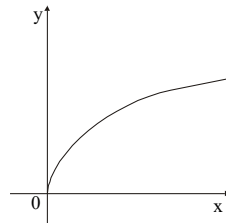


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
Β' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό-Λάθος»

1. * Η εξίσωση $x^2 + y^2 = a$ ($a > 0$) παριστάνει κύκλο. Σ Λ
2. * Η εξίσωση $x^2 + y^2 + κx + λy = 0$ με $κ, λ \neq 0$ παριστάνει πάντα κύκλο. Σ Λ
3. * Ο κύκλος με κέντρο $K(1, -1)$ που περνά από το σημείο $(-1, 1)$ έχει πάντα εξίσωση: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$. Σ Λ
4. * Η εξίσωση $x^2 + y^2 + a(x + y + 1) = 0$ παριστάνει κύκλο για κάθε θετικό a . Σ Λ
5. * Το σημείο $(\frac{\eta\mu\theta}{2}, \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{2})$ ανήκει στον κύκλο $4(x - \eta\mu\theta)^2 + 4(y - \sigma\upsilon\nu\theta)^2 = 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό θ . Σ Λ
6. * Οι κύκλοι $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0$ και $x^2 + y^2 + 2x + 3y + \sqrt{2} = 0$ είναι ομόκεντροι. Σ Λ
7. * Το σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ με τετμημένη 2 βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x$. Σ Λ
8. ** Οι κύκλοι $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$ και $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$ εφάπτονται εξωτερικά Σ Λ
9. * Ο κύκλος $(x + 1)^2 + y^2 = 18$ τέμνει την ευθεία $y = x + 1$. Σ Λ
10. ** Τα σημεία $(-2, 2)$ και $(4, 2)$ του κύκλου $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ είναι αντιδιαμετρικά. Σ Λ
11. * Οι κύκλοι $x^2 + (y - 1)^2 = 3$ και $x^2 + (y - 1)^2 = \frac{10}{3}$ έχουν δύο κοινά σημεία. Σ Λ
12. * Η εξίσωση $(x + y)^2 - 4 = 2xy$ παριστάνει κύκλο. Σ Λ
13. * Οι εξισώσεις $x = \rho\eta\mu\varphi$ και $y = \rho\sigma\upsilon\nu\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ λέγονται παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$. Σ Λ
14. * Η εφαπτομένη ευθεία του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ στο σημείο με τετμημένη 1 έχει εξίσωση $x + y = 1$. Σ Λ
15. * Η εξίσωση $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 5$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $(1, 0)$. Σ Λ
16. * Η καμπύλη που παριστάνει η εξίσωση $x^2 + y^2 = a^2$ είναι γραφική παράσταση συνάρτησης. Σ Λ
17. * Η σχέση $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ είναι τύπος συνάρτησης που παριστάνει ημικύκλιο ($-a \leq x \leq a$). Σ Λ
18. ** Ένας κύκλος έχει το κέντρο του στην ευθεία $y = x$. Έχει πάντα εξίσωση $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$. Σ Λ
19. * Ένα σημείο (x_1, y_1) είναι εσωτερικό ενός κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ . Ισχύει: $(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 < \rho^2$. Σ Λ
20. ** Η παραβολή με εστία το σημείο $(1, 0)$ έχει παράμετρο $p = 2$. Σ Λ

21. * Η ευθεία που έχει εξίσωση $y = 3$ είναι παράλληλη στη διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 16x$. Σ Λ
22. * Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxy η παραβολή $y^2 = 2px$ βρίσκεται πάντα στο ημιεπίπεδο που ορίζει ο άξονας $y'y$ και η εστία E . Σ Λ
23. * Ο άξονας $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $x^2 = 8y$. Σ Λ
24. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $x^2 = 2py$ στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$ είναι $yy_1 = p(x + x_1)$. Σ Λ
25. ** Μια ευθεία και μια παραβολή έχουν ένα κοινό σημείο. Η ευθεία είναι εφαπτομένη της παραβολής. Σ Λ
26. * Μια παραβολή με άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ έχει πάντα εξίσωση της μορφής $x^2 = 2py$. Σ Λ
27. * Μια παραβολή με κορυφή το $O(0, 0)$ και διευθετούσα την $y = -\frac{p}{2}$, έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$. Σ Λ
28. * Κάθε σημείο της παραβολής $y^2 = 8x$ ισαπέχει από την ευθεία $x = -2$ και το σημείο $(4, 0)$. Σ Λ
29. ** Όλα τα σημεία της $y^2 = 2px$ με $p > 0$, εκτός του $(0, 0)$, έχουν θετική τετμημένη. Σ Λ
30. * Η διευθετούσα της $y^2 = 3x$ είναι η ευθεία $x = -\frac{3}{4}$. Σ Λ
31. * Η διευθετούσα της $x^2 = 4y$ είναι η ευθεία $y = -1$. Σ Λ
32. ** Ο κύκλος $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ και η παραβολή $y^2 = -2x$ εφάπτονται. Σ Λ
33. * Η εστία της παραβολής $x^2 = y$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x$. Σ Λ
34. * Στο σημείο (x_0, y_0) της παραβολής $y^2 = 2px$ η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{p}{y_0}$ ($y_0 \neq 0$). Σ Λ
35. * Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ περνά από την εστία της παραβολής $y^2 = 4x$. Σ Λ
36. * Η εξίσωση $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, παριστάνει καμπύλη της μορφής του διπλανού σχήματος. Σ Λ
37. * Δύο από τις κορυφές και οι εστίες οποιασδήποτε έλλειψης, βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Σ Λ
38. * Όσο η εκκεντρότητα μιας έλλειψης πλησιάζει προς το 0, τόσο η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος. Σ Λ
39. * Η εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ παριστάνει έλλειψη μόνο αν $a > b$. Σ Λ
40. ** Η εστιακή απόσταση μιας έλλειψης είναι το μισό του με-



- γάλου άξονα. Η εκκεντρότητα αυτής της έλλειψης είναι $\frac{1}{2}$. Σ Λ
41. * Μια ευθεία που έχει ένα μόνο κοινό σημείο με μια έλλειψη, είναι πάντοτε εφαπτομένη της. Σ Λ
42. * Η εξίσωση $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{5}y^2 = \frac{3}{2}$ παριστάνει έλλειψη. Σ Λ
43. * Το σημείο (κ, λ) ανήκει σε κάθε έλλειψη με κέντρο Ο, η οποία περιέχει το σημείο (- κ, - λ). Σ Λ
44. * Δύο ελλείψεις που έχουν τις ίδιες εστίες, είναι όμοιες. Σ Λ
45. * Δύο όμοιες ελλείψεις έχουν πάντα τις ίδιες εστίες. Σ Λ
46. * Το σημείο Α (2, - 2) βρίσκεται έξω από την έλλειψη
C: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Σ Λ
47. * Η εξίσωση $x^2 + ky^2 = 1$ παριστάνει έλλειψη μόνο όταν $k > 0$. Σ Λ
48. * Η έλλειψη $x^2 + 2y^2 = 1$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ δεν έχουν κοινό σημείο. Σ Λ
49. ** Τα σημεία της έλλειψης $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ είναι εσωτερικά της
έλλειψης $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$. Σ Λ
50. * Η ευθεία $y = - 3$ είναι εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} = 1$ Σ Λ
51. * Η ευθεία $x = 2$ είναι εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$. Σ Λ
52. * Εστιακή απόσταση μιας έλλειψης ονομάζεται η απόσταση δύο σημείων της που είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο της. Σ Λ
53. * Η εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της
M (α συνθ, β ημθ) είναι (συνθ) x + (ημθ) y = 1. Σ Λ
54. * Η εκκεντρότητα της έλλειψης $4x^2 + y^2 = 4$ είναι $\varepsilon = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Σ Λ
55. ** Οι ελλείψεις $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ είναι όμοιες. Σ Λ
56. * Η εξίσωση μιας υπερβολής είναι $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Ισχύει
πάντα $\alpha > \beta$. Σ Λ
57. * Η υπερβολή C: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα y'y σε δύο
σημεία. Σ Λ
58. * Όσο πιο μεγάλη είναι η εκκεντρότητα, τόσο πιο ανοικτή
είναι η υπερβολή. Σ Λ
59. * Η ισοσκελής υπερβολή $x^2 - y^2 = \alpha^2$ έχει εκκεντρότητα

$\varepsilon = \sqrt{2}$. Σ Λ

60. * Η υπερβολή $\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες

$\varepsilon_1: y = \frac{\alpha}{\beta} x$ και $\varepsilon_2: y = -\frac{\alpha}{\beta} x$. Σ Λ

61. * Η εξίσωση $x^2 - 9y = 0$ παριστάνει υπερβολή. Σ Λ

62. * Το ορθογώνιο βάσης μιας υπερβολής έχει κοινά σημεία με την υπερβολή. Σ Λ

63. ** Το σημείο (5, 4) ανήκει σε μια ασύμπτωτη ευθεία της υπερβολής $16x^2 - 25y^2 = 40$. Σ Λ

64. * Υπάρχουν υπερβολές που οι ασύμπτωτές τους είναι κάθετες μεταξύ τους. Σ Λ

65. * Η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός. Σ Λ

66. * Η εξίσωση $kx^2 + ly^2 = 0$ παριστάνει υπερβολή για κάθε $k, l \in \mathbb{R}$. Σ Λ

67. * Η υπερβολή $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στα σημεία (0, 2) και (0, - 2). Σ Λ

68. ** Η υπερβολή $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$ έχει τέσσερα κοινά σημεία με τον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$. Σ Λ

69. * Η ευθεία $y = \frac{1}{2} x$ εφάπτεται της υπερβολής $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. Σ Λ

70. * Η διχοτόμος της γωνίας xOy τέμνει την υπερβολή $x^2 - y^2 = 4$ σε δύο σημεία. Σ Λ

71. ** Κάθε ασύμπτωτη της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι κάθετη σε μία από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$. Σ Λ

72. * Υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο $(\eta\mu\theta, 1)$ ανήκει στην υπερβολή $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$. Σ Λ

73. ** Οι υπερβολές $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ και $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ έχουν τις ίδιες εστίες. Σ Λ

1. * Το σημείο $M(-2, 3)$ ανήκει στη γραμμή με εξίσωση
Α. $x = 3$ Β. $x = -2$ Γ. $x^2 + y^2 = 1$
Δ. $(x + 2)^2 + (x - 3)^2 = 1$ Ε. $y^2 = -2x$
2. * Το κέντρο του κύκλου που έχει διάμετρο AB με $A(1, -3)$ και $B(7, 5)$, έχει συντεταγμένες
Α. $(4, 4)$ Β. $(3, 4)$ Γ. $(4, -4)$ Δ. $(4, 1)$ Ε. $(4, -1)$
3. * Η ακτίνα του κύκλου $x^2 + y^2 = 8$ είναι
Α. 2 Β. $2\sqrt{2}$ Γ. $4\sqrt{2}$ Δ. 4 Ε. 8
4. * Το κέντρο του κύκλου $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10 = 0$ είναι
Α. $(3, -2)$ Β. $(2, -3)$ Γ. $(2, 3)$ Δ. $(-2, 3)$ Ε. $(-3, 2)$
5. * Η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $(-1, -1)$ και διέρχεται από το σημείο $(4, -3)$, είναι
Α. $x^2 + y^2 = 29$ Β. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{29}$
Γ. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = \sqrt{29}$ Δ. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 29$
Ε. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 29$
6. * Ένας κύκλος που διέρχεται από το σημείο $(3, 9)$ και έχει ακτίνα 9, έχει εξίσωση
Α. $x^2 + y^2 = 81$ Β. $x^2 + y^2 = 3$ Γ. $x^2 + y^2 = 9$
Δ. $(x - 3)^2 + y^2 = 81$ Ε. $(x - 3)^2 + y^2 = 49$
7. ** Ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο $(1, 2)$ και εφάπτεται στον άξονα των $x'x$, έχει εξίσωση
Α. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$ Β. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$
Γ. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ Δ. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$
Ε. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$
8. ** Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ στο σημείο $(2, 1)$ είναι παράλληλη στην ευθεία
Α. $x - 2y + 1 = 0$ Β. $2x + 3y + 7 = 0$ Γ. $x + 2y = 4$
Δ. $4x + 2y + 1 = 0$ Ε. $y = x$
9. ** Ο κύκλος $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \rho^2$ εφάπτεται του άξονα $x'x$. Η τιμή του ρ είναι
Α. 1 Β. 2 Γ. 3 Δ. 5
Ε. καμία από τις προηγούμενες
10. * Ο κύκλος $x^2 + y^2 - 6x - 8y + \kappa^2 - 2\kappa + 1 = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η τιμή του κ είναι
Α. 4 Β. 3 Γ. 2 Δ. 1 Ε. 0

11. ** Ο κύκλος που έχει κέντρο το $(x_0, 0)$, εφάπτεται στον άξονα $y'y$ ($x_0 \neq \rho$).
Η εξίσωσή του είναι
Α. $(x - x_0)^2 + y^2 = x_0^2$ Β. $x^2 + y^2 = x_0^2$ Γ. $(x - x_0)^2 + y^2 = \rho^2$
Δ. $(x - \rho)^2 + y^2 = \rho$ Ε. $(x - x_0)^2 + y^2 = x_0$
12. ** Ο κύκλος $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$ (α, β, ρ θετικοί) εφάπτεται στους δύο θετικούς ημιάξονες Ox, Oy , όταν
Α. $\alpha = \beta \neq \rho$ Β. $\alpha \neq \beta = \rho$ Γ. $\alpha > \beta$
Δ. $\alpha = \rho = \beta$ Ε. κανένα από τα προηγούμενα
13. ** Ο κύκλος που έχει εξίσωση την $(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2$
Α. διέρχεται από το σημείο $A(\alpha, \alpha)$
Β. διέρχεται από το σημείο $A(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha})$
Γ. έχει το κέντρο του στην $y = x + 1$
Δ. έχει το κέντρο του στην ευθεία $y = -x$
Ε. εφάπτεται στους άξονες $x'x$ και $y'y$
14. ** Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις $C_1: (x - \alpha)^2 + y^2 = \alpha^2$ και $C_2: x^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2$ ($\alpha \neq 0$).
Α. Η απόσταση των κέντρων τους είναι 2α
Β. Η απόσταση των κέντρων τους είναι $|\alpha|\sqrt{2}$
Γ. Η απόσταση των κέντρων τους είναι $2\alpha^2$
Δ. Το κέντρο του C_1 είναι εσωτερικό του C_2
Ε. Το κέντρο του C_2 βρίσκεται πάνω στον C_1
15. ** Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει πάντα κύκλο, όταν
Α. $A^2 + B^2 - 4\Gamma$ είναι τέλειο τετράγωνο Β. $|A| + |B| \neq 0$
Γ. $A^2 + B^2 > 4\Gamma$ Δ. $4A^2 + 4B^2 - \Gamma < 0$
Ε. $A^2 + B^2 < 4\Gamma$
16. ** Ο κύκλος $x^2 + y^2 + x = 0$
Α. εφάπτεται στον $x'x$ Β. εφάπτεται στον $y'y$
Γ. τέμνει τον $y'y$ σε δύο σημεία Δ. δεν τέμνει κανένα άξονα
Ε. εφάπτεται και στους δύο άξονες
17. ** Ο κύκλος $x^2 + y^2 - 2\alpha(x + y) = -\alpha^2$, $\alpha > 0$ έχει κέντρο
Α. (α, α) Β. $(2\alpha, \alpha)$ Γ. $(\frac{\alpha}{2}, 2\alpha)$ Δ. $(\alpha, -2\alpha)$ Ε. (α^2, α)
18. ** Δίνεται το σημείο $A(\frac{1}{2}\eta\mu\theta, \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$.
Α. Το σημείο A ανήκει στον κύκλο, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$
Β. Το σημείο A ανήκει στον κύκλο, αν $\theta \in (0, \pi)$
Γ. Το σημείο A βρίσκεται έξω από τον κύκλο

Δ. Το σημείο Α βρίσκεται μέσα στον κύκλο

Ε. Το σημείο Α βρίσκεται άλλοτε μέσα και άλλοτε έξω από τον κύκλο

19. ** Η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Κ (- 1, - 2) και περνά από το σημείο (2, 2), είναι

Α. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$

Β. $x^2 + y^2 + 2x + 2y = - 3$

Γ. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$

Δ. $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 3$

Ε. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$

20. ** Η εξίσωση του ημικυκλίου του διπλανού σχήματος είναι

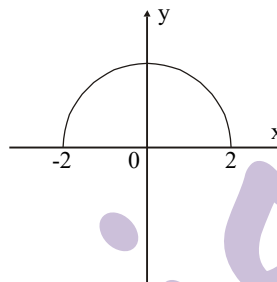
Α. $x^2 + y^2 = 2$

Β. $x^2 + y^2 = 4$

Γ. $y = \sqrt{4 - x^2}$

Δ. $x = \sqrt{4 - y^2}$

Ε. $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$



21. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5$ και το σημείο του Μ (- 1, 2). Η εφαπτομένη του στο Μ έχει εξίσωση

Α. $2x - y = 5$

Β. $- x - 2y = 5$

Γ. $x + 2y - 5 = 0$

Δ. $x - 2y + 5 = 0$

Ε. $2x + y = 5$

22. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 3$ και το σημείο του Μ ($+\sqrt{2}$, - 1). Η εφαπτομένη στο Μ είναι

Α. $-\sqrt{2}x + y - 3 = 0$

Β. $\sqrt{2}x - y - 3 = 0$

Γ. $x - y = 3$

Δ. $\sqrt{2}x + y = 3$

Ε. $- x + \sqrt{2}y = 3$

23. ** Η παραβολή που έχει εστία Ε (0, 4) και κορυφή το Ο (0, 0), έχει εξίσωση

Α. $y^2 = 8x$

Β. $y^2 = - 8x$

Γ. $y^2 = 16x$

Δ. $x^2 = 16y$

Ε. $x^2 = 8y$

24. ** Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 16x$ στο σημείο (1, 4) είναι παράλληλη στην ευθεία

Α. $y = x$

Β. $y = - x$

Γ. $y = 2x + 1$

Δ. $y = x + 2$

Ε. $4y = x$

25. * Τα κοινά σημεία της παραβολής $y^2 = 8x$ και της ευθείας $x - y = 0$ είναι

Α. (0, 0) και (1, 1)

Β. (8, 8) και (2, 1)

Γ. (0, 0) και (8, 8)

Δ. (1, $\sqrt{8}$) και (- 1, $\sqrt{8}$)

Ε. (2, 4) και (4, 2)

26. ** Το σημείο Α (κ, 4) ανήκει στην παραβολή $y^2 = 8x$. Το συμμετρικό σημείο Α' του Α ως προς τον άξονα x'x είναι

Α. (4, 4)

Β. (- 4, 4)

Γ. (2, 4)

Δ. (2, - 4)

Ε. (2, - 2)

27. ** Μια παραβολή με κορυφή το Ο (0, 0) έχει διευθετούσα την $x = \frac{3}{2}$.

Η παραβολή αυτή έχει εξίσωση

Α. $y^2 = 6x$

Β. $y^2 = - 6x$

Γ. $y^2 = 3x$

Δ. $x^2 = - 6y$

Ε. $x^2 = - 3y$

28. ** Η εξίσωση $y = ax^2$, $a \neq 0$ παριστάνει παραβολή

A. της μορφής $y^2 = 2px$ με $p = \frac{\alpha}{2}$

B. της μορφής $y^2 = 2px$ με $p = 2\alpha$

Γ. η οποία βρίσκεται στο δεύτερο και τρίτο τεταρτημόριο

Δ. της μορφής $x^2 = 2py$ με $p = \frac{\alpha}{2}$

Ε. με άξονα συμμετρίας τον $y'y$

29. ** Η εξίσωση $y^2 = 4ax$

A. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $a > 0$

B. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $a = \frac{1}{2} p$ ($p > 0$)

Γ. παριστάνει παραβολή για κάθε $a \neq 0$

Δ. παριστάνει παραβολή για κάθε a πραγματικό αριθμό

Ε. παριστάνει παραβολή μόνο όταν a ρητός

30. ** Οι παραβολές $y^2 = ax$ και $x^2 = ay$ ($a \neq 0$)

A. έχουν ένα μόνο κοινό σημείο

B. εφάπτονται στο $O(0, 0)$

Γ. έχουν ένα ή δύο κοινά σημεία ανάλογα με το a

Δ. έχουν πάντα δύο κοινά σημεία

Ε. υπάρχει τιμή του a για την οποία δεν τέμνονται

31. * Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης

A. $\lambda = \frac{p}{y_1}$ B. $\lambda = \frac{2p}{y_1}$ Γ. $\lambda = \frac{y_1}{p}$ Δ. $\lambda = \frac{y_1}{2p}$ Ε. $\lambda = 2p$

32. ** Οι εφαπτόμενες της παραβολής $y^2 = 2px$ στα σημεία (x_1, y_1) και $(x_1, -y_1)$

A. είναι παράλληλες

B. είναι πάντα κάθετες

Γ. τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$

Δ. τέμνονται σε σημείο του άξονα $x'x$

Ε. σχηματίζουν πάντα οξεία γωνία

33. ** Η εξίσωση $y^2 = 16|x|$

A. παριστάνει μια παραβολή

B. παριστάνει δύο παραβολές

Γ. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $x > 0$

Δ. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $x < 0$

Ε. παριστάνει δύο ευθείες

34. ** Το σημείο A (2, 4) της παραβολής $y^2 = 8x$ απέχει από τη διευθετούσα απόσταση

A. 2 B. 4 Γ. 8 Δ. 16 Ε. $\sqrt{8}$

35. * Αν E' , E οι εστίες μιας έλλειψης με μεγάλο άξονα μήκους $2a$ και A τυχόν σημείο της έλλειψης, τότε
A. $(AE') - (AE) = a$ **B.** $(AE') + (AE) = a$ **Γ.** $(AE') = (AE)$
Δ. $(AE') + (AE) = 2a$ **Ε.** $(AE') - (AE) = 2a$

36. ** Η απόσταση του κέντρου της έλλειψης $\frac{25x^2}{9} + 4y^2 = 1$ από τη μια εστία της είναι

A. $\frac{7}{6}$ **B.** $\frac{\sqrt{11}}{10}$ **Γ.** $\frac{\sqrt{11}}{5}$ **Δ.** $\frac{5}{2}$ **Ε.** $\frac{4}{3}$

37. ** Η εξίσωση της έλλειψης που έχει εστίες $E'(0, -2)$ και $E(0, 2)$ και μικρό άξονα 10, είναι

A. $\frac{x^2}{29} + \frac{y^2}{25} = 1$ **B.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$ **Γ.** $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$
Δ. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{29} = 1$ **Ε.** $2x^2 - 2y^2 = 10$

38. ** Από τις παρακάτω ελλείψεις με εστίες στον άξονα $y'y$ και κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, έχει εστιακή απόσταση 6 η

A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ **B.** $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$ **Γ.** $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$
Δ. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{8} = 1$ **Ε.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

39. * Έστω η έλλειψη $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με εστιακή απόσταση 2γ και μεγάλο άξονα $2a$. Τότε θα είναι πάντα

A. $\alpha > \beta > \gamma$ **B.** $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$ **Γ.** $0 < \alpha < \beta$
Δ. $\gamma > \alpha$ **Ε.** $\gamma < \alpha$

40. ** Η έλλειψη που έχει την ίδια εκκεντρότητα με την $C: \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$, είναι

A. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ **B.** $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ **Γ.** $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1$
Δ. $\frac{y^2}{4^2} + \frac{x^2}{3^2} = 1$ **Ε.** $\frac{4x^2}{3^2} + \frac{4y^2}{5^2} = 1$

41. * Η έλλειψη $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ έχει μια εστία στο σημείο

A. $(2, 3)$ **B.** $(0, \sqrt{2})$ **Γ.** $(\sqrt{3}, 0)$ **Δ.** $(-1, 0)$ **Ε.** $(0, -1)$

42. ** Οι ελλείψεις $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ έχουν

A. δύο μόνο κοινά σημεία **B.** τέσσερα κοινά σημεία

Γ. ένα μόνο κοινό σημείο

Δ. κανένα κοινό σημείο

Ε. άπειρα κοινά σημεία

43. ** Η εξίσωση $\beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2$ $\alpha, \beta \neq 0$

Α. παριστάνει πάντα μία έλλειψη

Β. παριστάνει πάντα έναν κύκλο

Γ. παριστάνει δύο τεμνόμενες ευθείες

Δ. παριστάνει μία έλλειψη, αν $\alpha \neq \beta$

Ε. παριστάνει μία έλλειψη, αν $\alpha = \beta$

44. ** Η έλλειψη $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ είναι όμοια με την

Α. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

Β. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1$

Γ. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Δ. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

Ε. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

45. ** Μια από τις ελλείψεις με εστίες τα σημεία $E' (-2, 0)$ και $E (2, 0)$ είναι και η

Α. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$

Β. $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

Γ. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

Δ. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Ε. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} = 1$

46. ** Δίνεται η έλλειψη C: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$ και το σημείο της M $(-\sqrt{5}, 0)$.

Η εφαπτομένη της στο M θα είναι

Α. $\sqrt{5}y - 5 = 0$

Β. $+\sqrt{5}x + 5 = 0$

Γ. $\sqrt{5}x - 15 = 0$

Δ. $-\sqrt{5}x + y - 15 = 0$

Ε. $3\sqrt{5}x - 15 = 0$

47. ** Δίνεται η έλλειψη C: $\frac{x^2}{2} + y^2 = 2$ και το σημείο της M $(\sqrt{2}, -1)$.

Η εφαπτομένη της στο M θα έχει εξίσωση

Α. $x - \sqrt{2}y = 4$

Β. $\sqrt{2}x - 2y - 4 = 0$

Γ. $\sqrt{2}x + 2y = 4$

Δ. $x - 2y - 4 = 0$

Ε. $-\sqrt{2}x - 2y = 4$

48. * Μια ασύμπτωτη της υπερβολής $16x^2 - 25y^2 = 400$ είναι

Α. $y = \frac{5}{4}x$

Β. $y = \frac{4}{5}x$

Γ. $y = \frac{16}{25}x$

Δ. $y = \frac{25}{16}x$

Ε. καμία από τις προηγούμενες

49. ** Η εξίσωση της υπερβολής που έχει εστιακή απόσταση $2\gamma = 8$ και εκκεντρότητα $\frac{4}{3}$ είναι
- Α. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ Β. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ Γ. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$
- Δ. $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$ Ε. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
50. ** Μια υπερβολή έχει εξίσωση C: $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$. Τότε
- Α. η C έχει τις εστίες της στον άξονα $y'y$
- Β. έχει ασύμπτωτες τις $y = \pm \frac{4}{3}x$
- Γ. έχει εστίες $E'(-5, 0)$, $E(5, 0)$
- Δ. είναι $\alpha = 3$ και $\beta = 4$
- Ε. έχει κορυφές $A'(-3, 0)$, $A(3, 0)$
51. ** Οι υπερβολές $C_1: \beta^2x^2 - \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$ και $C_2: \alpha^2y^2 - \beta^2x^2 = \alpha^2\beta^2$ ($\alpha \neq \beta$) έχουν
- Α. την ίδια εκκεντρότητα Β. τις ίδιες εστίες
- Γ. την ίδια εστιακή απόσταση Δ. διαφορετικές ασύμπτωτες
- Ε. τις ίδιες κορυφές
52. ** Η υπερβολή $C_1: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και η έλλειψη $C_2: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχουν
- Α. την ίδια εστιακή απόσταση
- Β. τις ίδιες εστίες
- Γ. την ίδια εκκεντρότητα
- Δ. δύο από τις κορυφές της C_2 ταυτίζονται με τις κορυφές της C_1
- Ε. τέσσερα κοινά σημεία
53. ** Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και ένα σημείο της $M_1(x_1, y_1)$.
- Η εφαπτομένη της στο M_1 θα έχει εξίσωση
- Α. $\frac{x_1^2}{\alpha^2} - \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1$ Β. $\frac{xx_1}{\beta^2} - \frac{yy_1}{\alpha^2} = 1$ Γ. $\beta^2x_1x - \alpha^2y_1y = \alpha^2\beta^2$
- Δ. $\alpha^2x_1x - \beta^2y_1y = 1$ Ε. $xx_1 - yy_1 = 1$
54. ** Η εξίσωση $kx^2 + \lambda y^2 = \mu$ με $k, \lambda, \mu \neq 0$ παριστάνει πάντα υπερβολή με
- Α. $\mu = 1$ Β. $k\lambda < 0$ Γ. $\mu < 0$ Δ. $k \neq \lambda$ Ε. $k = \mu$ ή $\lambda = \mu$
55. ** Οι υπερβολές $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = -1$ ($\alpha \neq \beta$) έχουν
- Α. την ίδια εκκεντρότητα Β. τις ίδιες ασύμπτωτες

Γ. τις ίδιες εστίες

Δ. τις ίδιες κορυφές

Ε. μία μόνο κοινή εστία

56. ** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{16x^2 - 144}$

($x \geq 3$ ή $x \leq -3$) είναι

Α. κύκλος με ακτίνα $\rho = 12$

Β. έλλειψη με $a = 3$ και $b = 4$

Γ. υπερβολή με εστίες $(-5, 0), (5, 0)$

Δ. τα δύο άνω τμήματα υπερβολής με εστίες $(-5, 0), (5, 0)$

Ε. παραβολή με διευθετούσα $x = -\frac{5}{4}$

57. ** Τα σημεία $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει: $|(AM) - (BM)| = 6$ με $A(-5, 0)$ και $B(5, 0)$

Α. ανήκουν στην έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

Β. ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$

Γ. ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

Δ. ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$

Ε. ανήκουν στην υπερβολή $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

58. * Δίνεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = 3$ και το σημείο της $M(-2, 1)$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της στο M είναι

Α. $x - 2y = 3$

Β. $2x + y = 3$

Γ. $-2x + y = 3$

Δ. $2x + y + 3 = 0$

Ε. $2x - y + 3 = 0$

59. * Ένα σημείο της υπερβολής $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1$ είναι το $M(1, 2)$. Η εφαπτομένη της στο M έχει εξίσωση

Α. $x + y + 1 = 0$

Β. $2x - y = 2$

Γ. $x - 2y + 2 = 0$

Δ. $2x - y = -2$

Ε. $x - y + 1 = 0$

1. ** Σε κάθε κύκλο της στήλης Α του πίνακα (I) να αντιστοιχίσετε την εφαπτομένη του στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II). Το σημείο επαφής είναι το (x_0, y_0) .

Πίνακας (I)

στήλη Α κύκλος	στήλη Β εφαπτόμενη ευθεία
1. $x^2 + y^2 = 1$ (0, 1)	Α. $y = 0$ Β. $x + 4(y + 2) = 5$ Γ. $y = 1$
2. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ (2, 0)	Δ. $y = x$ Ε. $3x + 4y = 25$ Ζ. $x - 2y = 1$
3. $x^2 + y^2 = 25$ (3, 4)	
4. $x^2 + (y + 2)^2 = 5$ (1, 2)	

Πίνακας (II)

1	2	3	4

2. ** Σε κάθε κύκλο της στήλης Α του πίνακα (I) να αντιστοιχίσετε το κέντρο Κ και την ακτίνα του ρ που βρίσκονται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α κύκλος	στήλη Β κέντρο - ακτίνα
1. $x^2 + y^2 - \sqrt{\alpha} = 0 \quad \alpha > 0$	A. $K(\alpha, 1) \quad \rho = \frac{\alpha}{2}$
2. $x^2 + y^2 - 2x + 2\alpha y = -\alpha^2$	B. $K(-1, \frac{3}{2}) \quad \rho = \frac{3}{2}$
3. $(x + \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = 2\alpha x + 2\alpha^2, \alpha \neq 0$	Γ. $K(0, 0) \quad \rho = \sqrt[4]{\alpha}$
4. $2x^2 + 2y^2 + 4x - 6y = -2$	Δ. $K(\alpha, \alpha) \quad \rho = \alpha $
	E. $K(1, -\alpha) \quad \rho = 1$
	Z. $K(0, \alpha) \quad \rho = \alpha $

Πίνακας (II)

1	2	3	4

3. ** Να αντιστοιχίσετε κάθε παραβολή της στήλης Α του πίνακα (Ι) με την εστία της στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α παραβολή	στήλη Β εστία
1. $y^2 = px$	Α. $(-\frac{p}{2}, 0)$
2. $x^2 = py$	Β. $(\frac{p}{8}, 0)$
3. $y^2 = -2px$	Γ. $(\frac{p}{4}, 0)$
4. $y^2 = \frac{p}{2} x$	Δ. $(0, \frac{p}{2})$
	Ε. $(0, \frac{p}{4})$
	Ζ. $(0, -\frac{p}{2})$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4

4. ** Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2x$. Σε κάθε σημείο της στήλης Α του πίνακα (I) να αντιστοιχίσετε την εφαπτομένη της παραβολής σ' αυτό το σημείο που γράφεται στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α σημείο	στήλη Β εφαπτομένη παραβολής
1. (0, 0)	Α. $y = x + \frac{1}{2}$
2. $(\frac{1}{2}, 1)$	Β. ο άξονας $y'y$
3. $(\frac{1}{2}, -1)$	Γ. $-2y = x + 2$
4. (2, 2)	Δ. $y = x - 2$
	Ε. $-y = x + \frac{1}{2}$
	Ζ. $2y = x + 2$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

5. ** Στη στήλη Α του πίνακα (I) δίνεται σε κάθε γραμμή η εστία Ε και η διευθετούσα δ μιας παραβολής, της οποίας η εξίσωση γράφεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α εστία - διευθετούσα	στήλη Β εξίσωση παραβολής
1. Ε (- 2, 0) και δ: $x - 2 = 0$	Α. $x^2 = 16y$
2. Ε (0, 4) και δ: $y + 4 = 0$	Β. $y^2 = - 8x$
3. Ε (3, 0) και δ: $x + 3 = 0$	Γ. $y^2 = 8x$
	Δ. $y^2 = 12x$
	Ε. $x^2 = - 16y$

Πίνακας (II)

1	2	3

6. ** Στη στήλη Α δίνεται σε κάθε γραμμή η εξίσωση μιας παραβολής που έχει εστία Ε και διευθετούσα δ, που γράφονται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

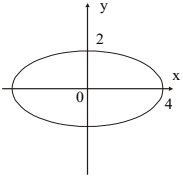
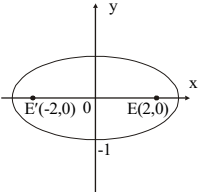
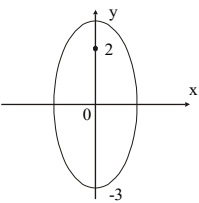
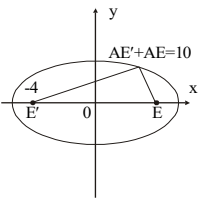
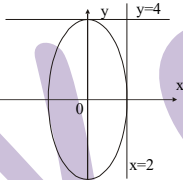
στήλη Α	στήλη Β
1. $y^2 = x$	Α. Ε (- 1, 0) και δ: $x + 1 = 0$ Β. Ε ($\frac{1}{4}$, 0) και δ: $x + \frac{1}{4} = 0$
2. $y^2 = - 4x$	Γ. Ε (- 5, 1) και δ: $x + 1 = 0$ Δ. Ε (- 1, 0) και δ: $x - 1 = 0$
3. $x^2 = 20y$	Ε. Ε (0, 5) και δ: $y + 5 = 0$

Πίνακας (II)

1	2	3

7. ** Να αντιστοιχίσετε σε κάθε έλλειψη της στήλης Α του πίνακα (Ι) την εξίσωσή της στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (ΙΙ).

Πίνακας (Ι)

στήλη Α - έλλειψη	στήλη Β - εξίσωση έλλειψης
1. 	A) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$
2. 	B) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$
3. 	Γ) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$
4. 	Δ) $x^2 + 5y^2 = 5$ E) $x^2 + 2y^2 = 1$
5. 	ΣΤ) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Πίνακας (ΙΙ)

1	2	3	4	5

8. ** Κάθε κωνική της στήλης Α του πίνακα (I) έχει εξίσωση που βρίσκεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α είδος κωνικής	στήλη Β εξίσωση γραμμής
1. κύκλος	Α. $x + y = 1$
2. παραβολή	Β. $x^2 + y^2 = 0$
3. έλλειψη	Γ. $x^2 = 9 - (y - 1)^2$
4. υπερβολή	Δ. $9x^2 = 63 + 7y^2$
	Ε. $y^2 - 16x = 0$
	Ζ. $4x^2 = 100 - 25y^2$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

9. ** Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση υπερβολής της στήλης Α του πίνακα (I) με τις ασύμπτωτές της στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α εξίσωση υπερβολής	στήλη Β εξισώσεις ασυμπτώτων
1. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$	Α. $y = \pm x$
2. $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{3} = 1$	Β. $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} x$
3. $6x^2 - 5y^2 = 30$	Γ. $y = \pm 2x$
4. $x^2 - y^2 = 4$	Δ. $y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} x$
	Ε. $y = \pm \frac{\sqrt{5} \sqrt{6}}{5} .x$
	Ζ. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} x$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

10. ** Σε κάθε γραμμή της στήλης Α γράφεται η εξίσωση μιας κωνικής, η οποία έχει εκκεντρότητα που γράφεται στη στήλη Β. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία των δύο στηλών, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

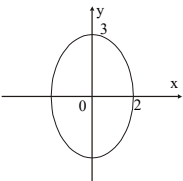
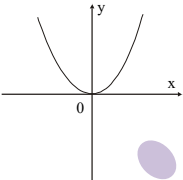
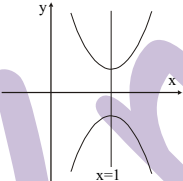
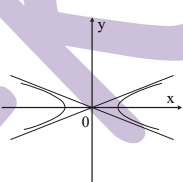
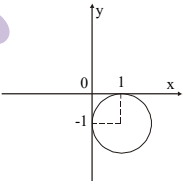
στήλη Α εξίσωση κωνικής	στήλη Β εκκεντρότητα
1. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$	Α. $\sqrt{3}$
	Β. $\frac{\sqrt{13}}{3}$
2. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$	Γ. $\frac{\sqrt{5}}{3}$
	Δ. $-\sqrt{13}$
3. $4x^2 + 9y^2 = 36$	Ε. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Πίνακας (II)

1	2	3

11. ** Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α του πίνακα (I) με την αντίστοιχη γραφική παράσταση της στήλης Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α	στήλη Β
1) $x^2 = 4y$	Α) 
2) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$	Β) 
3) $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1$	Γ) 
	Δ) 
	Ε) 

Πίνακας (II)

1	2	3

12. ** Σε κάθε υπερβολή της στήλης Α να αντιστοιχίσετε την εξίσωση μιας ασύμπτωτής της στη στήλη Β, συμπληρώνοντας τον πίνακα (II).

Πίνακας (I)

στήλη Α υπερβολή	στήλη Β ασύμπτωτη υπερβολής
1. $x^2 - y^2 = a^2$	A. $\sqrt{2} x - y = 0$
2. $2x^2 - y^2 = 4$	B. $3x - 4y = 0$
3. $(x - 2y)(x + 2y) = 4$	Γ. $y = x$
4. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$	Δ. $4x - 3y = 0$
	E. $2x - y = 0$
	Z. $x + 2y = 0$

Πίνακας (II)

1	2	3	4

ρωτήσεις διάταξης

1. Να γράψετε τους παρακάτω κύκλους C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 σε μια σειρά, έτσι ώστε καθένας να έχει από τον προηγούμενό του μεγαλύτερη ακτίνα:

$$C_1: x^2 + y^2 = 4$$

$$C_2: x^2 + 2x + y^2 = 9$$

$$C_3: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$

$$C_4: 4x^2 + 4y^2 = 7$$

$$C_5: x^2 + (y - 2)^2 = 6$$

2. Να γράψετε τις παρακάτω παραβολές C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 σε μια σειρά, έτσι ώστε καθεμία να έχει από τον προηγούμενη της μεγαλύτερη παράμετρο:

$$C_1: y^2 = 4x$$

$$C_2: y^2 = \frac{1}{4} x$$

$$C_3: y^2 = -6x$$

$$C_4: y^2 = \sqrt{2} x$$

$$C_5: x = 2y^2$$

3. Να γράψετε τα σημεία A (0, 3), B (2, 0), Γ (2, 2), Δ (0, 0) και E (2, - 2) σε μια σειρά, έτσι ώστε καθένα από το προηγούμενό του να έχει μεγαλύτερη απόσταση από την ασύμπτωτη της υπερβολής $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, που βρίσκεται στην πρώτη και τρίτη γωνία των αξόνων.

4. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 8x$ και τα σημεία A (2, 0), B (- 1, 0), Γ (0, 4), Δ (- 5, 1), E (- 2, 2), τα οποία απέχουν από τη διευθετούσα της παραβολής αποστάσεις $d_A, d_B, d_\Gamma, d_\Delta, d_E$ αντιστοίχως.

Να γράψετε σε μια σειρά τις αποστάσεις $d_A, d_B, d_\Gamma, d_\Delta, d_E$, έτσι ώστε καθεμιά να είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη της.

5. Να γραφούν οι παρακάτω κωνικές σε μια σειρά, έτσι ώστε καθεμιά να έχει μεγαλύτερη εκκεντρότητα από την προηγούμενη της.

$$C_1: x^2 + 4y^2 = 4 \quad C_2: 4x^2 + 9y^2 = 36 \quad C_3: x^2 - 4y^2 = 4$$

$$C_4: 4x^2 - 9y^2 = 36 \quad C_5: x^2 - y^2 = 1$$

Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση κύκλου	κέντρο κύκλου	ακτίνα κύκλου	σημεία τομής κύκλου με άξονα x'x	σημεία τομής κύκλου με άξονα y'y
$x^2 + (y - 4)^2 = 1$				
$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$				
$x^2 + y^2 = 9$				
$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$				

2. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση κωνικής	γραφή της κωνικής σε μια απ' τις μορφές: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2, \quad y^2 = 2px$ $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$	χαρακτηρισμός κωνικής (κύκλος, παραβολή, έλλειψη, υπερβολή)
$4x^2 = 36 + 9y^2$		
$x^2 - 4x + y^2 + 6y + 4 = 0$		
$9x^2 = 1 - 25y^2$		
$y^2 - 12x = 0$		

3. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση παραβολής	συντεταγμένες εστίας	εξίσωση διευθε- τούσας	άξονας συμμετρί- ας
$y^2 = 6x$			
$y^2 = -6x$			

4. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση έλλειψης	συντεταγμένες εστιών	συντεταγμένες κορυφών	εκκεντρότητα
$4x^2 + 9y^2 = 36$			
$x^2 + 4y^2 = 16$			

5. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

εξίσωση υπερβολής	συντεταγμένες εστιών	εκκεντρότητα	εξισώσεις ασυμ- πτώτων
$x^2 - 9y^2 = 9$			
$x^2 - y^2 - 4 = 0$			

1. ** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
- α) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $2\sqrt{2}$
 - β) έχει κέντρο το σημείο $(3, -1)$ και ακτίνα 5
 - γ) έχει κέντρο το σημείο $(-2, 1)$ και διέρχεται από το σημείο $(-2, 3)$
 - δ) έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB με A $(1, 3)$ και B $(-3, 5)$
 - ε) διέρχεται από τα σημεία $(2, 1)$, $(1, 2)$ και $(-2, -1)$
 - στ) διέρχεται από τα σημεία $(3, 1)$, $(-1, 3)$ και έχει κέντρο πάνω στην ευθεία $y = 3x - 2$
 - ζ) έχει κέντρο το σημείο $(8, -6)$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων
 - η) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας $3x + y = 10$
 - θ) έχει ακτίνα 4, εφάπτεται στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $(5, 4)$
 - ι) έχει κέντρο το σημείο $(-3, 2)$, εφάπτεται στον άξονα $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $(-6, 2)$
 - ια) έχει κέντρο το σημείο $(3, 3)$ και εφάπτεται των αξόνων $x'x$ και $y'y$
 - ιβ) έχει κέντρο το σημείο $(-3, 1)$ και εφάπτεται στην ευθεία $4x - 3y + 5 = 0$
2. ** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο $(1, 0)$ και εφάπτεται στις ευθείες $3x + y + 6 = 0$ και $3x + y - 12 = 0$.
3. ** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, ο οποίος είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο που σχηματίζει η ευθεία $x + y - 6 = 0$ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
4. ** Δίνεται η ευθεία $y = \lambda x$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η ευθεία:
- α) να τέμνει τον κύκλο
 - β) να εφάπτεται του κύκλου
 - γ) να μην έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.
5. ** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το κέντρο του κύκλου $x^2 - 2x + y^2 - 6x = 0$ και είναι κάθετη στην ευθεία $x + 2y - 7 = 0$.
6. ** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $x + y = 0$.
7. ** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 9$ που γράφονται από το σημείο $(0, 6)$.
8. ** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στην ευθεία $y = x$ και είναι ομόκεντρος του κύκλου $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.
9. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ και η ευθεία $y = x - 3$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία εφάπτεται του κύκλου και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής.
10. ** Δίνονται τα σημεία A $(1, 2)$, B $(2, 4)$ και Γ $(3, 1)$.
- α) Να αποδειχθεί ότι: $\angle B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$

β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ.

11. ** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A (3α, 0), B (0, 3α) και Γ (0, - 3α), $\alpha > 0$.
12. ** Να αποδειχθεί ότι το σύνολο των σημείων M (x, y) του επιπέδου που ικανοποιούν τις εξισώσεις $\chi\sigma\upsilon\nu\theta - \gamma\eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu 2\theta$ και $\chi\eta\mu\theta + \gamma\sigma\upsilon\nu\theta = \eta\mu 2\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, βρίσκονται σε κύκλο.
13. ** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του στην ευθεία (ε): $2x + y + 1 = 0$ και διέρχεται από τα σημεία A (- 1, 2) και B (3, - 1).
14. ** Να αποδειχθεί ότι οι κύκλοι $C_1: (x - 2)^2 + y^2 = 4$ και $C_2: x^2 - 2x + y^2 = 0$ εφάπτονται εσωτερικά.
15. ** Να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ομόκεντροι οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$.
16. ** Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M (x, y) του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων από τα A, B, Γ με A (1, - 1), B (- 1, 2), Γ (0, 2) είναι σταθερό c, είναι κύκλος με κέντρο το βαρύκεντρο του τριγώνου ABΓ (για κατάλληλο c).
17. ** Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x = 0$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα αυτών των κύκλων.
18. ** Θεωρούμε τον κύκλο C: $x^2 + y^2 + 4y = 0$ και το σημείο A (- 1, - 1). Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που ορίζει στον κύκλο χορδή, με μέσο το σημείο A.
19. ** Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το (0, 0) στις παρακάτω περιπτώσεις:
 - α) είναι συμμετρική ως προς το θετικό ημιάξονα Ox και έχει παράμετρο $p = 5$
 - β) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Ox και διέρχεται από το σημείο (- 1, 4)
 - γ) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Oy και διέρχεται από το σημείο (2, 2)
 - δ) έχει άξονα συμμετρίας τον Oy και εστία E (0, - 4)
 - ε) έχει εστία E (- 2, 0) και διευθετούσα δ: $x - 2 = 0$
 - στ) έχει άξονα συμμετρίας τον Ox και εφάπτεται της ευθείας $y = 4x + 1$
20. ** Να βρεθεί η σχετική θέση της ευθείας $x + y + 1 = 0$ ως προς την παραβολή $y^2 = 2x$.
21. ** Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής $y^2 = 3x$ στα σημεία (0, 0) και (12, 6).
22. ** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 3x$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $2x - y + 1999 = 0$.
23. ** Από το σημείο (- 2, 3) προς την παραβολή $y^2 = 8x$ γράφονται δύο εφαπτόμενες ευθείες.
 - α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων αυτών ευθειών.

β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές ευθείες είναι κάθετες.

24. ** Έστω η παραβολή $y^2 = 4px$, $p > 0$. Μια χορδή της AB είναι κάθετη στον άξονα και έχει μήκος $8p$. Να αποδειχθεί ότι $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.
25. ** Ισόπλευρο τρίγωνο OAB είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $y^2 = 4px$ με κορυφή το O. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.
26. ** Έστω η παραβολή C: $y^2 = 2px$ και μια χορδή της AB παράλληλη με τον άξονα $y'y$, η οποία περνάει από την εστία. Να αποδειχθεί ότι:
 α) $(AB) = 2(EK)$, όπου K το σημείο που τέμνει ο άξονας $x'x$ τη διευθετούσα
 β) οι εφαπτόμενες στα A και B διέρχονται από το K
27. ** Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 2px$ και δύο χορδές OB, OG, ώστε γωνία $BOG = 90^\circ$. Να αποδειχθεί ότι η BG διέρχεται από σταθερό σημείο.
28. ** Δίνεται η παραβολή $2y^2 = x$.
 α) Να βρεθούν η εστία και η διευθετούσα της.
 β) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου της A (2, 1) από την εστία E και να συγκριθεί με την απόσταση (OE).
 γ) Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραβολή το σημείο της με τη μικρότερη απόσταση από την εστία είναι η κορυφή της O.
 δ) Να βρεθεί σημείο στην παραβολή $y^2 = 2px$ που να απέχει από την εστία E απόσταση διπλάσια της OE.
29. ** Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και η ευθεία (ε): $y = x - 1$.
 α) Να δείξετε ότι η (ε) περνά από την εστία της παραβολής.
 β) Να βρείτε τα κοινά σημεία A, B της (ε) και της παραβολής.
 γ) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία A, B είναι κάθετες.
 δ) Να δείξετε ότι κάθε ευθεία που περνά από την εστία και τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία έχει την ιδιότητα (γ).
30. ** Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$. Θέτουμε $x' = ax$ και $y' = ay$, $a \neq 0$. Να αποδειχθεί ότι το σημείο (x', y') κινείται πάλι σε παραβολή.
31. ** Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $(x, y) = (2pk^2, 2pk)$ με $k \in \mathbb{R}$.
 α) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε μια παραβολή
 β) Αν $A(2pk_1^2, 2pk_1)$, $B(2pk_2^2, 2pk_2)$ είναι δύο σημεία της παραβολής αυτής, να αποδειχθεί ότι αν η AB διέρχεται από την εστία, είναι $4k_1k_2 = -1$.
32. ** Αν (ε) είναι η εφαπτομένη της έλλειψης C: $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ στο $M_1(x_1, y_1)$, να αποδείξετε ότι η κάθετη στην (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{x_1}{y_1}$.

33. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 2$ και η παραβολή $y^2 = 8x$.
 α) Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες του κύκλου και της παραβολής.
 β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.
34. ** Δίνεται σταθερό σημείο A και ευθεία (ε) που δεν διέρχεται από το A. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το A και εφάπτονται στην (ε), είναι παραβολή.
35. ** Να γραφεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει μεγάλο και μικρό άξονα με μήκος 6 και 4 μονάδες αντίστοιχως και έχει εστίες πάνω στον άξονα x'x συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων.
36. ** Να βρεθεί η εκκεντρότητα και οι εστίες καθεμιάς από τις παρακάτω ελλείψεις:
 α) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$
 β) $4x^2 + 9y^2 = 36$
 γ) $9x^2 + 25y^2 = 225$
37. ** Να εξετάσετε αν υπάρχει έλλειψη στην οποία ένα σημείο της M να σχηματίζει με τις εστίες E' και E ισόπλευρο τρίγωνο.
38. ** Ο κύκλος με κέντρο το O (0, 0) και ακτίνα β διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ με $a > b$. Να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης.
39. ** Δίνεται η έλλειψη C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Να αποδείξετε ότι και η έλλειψη με εξίσωση $\frac{\kappa^2 x^2}{a^2} + \frac{\kappa^2 y^2}{b^2} = 1$ έχει την ίδια εκκεντρότητα με τη C.
40. ** Να συγκριθούν οι εκκεντρότητες των ελλείψεων C₁: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ και C₂: $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = 1$, με $a > b$.
41. ** Να βρεθεί η μορφή της εξίσωσης της έλλειψης με εκκεντρότητα $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
42. ** Θεωρούμε την υπερβολή C: $x^2 - y^2 = 1$ και την ευθεία (ε): $x + 2y = a$. Να βρεθούν οι τιμές του a, για τις οποίες η (ε) εφάπτεται στη C.
43. ** Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$.
 α) Να δείξετε ότι το σημείο $(1, -\sqrt{3})$ είναι κοινό τους σημείο και στη συνέχεια να βρείτε όλα τα κοινά σημεία.
 β) Να δείξετε ότι τα κοινά τους σημεία είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

γ) Να βρεθούν τα σημεία $M(x_0, y_0)$ ώστε $x_0^2 + y_0^2 = 4$ και $(E'M) + (EM) = 2\sqrt{6}$ (E', E οι εστίες της έλλειψης).

44. ** Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης $9x^2 + 16y^2 = 144$ που είναι:

- α) παράλληλες προς την ευθεία $(\epsilon): x + y = 0$
- β) κάθετες στην ευθεία (ϵ) .

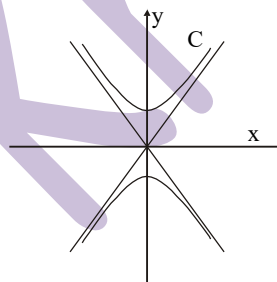
45. ** Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $E'BEB'$ είναι ρόμβος (E', E οι εστίες, B, B' τα άκρα του μικρού άξονα)
- β) Να βρεθεί το εμβαδόν του ρόμβου.

46. ** Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$ διέρχεται από τις κορυφές της υπερβολής C του διπλανού σχήματος, της οποίας η μια ασύμπτωτη έχει εξίσωση

$$y = -\frac{4}{3}x. \text{ Να βρεθούν:}$$

- α) οι εστίες της υπερβολής
- β) η εστιακή της απόσταση
- γ) η εξίσωσή της
- δ) να προσδιοριστεί το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής
- ε) η εκκεντρότητά της.



47. ** Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις εστίες της στον άξονα $x'x$ συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων και ακόμα:

- α) έχει εστιακή απόσταση $(E'E) = 6$ και εκκεντρότητα $e = \frac{3}{2}$
- β) έχει εστιακή απόσταση $(E'E) = 20$ και εξισώσεις ασυμπτώτων $y = \frac{4}{3}x$ και $y = -\frac{4}{3}x$.
- γ) έχει εστιακή απόσταση $(E'E) = 4$ και ασύμπτωτες τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων.

48. ** Έστω η υπερβολή $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ναδειχθεί ότι κάθε παράλληλη προς μια ασύμπτωτη τέμνει την υπερβολή σ' ένα μόνο σημείο.

49. ** Έστω M τυχαίο σημείο της υπερβολής $y^2 - x^2 = a^2$, (ϵ) η εφαπτομένη στο M και A, B τα σημεία που η (ϵ) τέμνει τις ασύμπτωτες. Τότε το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι σταθερό.

50. ** Έστω κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = a^2$. Αν θέσουμε $x = x'$ και $y = cy'$, να αποδείξετε ότι το σημείο (x', y') ανήκει σε έλλειψη.

51. ** Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $M(x_1, y_1)$ ένα σημείο της διαφορετικό από τις κορυφές της.

Αν η κάθετη (ε') της (ε) στο M τέμνει τους άξονες $x'x, y'y$ στα Γ και Δ αντίστοιχα (ε η εφαπτόμενη στο M)

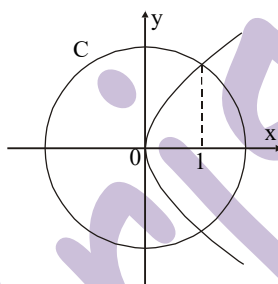
α) να βρεθεί συναρτήσει των x_1, y_1 η εξίσωση της (ε')

β) να βρεθούν οι συντεταγμένες των Γ και Δ

γ) να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου N του $\Gamma\Delta$

δ) να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος του N είναι μια υπερβολή C_1

ε) να αποδειχθεί ότι οι υπερβολές C και C_1 έχουν τις ίδιες εκκεντρότητες, αλλά τις εστίες σε διαφορετικούς άξονες.



52. ** Ο κύκλος του διπλανού σχήματος διέρχεται από την εστία της παραβολής. Να βρεθούν οι εξισώσεις του κύκλου και της παραβολής.

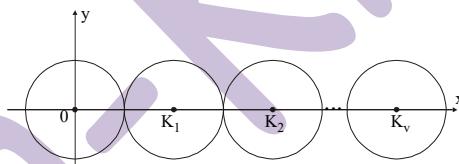
53. ** Στο διπλανό σχήμα ο πρώτος κύκλος C_0 έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$ και όλοι οι κύκλοι είναι ίσοι. Να βρεθούν:

α) οι εξισώσεις των κύκλων

$C_1, C_2, \dots, C_n$ (συναρτήσει του ρ)

β) το άθροισμα των αποστάσεων των κέντρων $K_1, K_2, \dots, K_n$ από το κέντρο O

γ) οι κοινές εφαπτόμενες όλων των κύκλων.

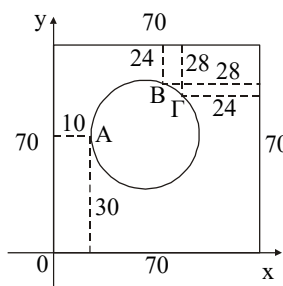


54. ** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ και την ευθεία $y = 2$.

55. ** Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $25x^2 - 4y^2 = 100$ που είναι παράλληλες προς την ευθεία $3x - y = 0$.

56. Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

57. ** Σε μια τετράγωνη πλατεία πλευράς 70 m, υπάρχει μια μικρή τεχνητή λίμνη κυκλικού σχήματος. Προκειμένου να βρεθεί η ακτίνα της λίμνης, τρεις μαθητές επέλεξαν τρία τυχαία σημεία της περιφέρειάς της A, B, Γ και μέτρησαν τις αποστάσεις τους από τις πλευρές της πλατείας, όπως δείχνει το σχήμα.



- α) Στο σύστημα αξόνων Οxy να τοποθετήσετε τα σημεία Α, Β, Γ. Να θεωρήσετε ότι η απόσταση 1 στους άξονες αντιστοιχεί σε 10 m.
- β) Να υποθέσετε ότι η λίμνη έχει αντίστοιχο σχήμα στους άξονες τον κύκλο $x^2 + y^2 + κx + λy + μ = 0$ πάνω στον οποίο βρίσκονται τα Α, Β, Γ. Να υπολογίσετε τα κ, λ, μ.
- γ) Να βρείτε την ακτίνα της λίμνης.

58. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 = 1$ και $C_2: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

- α) Να δείξετε ότι δεν έχουν κοινό σημείο.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της διακέντρου.
- γ) Από όλα τα ζεύγη σημείων (Α, Β), όπου το Α ανήκει στον C_1 και το Β στον C_2 , να βρεθεί αυτό για το οποίο τα Α, Β απέχουν τη μικρότερη απόσταση.
- δ) Να βρεθεί το ζεύγος σημείων (Γ, Δ) (το Γ στον C_1 , το Δ στον C_2) με τη μεγαλύτερη απόσταση.

59. Δίνονται τα σημεία Α (-2, 0), Β (2, 0) και $M_1 (1, \sqrt{3})$.

- α) Να δείξετε ότι $M_1A \perp M_1B$.
- β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που περνά από τα σημεία Α, Β, M_1 .
- γ) Να δείξετε ότι το σημείο $M_2 (-1, \sqrt{3})$ ανήκει στον κύκλο και $M_2A \perp M_2B$.
- δ) Να δείξετε ότι κάθε σημείο Μ (x_0, y_0) για το οποίο ισχύει $MA \perp MB$, ανήκει στον κύκλο του ερωτήματος (β).

60. Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με κλάδους C_1 και C_2 και τυχαίο σημείο της Μ (x_1, y_1) στον κλάδο C_1 ($y_1 \neq 0$).

- α) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτόμενης (ε) στο σημείο Μ και να βρείτε τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες.
- β) Να δείξετε ότι η (ε) τέμνει τον $x'x$ σε σημείο μεταξύ των κορυφών της υπερβολής.
- γ) Με δεδομένο ότι η (ε) τέμνει τον κλάδο C_2 στο $M' (x_2, y_2)$, να δείξετε ότι $y_1 \cdot y_2 < 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 3ο:

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό - Λάθος”

1.	Σ	20.	Σ	39.	Λ	58.	Σ
2.	Σ	21.	Λ	40.	Σ	59.	Σ
3.	Σ	22.	Σ	41.	Σ	60.	Λ
4.	Λ	23.	Λ	42.	Σ	61.	Λ
5.	Σ	24.	Λ	43.	Σ	62.	Σ
6.	Σ	25.	Λ	44.	Λ	63.	Σ
7.	Λ	26.	Σ	45.	Λ	64.	Σ
8.	Λ	27.	Λ	46.	Λ	65.	Σ
9.	Σ	28.	Λ	47.	Σ	66.	Λ
10.	Σ	29.	Σ	48.	Λ	67.	Λ
11.	Λ	30.	Σ	49.	Σ	68.	Σ
12.	Σ	31.	Σ	50.	Σ	69.	Λ
13.	Λ	32.	Σ	51.	Λ	70.	Λ
14.	Λ	33.	Λ	52.	Λ	71.	Σ
15.	Σ	34.	Σ	53.	Λ	72.	Λ
16.	Λ	35.	Σ	54.	Λ	73.	Σ
17.	Σ	36.	Σ	55.	Σ		
18.	Λ	37.	Σ	56.	Λ		
19.	Σ	38.	Σ	57.	Λ		

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	B
2.	Δ
3.	B
4.	A
5.	E
6.	Δ
7.	Γ
8.	Δ
9.	B
10.	Δ
11.	A
12.	Δ
13.	E
14.	B
15.	Γ

16.	B
17.	A
18.	Δ
19.	E
20.	Γ
21.	Δ
22.	B
23.	Δ
24.	Γ
25.	Γ
26.	Δ
27.	B
28.	E
29.	Γ
30.	Δ

31.	A
32.	Δ
33.	B
34.	B
35.	Δ
36.	B
37.	A
38.	E
39.	E
40.	E
41.	E
42.	B
43.	Δ
44.	Δ
45.	A

46.	B
47.	B
48.	B
49.	B
50.	Γ
51.	Γ
52.	Δ
53.	Γ
54.	B
55.	B
56.	Δ
57.	E
58.	Δ
59.	E

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	Γ
2	A
3	E
4	B

2.

1	Γ
2	E
3	ΣΤ
4	B

3.

1	Γ
2	E
3	A
4	B

4.

1	B
2	A
3	E
4	ΣΤ

5.

1	B
2	A
3	Δ

6.

1	B
2	Δ
3	E

7.

1	Γ
2	Δ
3	A
4	ΣΤ
5	B

8.

1	Γ
2	E
3	ΣΤ
4	Δ

9.

1	Δ
2	B
3	E
4	A

10.

1	E
2	B
3	Γ

11.

1	B
2	E
3	A

12.

1	Γ
2	A
3	ΣΤ
4	Δ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις διάταξης

1. C_4, C_1, C_5, C_3, C_2

2. C_3, C_2, C_5, C_4, C_1

3. Δ, Γ, B, A, E

4. $d_E, d_B, d_\Gamma, d_\Delta, d_A$

5. C_2, C_1, C_3, C_4, C_5

Απαντήσεις - υποδείξεις στις ερωτήσεις ανάπτυξης

1. α) $x^2 + y^2 = 8$

β) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$

γ) $(x + 2)^2 + (x - 1)^2 = 4$

δ) Έχει κέντρο το μέσο $M(-1, 4)$ του AB και ακτίνα $\frac{1}{2}(AB)$,

άρα $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 5$

ε) Ο κύκλος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 5$

στ) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$

ζ) $(x - 8)^2 + (y + 6)^2 = 100$

η) Πρέπει να ισχύει $\rho = d(O, \varepsilon) = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$, άρα ο κύκλος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 10$

θ) Ο κύκλος έχει εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - 4)^2 = 16$, το $(5, 4)$ ανήκει στον κύκλο και προκύπτει $x_0 = 9$ ή $x_0 = 1$

ι) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$

ια) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

ιβ) $\rho = d(A, \varepsilon) = \frac{10}{5} = 2$

2. Οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες, η μεσοπαράλληλη θα έχει εξίσωση $(\varepsilon): y = -3x + 3$ (αφού $\varepsilon_1: y = -3x - 6$ και $\varepsilon_2: y = -3x + 12$), το κέντρο $K(x_0, y_0)$ ανήκει στην (ε) , άρα $y_0 = -3x_0 + 3$. Η απόσταση μεταξύ των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι

$\frac{18}{\sqrt{10}}$, άρα $\rho = \frac{9}{\sqrt{10}}$ και αφού το $(1, 0)$ ανήκει στον κύκλο θα ισχύει: $(1 - x_0)^2 + y_0^2 = \frac{81}{10}$, οπότε υπολογίζονται τα x_0, y_0 ($x_0 = 1,8, y_0 = -2,4$)

3. Το κέντρο K έχει συντεταγμένες x_0, y_0 με $x_0 = y_0$ και $d(K, \varepsilon) = \rho = x_0$ (λόγω επαφής με τους άξονες), άρα $\frac{|2x_0 - 6|}{\sqrt{2}} = x_0$, άρα $x_0 = 6\sqrt{2}$
4. Από το σύστημα των εξισώσεων της ευθείας και του κύκλου προκύπτει η εξίσωση $(\lambda^2 + 1)x^2 - 4x + 1 = 0$ με $\Delta = -4(\lambda^2 - 3)$
- α) Θα πρέπει $\Delta > 0$, άρα $-\sqrt{3} < \lambda < \sqrt{3}$
- β) Πρέπει $\Delta = 0$, άρα $\lambda = \sqrt{3}$ ή $\lambda = -\sqrt{3}$
- γ) Πρέπει $\Delta < 0$, άρα $\lambda < -\sqrt{3}$ ή $\lambda > \sqrt{3}$
5. Το κέντρο είναι το $K(1, 3)$. Το $\lambda_\varepsilon = -\frac{1}{2}$, άρα η ζητούμενη έχει εξίσωση $y - 3 = 2(x - 1)$
6. Κάθε ευθεία έχει $\lambda = -1$ και η (ε_1) τέμνει τον $x'x$ στο $(0, 4\sqrt{2})$, η ε_2 τον $x'x$ στο $(0, -4\sqrt{2})$, άρα $\varepsilon_1: y - 4\sqrt{2} = -x$ και $\varepsilon_2: y + 4\sqrt{2} = -x$
7. Αν (x_0, y_0) σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη έχει εξίσωση $(\varepsilon): x_0x + y_0y = 9$, το $(0, 6)$ ανήκει στην (ε) , άρα $y_0 = \frac{3}{2}$, οπότε $x_0 = \pm \frac{5}{2}$, άρα οι εφαπτόμενες είναι $(\varepsilon_1): \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}y = 9$ και $(\varepsilon_2): -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}y = 9$
8. Το κέντρο του δοσμένου κύκλου είναι $K(1, -2)$ και $\rho = d(K, \varepsilon)$ όπου $\varepsilon: y - x = 0$, άρα $\rho = \frac{3}{\sqrt{2}}$
9. Το σύστημα των δύο εξισώσεων δίνει την $x^2 - 4x + 4 = 0$, $\Delta = 0$, άρα η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο στο $(2, -1)$
10. α) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$
β) Το $AB\Gamma$ τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο A , άρα το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου βρίσκεται στο μέσον $M(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ του $B\Gamma$ και $\rho = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$
11. Προφανώς το κέντρο είναι το $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 3a$
12. Το κοινό σημείο των ευθειών είναι το M (συνθ, ημθ) για το οποίο ισχύει $x^2 + y^2 = 1$, άρα το M ανήκει σε μοναδιαίο κύκλο
13. Αν $K(x_0, y_0)$ το κέντρο, τότε $2x_0 + y_0 + 1 = 0$ (1)
Ακόμη το K ανήκει στη μεσοκάθετη του AB , δηλαδή στην $(\varepsilon'): y - \frac{1}{2} = \frac{4}{3}(x - 1)$, άρα $y_0 = \frac{4}{3}x_0 - \frac{5}{6}$ (2)
Το σύστημα των (1), (2) δίνει τα x_0, y_0 . Η απόσταση KA είναι η ακτίνα
14. Τα κέντρα των κύκλων $K_1(2, 0)$ και $K_2(1, 0)$ και οι ακτίνες $\rho_1 = 2$ και $\rho_2 = 1$. Παρατηρούμε $K_1K_2 = 1$ και $\rho_2 - \rho_1 = 1$
15. $A_1 = A_2$ και $B_1 = B_2$

16. $(MA)^2 + (MB)^2 + (MG)^2 = c$, άρα $3x^2 + 3y^2 - 6y + 11 - c = 0$ ή

$$x^2 + y^2 - 2y + \frac{11-c}{3} = 0.$$

Για κατάλληλο c είναι κύκλος με κέντρο $K(0, 1)$ που είναι το κέντρο βάρους του $AB\Gamma$

17. Η εξίσωση γράφεται $(x + \frac{\lambda}{2})^2 + y^2 = \frac{\lambda^2}{4}$, άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-\frac{\lambda}{2}, 0)$ που ανήκει πάνω στον άξονα $x'x$

18. Αν $K(0, -2)$ το κέντρο του κύκλου τότε η ζητούμενη ευθεία (ε) είναι κάθετη στην KA . $\lambda_{AK} = -1$, άρα $\lambda_{\varepsilon} = 1$ οπότε $(\varepsilon): y + 1 = 1(x + 1)$ ή $y = x$

19. α) $y^2 = 10x$

β) $y^2 = 2\rho x$ με $-2\rho = 16$, άρα $\rho = -8$

γ) $x^2 = 2\rho y$ με $4 = 4\rho$, άρα $\rho = 1$

δ) $x^2 = 2\rho y$ με $\rho = -8$

ε) $y^2 = 2\rho x$ με $\rho = -4$

στ) Το σύστημα των $y^2 = 2\rho x$ και $y = 4x + 1$ δίνει την $16x^2 + (8 - 2\rho)x + 1 = 0$. Πρέπει $\Delta = 0$, άρα $(8 - 2\rho)^2 = 64$, άρα $\rho = 8$

20. Το σύστημα των δύο εξισώσεων είναι αδύνατο.

21. Η εξίσωση της εφαπτομένης: $y_0 y = \frac{3}{2}(x + x_0)$

Για $x_0 = 0, y_0 = 0$ προκύπτει $x = 0$, δηλαδή ο άξονας $y'y$

Για $x_0 = 12, y_0 = 6$ προκύπτει η άλλη εφαπτομένη

22. Αν (x_0, y_0) το σημείο επαφής της εφαπτομένης (ε) , τότε $\lambda_{\varepsilon} = \frac{\rho}{y_0} = \frac{3}{2y_0}$, όμως $\lambda_{\varepsilon} = 2$, άρα $y_0 = \frac{3}{4}$ και $x_0 = \frac{9}{12}$

23. α) Αν $M(x_0, y_0)$ σημείο επαφής, τότε το $K(-2, 3)$ ανήκει στην $y_0 y = 4(x + x_0)$, δηλαδή $4x_0 - 3y_0 = 8$, όμως $y_0^2 = 8x_0$. Το σύστημα δίνει τα σημεία επαφής $A(8, 8)$ και $B(\frac{1}{2}, -2)$

β) $\lambda_{AK} = \frac{1}{2}$ και $\lambda_{BK} = -2$

24. Η τεταγμένη του A είναι $y_A = 4\rho$, άρα $x_A = 4\rho$. Όμοια $x_B = 4\rho$ και $y_B = -4\rho$, άρα $OA \perp OB$

25. Αν $A(x_0, 2\sqrt{\rho x_0})$, τότε $B(x_0, -2\sqrt{\rho x_0})$, και $OA = OB = 4\sqrt{\rho x_0}$, άρα $4\sqrt{\rho x_0} = \sqrt{\rho x_0^2 + 4\rho x_0}$ ή $x_0 = 12\rho$, άρα $y_0 = 4\rho\sqrt{3}$ ή $-4\rho\sqrt{3}$

26. α) $EA = d(A, \delta) = KE$ εξ ορισμού (δ η διευθετούσα), άρα $AB = 2KE$

β) Το A έχει συντεταγμένες $(\frac{\rho}{2}, \rho)$ και η εφαπτομένη στο A έχει εξίσωση $(\varepsilon): \rho y = \rho(x + \frac{\rho}{2})$. Προφανώς

το σημείο $(-\frac{\rho}{2}, 0)$ ανήκει στην (ε) . Για την εφαπτομένη στο B όμοια

27. Αν η OB έχει εξίσωση $y = \lambda x$, $\lambda > 0$, τότε η ΟΓ έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{\lambda} x$. Τα σημεία Β, Γ έχουν συντεταγμένες $(\frac{2\rho}{\lambda^2}, \frac{2\rho}{\lambda})$ και $(2\rho\lambda^2, 2\rho\lambda)$ η εξίσωση της ΒΓ: $(\frac{1}{\lambda} + \lambda)x + (\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2})y - (\frac{2\rho}{\lambda} + 2\rho\lambda) = 0$ ή $x - (\lambda + \frac{1}{\lambda})y - 2\rho = 0$ που περνά από το σημείο $(2\rho, 0)$ για κάθε λ
28. α) $E(\frac{1}{8}, 0)$
 β) $(AE) > (OE)$
 γ) Αν $y^2 = 2\rho x$ η παραβολή με $\rho > 0$ και $A(x_0, \sqrt{2\rho x_0})$ τυχόν σημείο της, τότε $(AE) > \frac{\rho}{2} = OE$
 δ) Πρέπει $AE = \rho$, άρα $A(\frac{\rho}{2}, \rho)$
29. α) $E(1, 0)$ που ανήκει στην (ε)
 β) Η λύση του συστήματος δίνει $A(3 + 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$, $B(3 - 2\sqrt{2}, 2 - 2\sqrt{2})$
 γ) Αν $\varepsilon_A, \varepsilon_B$ οι εφαπτομένες, τότε $\lambda_{\varepsilon_A} = \frac{2}{2 + 2\sqrt{2}}$, $\lambda_{\varepsilon_B} = \frac{2}{2 - 2\sqrt{2}}$, που έχουν γινόμενο - 1
 δ) Έστω $A(\frac{y_1^2}{2\rho}, y_1)$, $B(\frac{y_2^2}{2\rho}, y_2)$, τα δύο σημεία, τότε τα Α, Β, Ε είναι συνευθειακά και προκύπτει
- $$\frac{\rho}{y_1} \cdot \frac{\rho}{y_2} = -1$$
30. $x = \frac{x'}{\alpha}$, $y = \frac{y'}{\alpha}$ και $y^2 = 2\rho x$, άρα $(y')^2 = 2\alpha\rho x'$
31. α) Αν $x = 2\rho\kappa^2$ και $y = 2\rho\kappa$, τότε $y^2 = 2\rho x$
 β) Τα σημεία Α, Β, Ε είναι συνευθειακά με $E(\frac{\rho}{2}, 0)$
32. Η εφαπτομένη (ε) στο M_1 είναι η $\alpha^2 x_1 x + \beta^2 y_1 y = \alpha_2 \beta_2$ και έχει $\lambda_{\varepsilon} = \frac{-\alpha^2 x_1}{\beta^2 y_1}$
33. α) Έστω $A(x_1 y_1)$ το σημείο επαφής της παραβολής. Τότε η εφαπτομένη ε_1 έχει εξίσωση $4x - y_1 y + 4x_1 = 0$. Πρέπει $d(0, \varepsilon_1) = \sqrt{2}$, άρα $x_1 = 2$ και $y_1 = 4$. Η εφαπτομένη ε_2 έχει σημείο επαφής $(2, -4)$ λόγω συμμετρίας
 β) Οι συντελεστές διεύθυνσης είναι 1 και - 1 αντίστοιχα
34. Η απόσταση του κέντρου ενός τυχόντος κύκλου από το Α είναι ίση με την απόσταση από την (ε) , άρα ισχύει ο ορισμός της παραβολής
35. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 4$
36. α) $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $E(\sqrt{3}, 0)$
 β) $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$ και $E(\sqrt{5}, 0)$

$$\gamma) \varepsilon = \frac{4}{5} \text{ και } E(4, 0)$$

$$37. \text{ Θα πρέπει } ME = ME' = EE' \quad (1)$$

Όμως εξ ορισμού $ME + ME' = 2a$ και $2\gamma = EE'$, άρα θα έπρεπε $2a = 2\gamma$, άτοπο

$$38. \text{ Ισχύει } \gamma = \beta \text{ και } a^2 = \beta^2 + \gamma^2, \text{ άρα } a = \sqrt{2} \gamma \text{ και } \varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$39. \text{ Η δεύτερη έλλειψη γράφεται } \frac{x^2}{\frac{a^2}{\kappa^2}} + \frac{y^2}{\frac{\beta^2}{\kappa^2}} = 1 \text{ και έχει } \varepsilon = \frac{\sqrt{\frac{a^2}{\kappa^2} - \frac{\beta^2}{\kappa^2}}}{\frac{a}{\kappa}} = \frac{\gamma}{a}$$

$$40. \varepsilon_1^2 = 1 - \left(\frac{\beta}{a}\right)^2 \text{ και } \varepsilon_2^2 = 1 - \left(\frac{\beta}{a}\right)^4 = \varepsilon_1^2 = \left[1 + \left(\frac{\beta}{a}\right)^2\right], \text{ άρα } \varepsilon_2 > \varepsilon_1$$

$$41. \frac{\gamma}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ άρα } \gamma^2 = \frac{a^2}{2} \text{ ή } a^2 - \beta^2 = \frac{a^2}{2}, \text{ άρα } \beta^2 = \frac{a^2}{2}. \text{ Επομένως η έλλειψη έχει μορφή } \frac{x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{a^2} = 1$$

$$43. \alpha) \text{ Η συμμετρία οδηγεί στον υπολογισμό των άλλων σημείων } (-1, -\sqrt{3}), (1, \sqrt{3}), (-1, \sqrt{3})$$

$\gamma)$ Τα σημεία Μ ανήκουν σε κύκλο με εξίσωση: $x^2 + y^2 = 4$ και στην έλλειψη $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$, άρα είναι τα σημεία του ερωτήματος (α)

$$44. \text{ Αν } M(x_1, y_1) \text{ σημείο επαφής, τότε η ευθεία } 9x_1x + 16y_1y = 144 \text{ έχει } \lambda = -1, \text{ άρα } \frac{9x_1}{16y_1} = 1 \text{ και } 9x_1^2 + 16y_1^2 = 144. \text{ Άρα } x_1 = \pm \frac{16}{5}, \text{ άρα } y_1 = \pm \frac{9}{5}$$

$$45. \alpha) \text{ Η μια διαγώνιος του τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης}$$

$$\beta) E = \frac{2\gamma \cdot 2\beta}{2}$$

$$46. \text{ Η υπερβολή έχει εξίσωση } \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \text{ με ασύμπτωτες τις } y = -\frac{a}{\beta}x \text{ και}$$

$$y = \frac{a}{\beta}x. \text{ Αφού } a = 4, \text{ άρα } \beta = 3, \text{ οπότε } \gamma = 5, \text{ άρα:}$$

$$\alpha) E_1(0, 5) \ E_2(0, -5)$$

$$\beta) E_1E_2 = 10$$

$$\gamma) \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

$$\varepsilon) \varepsilon = \frac{5}{4}$$

$$47. \alpha) E'(-3, 0) \ E(3, 0), \text{ άρα } \gamma = 3 \text{ και } a = 2 \text{ και η εξίσωσή της } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

$$\beta) \gamma = 10, \frac{\beta}{a} = \frac{4}{3} \text{ και } a^2 + \beta^2 = 100, \text{ άρα } a = 6 \text{ και } \beta = 8$$

$$\gamma) \gamma = 2, a = \beta \text{ και } a^2 + \beta^2 = 4, \text{ άρα } a = \beta = \sqrt{2}$$

48. Η παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y = -\frac{\beta}{\alpha}x$ έχει εξίσωση $y = -\frac{\beta}{\alpha}x + c$, η οποία αν θεωρηθεί σαν σύστημα με την εξίσωση της υπερβολής δίνει πρωτοβάθμια εξίσωση ως προς x

49. Αν (x_0, y_0) σημείο επαφής τότε

το σύστημα $\begin{cases} x_0x - y_0y = \alpha^2 \\ y = x \end{cases}$ έχει λύση $A\left(\frac{\alpha^2}{x_0 - y_0}, \frac{\alpha^2}{x_0 - y_0}\right)$ ενώ

το σύστημα $\begin{cases} x_0x - y_0y = \alpha^2 \\ y = -x \end{cases}$ έχει λύση $B\left(\frac{\alpha^2}{x_0 + y_0}, \frac{-\alpha^2}{x_0 - y_0}\right)$

και το εμβαδόν του OAB είναι α^2

50. $(x')^2 + c^2(y')^2 = \alpha^2$, που είναι εξίσωση έλλειψης

51. α) Η ϵ έχει $\lambda_\epsilon = \frac{\beta^2 x_1}{\alpha^2 y_1}$, άρα η ϵ' έχει εξίσωση: $y - y_1 = -\frac{\alpha^2 y_1}{\beta^2 x_1}(x - x_1)$

β) Για $y = 0$, $x = x_1\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} + 1\right) = x_1 \epsilon^2$

Για $x = 0$, $y = y_1\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 1\right) = y_1 \frac{\gamma^2}{\beta^2}$

γ) Το μέσο $M(x, y)$ έχει $x = \frac{x_1}{2} \epsilon^2$ και $y = \frac{y_1}{2} \frac{\gamma^2}{\beta^2}$

δ) $x_1 = \frac{2x}{\epsilon^2}$, $y_1 = \frac{2y\beta^2}{\gamma^2}$ ενώ $\frac{x_1^2}{\alpha^2} - \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1$, άρα $\frac{x^2}{\gamma^4} - \frac{y^2}{4\beta^2} = 1$, που είναι εξίσωση της υπερβολής

ε) $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$

ε) $\epsilon_1^2 = 1 + \frac{B^2}{A^2} = 1 + \frac{4\beta^2}{4\alpha^2} = \epsilon^2$

52. Αρκεί να βρεθεί το ρ . Ο κύκλος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \frac{\rho^2}{4}$ και η παραβολή $y^2 = 2\rho x$, $\rho > 0$. Το σύστημα

δίνει την εξίσωση $x^2 + 2\rho x - \frac{\rho^2}{4} = 0$, που έχει ρίζα $x = 1$ (λόγω του σχήματος), άρα $-\frac{\rho^2}{4} + 2\rho + 1 = 0$,

άρα $\rho = 4 + 2\sqrt{5}$

53. α) $c_1: (x - 2\rho)^2 + y^2 = \rho^2$ $c_2: (x - 4\rho)^2 + y^2 = \rho^2$ $c_k: (x - 2v\rho)^2 + y^2 = \rho^2$

β) $2\rho + 4\rho + \dots + 2v\rho = v(v+1)\rho$

γ) $y = \rho$, $y = -\rho$

54. Οι ασύμπτωτες έχουν εξισώσεις $(\epsilon_1): y = \frac{3}{4}x$ και $(\epsilon_2): y = -\frac{3}{4}x$. Τα σημεία τομής των ϵ_1, ϵ_2 με την $y =$

$2: A\left(\frac{8}{3}, 2\right)$, $B\left(-\frac{8}{3}, 2\right)$. Στο τρίγωνο AOB : $(AB) = \frac{16}{3}$ και το ύψος $v = 2$, άρα $(AOB) = \frac{16}{3}$

55. Αν (x_1, y_1) σημείο επαφής, τότε η εφαπτομένη $25x_1x - 4y_1y = 100$ έχει $\lambda = \frac{25x_1}{4y_1} = 3$ (1) ενώ $25x_1^2 - 4y_1^2 = 100$ (2). Το σύστημα των (1), (2) δίνει τα σημεία επαφής

56. Οι εστίες της έλλειψης $E' (-3, 0)$ και $E (3, 0)$, άρα για την υπερβολή ισχύει $a = b$ και $\gamma = 3$, ενώ $a^2 + b^2 = \gamma^2$, άρα $a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ και η υπερβολή έχει εξίσωση $x^2 - y^2 = \frac{9}{2}$

57. $A (1, 3), B (4, 2), \Gamma (4, 6), \Delta (4, 2)$ και το σύστημα:

$$\kappa + 3\lambda + \mu = -10$$

$$4,6\kappa + 4,2\lambda + \mu = -38,8$$

$$4,2\kappa + 4,6\lambda + \mu = -38,8$$

έχει λύσεις $\kappa = -6, \lambda = -6, \mu = 14$, άρα $\rho = 2$

58. α) αδύνατο σύστημα

β) η OK με $O (0, 0), K (3, 2)$

γ), δ) A, B, Γ, Δ τα σημεία τομής της OK με τους κύκλους

59. α) $\overrightarrow{M_1A} \cdot \overrightarrow{M_1B} = 0$

β) $x^2 + y^2 = 4$

γ) απλό

δ) ναδειχθεί ότι $x_0^2 + y_0^2 = 4$ (δεκτή και η γεωμετρική απόδειξη)

60. α) Τα σημεία τομής με τους άξονες $A (\frac{a^2}{x_1}, 0), B (0, -\frac{b^2}{y_1})$

β) $\frac{x_1^2}{a^2} = 1 + \frac{y_1^2}{b^2}$ άρα $\frac{x_1^2}{a^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{a^2}{x_1^2} < 1$ άρα $-1 < \frac{a}{x_1} < 1$,

άρα $-a < \frac{a^2}{x_1} < a$, άρα το A βρίσκεται μεταξύ των κορυφών

γ) Λόγω του (β), αν $y_1 > 0$, τότε $y_2 < 0$ και αντίστροφα

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και:
 - α) έχει ακτίνα $\rho = 3$.
 - β) διέρχεται από το σημείο $A(-3, 4)$.
 - γ) εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon: 3x + 4y - 10 = 0$
2. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 25$. Να βρείτε:
 - α) την εξίσωση της χορδής του κύκλου C που έχει μέσον το σημείο $A(2, 4)$
 - β) το μήκος της παραπάνω χορδής.
3. Να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = 25$ στο σημείο του:
 - i) $A(3, 4)$ ii) $A(-4, \mu), \mu > 0$.
4. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, ο οποίος:
 - α) έχει κέντρο το σημείο $K(2, -3)$ και ακτίνα 4,
 - β) έχει κέντρο το σημείο $K(3, -2)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{7}$
 - γ) έχει κέντρο $K(-8, 2)$ και διέρχεται από το σημείο $A(4, -3)$,
 - δ) έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(-6, 14)$ και $B(2, 8)$,
 - ε) έχει διάμετρο το τμήμα AB με άκρα τα σημεία $A(1, -2)$ και $B(-5, 6)$
 - στ) έχει κέντρο $K(3, 1)$ και εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: 4x - 3y + 6 = 0$.
5. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1 που είναι ομόκεντρος με τον κύκλο C_2 :
 $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 7$ και εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon: 4x - 3y + 2 = 0$.
6. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon_1: 4x + 3y = 12$ στο σημείο $A(3, 0)$ και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία $\varepsilon_2: y = x - 1$.
7. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-5, -1)$, $B(1, -3)$ και $\Gamma(7, 3)$. Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$. Ομοίως για τα σημεία $A(-3, 1)$, $B(5, 5)$ και $\Gamma(2, -4)$.
8. Δίνεται κύκλος C , ο οποίος διέρχεται από τα σημεία $A(-2, 3)$ και $B(2, 5)$ και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y + 5 = 0$. Να βρείτε:
 - α) την εξίσωση του κύκλου C ,
 - β) τις ευθείες που είναι παράλληλες στην ε και ο κύκλος C ορίζει πάνω σε αυτές χορδή μήκος 6,
 - γ) το μήκος της χορδής που έχει μέσο το σημείο $M(-1, 3)$.
9. Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ και τα σημεία $A(-6, 4)$, $B(2, 3)$ και $\Gamma(4, 5)$. Να βρείτε:
 - α) το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C ,
 - β) τη σχετική θέση των σημείων A , B και Γ ως προς τον κύκλο C .
10. Να βρείτε τι παριστάνει καθεμιά από τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$	β) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$
γ) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$	δ) $x^2 + y^2 - 4y + 10 = 0$
ε) $4x^2 + 4y^2 + 4x - 12y - 15 = 0$	στ) $9x^2 + 9y^2 + 12x - 6y + 4 = 0$

11. Δίνεται η εξίσωση $(2x-1)^2 + 2y(2y+1) = 0$, (1). Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C και μετά να βρείτε το κέντρο του K και την ακτίνα του ρ.
12. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 4\lambda y + 5\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$
 α) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο.
 β) Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση (1) βρίσκονται σε ευθεία.
13. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\eta\mu\theta \cdot x - 2\sigma\upsilon\nu\theta \cdot y + \eta\mu\theta - 3 = 0$ (1), $\theta \in \mathbb{R}$
 α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε τιμή του θ.
 β) Να δείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων, ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο.
14. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x - (2\lambda + 10)y + 5\lambda + 15 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$
 α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 β) Να γράψετε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του παραπάνω κύκλου συναρτήσει του λ.
 γ) να αποδείξετε ότι καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, τα κέντρα των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση (1) ανήκουν σε μια ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
 δ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να βρείτε.
 ε) Να βρείτε το λ, ώστε το κέντρο του κύκλου που ορίζεται από την εξίσωση (1), να ανήκει στην ευθεία ζ: $3x - y + 15 = 0$.
 στ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ο κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) έχει ακτίνα ίση με 5.
15. Δίνεται ο κύκλος $C : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$ και οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x - 4y + 18 = 0$ και $\varepsilon_2 : 2x - y - 8 = 0$
 α) Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου C με καθεμία από τις ευθείες ε_1 και ε_2 .
 β) Να βρείτε τα κοινά σημεία του κύκλου C με όποια από τις ευθείες ε_1 και ε_2 τον τέμνει.
 γ) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία ζ: $\alpha x - y + \alpha + 2 = 0$ να εφάπτεται στον κύκλο C.
16. Δίνεται το σημείο K(-1, 3).
 α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο K και εφάπτεται:
 i) στον άξονα x'x, ii) στον άξονα y'y,
 β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στους άξονες x'x και y'y και έχει κέντρο το σημείο Λ που ανήκει στο 4^ο τεταρτημόριο και για το οποίο ισχύει $|\overrightarrow{KL}| = 2\sqrt{5}$.
17. Δίνονται οι κύκλοι: $C_1 : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$ και $C_2 : (x+1)^2 + y^2 = 9$.
 α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε του κύκλου C_1 στο σημείο του A(-1, 5).
 β) Να αποδείξετε ότι η ε εφάπτεται και του κύκλου C_2 .
18. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $C : (x-1)^2 + y^2 = 2$, που είναι παράλληλη στην ευθεία ζ: $y = x + 1$.
19. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 = 25$. Να βρείτε:
 α) την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο του A(-4, 3),

- β) τις εξισώσεις της εφαπτομένης του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία
 $\zeta: 4x - 3y + 2021 = 0$,
 γ) τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο $\Pi(5, 10)$.
20. Δίνεται ο κύκλος $C: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C στα σημεία του:
 i) $A(3, -1)$ ii) $B(4, 2)$ iii) $\Gamma(-1, 7)$
21. Δίνεται ο κύκλος $C: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 20$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία $\zeta: 3x - 6y - 2021 = 0$.
22. Δίνεται ο κύκλος $C: (x-4)^2 + (y+2)^2 = 25$ και το σημείο του $P(9, 8)$.
 α) Να αποδείξετε ότι το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου C ,
 β) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο P .
23. Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ που διέρχονται από το σημείο $A(-1, 0)$.
24. Από το σημείο $M(4, 3)$ φέρνουμε τις εφαπτομένες στον κύκλο $C: x^2 + y^2 = 2$. Αν A, B είναι τα σημεία επαφής, να βρείτε:
 α) την ευθεία AB ,
 β) την απόσταση της αρχής των αξόνων από την ευθεία AB .
25. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 = 4$ και $C_2: (x-5)^2 + y^2 = 25$. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των κύκλων C_1 και C_2 .
26. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 15$. Από το σημείο $P(3, 4)$ φέρουμε τις εφαπτομένες στον κύκλο C και έστω A, B τα σημεία επαφής. Να βρείτε:
 α) την εξίσωση της ευθείας AB ,
 β) την απόσταση του σημείου P από την ευθεία AB .
27. Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου $C: x^2 + y^2 = 4$ ως προς:
 α) το σημείο $A(1, 3)$,
 β) την ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y - 5 = 0$,
 γ) τον κύκλο $C: (x-3)^2 + y^2 = 1$.
28. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$.
 α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 τέμνονται.
 β) Να βρείτε την κοινή ορδή των κύκλων.
29. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.
 α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.
 β) Να βρείτε το σημείο επαφής των δύο κύκλων.
 γ) Βρείτε την κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων.
30. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 = 25$ και $C_2: (x-3)^2 + (y-6)^2 = 4$
 α) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 τέμνονται.
 β) Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των κύκλων C_1 και C_2 .

31. Δίνεται η οικογένεια των κύκλων $C_\lambda : x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2\lambda y - 5 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$
- α) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.
- β) Να βρείτε την κοινή χορδή όλων των κύκλων που ορίζονται από την εξίσωση (1).
32. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\lambda y + 4\lambda - 2 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α) Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο.
- β) Να δείξετε ότι όλοι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από ένα σταθερό σημείο, το οποίο και να βρείτε.
33. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C, όταν ισχύουν:
- η ευθεία $\varepsilon: y = -2x$ τέμνει τον κύκλο στα σημεία A(3, 1) και B
 - ο κύκλος C διέρχεται από το σημείο Γ(-1, 0) και,
 - $\vec{GA} \cdot \vec{GB} = 0$
34. Δίνεται ο κύκλος $C : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου C που διέρχεται από το σημείο A(4, 2) και έχει μήκος $2\sqrt{5}$.
35. Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες που φέρνουμε στον κύκλο $C : x^2 + y^2 = 5$ από το σημείο A(1, 3) είναι κάθετες.
36. Δίνονται τα σημεία A(2, 0) και B(-2, 4). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M, για τα οποία ισχύει: i) $\vec{MA} \perp \vec{MB}$ ii) $\angle AMB = 90^\circ$
37. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M, των οποίων το τετράγωνο της απόστασης από το σημείο A(0, 1) είναι ίσο με το διπλάσιο της απόστασης από την ευθεία $\varepsilon: y = \frac{3}{2}$
38. Να βρείτε που κινείται το σημείο $M(3 + 2\eta\mu\theta, 1 + 2\sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$
39. Δίνεται ο κύκλος $C : (x - 1)^2 + y^2 = 4$. Αν το σημείο A κινείται στον κύκλο C με κέντρο το K, να βρείτε που κινείται το σημείο M, για το οποίο ισχύει $\vec{MA} = 3\vec{KA}$.
40. α) Αν το σημείο A(κ , λ) κινείται στον κύκλο $C : x^2 + y^2 = 9$, να αποδείξετε ότι και το σημείο $B\left(\frac{\kappa + 4}{2}, \frac{\lambda - 6}{2}\right)$ κινείται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
- β) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(2\sigma\upsilon\nu\theta + 3, 2\eta\mu\theta - 5)$, $\theta \in \mathbb{R}$
- γ) Αν A(-2, 1) και B(4, -1), να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου, για τα οποία το τρίγωνο AMB είναι ορθογώνιο στο M.
41. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0$, (1)
- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
- β) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των χορδών του κύκλου C, οι οποίες έχουν ένα άκρο τους το σημείο A(1, 3) του C, ανήκουν σε έναν άλλο κύκλο, του οποίου να βρείτε την εξίσωση.
42. Δίνεται ο κύκλος $C_1 : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$.
- α) Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση που μπορούν να απέχουν δύο σημεία του κύκλου C_1 .

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση που απέχει το σημείο $A(3, 5)$ από ένα σημείο του κύκλου C_1 .

γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο του C_1 από την ευθεία $\varepsilon: 4x - 3y - 10 = 0$.

δ) Δίνεται ο κύκλος $C_2: (x - 5)^2 + (y + 6)^2 = 4$.

i) Να αποδείξετε ότι καθένας από τους κύκλους C_1 και C_2 είναι εξωτερικός του άλλου.

ii) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του C_1 από ένα σημείο του C_2 .

43. Δίνεται ο κύκλος $C: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση που μπορούν να απέχουν δύο σημεία του κύκλου C .

β) Να βρείτε τη σχετική θέση του σημείου $A(1, 2)$ ως προς τον κύκλο C και μετά τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση του σημείου A από ένα σημείο του κύκλου C .

γ) Να βρείτε τη σχετική θέση της ευθείας $\varepsilon: 3x + 4y + 18 = 0$ ως προς τον κύκλο C και μετά τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση ενός σημείου του κύκλου C από την ευθεία ε .

44. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$, $C_2: (x - 7)^2 + (y - 10)^2 = 9$ και

$$C_3: (x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 64.$$

α) να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων C_1 και C_2 και μετά, να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο του C_1 από ένα σημείο του C_2 .

β) Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων C_2 και C_3 και μετά, να βρείτε τη μέγιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο του C_2 από ένα σημείο του C_3 .

45. Δίνεται κύκλος με εξίσωση $C: (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$.

α) να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ του κύκλου.

β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία $M(3, 0)$, $N(0, -4)$, $P(3, -7)$ και $\Sigma(1, 1)$ είναι σημεία του κύκλου.

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $O(0, 0)$ είναι εσωτερικό ή εξωτερικό σημείο του κύκλου.

46. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\alpha x + 4y + 2\alpha = 0$, (1) όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α έτσι, ώστε η ακτίνα του κύκλου αυτού να είναι ίση με 2.

γ) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α έτσι, ώστε το κέντρο του κύκλου να βρίσκεται στην ευθεία με εξίσωση $\varepsilon: 5x + 3y + 1 = 0$.

δ) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α έτσι, ώστε ο κύκλος να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

47. Δίνεται η εξίσωση $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 - 20 + \lambda(3x + y - 10) = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι που παριστάνει η εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία A και B τα οποία και να βρείτε.

- γ) Έστω ότι το κέντρο K του κύκλου C που παριστάνει η εξίσωση (1) ανήκει στην ευθεία $\zeta: 2x + y + 8 = 0$. Να βρείτε:
- τον αριθμό λ ,
 - το εμβαδόν του τριγώνου AKB .
48. Δίνεται η εξίσωση $C: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$ και το σημείο $M(2, 1)$.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(2, -1)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$.
 - Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο $M(2, 1)$.
 - Αν A, B είναι τα σημεία επαφής των παραπάνω εφαπτομένων με τον κύκλο, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου MAB .
49. Δίνεται κύκλος C με κέντρο $K(-1, 3)$ που εφάπτεται στον άξονα x' .
- Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C .
 - Θεωρούμε το σημείο $A(-1, -3)$. Να βρείτε:
 - τις εφαπτομένες του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο A ,
 - την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι παραπάνω εφαπτομένες.
50. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda + 2)y - \lambda - 13 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - Έστω ότι ο κύκλος C που παριστάνει η εξίσωση (1) διέρχεται από το σημείο $A(-3, 2)$.
 - Να βρείτε τον αριθμό λ , καθώς και το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C ,
 - Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσω των χορδών του κύκλου C , οι οποίες έχουν ως ένα άκρο τους το σημείο $A(-3, 2)$
51. Οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x + (1 - \lambda)y - 13 = 0$ και $\varepsilon_2: (\lambda + 2)x + (\lambda + 4)y - 22 = 0$ είναι κάθετες και το σημείο $K(\mu, \mu + 1)$ ανήκει στην ευθεία ε_2 .
- Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ .
 - Έστω C ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο K και αποκόπτεi από την ευθεία ε_1 χορδή με μήκος 8. Να βρείτε:
 - την εξίσωση του κύκλου C ,
 - τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο $A(6, 17)$.
52. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy στο επίπεδο, δίνεται η εξίσωση $C: x^2 + y^2 - 4x - 2\lambda y = 0$ (1).
- Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να εκφράσετε το κέντρο και την ακτίνα συναρτήσει του λ .
 - Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ο κύκλος που παριστάνει η εξίσωση (1) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
 - Αν ο κύκλος C που παριστάνει η εξίσωση (1) εφάπτεται στην ευθεία $\zeta: x - y - 4 = 0$, τότε:
 - να βρείτε τον αριθμό λ ,
 - να αποδείξετε ότι ο κύκλος C τέμνει τους άξονες x' και y' σε σημεία A και B αντίστοιχα, διαφορετικά από την αρχή O τέτοια, ώστε το τρίγωνο OAB να είναι ισοσκελές.
 - Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία ζ .

53. Να βρείτε την εξίσωση και να κάνετε και τη γραφική παράσταση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και επιπλέον:
- α) έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και εστία $E(2, 0)$,
 - β) έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και διευθετούσα $\delta: x = 1$,
 - γ) έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και εστία $E(0, -3)$,
 - δ) έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και διευθετούσα $\delta: y = -\frac{1}{2}$
54. Να βρείτε την εξίσωση και να κάνετε και τη γραφική παράσταση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και επιπλέον:
- α) έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και εστία $E(3, 0)$,
 - β) έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και διευθετούσα $\delta: x = -4$,
 - γ) έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και εστία $E(0, -2)$,
 - δ) έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και η απόσταση της εστίας E από την διευθετούσα δ είναι 2.
55. Να βρείτε την εξίσωση και να κάνετε και τη γραφική παράσταση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
- α) όταν έχει εστία το σημείο $E(0, 3)$,
 - β) όταν έχει διευθετούσα την ευθεία $2y - 1 = 0$,
 - γ) όταν διέρχεται από το σημείο $A(2, 1)$.
56. Να βρείτε την εστία E , τη διευθετούσα δ και να κάνετε και τη γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση:
- α) $y^2 = 3x$ β) $y = -2x^2$ γ) $y^2 = -4x$
 - δ) $y = \frac{1}{2}x^2$ ε) $3x^2 = 8y$ στ) $y^2 = -12x$
 - ζ) $x^2 = 16y$ η) $x^2 = -24y$
57. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 8x$. Να βρείτε:
- α) την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής C ,
 - β) τον αριθμό α , ώστε το σημείο $M(\alpha, \alpha + 2)$ να ανήκει στην παραβολή C .
58. Δίνεται η παραβολή C με κορυφή την αρχή των αξόνων, η οποία έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $A(6, -3)$. Να βρείτε:
- α) την εξίσωση της παραβολής C ,
 - β) την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής C ,
 - γ) σημείο B της παραβολής C , διαφορετικό της κορυφής της, ώστε $\angle AOB = 90^\circ$.
59. Δίνεται η παραβολή C με κορυφή $O(0, 0)$, η οποία έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$. Να βρείτε:
- α) την εξίσωση και τη γραφική παράσταση της παραβολής C ,
 - β) την εφαπτομένη της παραβολής C στο σημείο της A ,

- γ) την εφαπτομένη της παραβολής C , που είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta: 2x + y - 2022 = 0$,
 δ) τις εφαπτομένες της παραβολής C , που διέρχονται από το σημείο: $P(-3, -2)$.
60. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $C: y^2 = 4x$, που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x + 2y + 1 = 0$.
61. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 2x$. Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής που διέρχεται από το σημείο $A(-4, 1)$.
62. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C , που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon: 2x - y + 4 = 0$.
63. Δίνεται η παραβολή $C_1: y^2 = 4x$ και ο κύκλος $C_2: x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$.
- α) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη ε της παραβολής C_1 στο σημείο της $A(1, \mu)$, $\mu > 0$ εφάπτεται και στον κύκλο C_2 .
 β) Αν η ευθεία ε του προηγούμενου ερωτήματος τέμνει τον άξονα $x'x$ στο B , να βρείτε την άλλη κοινή εφαπτομένη ζ του κύκλου C_2 και της παραβολής C_1 , καθώς και το σημείο επαφής της C_1 με τη ζ .
64. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 4x$. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής της C που έχει μέσο το σημείο $M(2, -1)$.
65. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες της παραβολής $C_1: y^2 = 16x$ και του κύκλου $C_2: x^2 + y^2 = 8$.
66. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 6x$. Να βρείτε:
- α) την εφαπτομένη της παραβολής C στο σημείο της $A\left(\frac{1}{6}, -1\right)$
 β) την εφαπτομένη της παραβολής C που σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$.
 γ) τις εφαπτομένες της παραβολής C που διέρχονται από το σημείο $M(10, 8)$.
67. Δίνεται παραβολή C , η οποία έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Να βρείτε:
- α) την εξίσωση της παραβολής C ,
 β) τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της παραβολής C στο A με τον άξονα $x'x$.
 γ) τις εφαπτομένες της παραβολής C που σχηματίζουν με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ τρίγωνο με εμβαδόν 8 τ.μ.
68. Δίνεται παραβολή C , η οποία έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: 2x - y + 1 = 0$. Να βρείτε:
- α) την εξίσωση της παραβολής C ,
 β) την εφαπτομένη της παραβολής C που απέχει από την εστία της απόσταση ίση με $\frac{5}{2}$.
69. Δίνονται οι παραβολές $C_1: y^2 = 32x$ και $C_2: x^2 = 4y$ και έστω A το σημείο τομής των C_1 και C_2 διαφορετικό της αρχής των αξόνων O .
- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A ,

- β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ϵ_1 και ϵ_2 των παραβολών C_1 και C_2 αντίστοιχα στο σημείο τους Α,
- γ) Αν η ευθεία ϵ_1 τέμνει τη C_2 στο Β και η ϵ_2 τέμνει τη C_1 στο Γ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΒΓ είναι κοινή εφαπτομένη των C_1 και C_2 .
70. Δίνεται η παραβολή C_1 που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $A\left(2, \frac{1}{2}\right)$.
- α) Βρείτε την εξίσωση της παραβολής C_1 .
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ που διέρχεται από την εστία της παραβολής C_1 και σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$.
- γ) Έστω C_2 ο κύκλος που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται στην παραπάνω ευθεία ϵ . Να βρείτε:
- την εξίσωση του κύκλου C_2 ,
 - τις κοινές εφαπτομένες των κωνικών τομών C_1 και C_2 .
71. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 2x$. Να δείξετε ότι τα μέσα Μ των χορδών που είναι παράλληλες στην ευθεία $\epsilon: x - y + 1 = 0$, βρίσκονται σε ημιευθεία.
72. Δίνεται η ευθεία $\epsilon: x - 2y + 6 = 0$, ο κύκλος $C_1: x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$ και η παραβολή $C_2: y^2 = x$. Έστω ένα σημείο Μ που κινείται στην παραβολή.
- α) Να δείξετε ότι: $(MN) \geq \sqrt{5}$, όπου Ν σημείο της ευθείας ϵ .
- β) Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο της παραβολής C_2 από την ευθεία ϵ .
- γ) Να δείξετε ότι: $(MP) \geq 1$ όπου Ρ σημείο του κύκλου C_1 .
73. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 2px$ και έστω Ε η εστία της και $M(x_1, y_1)$ ένα σημείο της διαφορετικό από την κορυφή της Ο(0, 0). Έστω επίσης Λ η προβολή του Μ στη διευθετούσα δ της παραβολής C. Αν η ευθεία ΛΟ τέμνει την παραβολή C στο σημείο Κ (διαφορετικό του Ο), τότε:
- Να εκφράσετε τις συντεταγμένες των σημείων Μ, Λ, Κ συναρτήσει των p και y_1 ,
 - Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Ε, Μ είναι συνευθειακά.
74. Δίνεται παραβολή $C: y^2 = 2px$ και έστω Ε η εστία της. Δύο κάθετες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 που διέρχονται από την εστία Ε τέμνουν τη διευθετούσα δ της παραβολής C στα σημεία M_1 και M_2 αντίστοιχα. Από τα σημεία M_1 και M_2 φέρουμε ευθείες παράλληλες στον $x'x$ που τέμνουν την παραβολή C στα σημεία N_1 και N_2 αντίστοιχα. Αν y_1 και y_2 είναι οι τεταγμένες των M_1 και M_2 αντίστοιχα, τότε:
- Να αποδείξετε ότι: $y_1 y_2 = -p^2$
 - Να εκφράσετε τις συντεταγμένες των N_1 και N_2 συναρτήσει των y_1 και p .
 - να αποδείξετε ότι τα σημεία N_1, E, N_2 είναι συνευθειακά.

75. Έστω έλλειψη C με εστίες $E'(-3, 0)$ και $E(3, 0)$ και το μήκος του μικρού άξονα είναι 8.

α) Να βρείτε το μήκος του μεγάλου άξονα της C.

β) Να βρείτε την εξίσωση της C.

γ) Να βρείτε την εκκεντρότητα της C.

δ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της C.

76. Να βρείτε την εξίσωση και να κάνετε τη γραφική παράσταση της έλλειψης που έχει:

α) εστίες $E'(-4, 0)$ και $E(4, 0)$ και μήκος μικρού άξονα 6,

β) εστίες $E'(0, -2)$ και $E(0, 2)$ και μήκος μεγάλου άξονα 12,

γ) εστίες δύο σημεία του άξονα $x'x$, συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων, εκκεντρό-

τητα $\varepsilon = \frac{\sqrt{21}}{5}$ και διέρχεται από το σημείο $M(5, 2)$.

77. Να βρείτε την εξίσωση και να κάνετε τη γραφική παράσταση της έλλειψης που έχει:

α) εστίες $E'(-3, 0)$ και $E(3, 0)$ και μήκος μεγάλου άξονα 10,

β) εστίες $E'(0, -4)$ και $E(0, 4)$ και μήκος μικρού άξονα 6,

γ) εστίες $E'(0, -2)$ και $E(0, 2)$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{4}{5}$,

δ) όταν έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, εστίες στον άξονα $x'x$, μήκος μικρού άξονα 16 και μήκος μεγάλου άξονα 20,

ε) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, εστίες $E'(0, -\sqrt{3})$ και $E(0, \sqrt{3})$ και διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$,

στ) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, εστίες στον άξονα $x'x$ και κορυφές τα σημεία $A'(-4, 0)$, $A(4, 0)$, $B'(0, -3)$ και $B(0, 3)$,

ζ) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, εστίες στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από τα σημεία $M_1(4, -\sqrt{3})$ και $M_2(2\sqrt{2}, 3)$.

78. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες, την εκκεντρότητα και να κάνετε τη γραφική παράσταση των ελλείψεων:

α) $9x^2 + 16y^2 = 144$

β) $9x^2 + y^2 = 9$

γ) $2x^2 + 3y^2 = 4$

δ) $x^2 + 12y^2 = 3$

ε) $12x^2 + 3y^2 = 36$

στ) $x^2 + 50y^2 = 50$

ζ) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$

η) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

θ) $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

79. Έστω η έλλειψη C που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εστίες στον άξονα $y'y$. Αν η C

διέρχεται από το σημείο $M\left(1, \frac{10\sqrt{2}}{3}\right)$ και έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{4}{5}$, να βρείτε:

α) την εξίσωση της C,

β) τις εστίες και τα μήκη των αξόνων της C.

80. Δίνεται η έλλειψη $C : \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ και το σημείο $M(1, 2)$.
- α) Να αποδείξετε ότι το $M(1, 2)$ είναι εσωτερικό σημείο της έλλειψης C .
- β) Να βρείτε την εξίσωση της χορδής της έλλειψης C που έχει ως μέσο το σημείο M .
81. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 = 16$ και τα σημεία $E'(-3, 0)$ και $E(3, 0)$. Να βρείτε τα σημεία M του κύκλου C , για τα οποία ισχύει: $(ME) + (ME') = 10$.
82. Δίνεται η έλλειψη $C : x^2 + \frac{y^2}{12} = 1$. Να βρείτε:
- α) Την εφαπτομένη της έλλειψης C στο σημείο της $K\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$.
- β) Τις εφαπτομένες της έλλειψης C που είναι κάθετες στην ευθεία $\zeta: x - 2y + 2022 = 0$.
- γ) Τις εφαπτόμενες της έλλειψης C που διέρχονται από το σημείο $P(1, 6)$.
83. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $C : x^2 + 3y^2 = 4$ που διέρχεται από το σημείο $P(2, 1)$.
84. Δίνεται η έλλειψη $C : 2x^2 + y^2 = 6$ και το σημείο της $M(\mu, 2)$, $\mu < 0$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διχοτομεί τη γωνία $\widehat{E'ME}$, όπου E', E οι εστίες της C .
85. Έστω ότι η ευθεία $\epsilon: y = -8x + 2$ εφάπτεται στην έλλειψη C στο σημείο της $M(2, 1)$. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C , που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων.
86. Δίνεται η έλλειψη $C : 3x^2 + 4y^2 = 16$. Να δείξετε ότι η ευθεία $\epsilon: 3x + 2y - 8 = 0$ εφάπτεται στην έλλειψη C και να βρείτε το σημείο επαφής.
87. Δίνεται η έλλειψη $C : \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$. Από το σημείο $P(2, -3)$ φέρουμε τις εφαπτόμενες PA , PB προς την C . Να βρείτε την απόσταση του σημείου P από την ευθεία AB .
88. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες του κύκλου $C_1 : x^2 + y^2 = 2$ και της έλλειψης $C_2 : x^2 + 3y^2 = 3$.
89. Δίνεται έλλειψη C , της οποίας οι εστίες ανήκουν στον άξονα $x'x$ και είναι σημεία συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C αν αυτή εφάπτεται στην ευθεία $y = -\frac{2}{3}x + 4$ στο σημείο $M(3, 2)$.
90. Δίνεται η έλλειψη $C : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$.
- α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\epsilon: y = 2x + 4$ εφάπτεται στην έλλειψη C .
- β) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $\zeta: y = \lambda x - 2\lambda$ να εφάπτεται στην έλλειψη C .
91. Δίνεται η έλλειψη $C : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.
- α) Από το σημείο $P(10, 18)$ φέρουμε τις εφαπτομένες στην έλλειψη C και έστω A και B τα σημεία επαφής. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB .

β) Θεωρούμε τα σημεία $\Gamma(x_3, y_3)$ και $\Delta(x_4, y_4)$ της έλλειψης C και έστω ε_1 και ε_2 οι εφαπτομένες της C στα Γ και Δ αντίστοιχα, οι οποίες τέμνονται στο σημείο $M(x_0, y_0)$.

i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $\Gamma\Delta$ συναρτήσει των x_0 και y_0 .

ii) Αν η ευθεία $\Gamma\Delta$ διέρχεται από την εστία E (με θετική τετμημένη) της C , να βρείτε την τετμημένη x_0 του M .

92. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες της έλλειψης $C_1: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ και του κύκλου

$$C_2: (x-3)^2 + y^2 = 5.$$

93. Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{\kappa^2} = 1$, η οποία διέρχεται από το σημείο $M(5, 4)$.

α) Να βρείτε την τιμή του κ .

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της έλλειψης C στο σημείο της M .

γ) Αν E' και E είναι εστίες της έλλειψης C , να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $E'ME$.

94. Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(5\eta\mu\phi, 3\sigma\upsilon\nu\phi)$, με $\phi \in \mathbb{R}$, κινείται σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε τις εστίες και την εκκεντρότητα.

95. Έστω τα σημεία $E'(-4, 0)$ και $E(4, 0)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M , για τα οποία ισχύει $|\overrightarrow{ME'}| + |\overrightarrow{ME}| = 10$ και στη συνέχεια την εξίσωσή του.

96. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M , για τα οποία ισχύει

$$3\overrightarrow{OM}^2 + 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = 5, \text{ όπου } M' \text{ το συμμετρικό σημείο του } M \text{ ως προς τον άξονα } x'x.$$

97. Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, με $\alpha > \beta > 0$, και έστω ε η εφαπτομένη της C στο σημείο της $M(x_1, y_1)$. Θεωρούμε την ευθεία ζ που είναι κάθετη στην ε στο σημείο M . αν K

και Λ είναι τα σημεία τομής των ευθειών ε και ζ αντίστοιχα με τον άξονα $y'y$, τότε:

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων K και Λ συναρτήσει των, α , β , x_1 και y_1 .

β) Αν E και E' είναι οι εστίες της έλλειψης C , να αποδείξετε ότι: $\widehat{K\hat{E}\Lambda} = \widehat{K\hat{E}'\Lambda} = 90^\circ$

98. Αν M το σημείο της έλλειψης $C: \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$, με εστίες τα σημεία E' , E να δείξετε ότι

$$|\overrightarrow{ME'}| \cdot |\overrightarrow{ME}| + \overrightarrow{OM}^2 = 9, \text{ όπου } O \text{ η αρχή των αξόνων.}$$

99. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής AB της έλλειψης $C: 4x^2 + 9y^2 = 36$, που έχει μέσο το σημείο $M(2, 1)$.

100. Δίνεται έλλειψη C με εστίες $E'(-4, 0)$ και $E(4, 0)$ και μήκος μεγάλου άξονα 10. Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της έλλειψης C .

α) Τις οριζόντιες και κατακόρυφες εφαπτομένες της έλλειψης C .

γ) Τις εφαπτομένες της έλλειψης C που διέρχονται από το σημείο $M(0, 5)$.

101. Δίνεται η έλλειψη C με εστίες $E'(0, -2\sqrt{2})$ και $E(0, 2\sqrt{2})$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Να βρείτε:
- την εξίσωση της έλλειψης C ,
 - τις εφαπτομένες της έλλειψης C που διέρχονται από το σημείο $M(2, -2)$,
 - τις εφαπτομένες της έλλειψης C που σχηματίζουν γωνία 45° με τον άξονα $x'x$.
102. Δίνεται έλλειψη C_1 , της οποίας οι εστίες είναι σημεία του άξονα $x'x$, συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Η έλλειψη C_1 διέρχεται από το σημείο $A(6, 3)$ και το μήκος του μικρού άξονά της είναι $6\sqrt{2}$.
- Να βρείτε την εξίσωση και τις εστίες της έλλειψης C_1 .
 - Να βρείτε την εφαπτομένη ε της έλλειψης C_1 στο σημείο της A .
 - Έστω C_2 η έλλειψη που είναι όμοια με τη C_1 και έχει εστίες $E'_2(-2\sqrt{6}, 0)$ και $E_2(2\sqrt{6}, 0)$. Να βρείτε:
 - την εξίσωση της έλλειψης C_2 ,
 - τις εφαπτομένες της έλλειψης C_2 που είναι παράλληλες στην εφαπτομένη ε της C_1 στο A .
103. Δίνεται η έλλειψη $C_1: x^2 + 4y^2 = 4$ και ο κύκλος $C_2: x^2 + y^2 - 10x + 24 = 0$. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση ενός σημείου της C_1 από ένα σημείο της C_2 .
104. Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο της έλλειψης $C: x^2 + 2y^2 = 6$ από την ευθεία $\varepsilon: x + y - 8 = 0$.
105. Δίνεται η έλλειψη $C_1: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ και ο κύκλος $C_2: x^2 + y^2 + 2x - 9 = 0$.
- Να βρείτε τις εστίες και την εκκεντρότητα της έλλειψης C_1 ,
 - Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C_2 ,
 - Να βρείτε τα κοινά σημεία των κωνικών τομών C_1 και C_2 ,
 - Έστω ε_1 και ε_2 οι εφαπτομένες των C_1 και C_2 αντίστοιχα στο κοινό τους σημείο που ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο. Να βρείτε:
 - τις εξισώσεις των ε_1 και ε_2 ,
 - την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2 .
106. Δίνεται έλλειψη C , της οποίας οι εστίες είναι σημεία του άξονα $y'y$, συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Η έλλειψη C έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ και μια κορυφή της είναι το σημείο $B(\sqrt{2}, 0)$.
- Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C .
 - Έστω A το άκρο του μεγάλου άξονα της έλλειψης C με θετική τεταγμένη. Να βρείτε τις εφαπτομένες της έλλειψης C που είναι παράλληλες στο διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.
 - Έστω E η εστία της έλλειψης C με θετική τεταγμένη και σημείο M για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{ME} = (-1, 2)$. Να βρείτε:
 - τις συντεταγμένες του σημείου M ,
 - την εξίσωση της χορδής της έλλειψης C που έχει μέσο το σημείο M .

107. Να βρείτε την εξίσωση και να κάνετε τη γραφική παράσταση της υπερβολής C ό-
ταν:

α) εστίες $E'(-10, 0)$ και $E(10, 0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-6, 0)$, $A(6, 0)$,

β) εστίες $E'(-5, 0)$ και $E(5, 0)$ και η απόσταση των κορυφών της είναι ίση με 8,

γ) εστίες $E'(0, -3\sqrt{13})$ και $E(0, 3\sqrt{13})$ και ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \frac{2}{3}x$ και $y = -\frac{2}{3}x$,

δ) εστίες $E'(0, -4)$ και $E(0, 4)$ και είναι ισοσκελής,

ε) εστίες δύο σημεία του άξονα $x'x$, συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων, εκκεντρό-
τητα $e = 2$ και διέρχεται από το σημείο $M(4, 6)$.

ε) έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \frac{3}{4}x$ και $y = -\frac{3}{4}x$ και διέρχεται από το σημείο

$M(4\sqrt{2}, 3)$

στ) έχει κορυφές τα σημεία $A'(0, -5)$, $A(0, 5)$ και εκκεντρότητα $e = \frac{13}{5}$.

ζ) έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \frac{1}{2}x$ και $y = -\frac{1}{2}x$ και διέρχεται από το σημείο

$M(\sqrt{5}, \frac{1}{2})$

108. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες, τις κορυφές, τις ασύμπτωτες, το ορθο-
γώνιο βάσης, την εκκεντρότητα και να κάνετε τη γραφική παράσταση των υπερβολών:

α) $x^2 - 4y^2 = 4$

β) $9y^2 - 4x^2 = 3$

γ) $x^2 - y^2 = 9$

δ) $5y^2 - 4x^2 = 80$

ε) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$

στ) $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$

ζ) $16x^2 - 9y^2 = 144$

109. Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την
έλλειψη $9x^2 + 25y^2 = 225$.

110. Να βρείτε την εκκεντρότητα της υπερβολής $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όταν η ασύμπτωτη

της C , $\varepsilon: y = \frac{\beta}{\alpha}x$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{v} = (-5, 12)$.

111. Δίνεται η υπερβολή $C: 3x^2 - y^2 = 3$. Να βρείτε:

α) τις εστίες και την εκκεντρότητα της υπερβολής C ,

β) την εξίσωση της χορδής της υπερβολής C που έχει μέσο το σημείο $M(5, -3)$.

112. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $C: x^2 - 4y^2 = 5$, που εί-
ναι παράλληλες στην ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y + 1 = 0$.

113. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $C: 5y^2 - x^2 = 1$, που διέρχονται από το σημείο $P(7, 3)$.
114. Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. Να βρείτε:
- α) την εφαπτομένη της υπερβολής C στο σημείο της $A(4, 6)$,
 - β) τις εφαπτομένες της υπερβολής C που είναι παράλληλες στην ευθεία $\zeta: 6x + 3y - 2021 = 0$.
 - γ) τις εφαπτομένες της υπερβολής C που διέρχονται από το σημείο $P(2, 6)$.
115. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή C με εστίες $E'(-2, 0)$ και $E(2, 0)$ και το σημείο της $M(2, \sqrt{2})$, να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $E'ME$.
116. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες του κύκλου $C_1: x^2 + y^2 = 1$ και της υπερβολής $C_2: x^2 - 4y^2 = 2$.
117. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες της υπερβολής $C_1: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ και του κύκλου $C_2: x^2 + (y - 3)^2 = 5$.
118. Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$ και έστω E', E οι εστίες της. Αν είναι $M(4, 3)$, να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $E'ME$.
119. Δίνονται τα σημεία $M(x, y)$, $E'(-3, 0)$ και $E(3, 0)$ για τα οποία ισχύουν:
- $$|\overrightarrow{ME'}| \cdot |\overrightarrow{ME}| - |\overrightarrow{OM}|^2 = 1 \quad \text{όπου } O \text{ η αρχή των αξόνων. Να αποδείξετε ότι:}$$
- α) το σημείο M κινείται σε υπερβολή C , της οποίας να βρείτε την εξίσωση,
 - β) το σημείο $K\left(\frac{2}{\sin\theta}, \sqrt{5} \cdot \varepsilon\phi\theta\right)$, με $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ανήκει στην υπερβολή C .
120. Δίνονται τα σημεία $E'(-5, 0)$ και $E(5, 0)$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M , για τα οποία ισχύει $||\overrightarrow{ME'}| - |\overrightarrow{ME}|| = 6$ και στη συνέχεια την εξίσωση του γεωμετρικού τόπου.
121. Έστω το σημείο $E(3, 0)$ και η ευθεία $\varepsilon: x = 1$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M , για τα οποία ισχύουν $\frac{|\overrightarrow{ME}|}{d(M, \varepsilon)} = \sqrt{3}$.
122. Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο M της υπερβολής $C: 4x^2 - y^2 = 4$ προς το σημείο $K(0, 1)$.
123. Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο της υπερβολής $C: x^2 - 3y^2 = 13$ προς την ευθεία $\varepsilon: 4x - 3y - 3 = 0$.
124. Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και έστω ε' και ε οι εφαπτομένες της στις κορυφές της A' και A αντίστοιχα. Μια τρίτη εφαπτομένη ζ της υπερβολής C τέμνει τις ε' και ε στα σημεία Γ' και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $(A\Gamma) \cdot (A'\Gamma') = \beta^2$,

β) $\Gamma E\Gamma' = 90^\circ$, όπου $E(\gamma, 0)$ εστία της υπερβολής C.

125. Δίνεται υπερβολή C με εστίες $E'(0, -5)$ και $E(0, 5)$ και εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C.

β) Να βρείτε τις κορυφές A' , A και τις ασύμπτωτες ε_1 και ε_2 της υπερβολής C,

γ) Να βρείτε την απόσταση της εστίας E από τις ασύμπτωτες ε_1 και ε_2 της υπερβολής C,

δ) Το σημείο $M(4\lambda - 2, 3\lambda)$ ανήκει στην υπερβολή C. Να βρείτε:

i) τον αριθμό λ ,

ii) το άθροισμα $d(M, \varepsilon_1) + d(M, \varepsilon_2)$, όπου ε_1 και ε_2 οι ασύμπτωτες της υπερβολής C.

126. Δίνεται η υπερβολή C με εστίες $E'(-3, 0)$ και $E(3, 0)$ η οποία διέρχεται από το σημείο $N(5, 4)$. Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της υπερβολής C.

β) Την εφαπτομένη ε της υπερβολής C στο N.

γ) Τις εφαπτομένες της υπερβολής C που είναι κάθετες στην παραπάνω ευθεία ε .

δ) Τις εφαπτόμενες της υπερβολής C που σχηματίζουν με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ τρίγωνο με εμβαδό ίσο με 4 τ.μ.

127. Δίνονται οι εξισώσεις $x^2 + y^2 + 10x + 16 = 0$, (1) και $x^2 + y^2 - 10x + 24 = 0$, (2)

α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν κύκλους C_1 και C_2 αντίστοιχα, των οποίων να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες.

β) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα M των κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά στους παραπάνω κύκλους C_1 και C_2 ανήκουν σε κλάδο υπερβολής, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

128. Δίνεται η έλλειψη $C_1: \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$ και η υπερβολή C_2 που έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = 2$

και τις ίδιες εστίες με την έλλειψη C_1 .

α) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C_2 .

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των κωνικών τομών C_1 και C_2 .

γ) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των C_1 και C_2 στο κοινό τους σημείο του 1^{ου} τεταρτημορίου είναι κάθετες.

δ) Να βρείτε τις εφαπτομένες της υπερβολής C_2 που διέρχονται από το σημείο $P(-2, 6)$

129. Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση $y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$ παριστάνει παραβολή της οποίας να βρείτε την κορυφή, την εστία και τη διευθετούσα.

β) η εξίσωση $5x^2 + 9y^2 - 20x + 54y + 56 = 0$ παριστάνει έλλειψη, της οποίας να βρείτε το κέντρο, τις εστίες και τις κορυφές.

γ) η εξίσωση $3x^2 - y^2 + 12x + 8y - 7 = 0$ παριστάνει υπερβολή, της οποίας να βρείτε το κέντρο, τις εστίες και τις κορυφές.

130. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν παραβολές, των οποίων να βρείτε τις κορυφές, τις εστίες και τις διευθετούσες:

α) $y^2 - 4x - 6y - 11 = 0$,

β) $x^2 - 2x - 8y - 15 = 0$,

γ) $y^2 + 12x + 2y - 23 = 0$,

131. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν ελλείψεις, των οποίων να βρείτε το κέντρο, τις εστίες και τις κορυφές:

α) $3x^2 + 4y^2 - 18x + 8y + 19 = 0$,

β) $2x^2 + y^2 + 16x - 4y + 28 = 0$

132. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν υπερβολές, των οποίων να βρείτε το κέντρο, τις εστίες και τις κορυφές:

α) $3x^2 - y^2 - 18x - 2y + 14 = 0$,

β) $4x^2 - 5y^2 + 32x + 20y + 124 = 0$.

133. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2y^2 - 8x + 8y + 18 = 0$, (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει έλλειψη.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης C που παριστάνει η εξίσωση (1) στο σημείο της $K(2, -1)$.

134. Να βρείτε τον αριθμό λ , ώστε η ευθεία $\epsilon: x - y + \lambda = 0$ να εφάπτεται στην παραβολή $C: y^2 - 4x - 2y - 7 = 0$.

135. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 9y^2 + 8x - 18y - 47 = 0$, (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει έλλειψη, της οποίας να βρείτε τις εστίες.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της έλλειψης C που παριστάνει η εξίσωση (1) στο σημείο της $M(2, 3)$.

136. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2y^2 + 6x + 8y - 3 = 0$, (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει υπερβολή, της οποίας να βρείτε το κέντρο, τις εστίες και τις κορυφές.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της υπερβολής C που παριστάνει η εξίσωση (1) στο σημείο της $M(3, 6)$.