# 14η Άσκηση στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου

**2022-2023**

**Επαναληπτική άσκηση σε όλη την ύλη**

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=(x+\alpha)^2\sqrt{\beta+x^3}$ , $g(x)=\eta\mu(x+\gamma)\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}-\beta+1$ και

$h(x)=\begin{cases} f(x)\,,\ -1\le x\le 0 \\ g(x)\,,\ 0<x\le\pi \end{cases}$ με $\alpha,\beta\in[0,+\infty)$ και $\gamma\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, για τις οποίες γνωρίζουμε ότι:

- Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[-1,0]$.
- $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

**α)** Να αποδείξετε ότι:
  **i)** $\beta\ge 1$
  **ii)** $\alpha=\gamma=0$ και $\beta=1$.

**β)** Να εξετάσετε αν η h είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0)$ και $(-1,0]$.

**γ)** Να αποδείξετε ότι η $g'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

**δ)** Αφού βρείτε στο διάστημα $[0,\pi]$ την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g, η οποία την διαπερνά, στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}+2x=\pi+2$ στο διάστημα αυτό.

**ε)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $h'(x_1)=0$.

**στ)** Να μελετήσετε την h ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

**ζ)** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της h και του άξονα x΄x.

**Νίκος Τούντας**

# Λύση

**α) i)** Για να ορίζεται η f πρέπει $\beta+x^3\ge 0 \Leftrightarrow x^3\ge -\beta \overset{\beta\ge 0}{\Leftrightarrow} x\ge -\sqrt[3]{|-\beta|} \Leftrightarrow x\ge -\sqrt[3]{\beta}$ άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $\left[-\sqrt[3]{\beta},+\infty\right)$.

Από την h βλέπουμε ότι η f ορίζεται στο διάστημα $[-1,0]$ άρα πρέπει $-\sqrt[3]{\beta}\le -1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\beta}\ge 1 \Leftrightarrow \beta\ge 1$.

**ii)** Είναι $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)-\beta+1=1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)=\beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\gamma=\beta \;\; (1)$

Το $\gamma\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ άρα $0\le \sigma\upsilon\nu\gamma\le 1$ και $\beta\ge 1$. Άρα για να ικανοποιείται η (1) πρέπει $\sigma\upsilon\nu\gamma=1 \overset{\gamma\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{\Leftrightarrow} \gamma=0$ και $\beta=1$. Αφού η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Rolle στο $[-1,0]$, τότε $f(-1)=f(0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha-1)^2\sqrt{1-1}=\alpha^2\sqrt{1} \Leftrightarrow \alpha^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0$

Άρα $f(x)=x^2\sqrt{1+x^3}$, $x\ge 1$, $g(x)=\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$, $x\in\mathbb{R}$ και $h(x)=\begin{cases} x^2\sqrt{1+x^3}, & -1\le x\le 0\\ \eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}, & 0<x\le\pi\end{cases}$

**β)** Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$ με παράγωγο:

$$h'(x)=2x\sqrt{1+x^3}+\frac{x^2\cdot 3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}=\frac{4x\left(1+x^3\right)+3x^4}{2\sqrt{1+x^3}}=\frac{7x^4+4x}{2\sqrt{1+x^3}}=\frac{x\left(7x^3+4\right)}{2\sqrt{1+x^3}}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{h(x)}{x+1}=+\infty$ γιατί

**1$^{ος}$ τρόπος:** Είναι $L=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{h(x)}{x+1}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to -1^+}h'(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x\left(7x^3+4\right)}{2\sqrt{1+x^3}}=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to -1^+}\left[x\left(7x^3+4\right)\right]=3$, $\lim\limits_{x\to -1^+}\left[2\sqrt{1+x^3}\right]=0$ και $2\sqrt{1+x^3}\ge 0$.

**2$^{ος}$ τρόπος:** Είναι $L=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{h(x)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^2\sqrt{1+x^3}}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^2\sqrt{(1+x)\left(1-x+x^2\right)}}{x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^2\cancel{\sqrt{1+x}}\sqrt{1-x+x^2}}{\sqrt{1+x}^{\cancel{2}}}=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^2\sqrt{1-x+x^2}}{\sqrt{1+x}}=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to -1^+}\left[x^2\sqrt{1-x+x^2}\right]=3$, $\lim\limits_{x\to -1^+}\sqrt{1+x}=0$

και $\sqrt{1+x}\ge 0$. Επίσης σπάσαμε την ρίζα γιατί για x κοντά -1 από μεγαλύτερες τιμές είναι $1+x>0$ και $1-x+x^2>0$

Άρα η h δεν είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,0)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^{\cancel{2}}\sqrt{1+x^3}}{\cancel{x}}=0$ άρα η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0]$.

**γ)** Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με παράγωγο:

$g'(x)=\sigma\upsilon\nu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}+\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}(-\eta\mu x)=\sigma\upsilon\nu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}-\eta\mu^2 x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}=e^{\sigma\upsilon\nu x}\left(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu^2 x\right)$

Έστω η συνάρτηση $k(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu^2 x$, $x\in[0,\pi]$.

Η k είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $k'(x)=-\eta\mu x-2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu x(1+2\sigma\upsilon\nu x)$ και ισχύει $g'(x)=e^{\sigma\upsilon\nu x}k(x)$ επομένως:

Η $g'$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με παράγωγο:

$g''(x) = -ημx \cdot e^{συνx} \cdot k(x) + e^{συνx} \cdot k'(x) = -ημx \cdot e^{συνx} \cdot k(x) - e^{συνx} \cdot ημx(1+2συνx) =$
$= -ημx \cdot e^{συνx}\left(k(x) + 2συνx + 1\right) = -ημx \cdot e^{συνx}\left(συνx - ημ^2x + 2συνx + 1\right) =$
$= -ημx \cdot e^{συνx}\left(\cancel{-1} + συν^2x + 3συνx + \cancel{1}\right) = -ημx \cdot συνx \cdot e^{συνx}(συνx + 3)$

Είναι $-ημx < 0$ για κάθε $x \in (0,π)$, $συνx > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{π}{2}\right)$ και $συνx < 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{π}{2}, π\right)$, $e^{συνx} > 0$ για κάθε $x \in (0,π)$ και $-1 \le συνx \le 1 \Leftrightarrow 0 < 2 \le συνx + 3 \le 4$ για κάθε $x \in (0,π)$.

Επομένως $g''(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{π}{2}\right)$ και $g''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{π}{2}, π\right)$ άρα $g'$ γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{π}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{π}{2}, π\right]$.

**δ)** Αφού $g''(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{π}{2}\right)$ και $g''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{π}{2}, π\right)$ τότε η g είναι κοίλη στο $\left[0, \frac{π}{2}\right]$ και κυρτή στο $\left[\frac{π}{2}, π\right]$. Η g παρουσιάζει καμπή για $x = \frac{π}{2}$.

Επομένως η εφαπτομένη στο $x_0 = \frac{π}{2}$ διαπερνά την γραφική παράσταση της g.

Η εφαπτομένη στο $x_0 = \frac{π}{2}$ έχει εξίσωση: $y - g\left(\frac{π}{2}\right) = g'\left(\frac{π}{2}\right)\left(x - \frac{π}{2}\right) \Leftrightarrow y - 1 = -x + \frac{π}{2} \Leftrightarrow y = -x + \frac{π+2}{2}$

Είναι $2ημx \cdot e^{συνx} + 2x = π + 2 \Leftrightarrow ημx \cdot e^{συνx} = -x + \frac{π+2}{2} \Leftrightarrow g(x) = -x + \frac{π+2}{2}$ (1)

Η g είναι κοίλη στο $\left[0, \frac{π}{2}\right]$ άρα $g(x) \le -x + \frac{π+2}{2}$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{π}{2}\right]$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = \frac{π}{2}$. Η g είναι κυρτή στο $\left[\frac{π}{2}, π\right]$ άρα $g(x) \ge -x + \frac{π+2}{2}$ για κάθε $x \in \left[\frac{π}{2}, π\right]$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = \frac{π}{2}$. Άρα η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα στο $[0,π]$ την $x = \frac{π}{2}$.

**ε)** Η $h'$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,π)$ με $h'(x) = g'(x) = e^{συνx}k(x)$.

Η k είναι συνεχής και $k(0)k\left(\frac{π}{2}\right) = 1(-1) = -1 < 0$ άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_1 \in \left(0, \frac{π}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $k(x_1) = 0 \Leftrightarrow e^{συνx_1}k(x_1) = 0 \Leftrightarrow g'(x_1) = 0 \Leftrightarrow h'(x_1) = 0$.

Επειδή η $h'$ γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{π}{2}\right]$ το $x_1$ είναι μοναδικό.

**στ)** Για $-1 < x < 0$ είναι $h'(x) = \dfrac{x\left(7x^3+4\right)}{2\sqrt{1+x^3}}$

Είναι $7x^3 + 4 \ge 0 \Leftrightarrow 7x^3 \ge -4 \Leftrightarrow x^3 \ge -\frac{4}{7} \Leftrightarrow x \ge -\sqrt[3]{\frac{4}{7}}$ με $-\sqrt[3]{\frac{4}{7}} > -1$ ($-\sqrt[3]{\frac{4}{7}} > -1 \Leftrightarrow \frac{4}{7} < 1$ ισχύει)

Άρα $x\left(7x^3+4\right) > 0$ για κάθε $x \in \left(-1, -\sqrt[3]{\frac{4}{7}}\right)$ και $x\left(7x^3+4\right) < 0$ για κάθε $x \in \left(-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}, 0\right)$ και $2\sqrt{1+x^3} > 0$ για κάθε $x \in (-1,0)$.

Για $0 < x < π$ είναι $h'(x) = e^{συνx}k(x)$ και από γ) ερώτημα έχουμε:

Για $0<x<x_1<\frac{\pi}{2}<\pi \overset{h'\searrow}{\Rightarrow} h'(x)>h'(x_1)=0$ και $0<x_1<x<\pi \overset{h'\nearrow}{\Rightarrow} h'(x)>h'(x_1)=0$.

Η h είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0)$ και $(0,\pi]$. Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0$ και $h(0)=f(0)=0$ άρα η h είναι συνεχής στο μηδέν. Άρα η h είναι συνεχής στο $[-1,\pi]$.

Επομένως $h'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(-1,-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}\right)$, $h'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{7}},0\right)$ και $h'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,x_1)\cup(x_1,+\infty)$ άρα $h\nearrow\left[-1,-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}\right]$, $h\searrow\left[-\sqrt[3]{\frac{4}{7}},0\right]$ και $h\nearrow[0,\pi)$.

Η h παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}$ το $h\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}\right)$ και τοπικό ελάχιστο για $x=-1$ το $h(-1)=0$ και για $x=0$ το $h(0)=0$.

**ζ)** Για $-1<x\le -\sqrt[3]{\frac{4}{7}} \overset{h\nearrow}{\Rightarrow} h(x)>h(-1)=0$, για $-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}\le x<0 \overset{h\searrow}{\Rightarrow} h(x)>h(0)=0$ και για $0<x<\pi \overset{h\nearrow}{\Rightarrow} h(x)>h(0)=0$. Επίσης για $h(-1)=h(0)=h(\pi)=0$ άρα είναι $h(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[-1,0]$ με την ισότητα να ισχύει για $x=-1$ ή $x=0$ ή $x=\pi$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\Omega)=\int_{-1}^{\pi}|h(x)|dx=\int_{-1}^{\pi}h(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\pi}g(x)dx=$

$=I_1+\int_0^{\pi}g(x)dx=I_1+\int_0^{\pi}\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}dx=I_1-\left[e^{\sigma\upsilon\nu x}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{4}-\frac{1}{e}+e=\frac{e-4+4e^2}{4e}$ τ.μ. γιατί

$I_1=\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{-1}^{0}x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$

**1ος τρόπος:** Θέτουμε $1+x^3=u\ge 0$ για κάθε $x\in[-1,0]$ με $3x^2dx=du$. Για $x=-1$ είναι $u=0$ και για $x=0$ είναι $u=1$. Άρα $I_1=\int_{-1}^{0}x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx=\frac{1}{3}\int_{-1}^{0}\sqrt[3]{1+x^3}\,3x^2dx=\frac{1}{3}\int_0^1\sqrt[3]{u}\,du=\frac{1}{3}\int_0^1 u^{\frac{1}{3}}du=\frac{1}{\cancel{3}}\left[\frac{\cancel{3}u^{\frac{4}{3}}}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$

**2ος τρόπος:** Θέτουμε $\sqrt[3]{1+x^3}=u\Leftrightarrow 1+x^3=u^3\Leftrightarrow x^3=u^3-1$ με $3x^2dx=3u^2du\Leftrightarrow x^2dx=u^2du$. Για $x=-1$ είναι $u=0$ και για $x=0$ είναι $u=1$. Άρα $I_1=\int_{-1}^{0}x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx=\int_0^1u\cdot u^2du=\int_0^1u^3du=\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$