $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$, άρα $4 \overrightarrow{AM} = \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 = \vec{\alpha}^2$,

άρα $|\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{2} |\vec{\alpha}|$.



6. Έστω $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \kappa \vec{\alpha}$.

Τότε $2 \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{MA} + \vec{\alpha} + \overrightarrow{M\Delta} + \kappa \vec{\alpha} = (\kappa + 1) \vec{\alpha}$,

άρα $\overrightarrow{MN} = \frac{\kappa+1}{2} \vec{\alpha}$, δηλαδή $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$.

7. Αφού $\hat{A} = 1^\perp$ άρα $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0$. Ακόμη $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB}$,

άρα $|\overrightarrow{B\Gamma}|^2 = |\overrightarrow{A\Gamma}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2$.

8. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta B}$ (1)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B}$ (2)

Πολλαπλασιασμός των (1), (2) και χρήση των ισοτήτων

$\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = 0$ και $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0$

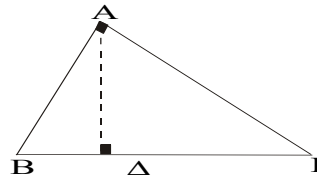
9. Ισχύει $\vec{AB} = \vec{AD} + \vec{DB}$ (1)

και $\vec{AB} \cdot \vec{AI} = 0$

$\vec{AI} = \vec{AD} + \vec{DI}$ (2)

και $\vec{AD} \cdot \vec{DB} = 0, \vec{AD} \cdot \vec{DI} = 0$

και πολλαπλασιάζουμε τις (1), (2) κατά μέλη.



10. α) Ισχύει $\vec{AB} + \vec{AI} = 2\vec{AM}$ (1)

Ακόμη $\vec{AB} - \vec{AI} = \vec{BI}$ (2)

Υψώνουμε στο τετράγωνο τα μέλη των (1), (2) και προσθέτουμε κατά μέλη.

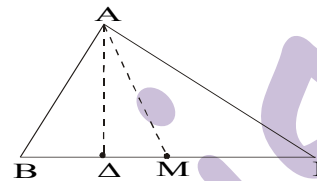
β) Ισχύουν $\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB}$ (1)

$\vec{AI} = \vec{AM} + \vec{MI}$ (2)

ενώ $\vec{AM} \cdot \vec{MB} = -\vec{AM} \cdot \vec{MI}$ (3)

και $\vec{AM} \cdot \vec{MI} = \vec{MI} \cdot \vec{MD} =$

$\frac{\vec{BI}}{2} \cdot \vec{MD}$ (4)



Αν υψωθούν στο τετράγωνο οι (1), (2) και μετά αφαιρεθούν κατά μέλη, τότε βάσει των (3), (4) προκύπτει η ζητούμενη.

12. $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AI}$ και $\vec{AM} = \frac{3}{4} \vec{AI}$

13. α) Ισχύει $\vec{AD} = 2\vec{BG} = 2\vec{\beta}$, άρα

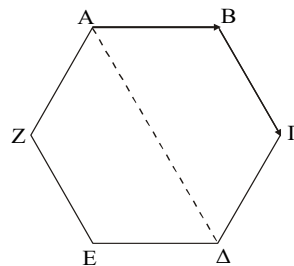
$\vec{GD} = \vec{GB} + \vec{BA} + \vec{AD} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

και $\vec{AB} \cdot \vec{AI} = 0$

β) Ισχύει $\vec{AI} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{AD} = 2\vec{\beta}$, $\vec{AE} = \vec{BD} =$

$\vec{BG} + \vec{GD} = \vec{\beta} + (\vec{\beta} - \vec{\alpha})$ και πρόσθεση όλων

κατά μέλη.



14. $\vec{AD} + \vec{BG} = \vec{AG} + \vec{GD} + \vec{BD} + \vec{DG} = \vec{AG} + \vec{BD}$

15. $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PD} + 2\vec{AB} = (\vec{PB} + \vec{BA}) + \vec{PB} + (\vec{PG} + \vec{GD}) + 2\vec{AB} =$
 $2\vec{PB} + \vec{PG} + \vec{AB} + \vec{GD} = \vec{0}$ αφού $\vec{PG} = -2\vec{PB}$ και $\vec{AB} + \vec{GD} = \vec{0}$ λόγω παραλληλογράμμου.

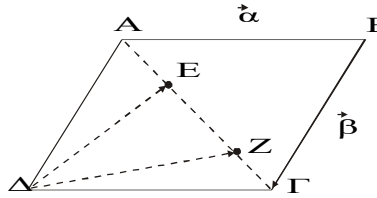
16. $2\vec{KL} = \vec{KA} + \vec{KG} = \vec{KA} + \vec{AD} + \vec{KB} + \vec{BG} = \vec{AD} + \vec{BG}$

17. $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PG} = \vec{0}$, άρα $\vec{PB} + \vec{PG} = \vec{AP}$. Αν M το μέσο της BG τότε $2\vec{PM} = \vec{AP}$ (1)

Άρα το P βρίσκεται πάνω στη διάμεσο AM και λόγω της (1) είναι το κέντρο βάρους.

18. α) $\overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4} (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - \vec{\beta}$

$$\overrightarrow{\Delta Z} = \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AD} = \frac{3}{4} (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) - \vec{\beta}$$



β) $\overrightarrow{ZB} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GZ} = -\vec{\beta} - [-\frac{1}{4} (\vec{\alpha} + \vec{\beta})] = \overrightarrow{\Delta E}$

19. Από τη δοσμένη σχέση προκύπτει: $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PG} - 3\overrightarrow{PG} = \vec{0}$ άρα

$$2(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PG}) = 3(\overrightarrow{PG} - \overrightarrow{PB}), \text{ δηλαδή } \overrightarrow{GA} \parallel \overrightarrow{BG}.$$

21. $\overrightarrow{M_1M_2} = (-\beta, -\alpha), \overrightarrow{M_2M_3} = (2\beta, 2\alpha),$ άρα $\overrightarrow{M_1M_2} \parallel \overrightarrow{M_2M_3}$

22. Από τη δοσμένη σχέση προκύπτει: $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$ άρα

$$\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AB}, \text{ δηλαδή } \overrightarrow{AG} \parallel \overrightarrow{AB}.$$

23. α) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{GG_1} =$

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1B_1} + \overrightarrow{GG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1G_1} = \vec{0}$$

$$\text{αφού } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GG} = \vec{0} \text{ και } \overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{G_1B_1} + \overrightarrow{G_1G_1} = \vec{0}$$

β) Με βάση την (α), αν $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{GG_1} = \vec{0}$, τότε $\overrightarrow{GG_1} = \vec{0}$, δηλαδή συμπίπτουν τα G, G₁.

24. $\overrightarrow{\Sigma A} + \overrightarrow{\Sigma B} = 2\overrightarrow{\Sigma K}, \overrightarrow{\Sigma A} + \overrightarrow{\Sigma \Gamma} = 2\overrightarrow{\Sigma \Lambda}, \overrightarrow{\Sigma B} + \overrightarrow{\Sigma \Gamma} = 2\overrightarrow{\Sigma M}$
και πρόσθεση κατά μέλη.

25. α) $\overrightarrow{\Delta Z} = \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AD} = \frac{4}{5} \overrightarrow{AG} - \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BD} = 2(\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AG} - \frac{5}{3} \overrightarrow{AB}$$

β) Ισχύει $\overrightarrow{\Delta E} = \frac{5}{2} \overrightarrow{\Delta Z}$, άρα $\overrightarrow{\Delta E} \parallel \overrightarrow{\Delta Z}$.

26. Η δοσμένη σχέση γράφεται: $(\kappa + 2) \overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = (\kappa + 2) \overrightarrow{PG} + 3\overrightarrow{PG}$, άρα
 $(\kappa + 2) \overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{BG}$, άρα $\overrightarrow{GA} \parallel \overrightarrow{BG}$.

27. $3\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AA}, 2\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$, οπότε η δοσμένη γίνεται:
 $5\overrightarrow{AA} + 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AK} = \vec{0}$ ή $3\overrightarrow{AA} + 2\overrightarrow{AA} + 3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AK} = \vec{0}$,

άρα $3\overrightarrow{ML} = 2\overrightarrow{LK}$, άρα $\overrightarrow{KL}, \overrightarrow{ML}$ αντίρροπα.

28. Έστω A (x_1, y_1) και B (x_2, y_2), τότε το μέσο M του AB έχει τετμημένη $\frac{x_1 + x_2}{2} = 7$, άρα $x_1 + x_2 = 14$,
 όμως x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης, άρα
 $\lambda^2 - 5\lambda + 20 = 14$, δηλαδή $\lambda = 3$ ή $\lambda = 2$.

30. $\overrightarrow{AB} = (-4, 2)$ $\overrightarrow{BG} = (-1, -2)$ $\overrightarrow{AG} = (-3, 4)$

Παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο B.

31. Έστω M ($x, 0$) το ζητούμενο σημείο. Τότε:

α) $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$, άρα $(x - 3)^2 + 4 = (x - 7)^2 + 16$

β) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

35. Αν (x, y) το ζητούμενο σημείο, τότε ισχύει: $\frac{3+1+x}{3} = 3$ και $\frac{0+2+y}{3} = 2$.

37. α) $2\sqrt{3}$ β) 12 γ) $12 + 4\sqrt{3}$

δ) $\sqrt{12+4\sqrt{3}}$ ε) $8\vec{\alpha}^2 - 15\vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

38. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}|^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 + 2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})$

40. Αν ω η ζητούμενη γωνία τότε:

$\text{συν}\omega = \frac{(\vec{\beta} - \vec{\alpha}) \cdot \vec{\alpha}}{|\vec{\beta} - \vec{\alpha}| \cdot |\vec{\alpha}|}$, αλλά $(\vec{\beta} - \vec{\alpha}) \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\alpha}^2 = 4 - 4 = 0$,

άρα $\text{συν}\omega = 0$, δηλαδή $\omega = \frac{\pi}{2}$.

41. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2 + 2\text{συν}\theta = 2(1 + \text{συν}\theta) = 4\text{συν}^2 \frac{\theta}{2}$, άρα $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 2 \left| \text{συν} \frac{\theta}{2} \right|$.

42. Ισχύουν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$, $\vec{\alpha}^2 - 3\vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ και $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$

44. $3\vec{v} - 5\vec{u} = (22, -24)$, αν $\vec{w} = (x, y)$, τότε πρέπει $22x - 24y = 0$ (1)

δηλαδή υπάρχουν άπειρα διανύσματα $\vec{w}$ των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν την (1).

45. $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2}$ και ισχύει: $\vec{x} = \kappa (\vec{a} + \vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \cdot (\vec{a} + \vec{x}) = 0$, άρα $\vec{\beta} \cdot \vec{a} + \vec{\beta} \cdot \vec{x} = 0$, δηλαδή $\frac{1}{2} + \vec{\beta} \cdot [\kappa (\vec{a} + \vec{\beta})] = 0$, άρα $\frac{1}{2} + \frac{\kappa}{2} + \kappa = 0$, οπότε $\kappa = -\frac{1}{3}$.

46. Έστω $\vec{\beta}_1 = (x_1, y_1)$ και $\frac{1}{2}$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ οι συνιστώσες. Τότε ισχύει:

$$\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 = \vec{\beta} \quad (1), \quad \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2 = 0 \quad (2) \quad \text{και} \quad \vec{\beta}_2 \parallel \vec{a} \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$y_1 + y_2 = 10$$

οπότε προκύπτει το σύστημα:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

$$x_2 + y_2 = 0$$

Το σύστημα δίνει για λύση $x_2 = y_2 = \frac{15}{2}$ και $x_1 = -\frac{5}{2}$, $y_1 = \frac{5}{2}$.

47. Πολλαπλασιάστε και τα δύο μέλη με $\vec{a}$.

48. α) $|\vec{a} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot |\cos \omega| = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot |\sin \omega| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ όπου ω η γωνία των $\vec{a}, \vec{\beta}$.

β) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a} = (6, -8)$ και $\vec{\beta} = (x, y)$. Τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 6x - 8y$, άρα από το (α) ισχύει $|6x - 8y| \leq 6 \cdot 10$, άρα $-60 \leq A \leq 60$.

γ) Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a} = (6, -8)$ και $\vec{\beta} = (\eta \mu \chi, \sigma \nu \gamma)$. Τότε $|\vec{\beta}| = 1$, άρα $|6\eta \mu \chi - 8\sigma \nu \gamma| \leq 6 < 10$.

49. Η δοσμένη σχέση γράφεται: $(\vec{AB} + \vec{AG}) \cdot \vec{AM} = 0$, όμως $\vec{AB} + \vec{AG} = 2\vec{AD}$

(AD διάμεσος), άρα ισχύει $\vec{AD} \cdot \vec{AM} = 0$, δηλαδή $\vec{AM} \perp \vec{AD}$, άρα το M κινείται σε ευθεία κάθετη στην AD στο σημείο A.

50. $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x}}{\vec{\beta}^2} \cdot \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} - \vec{x} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{x} - \vec{x} \cdot \vec{\beta} = 0$

54. α) $(\lambda \vec{a} + \kappa \vec{\beta}) \cdot (\kappa \vec{a} - 2\lambda \vec{\beta}) = 0$, οπότε για $\lambda = 0$ και $\kappa = 1$ προκύπτει $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$.

β) Για $\kappa = \lambda = 1$ προκύπτει $(\vec{a} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{\beta}) = 0$ ή $\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{\beta} + 2\vec{\beta}^2 = 0$ και με βάση την (α) $\vec{\beta}^2 = 2$ ή $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$.

55. Από τις δοσμένες σχέσεις έχουμε:

$$\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha} \vec{\beta} = \vec{\alpha}^2$$

$$\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha} \vec{\beta} = \vec{\beta}^2 \quad \text{δηλαδή}$$

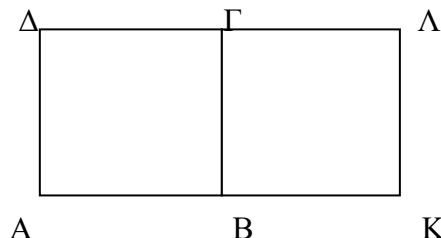
$$2\vec{\alpha} \vec{\beta} = -\vec{\alpha}^2 = -\vec{\beta}^2, \quad \text{άρα}$$

$$|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha} \vec{\beta} = 2\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha}^2 = 3\vec{\alpha}^2$$

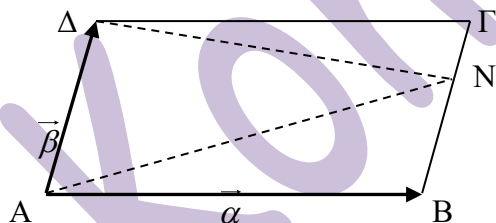
56. $(\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma})^2 = 0$, άρα $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 + 2(\vec{\alpha} \vec{\beta} + \vec{\beta} \vec{\gamma} + \vec{\alpha} \vec{\gamma}) = 0$, άρα

$$\vec{\alpha} \vec{\beta} + \vec{\beta} \vec{\gamma} + \vec{\alpha} \vec{\gamma} = -19.$$

57. Στο διπλανό σχήμα (όλες οι επιμέρους πλευρές είναι ίσες), να υπολογίσετε τις παρακάτω γωνίες:



- α. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$
 β. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BK})$
 γ. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Delta\Gamma})$ δ. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Lambda\Gamma})$ ε. $(\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{KB})$ στ. $(\overrightarrow{\Gamma\Lambda}, \overrightarrow{AB})$ ζ. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Lambda})$
58. Αν ισχύει $\overrightarrow{\Delta M} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{\Gamma M}$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι αντίρροπα.
59. Έστω τα σημεία Α, Β, Γ, Δ. να βρεθεί σημείο Μ, ώστε $\overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{B\Delta} - \overrightarrow{A\Gamma}$
60. Έστω Α, Β και Γ τρία μη συνευθειακά σημεία. Να βρείτε σημείο Μ τέτοιο, ώστε:
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{AM} = \vec{0}$
61. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Ε και Ζ τα σημεία που ορίζονται από τις ισότητες $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{BZ} = \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta}$. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{ZE} = \overrightarrow{AB}$.



Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ που φαίνεται δίπλα, θεωρούμε το σημείο Ν στη ΒΓ τέτοιο, ώστε: $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{N\Gamma}$. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{\Gamma N}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{N\Delta}$ συναρτήσει των $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

62. Αν $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ και $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$, να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}$ είναι συγγραμμικό (παράλληλο) με το $\vec{a}$.
63. Έστω $\overrightarrow{OA} = 2\vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ και $\overrightarrow{OG} = -4\vec{a} + 3\vec{b}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, και Γ είναι συνευθειακά.
64. Έστω $\vec{a}$ και $\vec{b}$ δυο γνωστά μη συγγραμμικά διανύσματα. Θεωρούμε επίσης διανύσματα

$$\vec{x} \text{ και } \vec{y} \text{ για τα οποία ισχύουν: } \begin{cases} 2\vec{x} + 3\vec{y} = 7\vec{a} + \vec{b} \\ \vec{x} - 2\vec{y} = -3\vec{b} \end{cases}$$

- α). Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{a}$ και $\vec{b}$

β). Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{x} + 2\vec{y}$ είναι ομόρροπο του $\vec{a}$ και ότι το διάνυσμα $\vec{v} = 3\vec{y} - \vec{x}$ είναι αντίρροπο του $\vec{\beta}$.

65. Δίνονται τα σημεία A, B, Γ, Δ και Ε του επιπέδου, για τα οποία ισχύει ότι

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE}. \text{ Να αποδειχθεί ότι τα σημεία A και B συμπίπτουν.}$$

66. Δίνονται τα σημεία A, B και Γ. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο M το διάνυσμα $\vec{u} = 5\overrightarrow{MA} - 8\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MG}$ είναι σταθερό (δηλαδή ανεξάρτητο του M).

Ενδεικτικές Λύσεις:

Για να δείξουμε ότι το διάνυσμα $\vec{u}$ είναι σταθερό, θα πρέπει να γράψουμε το διάνυσμα με μορφή στην οποία να μην υπάρχει το γράμμα M, παρά μόνο τα σταθερά γράμματα A, B, Γ

A) τρόπος:

Εισάγουμε παντού ένα από τα γράμματα A, B ή Γ. Π.χ. έστω ότι εισάγουμε το γράμμα B.

$$\vec{u} = 5\overrightarrow{MA} - 8\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MG}$$

$$\vec{u} = 5(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) - 8\overrightarrow{MB} + 3(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BG}) \quad [\text{το } \overrightarrow{MB} \text{ έχει ήδη το γράμμα B}]$$

$$\vec{u} = 5\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{BA} - 8\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{BG}$$

$$\vec{u} = 8\overrightarrow{MB} - 8\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BG} \quad [\text{κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων}]$$

$$\vec{u} = 5\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BG}$$

Και το ζητούμενο εδείχθη.

[Να επαναλάβετε τη διαδικασία μόνοι σας χρησιμοποιώντας τα άλλα γράμματα]

ΠΡΟΣΟΧΗ!! Δεν μπορούμε να εισάγουμε ένα άσχετο γράμμα (π.χ. το O) γιατί τότε αν και θα ‘εξαφανιστεί’ το M, θα εμφανιστεί στο τελικό αποτέλεσμα το O, άρα δεν καταφέραμε τίποτα! Δοκιμάστε το για να το δείτε.

B) τρόπος:

Εισάγουμε παντού ένα από τα γράμματα A, B ή Γ ως σημείο αναφοράς. Π.χ. έστω ότι εισάγουμε το γράμμα Γ. Τότε:

$$\vec{u} = 5\overrightarrow{MA} - 8\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MG}$$

$$\vec{u} = 5(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GM}) - 8(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM}) + 3\overrightarrow{MG} \quad [\text{το } \overrightarrow{MG} \text{ έχει ήδη το γράμμα Γ}]$$

$$\vec{u} = 5\overrightarrow{GA} - 5\overrightarrow{GM} - 8\overrightarrow{GB} + 8\overrightarrow{GM} + 3\overrightarrow{MG}$$

$$\vec{u} = 5\overrightarrow{GA} - 8\overrightarrow{GB} - 5\overrightarrow{GM} + 8\overrightarrow{GM} - 3\overrightarrow{GM} \quad [\text{το } 3\overrightarrow{MG} \text{ είναι ίσο με } -3\overrightarrow{GM}]$$

$$\vec{u} = 5\overrightarrow{GA} - 8\overrightarrow{GB} - 8\overrightarrow{GM} + 8\overrightarrow{GM}$$

$$\vec{u} = 5\overrightarrow{GA} - 8\overrightarrow{GB}$$

Και το ζητούμενο εδείχθη

[Να επαναλάβετε τη διαδικασία μόνοι σας χρησιμοποιώντας τα άλλα γράμματα]

Γ) τρόπος:

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές των διανυσμάτων δίνουν άθροισμα 0. ‘Σπάμε’ λοιπόν το 8

σε άθροισμα 3 και 5 και έχουμε:

$$\vec{u} = 5\vec{MA} - 8\vec{MB} + 3\vec{MG}$$

$$\vec{u} = 5\vec{MA} - 5\vec{MB} - 3\vec{MB} + 3\vec{MG}$$

$$\vec{u} = 5(\vec{MA} - \vec{MB}) - 3(\vec{MB} - \vec{MG})$$

$$\vec{u} = 5\vec{BA} - 3\vec{GB}$$

Και το ζητούμενο εδείχθη

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα στους τρεις τρόπους ΔΕΝ είναι ίσα. Αυτό **δεν** σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο λάθος. Απλά κάθε φορά εκφράσαμε το διάνυσμα $\vec{u}$ συναρτήσει διαφορετικών διανυσμάτων οπότε προφανώς οι παραστάσεις θα ήταν διαφορετικές.

67. Αν ισχύει $\vec{AK} + 3\vec{BK} - 2\vec{BA} = \vec{BL} + 3\vec{AM}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία K, Λ και Μ είναι συνευθειακά.

Ενδεικτικές Λύσεις

Για να δείξουμε ότι τα K, Λ και Μ είναι συνευθειακά θα πρέπει να δείξουμε ότι το διάνυσμα που προκύπτει από οποιοδήποτε συνδυασμό δύο γραμμάτων από τα K, Λ, Μ είναι συγγραμμικό με όποιο άλλο διάνυσμα προκύπτει από συνδυασμό δύο άλλων γραμμάτων από τα K, Λ, Μ. Για παράδειγμα αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\vec{KL} = \lambda \vec{MK} \text{ ή } \vec{KM} = \lambda \vec{LK} \text{ ή } \vec{LM} = \lambda \vec{LK} \text{ κ.ο.κ. Έτσι:}$$

A) τρόπος:

Εισάγουμε παντού ένα από τα γράμματα K, Λ ή Μ. Βάζουμε για παράδειγμα το Μ. Τότε:

$$\vec{AK} + 3\vec{BK} - 2\vec{BA} = \vec{BL} + 3\vec{AM}$$

$$\vec{AM} + \vec{MK} + 3(\vec{BM} + \vec{MK}) - 2(\vec{BM} + \vec{MA}) = \vec{BM} + \vec{ML} + 3\vec{AM}$$

$$\vec{AM} + \vec{MK} + 3\vec{BM} + 3\vec{MK} - 2\vec{BM} - 2\vec{MA} = \vec{BM} + \vec{ML} + 3\vec{AM}$$

$$\vec{AM} + \vec{MK} + 3\vec{BM} + 3\vec{MK} - 2\vec{BM} - 2\vec{MA} - \vec{BM} - \vec{ML} - 3\vec{AM} = \vec{0}$$

$$\vec{AM} - 2\vec{MA} - 3\vec{AM} + 3\vec{BM} - 2\vec{BM} - \vec{BM} + \vec{MK} + 3\vec{MK} - \vec{ML} = \vec{0}$$

$$\vec{AM} + 2\vec{AM} - 3\vec{AM} + 3\vec{BM} - 2\vec{BM} - \vec{BM} + \vec{MK} + 3\vec{MK} - \vec{ML} = \vec{0}$$

$$3\vec{AM} - 3\vec{AM} + 3\vec{BM} - 3\vec{BM} + 4\vec{MK} - \vec{ML} = \vec{0}$$

$$4\vec{MK} - \vec{ML} = \vec{0} \text{ και άρα: } \vec{ML} = 4\vec{MK}$$

Και το ζητούμενο εδείχθη.

[Να επαναλάβετε τη διαδικασία μόνοι σας χρησιμοποιώντας τα άλλα γράμματα]

B) τρόπος:

Εισάγουμε παντού ένα από τα γράμματα K, Λ ή Μ ως σημείο αναφοράς. Π.χ. έστω ότι εισάγουμε το γράμμα K. Τότε:

$$\overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{BK} - 2\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BL} + 3\overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{BK} - 2(\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB}) = \overrightarrow{KL} - \overrightarrow{KB} + 3(\overrightarrow{KM} - \overrightarrow{KA})$$

$$\overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{BK} - 2\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KL} - \overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KM} - 3\overrightarrow{KA}$$

$$\overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{BK} - 2\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KB} - 3\overrightarrow{KM} + 3\overrightarrow{KA} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AK} + 2\overrightarrow{AK} - 3\overrightarrow{AK} - 3\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KL} - 3\overrightarrow{KM} = \vec{0}$$

$$3\overrightarrow{AK} - 3\overrightarrow{AK} - 3\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KL} - 3\overrightarrow{KM} = \vec{0}$$

$$-\overrightarrow{KL} - 3\overrightarrow{KM} = \vec{0} \quad \text{και άρα: } \overrightarrow{KL} = -3\overrightarrow{KM} \quad \text{ή} \quad \overrightarrow{KL} = 3\overrightarrow{MK}$$

Και το ζητούμενο εδείχθη.

[Να επαναλάβετε τη διαδικασία μόνοι σας χρησιμοποιώντας τα άλλα γράμματα]

Γ) τρόπος:

Παρατηρούμε τους συντελεστές των διανυσμάτων και κάνουμε κατάλληλους συνδυασμούς ώστε να ‘εξαφανίσουμε’ τα γράμματα Α και Β και να μείνουν μόνο συνδυασμοί των Κ, Λ και Μ. Αυτό δεν γίνεται με μοναδικό τρόπο. Έτσι για παράδειγμα μπορούμε να κάνουμε:

$$\overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{BK} - 2\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BL} + 3\overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{BK} - 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BL} - 3\overrightarrow{AM} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AK} + 2\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{BK} - 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BL} - 3\overrightarrow{AM} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AK} + 2(\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{BL}) - 3\overrightarrow{AM} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{AK} + 2\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{LK} - 3\overrightarrow{AM} = \vec{0}$$

$$3\overrightarrow{AK} - 3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{LK} = \vec{0}$$

$$3(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AM}) + \overrightarrow{LK} = \vec{0}$$

$$3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{LK} = \vec{0} \quad \text{και άρα: } \overrightarrow{LK} = -3\overrightarrow{MK} \quad \text{ή} \quad \overrightarrow{LK} = 3\overrightarrow{LM}$$

Και το ζητούμενο εδείχθη.

68. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $4\vec{\alpha} + 6\vec{\beta} - 20\vec{\gamma}$ και $15\vec{\gamma} - 3\vec{\alpha} - \frac{9}{2}\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

69. Αν ισχύει $(\kappa + 2)\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = (\kappa + 5)\overrightarrow{PG}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

70. Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχουμε: $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\overrightarrow{BG} = -4\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{GD} = -5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

71. Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ και Δ. να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ το διάνυσμα $\vec{u} = 5\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MG} - 4\overrightarrow{MD}$ είναι σταθερό (ανεξάρτητο του Μ).

72. Δίνονται τα σημεία Α, Β και Γ. να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το διάνυσμα $\vec{u} = 3\overrightarrow{AM} + \lambda\overrightarrow{BM} - 5\overrightarrow{MG}$ είναι σταθερό (ανεξάρτητο του Μ).

73. Αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο Μ του επιπέδου ισχύει η ισότητα $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$
74. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Κ και Λ για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ και $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AG}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ, Β είναι συνευθειακά.
75. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ με α+β+γ=0. Να αποδειχθεί ότι για τυχαίο σημείο Μ του χώρου το διάνυσμα $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MG}$ είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του σημείου Μ
76. Θεωρούμε τα μη μηδενικά και μη παράλληλα ανά δύο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$. Αν ισχύουν οι σχέσεις $\vec{\alpha} \parallel (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ και $\vec{\beta} \parallel (\vec{\alpha} + \vec{\gamma})$, τότε να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma} \parallel (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.
77. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν οι σχέσεις $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{5} = \frac{|\vec{\gamma}|}{2}$, να αποδείξετε:
- α). $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\gamma}$ β). $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$
78. Έστω Α, Β, Γ, Δ σημεία μη συνευθειακά ανά τρία για τα οποία ισχύει ότι: $5\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GD} - 3\overrightarrow{BD}$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
79. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζ για τα οποία ισχύουν $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$ και $\overrightarrow{AZ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AG}$
- α). Να γράψετε καθένα από τα διανύσματα $\overrightarrow{DE}$ και $\overrightarrow{DZ}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$.
- β). Να εξετάσετε αν τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.
- γ). Αν $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{AG}| = 3$ και $A = 30^\circ$, να βρείτε τη γωνία $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DZ})$
80. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημεία Μ και Ν τέτοια, ώστε $3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$ και $4\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AG}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Ν και Δ είναι συνευθειακά.
81. Αν τα σημεία Α και Β είναι διαφορετικά, να βρείτε τον $x \in \mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει: $x \cdot \overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AD} = x \cdot \overrightarrow{BG} + 2\overrightarrow{DB}$
82. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ρ τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{PG}$.
- α. Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AP}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$.

b. Να βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει: $8\overrightarrow{AP} - 6\overrightarrow{AB} = \kappa \cdot \overrightarrow{BG} + \lambda \cdot \overrightarrow{AG}$

83. Αν ισχύουν $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = 2\overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{GP}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PD} = 3\overrightarrow{BA}$

84. Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και K το κέντρο του. Αν M είναι το μέσο του $K\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AG}$

85. Αν ισχύει ότι $3\overrightarrow{B\Delta} - \overrightarrow{\Gamma A} = 3\overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{AB}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \uparrow \downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

86. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο M για το οποίο ισχύει: $\overrightarrow{MB} = \lambda \cdot \overrightarrow{AG} = (1 - \lambda) \cdot \overrightarrow{AB}$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.

87. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει:

$$|3\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}| = |3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BG}|.$$

88. Βρείτε τις συντεταγμένες των παρακάτω διανυσμάτων:

α). $\vec{\alpha} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ β). $\vec{\alpha} = -3\vec{i} + \vec{j}$ γ). $\vec{\alpha} = \vec{i}$ δ). $\vec{\alpha} = -\sqrt{2}\vec{j}$ ε). $\vec{\alpha} = -3\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{3}\vec{j}$

89. Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $\vec{a} = (\lambda, -2\mu)$ και $\vec{\beta} = (\mu - 1, \lambda - 8)$ να είναι ίσα.

90. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 4, \lambda^2 + 2\lambda)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει ότι: α). $\vec{\alpha} = \vec{0}$, β). $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$.

91. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 5\lambda + 6, \lambda^2 - 3\lambda + 2)$. [**Σημείωση:** Όπως για κάθε διάνυσμα, η εκφώνηση θα μπορούσε να διατυπωθεί και ως εξής: « Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 5\lambda + 6)\vec{i} + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)\vec{j}$ »]. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ ισχύει:

α). $\vec{\alpha} = \vec{0}$

β). $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$

γ). $\vec{\alpha} // x'x$

δ). $\vec{\alpha} // y'y$

92. Αν $\vec{a} = (-2, 1)$ και $\vec{\beta} = (4, -1)$, να βρεθεί διάνυσμα $\vec{u}$ έτσι ώστε:

α). $2\vec{\alpha} - \vec{u} = \vec{\beta}$

β). $\vec{\alpha} - 4\vec{u} + 2\vec{\beta} = \vec{0}$

93. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u} = (8, 17)$

α). ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{a} = (-2, 1)$ και $\vec{b} = (4, 5)$

β). ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{i}$ και $\vec{j}$.

94. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, -3)$ και $\vec{b} = (-1, 2)$.

a. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\gamma} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$ και $\vec{\delta} = \vec{a} - \vec{b}$.

b. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u} = (3, 2)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$.

95. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB, με A(-3, 1) και B(9, -5). Να βρείτε:

α). το μέσο M του AB,

β). σημείο Γ τέτοιο ώστε το B να είναι μέσο του ΑΓ.

96. Αν A(-2, 3) ένα σημείο και M(4, 6) το μέσο του AB, βρείτε το σημείο B

97. Αν A(-3, 4) και $\vec{AB} = (-5, 2)$, βρείτε το σημείο B

98. Δίνονται τα σημεία K(1, -3) και Λ(-2, -4)

α). Βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου τους M.

β). Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{KL}$ καθώς και του $\vec{LK}$

γ). Αν το K είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΛΡ, τότε να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ρ.

δ). Βρείτε το συμμετρικό του Κ ως προς τον άξονα $x'x$.

ε). Βρείτε το συμμετρικό του Λ ως προς τον άξονα $y'y$.

στ). Αν $\vec{KN} = (7, -3)$, βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ν.

99. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ (αν υπάρχουν) ώστε για τα διανύσματα

$\vec{\alpha} = (2\lambda^2 - \lambda + 3, -\lambda^2 - 1)$ και $\vec{\beta} = (2\lambda + 2, -\lambda - 1)$ να ισχύει:

α). Να είναι ίσα

β). Να είναι αντίθετα

γ). Να είναι ομόρροπα

δ). Να είναι αντίρροπα

ε). Να ισχύει $\vec{\alpha} = 2\vec{\beta}$

στ). Να ισχύει $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (3, -2)$

100. Δίνονται τα σημεία A(1, 3), B(6, 8) και Δ(-2, 2). Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου

Γ, έτσι ώστε το τετράπλευρο ABΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο.

101. Να ελέγξετε αν τα επόμενα ζευγάρια διανυσμάτων είναι παράλληλα:

α). $\vec{\alpha} = (-1, 3)$ και $\vec{\beta} = (2, 0)$

β). $\vec{\alpha} = (2, -2)$ και $\vec{\beta} = (-3, 4)$

γ). $\vec{\alpha} = (-2, 5)$ και $\vec{\beta} = (4, -10)$

102. Στα επόμενα ζευγάρια να προσδιορίσετε την παράμετρο ώστε να είναι παράλληλα τα επόμενα ζευγάρια διανυσμάτων. Στη συνέχεια να εξετάσετε αν τα διανύσματα είναι ομόρροπα ή αντίρροπα:

α). $\vec{\alpha} = (-1, \lambda)$ και $\vec{\beta} = (2, 0)$

β). $\vec{\alpha} = (2, -2)$ και $\vec{\beta} = (\kappa + 2, 4)$

γ). $\vec{\alpha} = (9, -4)$ και $\vec{\beta} = (-1, \lambda^2)$

103. Δίνονται τα σημεία A(1, 3), B(4, 8), Γ(κ, λ) και Δ(μ, ν). Βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να πληρούν οι μεταβλητές κ, λ, μ, ν έτσι ώστε, αν είναι εφικτό:

α). το ABΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο

β). το ABΓΔ να είναι ρόμβος

γ). το ABΓΔ να είναι τραπέζιο

δ). το ABΓΔ να είναι τετράγωνο

104. Να ελέγξετε αν οι επόμενες τριάδες σημείων είναι συνευθειακά:

α). A(-1, 2), B(-3, 4), Γ(2, 0)

β). A(3, 3), B(0, -1), Δ(2, 5)

105. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες οι επόμενες τριάδες αριθμών είναι συνευθειακά:

α). A(1, λ+3), B(λ, 8) και Γ(-4, -10)

β). A(1, 0), B(-2λ, 3) και Γ(3, -3)

106. Δίνονται τα σημεία A(1, 0) και B(2, -2). Βρείτε το σημείο M για το οποίο ισχύει:

$$\vec{MA} + 2\vec{AB} = 3\vec{MB}$$

Ενδεικτική Λύση:

A' τρόπος

$$\vec{MA} + 2\vec{AB} = 3\vec{MB} \Leftrightarrow$$

$$(\vec{OA} - \vec{OM}) + 2(\vec{OB} - \vec{OA}) = 3(\vec{OB} - \vec{OM}) \Leftrightarrow$$

$$\vec{OA} - \vec{OM} + 2\vec{OB} - 2\vec{OA} = 3\vec{OB} - 3\vec{OM} \Leftrightarrow$$

$$3\vec{OM} - \vec{OM} = 3\vec{OB} - \vec{OA} - 2\vec{OB} + 2\vec{OA} \Leftrightarrow$$

$$2\vec{OM} = \vec{OB} + \vec{OA} = (2, -2) + (1, 0) = (2+1, -2+0) = (3, -2) \Leftrightarrow$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(3, -2) = \left(\frac{3}{2}, -1\right)$$

B' τρόπος

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{MB}$$

$$(x_A - x_M, y_A - y_M) + 2(x_B - x_A, y_B - y_A) = 3(x_B - x_M, y_B - y_M) \Leftrightarrow$$

$$(1 - x_M, 0 - y_M) + 2(2 - 1, -2 - 0) = 3(2 - x_M, -2 - y_M) \Leftrightarrow$$

$$(1 - x_M, -y_M) + 2(1, -2) = 3(2 - x_M, -2 - y_M) \Leftrightarrow$$

$$(1 - x_M, -y_M) + (2, -4) = (6 - 3x_M, -6 - 3y_M) \Leftrightarrow$$

$$(1 - x_M + 2, -y_M - 4) = (6 - 3x_M, -6 - 3y_M) \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - x_M + 2 = 6 - 3x_M \\ \text{και} \\ -y_M - 4 = -6 - 3y_M \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x_M = 3 \\ \text{και} \\ 2y_M = -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_M = \frac{3}{2} \\ \text{και} \\ y_M = -1 \end{array} \right\}$$

$$\text{Άρα } M\left(\frac{3}{2}, -1\right)$$

107. Δίνονται τα σημεία A(-1, 1) και B(2, 3). Να βρεθεί το σημείο M για το οποίο ισχύει:

α). $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$

β). $\overrightarrow{MA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$

γ). $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MB}$

δ). $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

108. Αν $\vec{u} = (3, -1)$ να βρεθεί ένα διάνυσμα $\vec{v}$ το οποίο να είναι:

α). παράλληλο προς το $\vec{u}$ και να έχει τριπλάσιο μέτρο από αυτό.

β). να είναι ομόρροπο με το $\vec{u}$ και να έχει διπλάσιο μέτρο από αυτό.

γ). να είναι αντίρροπο με το $\vec{u}$ και να έχει το μισό μέτρο από αυτό.

109. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, -6)$, $\vec{\beta} = (-16, 0)$ και $\vec{\gamma} = (-2, 1)$.

a. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

b. Να αποδείξετε ότι το $\vec{\alpha}$ δεν είναι παράλληλο με το $\vec{\gamma}$.

c. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το διάνυσμα $\vec{v} = (\lambda, \lambda - 6)$ να είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\vec{u} = \vec{\alpha} + 4\vec{\gamma}$

110. Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{a} = (-4, 8) \quad \vec{\beta} = (-16, 0) \quad \vec{\gamma} = (0, 10) \quad \vec{\delta} = 12\vec{i} - 16\vec{j}$$

Για κάθε ένα από τα παραπάνω διανύσματα να υπολογίσετε:

α) το μέτρο του

β) το συντελεστή διεύθυνσης (εφόσον ορίζεται)

γ) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα με τον άξονα $x'x$.

δ) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα με τον άξονα $y'y$.

ε) να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με το διάνυσμα $\vec{\beta}$.

111. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(1, 3)$, $B(-5, 1)$ και $\overrightarrow{AG} = (2, -8)$. Να βρείτε:

- Τις συντεταγμένες του σημείου Γ,
- Τις συντεταγμένες των μέσων Μ και Ν των πλευρών AB και AG αντίστοιχα,
- Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{MN}$

112. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha}$, για το οποίο ισχύει: $\vec{\alpha} = (|\vec{\alpha}| - 4, 8)$

113. Αν $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (-1, 0)$ και $\vec{\alpha} = \vec{u} + |\vec{u}| \cdot \vec{v}$, να βρείτε το $|\vec{\alpha}|$.

114. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (-1, -2)$.

A. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$.

B. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u} = -3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$.

Γ. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{w} = (0, 4)$ σε δύο συνιστώσες κατά τις διευθύνσεις των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

Δ. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο διπλάσιο του $|\vec{\alpha}|$

115. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, \lambda + 1)$ και $\vec{\beta} = (2\lambda, 1 - \lambda^2)$. Να βρείτε την τιμή του λ , έτσι ώστε:

A. τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ να είναι αντίθετα.

B. τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ να είναι συγγραμμικά.

Γ. το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 120° .

Δ. για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma} = (-5, 2)$ να ισχύει $\lambda_{\vec{\alpha}} \cdot \lambda_{\vec{\gamma}} = -1$.

116. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με $A(3, 4)$, $B(8, 5)$ και $\Gamma(7, 2)$.

α). Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ.

β). Να βρείτε σημείο Ε του $y'y$, ώστε $\overrightarrow{AE} // \overrightarrow{BD}$.

γ). Να βρείτε σημείο Ζ του $x'x$, ώστε $\overrightarrow{BZ} // \overrightarrow{AG}$.

δ). Αν Μ είναι το μέσο του ΕΖ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Γ, Μ είναι συνευθειακά.

117. Δίνονται τα σημεία $B(1, 2)$ και $\Gamma(-1, 6)$. Να βρείτε σημείο Α του άξονα $x'x$ ώστε το τρίγωνο ABΓ να είναι ισοσκελές με $(AB) = (B\Gamma)$.

118. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(-1, 2), Β(7, 0), Γ(1, 4) και Δ μέσον της διαμέσου ΑΜ. Αν για το σημείο Ε ισχύει $\overrightarrow{2AE} = \overrightarrow{EG}$, τότε:

Α. Να βρείτε τα σημεία Δ και Ε.

Β. Να δείξετε ότι τα σημεία Β, Δ, Ε είναι συνευθειακά.

119. Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ σε καθεμιά από τις επόμενες περιπτώσεις:

i. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο, $|\vec{\beta}| = 6$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$

ii. $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 30^\circ$

iii. $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 120^\circ$

iv. $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 2$ και τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα

v. $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 2$ και τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα

120. Δίνονται διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\beta}| = \sqrt{12}$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -12$ και

$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 150^\circ$. Να βρείτε:

i. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$,

ii. Το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$

iii. Το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (3\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

iv. Το εσωτερικό γινόμενο $(2\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2$

121. Δίνονται διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 4$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$. Αν ισχύει ότι

$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = 28$, να βρείτε:

i. $\vec{\alpha} = (3, 5)$ και $\vec{\beta} = (4, 2)$,

ii. $\vec{\alpha} = (2, -3)$ και $\vec{\beta} = (1, 5)$,

iii. $\vec{\alpha} = (-4, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, -6)$

iv. $\vec{\alpha} = (0, -3)$ και $\vec{\beta} = (7, -2)$

122. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$,

ii. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$,

iii. Το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (2\vec{\alpha} + \vec{\beta})$

123. Δίνονται τα σημεία A(3, 1), B(2, -5), Γ(-4, 3) και Δ(-1, -2). Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

124. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -3)$, $\vec{\beta} = (4, 6)$ και $\vec{\gamma} = (x, 4 - x)$ με $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

ii. Αν ισχύει ότι $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 26$, να βρείτε:

1. Τον αριθμό x,

2. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$

125. Αν $|\vec{\alpha}| = 10$, $|\vec{\beta}| = 4$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 120^\circ$, να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$.

Ενδεικτική Λύση:

[Υπενθυμίζουμε ότι ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ΔΕΝ ισούται με το $|\vec{\alpha}|$. Όμως ισχύει $\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$.

Αυτή η ιδιότητα αποδεικνύεται πολύ χρήσιμη γιατί μπορούμε έμμεσα να περάσουμε από ένα διάνυσμα στο μέτρο του και αντίστροφα.]

Αρχικά θα υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ το οποίο θα χρειαστούμε:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 10 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = 40 \cdot (-\cos 60^\circ) = 40 \left(-\frac{1}{2}\right) = -20$$

Στη συνέχεια έχουμε:

$$\begin{aligned} |\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}| &= \sqrt{|\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}|^2} = \sqrt{(\vec{\alpha} + 4\vec{\beta})^2} = \sqrt{\vec{\alpha}^2 + 16\vec{\beta}^2 + 8\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} \\ &= \sqrt{|\vec{\alpha}|^2 + 16|\vec{\beta}|^2 + 8\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} = \sqrt{10^2 + 16 \cdot 4^2 + 8 \cdot (-20)} = \sqrt{100 + 256 - 160} = \sqrt{196} = 14 \end{aligned}$$

Άρα $|\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}| = 14$

126. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}, \quad (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}) \quad \text{και} \quad |2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}| = 5.$$

i. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 1$.

ii. Να βρείτε το $|3\vec{\alpha} + 8\vec{\beta}|$

127. Δίνεται διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\beta}$, με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 120^\circ$ και $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 3$.

i. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 2$.

ii. Θεωρούμε διάνυσμα $\vec{v}$ για το οποίο ισχύει ότι: $\vec{v} // (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$ και

$$(\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}) \perp (\vec{v} - \vec{\beta})$$

a. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{v}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

b. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}$.

128. Αν ισχύουν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = 13$, $|\vec{\beta}| = 14$, $|\vec{\gamma}| = 15$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\vec{\alpha}$.

129. Έστω ότι η γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 120^\circ$ και $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$. Αν $\vec{\delta} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, να υπολογιστεί η γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\delta})$.

130. Έστω τρία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\gamma}| = 4$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \frac{\pi}{3}$ και

$$(\vec{\gamma}, \vec{\alpha}) = \frac{2\pi}{3}. \text{ Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:}$$

a. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

b. $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$

c. $(\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2$

d. $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}) \cdot (3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$

e. $(\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta} + 2\vec{\gamma})$

131. Αν είναι γνωστό ότι $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 6\vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = 6$, $|\vec{\beta}| = 3$, $|\vec{\gamma}| = 1$, να βρείτε τη γωνία

$$(\vec{\beta}, \vec{\gamma}).$$

132. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 2$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$, $(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$ και $(\vec{\gamma}, \vec{\alpha})$.

133. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

a. $|\vec{\alpha}\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$

b. $(\vec{\alpha}\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 \vec{\beta}^2$

c. $\vec{\alpha}(\vec{\beta}\vec{\gamma}) = (\vec{\alpha}\vec{\beta})\vec{\gamma}$

d. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$

e. $(\vec{\alpha} \pm \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 \pm 2\vec{\alpha}\vec{\beta}$

f. $|\vec{\alpha} \pm \vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 \pm 2\vec{\alpha}\vec{\beta}$

134. Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 4 και Δ το μέσο της βάσης ΒΓ. Να υπολογίσετε τα παρακάτω εσωτερικά γινόμενα:

i. $\vec{A\Delta} \cdot \vec{B\Gamma}$

ii. $\vec{A\Delta} \cdot \vec{A\Gamma}$

iii. $\vec{A\Delta} \cdot \vec{A\Gamma}$

iv. $\vec{A\Delta}^2$

v. $\vec{A\Delta} \cdot \vec{A\Gamma}$

vi. $\vec{A\Delta} \cdot \vec{A\Gamma}$

135. Έστω διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, διάνυσμα $\vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 3$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Αν $\vec{\kappa} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

και $\vec{\lambda} = -3\vec{\alpha} - \frac{1}{2}\vec{\beta}$, τότε να υπολογίσετε:

i. Το $|\vec{\kappa}|$

ii. Το $|\vec{\lambda}|$

iii. Τη γωνία $(\vec{\kappa}, \vec{\lambda})$

Ενδεικτική Λύση:

Αρχικά θα υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ το οποίο θα χρειαστούμε:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 2 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

Στη συνέχεια έχουμε:

$$\begin{aligned} |\vec{\kappa}| &= |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| = \sqrt{|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|^2} = \sqrt{(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})^2} = \\ \text{i.} \quad &= \sqrt{\vec{\alpha}^2 + 4\vec{\beta}^2 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} = \sqrt{|\vec{\alpha}|^2 + 4|\vec{\beta}|^2 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} = \\ &= \sqrt{4 + 36 - 12} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\vec{\lambda}| &= \left| -3\vec{\alpha} - \frac{1}{2}\vec{\beta} \right| = \sqrt{\left| -3\vec{\alpha} - \frac{1}{2}\vec{\beta} \right|^2} = \sqrt{\left(-3\vec{\alpha} - \frac{1}{2}\vec{\beta} \right)^2} = \\
 \text{ii.} \quad &= \sqrt{9\vec{\alpha}^2 + \frac{1}{4}\vec{\beta}^2 + 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} = \sqrt{9|\vec{\alpha}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{\beta}|^2 + 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} = \\
 &= \sqrt{36 + \frac{9}{4} + 9} = \sqrt{\frac{189}{4}} = \frac{3\sqrt{21}}{2} \\
 \text{iii.} \quad \cos(\vec{\kappa}, \vec{\lambda}) &= \frac{\vec{\kappa} \cdot \vec{\lambda}}{|\vec{\kappa}| |\vec{\lambda}|} = \frac{(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot \left(-3\vec{\alpha} - \frac{1}{2}\vec{\beta} \right)}{|\vec{\kappa}| |\vec{\lambda}|} = \frac{-3\vec{\alpha}^2 - \frac{1}{2}\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 6\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2}{|\vec{\kappa}| |\vec{\lambda}|} = \\
 &= \frac{-3|\vec{\alpha}|^2 + \frac{11}{2}\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2}{|\vec{\kappa}| |\vec{\lambda}|} = \frac{-12 + \frac{33}{2} + 9}{2\sqrt{7} \cdot \frac{3\sqrt{21}}{2}} = \frac{\frac{27}{2}}{3\sqrt{7}\sqrt{21}} = \frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{7}\sqrt{21}} \Rightarrow \\
 \cos(\vec{\kappa}, \vec{\lambda}) &= \frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{7}\sqrt{21}} = \frac{9}{2\sqrt{7}\sqrt{21}} = \frac{9\sqrt{7}\sqrt{21}}{2 \cdot 7 \cdot 21} = \frac{9\sqrt{7}\sqrt{7}\sqrt{3}}{2 \cdot 7 \cdot 21} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 7 \sqrt{3}}{2 \cdot 7 \cdot 21} = \frac{3\sqrt{3}}{14}
 \end{aligned}$$

Άρα η γωνία $(\vec{\kappa}, \vec{\lambda})$ είναι γωνία με $\cos(\vec{\kappa}, \vec{\lambda}) = \frac{3\sqrt{3}}{14}$

136. Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ τρία μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου. Αν είναι $\vec{\gamma} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{\gamma} - \vec{\alpha})$, να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} - \vec{\gamma})$.

137. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(4, 3), Β(1, 2) και Γ(6,7). Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου.

138. Έστω $\vec{\alpha} = (x, y)$ και $\vec{\beta} = (3, 2)$. Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x, y , ώστε:

α). $|\vec{a}| = 3$ β). $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ γ). $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$ δ). $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \perp (2\vec{i} + \vec{j})$.

139. Αν $\vec{\alpha} = (4, 3)$ και $\vec{\beta} = (1, 2)$, να λυθεί η εξίσωση $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} - x\vec{\alpha})$.

140. Να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{u}$, αν είναι γνωστό ότι $\vec{u} \cdot \vec{a} = 18$ και $\vec{u} \cdot \vec{b} = -12$, όπου $\vec{a} = (2, -3)$ και $\vec{b} = (4, 6)$.

141. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο (το σύνολο) των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\vec{AB} \cdot \vec{AM} + \vec{AG} \cdot \vec{AM} = 0$.

142. Δίνονται τα συνεπίπεδα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\gamma}| = \frac{\sqrt{3}}{3}$, και

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ, (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = 30^\circ, (\vec{\gamma}, \vec{\alpha}) = 90^\circ. \text{ Να αποδείξετε ότι } \vec{\beta} = \vec{\alpha} + 3\vec{\gamma}.$$

143. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{\gamma}$ αν είναι γνωστό ότι ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 18$ και $\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta} = -12$ όπου $\vec{\alpha} = (2, -3)$ και $\vec{\beta} = (4, 6)$.

144. Δίνονται τα σημεία A(4, -1), B(-1, 1) και Γ(3, 5).

A. Να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου.

B. Να βρείτε το μήκος της διαμέσου AM του τριγώνου ABΓ.

Γ. Να βρείτε σημείο Δ, ώστε το τετράπλευρο AΓΔB να είναι παραλληλόγραμμο.

Δ. Να βρείτε σημείο E, του άξονα y'y, ώστε το τρίγωνο EAB να είναι ισοσκελές με βάση την AB.

145. Έστω $\vec{\alpha} = (1, 0)$, $\vec{\beta} = (8, -3)$ και τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}$ για τα οποία ισχύει:

$$\begin{cases} \vec{v} + \vec{u} = \vec{\alpha} \\ 2\vec{v} - \vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} \end{cases}$$

A. Να δείξετε ότι $\vec{v} = (-2, 1)$ και $\vec{u} = (3, -1)$

B. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (-7, 3)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{v}$ και $\vec{u}$.

Γ. να βρείτε διάνυσμα $\vec{w}$ ομόρροπο του $\vec{v}$ και να ισχύει $|\vec{w}|^2 - 4|\vec{w}| = 5$

146. Δίνεται διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\sqrt{3}, -1)$. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 1$, τέτοιο ώστε να σχηματίζει με το $\vec{\alpha}$ γωνία $\frac{\pi}{6}$.

147. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$, $|\vec{\gamma}| = 3$, και

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \frac{3\pi}{4} \text{ και } (\vec{\gamma}, \vec{\alpha}) = \frac{\pi}{2}. \text{ Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων } \vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma} \text{ και } 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} - 2\vec{\gamma}.$$

148. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = \vec{u} \\ -\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} = \vec{v} \end{cases}$ όπου $\vec{u} = (4, -9)$ και $\vec{v} = (0, 7)$

A). Λύνοντας το σύστημα δείξτε ότι η λύση του είναι: $\vec{\alpha} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (1, 3)$

B). Να βρεθεί αριθμός $\kappa \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε: $(\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$

149. Έστω τα σημεία A(3, 2) και B(7, -4). Να βρεθεί σημείο M στον άξονα x'x έτσι ώστε:

A). το τρίγωνο MAB να είναι ισοσκελές στο M

B). το τρίγωνο MAB να είναι ορθογώνιο στο M.

150. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$. Να υπολογίσετε τις

παρακάτω παραστάσεις:

a. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

b. $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2$

c. $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2$

d. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$

e. $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})(-\vec{\alpha} + 5\vec{\beta})$

151. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $\vec{\alpha} + \vec{\beta} \perp \vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$ να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$, $|\vec{\beta}| = 1$

152. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta} = (5, 10)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, η μία εκ των οποίων να είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (3, -4)$.

153. Αν είναι $\vec{\alpha} = (1, 2)$, $\vec{\beta} = (3, 4)$ να βρεθούν διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ έτσι ώστε:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{a}, \quad \vec{u} // \vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{v} \perp \vec{\beta}.$$

154. Σε τρίγωνο ABΓ είναι $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\overrightarrow{AG} = -3\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$.

a. Να υπολογίσετε την τιμή των $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, $(4\vec{\beta} + 2\vec{\alpha})^2$, $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$

b. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, τότε:

i. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{BG}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

ii. Να βρείτε τη γωνία $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BG})$

155. Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{6}$. Αν για οποιονδήποτε πραγματικούς αριθμούς μ και ν ισχύει ότι: $(\mu\vec{\alpha} + \nu\vec{\beta}) \perp \left(\nu\vec{\alpha} - \frac{1}{2}\vec{\beta}\right)$, να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\beta}$.

156. Δίνεται ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($B=90^\circ$) με $A(1, -2)$, $B(\kappa, -2)$, $|\overrightarrow{AB}| = 3$ και

$\lambda_{\overrightarrow{AG}} = 1$. Να βρεθούν:

a. Οι συντεταγμένες όλων των κορυφών, αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τρίγωνο ABΓ δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον άξονα χ'χ.

b. Να βρεθεί ο αριθμός κ.

c. Φέρνουμε την ΒΚ ύψος στην υποτείνουσα ΑΓ. Να βρεθεί το $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$.

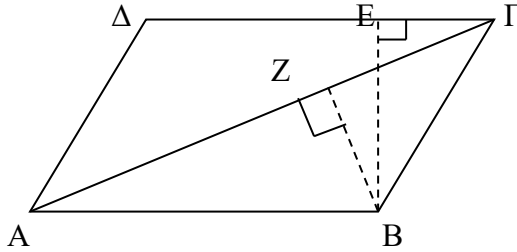
d. Να βρεθεί το $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AK}$.

157. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ (τα γράμματα σε κυκλική σειρά) με κορυφές $A(1, 2)$, $B(4, 5)$, $\Gamma(10, 4)$ και Κ το κέντρο του.

α). Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ, του κέντρου Κ, τη γωνία ΔΑΒ, τη γωνία ΒΚΓ και το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

β). Από το Β φέρνουμε την $BE \perp A\Delta$. Να υπολογίσετε το $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$.

158. Στο παρακάτω παραλληλόγραμμο να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{B\Gamma}^2 = \overrightarrow{\Gamma A} \cdot \overrightarrow{\Gamma Z} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} \cdot \overrightarrow{\Gamma E}$



159. Δίνονται τα αντίθετα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 6\lambda)$, $\vec{\beta} = (3\lambda, -36\lambda^2 + 6)$ και το διάνυσμα

$$\vec{\gamma} = (-1, -\lambda).$$

A. Να δείξετε ότι $\lambda = -\frac{1}{3}$

B. να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v} = \vec{\alpha} - 3\vec{\gamma}$

Γ. να βρείτε το μ , ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{u} = (\mu, 3 - \mu^2)$ να είναι συγγραμμικά.

160. Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{7}$, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Λύση:

Για να βρούμε μια γωνία αρκεί να βρούμε ένα τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας και εφόσον ξέ-

ρουμε ότι ισχύει: $\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$ αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε το $\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

Από υπόθεση ξέρουμε τον παρονομαστή της παράστασης. Μένει να βρούμε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. Θα το βρούμε από την υπόθεση $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{7}$. Διαδοχικά έχουμε:

$$|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{7} \Rightarrow |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = \sqrt{7}^2 \xRightarrow[\substack{\text{ιδιότητα} \\ a^2 = |a|^2}]{\substack{\text{ιδιότητα} \\ a^2 = |a|^2}} (\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = 7 \Rightarrow \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 7 \Rightarrow$$

$$|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 7 \Rightarrow 1^2 + 2^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 7 \Rightarrow 1 + 4 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 7 \Rightarrow 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -2 \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$$

Οπότε έχουμε:

$$\cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} = \frac{-1}{1 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \quad \text{και επειδή } 0^\circ \leq (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \leq 180^\circ, \text{ άρα: } \boxed{(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 120^\circ}$$

161. Αν $\vec{\alpha} = (2, -1)$, $\vec{\beta} = (3, 1)$, να βρείτε την γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

162. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ όπου το $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο, $|\vec{\beta}| = 2$ και η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι 120° . Να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\delta}$ όπου $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

163. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, να υπολογίσετε:

A. το μέτρο του $\vec{\gamma}$

B. την τιμή της παράστασης $A = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$

164. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν: $\frac{|\vec{\alpha}|}{2} = \frac{2|\vec{\beta}|}{3} = \frac{|\vec{\gamma}|}{5}$ και

$\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$. Να αποδείξετε ότι: A. $\vec{\alpha} = -\frac{4}{3}\vec{\beta}$ B. $\vec{\beta} \parallel \vec{\gamma}$

165. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$

A. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} \neq \vec{0}$

B. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$, ώστε: $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} - \vec{x})$

166. Αν $|\vec{\alpha}| = 5$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 30$ και $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$, να βρείτε το $|\vec{\beta}|$.

167. Αν $|\vec{\alpha}| = 4$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -6$ και $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$, να βρείτε το $|\vec{\beta}|$.

168. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -1)$, $\vec{\beta} = (-3, 0)$ και $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$. Να βρείτε:

A. τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma}$

B. τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$

Γ. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

169. Δίνονται τα σημεία A(1, 2), B(3, -4) και Γ, για τα οποία ισχύει $\vec{OG} = \vec{AB} + 2\vec{AG}$, όπου O η αρχή των αξόνων.

A. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ.

B. να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου

Γ. Αν Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ, να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$.

Δ. Αν το σημείο Ν βρίσκεται στην πλευρά ΑΓ και ισχύει $\overrightarrow{NG} = 3\overrightarrow{AN}$, βρείτε την απόσταση των σημείων Α και Ν.

170. Αν με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$, να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

A. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

B. $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$

Γ. $(2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$

Δ. $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2$

171. Έστω $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{\beta}$ και $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα: α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{u}$ και β) $\vec{v} \cdot \vec{u}$.

172. Έστω $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 150^\circ$, $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$ και $\vec{u} = (\kappa - 2)\vec{a} + \vec{\beta}$. Να υπολογίσετε: α) το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ β) το $\vec{\alpha} \cdot \vec{v}$ γ) το $|\vec{v}|$ δ) το κ όταν ισχύει: $\vec{v} \perp \vec{u}$

173. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Αν $\vec{\gamma} = 2\vec{a} - 3\vec{\beta}$, να βρείτε: α) το $|\vec{\gamma}|$ β) τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$.

174. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$. Αν $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{\beta}$, να υπολογίσετε: α) το $\vec{v} \cdot \vec{u}$ και β) το $\sin(\vec{v}, \vec{u})$.

175. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(2, 0), Β(5, 1), Γ(1, 3).

A. Βρείτε το είδος της γωνίας Α.

B. Αν ΑΜ η διάμεσος του τριγώνου, να βρείτε τη γωνία $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$.

176. Έστω τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{v} - \vec{u} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$, $\vec{v} + 2\vec{u} = 4\vec{a} + \vec{\beta}$ και $(\vec{v}, \vec{u}) = \frac{\pi}{3}$

- A. Να γράψετε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.
- B. να υπολογίσετε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$
177. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{v}$ με $|\vec{\alpha}|=3$, $|\vec{\beta}|=2$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})=\frac{2\pi}{3}$ και $\vec{v}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$
- A. Να βρείτε το $|\vec{v}|$.
- B. Να βρείτε τη γωνία $(\vec{v}, \vec{u})$.
- Γ. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}=-\vec{\alpha}+\frac{3}{2}\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.
178. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})=120^\circ$. Έστω επιπλέον τα διανύσματα $\vec{v}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{u}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:
- A. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.
- B. Τα μέτρα: $|\vec{v}|$, $|\vec{u}|$
- Γ. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{v} \cdot \vec{u}$.
- Δ. Τη γωνία $(\vec{v}, \vec{u})$
179. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1,2)$, $\vec{\beta}=(3,1)$ και $\vec{v}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$
- A. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=2\vec{\alpha}^2+3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
- B. Να βρείτε τα λ , μ ώστε το διάνυσμα $\vec{v}$, να είναι κάθετο στο $\vec{\gamma}=(1,1)$ και να έχει μέτρο $7\sqrt{2}$.