5ο ΓΕΛ ΗΛΙΟΥΠΟΛΗΣ, 28/11/2024

Διαγώνισμα Α΄ τετραμήνου στα Μαθηματικά Προσανατολισμού. **Γ-ΘΕΤΙΚΗ**

Διδάσκων: Χρυσανθόπουλος Κώστας

Ονοματεπώνυμο: ______________________________

<u>ΘΕΜΑ Α</u> **(μονάδες 25)**

1. Να αποδείξετε ότι αν f είναι μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και η ένας αριθμός μεταξύ του $f(\alpha)$ και του $f(\beta)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \eta$. **(μονάδες 15)**

ΣΧΟΛΙΚΟ, σελ. 76

2. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις ως <u>Σωστή</u> ή <u>Λάθος</u>

(μονάδες 10)

Λ i. Αν $f(x) < g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ (σχ. σελ. 48)

Λ ii. Μια συνάρτηση θα είναι 1 – 1 αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x) = y έχει τουλάχιστον μια λύση ως προς x. (σχ. σελ 34)

Λ iii. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι δεν είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β], τότε δεν μπορώ να βρω μια ρίζα της συνάρτησης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α, β). (σχ. σελ 74)

Σ iv. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διάστημα που περιέχει το 0. Τότε θα ισχύει πάντα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ (σχ. σελ 70)

Λ v. Αν 0 < α < 1 τότε $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = 0$ (σχ. σελ 67)

ΘΕΜΑ Β **(μονάδες 35)**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{ax^2+ax+2}{x-1}, \quad x>1$

1. Να βρείτε το α, ώστε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός και στη συνέχεια δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. (μονάδες 7)
2. Αν α = 0, τότε:
   i. Αν $h(x)=\ln f(x)$, να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$. (μονάδες 8)

   ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left|f^2(x)-f(x)-1\right|-f(x)-1}{f^2(x)\left(x+\eta\mu x\right)}$. (μονάδες 10)

   iii. Δείξτε ότι η εξίσωση $h(x)=\dfrac{1}{x}+1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1, 3).

(μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ **(μονάδες 40)**

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(0)=1$, για την οποία ισχύει ότι

$f^2(x)=1-2xf(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x$. (μονάδες 8)

Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε:

2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια, να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης. (μονάδες 10)
3. Δείξτε ότι η εξίσωση $\dfrac{1}{f(x)}-\dfrac{1}{x}=0$ έχει ακριβώς μία θετική ρίζα. (μονάδες 12)
4. Να βρείτε την f^{-1} και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f^{-1}(x)\dfrac{\eta\mu x}{x^2}\right)$.

(μονάδες 10)

$\boxed{\Gamma-\text{ΘΕΤΙΚΗ}}$

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΩΡΙΑΙΟΥ Α' ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ

ΘΕΜΑ Β

1) Θέλουμε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax^2+ax+2}{x-1}$ να είναι πραγματικός αριθμός έχουμε δύο περιπτώσεις για το a:

• $\alpha\neq0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^2+\alpha x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}ax$

$= +\infty$ (αν $\alpha>0$) ή $-\infty$ (αν $\alpha<0$)

άρα αυτή η περίπτωση αποκλείεται.

• $a=0$ τότε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax^2+ax+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x-1}=0\in\mathbb{R}$

άρα το $\boxed{a=0}$ κι' τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

2) Αφού $\alpha=0$, άρα $f(x)=\frac{2}{x-1}$ με $x>1$

(i) $h(x)=\ln\frac{2}{x-1}$, $x>1$

$\lim\limits_{x\to1}\left(\ln\frac{2}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\ln\frac{2}{x-1}\right)$ Θέτω $u=\frac{2}{x-1}$, τότε $\lim\limits_{x\to1^+}u=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{2}{x-1}=+\infty$ αφού $x-1>0$

$\lim\limits_{u\to+\infty}(\ln u)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{2}{x-1}\right)$ Θέτω $u=\frac{2}{x-1}$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x-1}=0$

$\lim\limits_{u\to0^+}(\ln u)=-\infty$

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f^2(x)-f(x)-1)\overset{\text{από}}{\underset{(1)}{=}}0-0-1=-1<0$ άρα

$|f^2(x)-f(x)-1|=-f^2(x)+f(x)+1$ Άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|f^2(x)-f(x)-1|-f(x)-1}{f^2(x)(x+\eta\mu x)}=\lim\frac{-f^2(x)+\cancel{f(x)}+\cancel{1}-\cancel{f(x)}-\cancel{1}}{f^2(x)(x+\eta\mu x)}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\cancel{f^2(x)}}{\cancel{f^2(x)}(x+\eta\mu x)}=-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\eta\mu x}$ • Τώρα μπορώ να συνεχίσω με 2 τρόπους:

α' τρόπος

$-\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x\left(1+\frac{ημx}{x}\right)}$ (*) ΙΣ' βρίσκω το $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{ημx}{x}$

$\left|\dfrac{ημx}{x}\right| = |ημx|\left|\dfrac{1}{x}\right| \leq \left|\dfrac{1}{x}\right| \Rightarrow -\left|\dfrac{1}{x}\right| \leq \dfrac{ημx}{x} \leq \left|\dfrac{1}{x}\right|$

Αλλά $\lim_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{1}{x}\right|\right) = \lim_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{x}\right| = 0$. Άρα από Κρ. Παρεμβολής

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{ημx}{x} = 0$ οπότε:

$(*) = -\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{ημx}{x}}\right) = -0\cdot\dfrac{1}{1+0} = 0.$

β' τρόπος

$-1 \leq ημx \leq 1 \Rightarrow x-1 \leq x+ημx \leq x+1 \xrightarrow[\text{άρα θετικά}]{\text{αφού } x\to+\infty}$

$\dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{1}{x+ημx} \leq \dfrac{1}{x-1}$ Αλλά $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1} = 0$

άρα από Κρ. Παρεμβολής ΙΣ το $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+ημx} = 0$

iii $h(x) = \frac{1}{x}+1 \Leftrightarrow \ln\dfrac{2}{x-1} = \dfrac{1}{x}+1 \Leftrightarrow$

$\ln\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x} - 1 = 0$. Θέτω $g(x) = \ln\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x} - 1$, $x>1$

α.ν.δ.ο η $g(x)=0$ έχει 1 τουλ. ρίζα στο $(1,3)$

Η g είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ ως πράξη συνεχών, άρα ΙΣ στο $(1,3) \subseteq (1,+\infty)$

Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε $g(1)$, πάμε με όριο:

$\lim_{x\to1^+} g(x) = \lim_{x\to1^+}\left(\ln\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x} - 1\right) \xrightarrow[2(i)]{\text{από}} +\infty-1-1 = +\infty$

άρα η $g(x)>0$ κοντά στο 1^+, δηλαδή, υπάρχει αριθμός $α$ πολύ κοντά στα δεξιά του 1 ώστε $g(α)>0$

$g(3) = \ln\left(\dfrac{2}{3-1}\right) - \dfrac{1}{3} - 1 = \ln1 - \dfrac{1}{3} - 1 = -\dfrac{4}{3} < 0$

άρα για τη g ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[α,3]$, άρα υπάρχει τουλάχιστο ένα $x_0\in(α,3) \subseteq (1,3)$ ώστε $g(x_0)=0$, άρα η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow h(x) = \dfrac{1}{x}+1$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,3)$

ΘΕΜΑ Γ

1) $f^2(x) = 1-2xf(x) \Leftrightarrow f^2(x)+2xf(x) = 1 \Leftrightarrow$

$f^2(x)+2xf(x)+x^2 = 1+x^2 \Leftrightarrow (f(x)+x)^2 = 1+x^2 \overset{\text{θετικό}}{\Longleftrightarrow}$

$\sqrt{(f(x)+x)^2} = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow |f(x)+x| = \sqrt{1+x^2}$

αλλά $1+x^2 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} \neq 0 \Rightarrow |f(x)+x| \neq 0 \Rightarrow f(x)+x \neq 0$.

Άρα αν θέσω $g(x) = f(x)+x$, τότε η g συνεχής ως πράξη συνεχών κ' $g(x) \neq 0$ άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο.

$g(0) = f(0)+0 = 1+0 = 1 > 0$ άρα η g είναι θετική.

Άρα $|f(x)+x| = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow f(x)+x = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow$

$\boxed{f(x) = \sqrt{1+x^2}-x}$, $x \in \mathbb{R}$

2) Αφού $f \downarrow$ άρα η f είναι 1-1 κ' άρα αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} θα είναι το σύνολο τιμών της f

Άρα $D_{f^{-1}} = f(D_f) = f(\mathbb{R}) \xrightarrow[\downarrow]{f \text{ συνεχής}} \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) =$

$= (0, +\infty)$ διότι:

$-\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x^2}-x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x} =$

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}}{\sqrt{1+x^2}+x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2(\frac{1}{x^2}+1)}+x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}$

$\xrightarrow[|x|=x]{x\to+\infty,\ \text{άρα}} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}\right) = 0\cdot\dfrac{1}{2} = 0$

$-\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x^2}-x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2(\frac{1}{x^2}+1)}-x\right) =$

$\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-x\right) \xrightarrow[|x|=-x]{x\to-\infty} \lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-x\right) =$

$\lim_{x\to-\infty}\left[-x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right)\right] = -(-\infty)\cdot 2 = +\infty$

3) Θέτω $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} - \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$

Το $\sqrt{1+x^2}-x$ είναι $\neq 0$ κ' μάλιστα θετικό διότι:

$\sqrt{1+x^2}-x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} > x$ Αν $x<0$ τότε αυτό ισχύει πάντα.

Αν $x \geq 0$ τότε $\sqrt{1+x^2}^2 > x^2 \Leftrightarrow 1+\cancel{x^2} > \cancel{x^2} \Leftrightarrow 1 > 0$ ισχύει

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} - \frac{1}{x}\right) = 1-(+\infty) = -\infty$

άρα η $g(x)<0$ κοντά στο 0^+, δηλαδή υπάρχει αριθμός α πολύ κοντά στο 0 από δεξιά ώστε $g(a)<0$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} - \frac{1}{x}\right) = +\infty - 0 = +\infty$ διότι:

$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x^2}-x) = 0$ (από το (2))

κ' $\sqrt{1+x^2}-x>0$ ως ποσότητα.

άρα η $g(x)>0$ κοντά στο $+\infty$, δηλαδή υπάρχει αριθμός β μεγάλο ώστε $g(β)>0$.

Άρα για τη g που είναι συνεχής στο $[α,β] \subseteq (0,+\infty)$ ως πράξη συνεχών ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano, οπότε υπάρχει τουλάχιστον 1 ρίζα x_0 στο $[α,β]\subseteq(0,+\infty)$ ώστε $g(x)=0$

κ' αφού $x_0\in(0,+\infty)$ η ρίζα είναι θετική

Θα δείξω ότι η g είναι μονότονη ώστε η ρίζα να είναι μοναδική

$f \downarrow$ κ' έστω $f(x_1)<f(x_2) \xrightarrow[\text{θετική}]{f(x)} \frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)}$
$x_1<x_2 \xrightarrow{x>0} \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ $\Big\} \overset{+}{\Rightarrow} g(x_1)>g(x_2)$ άρα $g \downarrow$

οπότε η ρίζα είναι μοναδική

4) $y=\sqrt{1+x^2}-x \Leftrightarrow y+x=\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow (y+x)^2=\sqrt{1+x^2}^2 \Leftrightarrow$

$y^2+\cancel{x^2}+2yx = 1+\cancel{x^2} \Leftrightarrow y^2+2yx=1 \Leftrightarrow 2yx = 1-y^2 \Leftrightarrow$

$x=\frac{1-y^2}{2y}$ άρα $f^{-1}(x)=\frac{1-x^2}{2x}$ με $x>0$ (από ερώτημα 2)

$\lim_{x\to+\infty}\left(f^{-1}(x)\frac{\eta\mu x}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x^2}{2x}\frac{\eta\mu x}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x^2}{2x^2}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)$ (*)

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{2x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$ (βλέπε ΘΕΜΑ Β 2ii)

άρα $(*) = -\frac{1}{2}\cdot 0 = 0$