Η άσκηση της ημέρας ...

ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- f παραγ/μη στο $\mathbb{R}$
- $f'(x)(f(x)-x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$
- $f(0)=1$

1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$
2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται κ' να βρείτε τον τύπο κ' το πεδίο ορισμού της f^{-1}.
3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f
4. Να αποδείξετε ότι $(x+1)(e^{2x}-1) > e^x(x^2+2x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Λύση – Υπόδειξη

1. $f'(x)(f(x)-x)=f(x) \Leftrightarrow f'(x)f(x)-xf'(x)=f(x) \Leftrightarrow f'(x)f(x)=xf'(x)+x'f(x)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{f^2(x)}{2}\right)'=(xf(x))' \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2}=xf(x)+c \quad f(0)=1$ άρα … $c=\frac{1}{2}$ …

$(f(x)-x)^2=x^2+1$. Η $g(x)=f(x)-x$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ (γιατί;;) $g(x)\neq 0$

(γιατί;; … γιατί αν $g(x)=0$ τότε $x^2+1=0$ άτοπο!)

κ' επειδή $g(0)=1>0$ άρα $g(x)>0$ άρα ….

2. $f'(x)= \dots = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}>0$ (γιατί;; …)

διότι: $\sqrt{x^2+1}+x>\sqrt{x^2}+x=|x|+x\geq 0$ αφού $-|x|\leq x\leq |x|$.

άρα $f\uparrow \Rightarrow 1-1 \Rightarrow$ αντιστρέφεται

$A_{f^{-1}} \equiv f(A) \underset{\uparrow}{\overset{f}{=}} \left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x), \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\dots=(0,+\infty)$

$y=f(x) \Leftrightarrow y=x+\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow \dots\dots\dots \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{x^2-1}{2x}$

$x>0$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ άρα $y=0$ ΟΡ-ΑΣ στο $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\dots\ 2=\lambda \qquad \underline{\lambda=2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\dots=0$ άρα $\boxed{y=2x.}$ ΠΛ-ΑΣ στο $+\infty$

4. $(x+1)(e^{2x}-1)>e^x(x^2+2x) \underset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$(x+1)(e^{2x}-1)>e^x((x+1)^2-1) \Leftrightarrow \dots$

$\frac{e^{2x}-1}{2e^x}>\frac{(x+1)^2-1}{2(x+1)} \Leftrightarrow f^{-1}(e^x)>f^{-1}(x+1) \Longleftrightarrow$

$e^x>x+1$ που ισχύει (γιατί;; …)

[ΕΜΕ-120.46+πρ4]