

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 10

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

Θ.Μ.Τ.

Στο παρόν φυλλάδιο υπάρχει μια επιλογή ασκήσεων από δύο εξαιρετικά βιβλία:

1. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Γ1, Β. Παπαδάκης, έκδοση 2020, εκδόσεις Σαββάλας
2. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Β' τεύχος, Αν. Μπάρλας, έκδοση 2018, εκδόσεις Μπάρλας

Κώστας Χρυσανθόπουλος, 5^ο ΓΕΛ Ηλιούπολης

A. Βασικές Ασκήσεις στο Θεώρημα Rolle – Θ.Μ.Τ.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.
 - α. Να αποδείξετε ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\Delta = [0, 3]$.
 - β. Να βρείτε τα $\xi \in (0, 3)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 2) \cdot \eta\mu x$. Να αποδείξετε ότι:
 - α. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(2, \pi)$.
 - β. Η εξίσωση $\epsilon\phi x = 2 - x$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο $(2, \pi)$.
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu 2x$. Να δείξετε ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, \pi]$ και στη συνέχεια, να βρείτε όλα τα $\xi \in (0, \pi)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2(\lambda + 1 + \ln x) - 3(\lambda + 1)x - 4\ln x$. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
5. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x^2 + \alpha x$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-2, -1]$.
 - α. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α .
 - β. Να επαληθεύσετε ότι ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle, βρίσκοντας ένα $\xi \in (-2, -1)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$.
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$.
 - α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$ και μία, τουλάχιστον, στο διάστημα $(0, 1)$.
 - β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.
7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 + 3\lambda x^2 + 2(\lambda - 2)x - 2\lambda + 1 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 1)$.
8. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία, το πολύ ρίζα.
9. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) \neq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει το πολύ μία ρίζα.
10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$.
 - α. Να αποδείξετε ότι για την f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[0, 1]$.
 - β. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο, το πολύ ρίζες.
 - γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων: $g(x) = 2^x$ και $h(x) = 2x - x^2 + 1$.

11. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με $f(2) = 2$ και $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι:
- α. Υπάρχει $\xi_1 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = 3\xi_1^2 - 4\xi_1$.
 - β. Υπάρχει $\xi_2 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2)(\xi_2 - 3) = -f(\xi_2)$
 - γ. Υπάρχει $\xi_3 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_3) = \frac{f(\xi_3)}{\xi_3}$.
 - δ. Υπάρχει $\xi_4 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_4)f(\xi_4) = -\frac{3\pi}{2}\xi_4\eta\mu(\pi\xi_4^2)$.
12. Αν $0 < \alpha < \beta$ και $\alpha^\beta = \beta^\alpha$, να δείξετε ότι:
- α. Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\alpha, \beta]$.
 - β. $1 < \alpha < e < \beta$.
13. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1-1$.
14. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν: $f'(x) \neq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $1 < f(x) < 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$, ώστε $f(x_0) = x_0^2 + 1$.
15. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x' στα σημεία με τετμημένη 1 και 2. Να αποδείξετε ότι:
- α. Για τη συνάρτηση $G(x) = \frac{f(x)}{x-3}$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[1, 2]$.
 - β. Υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, να διέρχεται από το σημείο $A(3, 0)$.
16. Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(0) = e^6$ και $f(3) = e^{-3}$. Να αποδείξετε ότι:
- α. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0, 3)$ τέτοιο, ώστε: $f'(x_1) = -3f(x_1)$.
 - β. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (0, 3)$ τέτοιο, ώστε: $f'(x_2) + 2x_2f(x_2) = 0$.
17. Δίνεται μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει ότι $f(0) = f(1) = f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.
18. Να αποδείξετε ότι για οποιεσδήποτε τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x + x^2$ και $g(x) = \alpha x + \beta$ έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.
19. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + \sin x = 2x$ έχει ακριβώς δύο ρίζες οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $(0, 3)$.
20. Δίνεται μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει ότι $f(1) - f(0) = 2$ και $f''(x) < 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 4\xi^3 + 2\xi$

21. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 4$ και $f(2) = 3$. Να αποδείξετε ότι:
- α. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = x_0^2$.
- β. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) + \xi f'(\xi) = f'(\xi) + 3\xi^2 - 2\xi$
22. Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = x^2 - \pi x$.
23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$. Να δείξετε ότι για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[1, 5]$ και να βρείτε τα $\xi \in (1, 5)$, για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = \frac{1}{2}$.
24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 5x + 6, & x \leq -1 \\ 3x^2 + 7x + 7, & x > -1 \end{cases}$
- α. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[-3, 1]$.
- β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-3, 1)$, ώστε $f'(\xi) = 2$ και στη συνέχεια να βρείτε μια τιμή του ξ που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση.
25. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f(3) - f(1) = 4$.
- α. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 2$.
- β. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο M της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y = 2x + 3$.
26. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ισχύει $f(1) - f(0) > 0$.
- α. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) > 0$.
- β. Αν επιπλέον ισχύει $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
27. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, x)$, $x > 0$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}$.
28. Αν $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, με $\Delta = [\alpha, \beta]$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη, τότε ισχύουν:
- α. Αν $f' \uparrow$ στο Δ , τότε $f'(\alpha) < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < f'(\beta)$
- β. Αν $f' \downarrow$ στο Δ , τότε $f'(\beta) < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < f'(\alpha)$
29. Για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ με $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $1 - \frac{\alpha}{\beta} < \ln \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} - 1$.
30. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- α. Αν $f(1) = 0$, να δείξετε ότι $f'(x) > \frac{f(x)}{x-1}$, για κάθε $x > 1$.
- β. Να δείξετε ότι $f(2x) > f(x) + xf'(x)$, για κάθε $x > 0$.
- γ. Να δείξετε ότι $f(x) + f(5x) > 2f(3x)$, για κάθε $x > 0$.

31. Με τη βοήθεια του Θ.Μ.Τ. αποδείξτε ότι:

α. $\ln x \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$.

β. $\ln x = x - 1 \Leftrightarrow x = 1$

γ. $e^x \geq x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ. $e^x = x + 1 \Leftrightarrow x = 0$

32. Να δείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

α. $e^x > x$, $x \in \mathbb{R}$

β. $\ln x < x$, $x > 0$

γ. $e^{x-1} \geq x$, $x \in \mathbb{R}$

δ. $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$, $x > 0$

ε. $e^x > \ln x$, $x > 0$

στ. $e^x - \ln x > 2$, $x > 0$

33. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(e) = e \ln 2$ και $f'(x) < \ln 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(1) > \ln 2$.

34. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο και ισχύουν: $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) - f(0) > f'(0)$. Να αποδείξετε ότι $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

35. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 2a$, $f(2) = 4a$, $f(4) = 6a$ και $f(7) = -3a$ με $a \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (1, 7)$, διαφορετικά ανά δύο, ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = 0$

36. Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, για την οποία ισχύει $f(\alpha) = 3\alpha - \beta$ και $f(\beta) = \alpha + \beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 4$.

37. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(15) = f(3) + 8$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (3, 15)$, διαφορετικά ανά δύο, ώστε: $f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) + 3f'(\xi_3) = 4$.

38. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 2$ και $f(3) = 6$. Να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 8 - 2\xi$,

β. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 3)$, διαφορετικά μεταξύ τους, ώστε $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = 4$

39. Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(-5) = -2$ και $f(1) = 4$. Να αποδείξετε ότι:

α. υπάρχει $x_0 \in (-5, 1)$, ώστε $f(x_0) = 1$,

β. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-5, 1)$, διαφορετικά μεταξύ τους, ώστε: $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 2$

40. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει ότι $f(1) = a + 2\beta$, $f(2) = 2\alpha + 3\beta$, $f(3) = 3\alpha + 4\beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$, ώστε $f''(\xi) = 0$.

41. Δίνεται συνάρτηση f , συνεχής στο $[2, 6]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, 6)$, για την οποία ισχύει $f(2) = -6$ και $1 \leq f'(x) \leq 2$ για κάθε $x \in (2, 6)$.

α. Να αποδείξετε ότι $|f(6)| \leq 2$.

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [2, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - \frac{3x}{2}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in (2, 6)$,

ii) για όλα τα $\alpha, \beta \in [2, 6]$ ισχύει ότι $|g(\beta) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|\beta - \alpha|$

42. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε η f' να είναι γνησίως φθίνουσα. Να αποδείξετε ότι:

α. $3f'(4) + f(1) < f(4) < 3f'(1) + f(1)$

β. $f(3) + f(5) > f(1) + f(7)$

43. Για κάθε $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, με $\alpha \leq \beta$, να αποδείξετε ότι: $\frac{\beta - \alpha}{\eta \mu^2 \beta} \leq \sigma \varphi \alpha - \sigma \varphi \beta \leq \frac{\beta - \alpha}{\eta \mu^2 \alpha}$

44. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

α. $x + 2 \leq f(x) \leq xf'(x) + 2$ για κάθε $x \geq 0$,

β. $f(x) + f(3x) \geq 2f(2x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

45. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $|f'(x)| \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $|f(\beta) - f(\alpha)| \leq |\beta - \alpha|$

β. να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(\sqrt{x^2 + 1}) - f(x) \right)$

46. α. Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και είναι γνησίως αύξουσα

στο $[\alpha, \beta]$. Να δείξετε ότι: $f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$

β. Να δείξετε ότι $2e^5 < e^3 + e^7$

47. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει

$f(a) + f(3a) = 2f(2a)$, $a > 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, 3a)$ ώστε $f''(\xi) = 0$.

48. Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(\alpha) = \beta$ και $f(\beta) = \alpha$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . να αποδείξετε ότι:

α. η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα $x_0 \in (\alpha, \beta)$,

β. υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = 1$

Β. Επιπρόσθετες Ασκήσεις στο Θεώρημα Rolle – Θ.Μ.Τ.

49. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) - f(0) = e$. Να αποδείξετε ότι:

α. η εξίσωση $f'(x) - 2x = e^x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 1)$,

β. η εξίσωση $\frac{f'(x)}{x} + 3x = \frac{e}{x} + 2$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

50. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α. η f είναι 1-1.

β. αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(4x^3 + 3(a-3)x^2) - f(2(3a+\beta)x - 3\beta) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 3)$.

51. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$. Επίσης ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta\mu x - \sqrt{x+1}}{x} = \frac{3}{2}.$$

α. Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\sin^2 x \cdot f'(x) + \sqrt{2} \sin^3 x + f'(0) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

52. Έστω $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(1) - f(4) = 14$. Να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 4)$ τέτοιο, ώστε $2\sqrt{\xi} \cdot f'(\xi) = 1 - 4\xi\sqrt{\xi}$.

β. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 4)$ τέτοιο, ώστε $3x_0^2 f'(x_0) = -24 - 8x_0^2$.

53. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(1) = e^2 - e$ και $f(2) = \frac{e^2}{2}$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $x_0^2 f'(x_0) + e^{x_0} x_0 - e^{x_0} = 0$

54. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(3) = 6$ και $f(6) = 12$. Να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (3, 6)$ τέτοιο, ώστε $\xi f'(\xi) = f(\xi)$.

β. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (3, 6)$ τέτοιο, ώστε $(x_0 - 4)f'(x_0) + f(x_0) = 10$.

55. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α. η εξίσωση $xf'(x)\sin x \cdot \ln x + f(x)\sin x = xf(x)\eta\mu x \cdot \ln x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

β. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x) + \frac{f(x)}{x-1} + \frac{2f(x)}{2x-\pi} = 0$.

56. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f(2) = e^5 f(3) = \sqrt{e} f(1)$.

Να αποδείξετε ότι:

α. η εξίσωση $f'(x) + 2xf(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(2, 3)$.

β. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $\xi^2 f'(\xi) = f(\xi)$.

57. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{e} = f(0) = ef\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Να αποδείξετε ότι:

α. η εξίσωση $f'(x) = f(x)\eta\mu x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

β. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)\sigma\upsilon\nu^2 \xi + f(\xi) = 0$.

58. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τρεις φορές παραγωγίσιμη. Η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στα σημεία x_1 και x_2 με $x_1 < x_2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'''(\xi) = 0$.

59. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = f(2) = 2$ και $f(1) = 3$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3f'(x) - 2x = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $[0, 2]$.

β. Αν επιπλέον η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 4 - 6\xi$,

ii) η γραφική παράσταση της $g(x) = xf(x) + x^2 - 4x$ έχει δύο τουλάχιστον οριζόντιες εφαπτόμενες.

iii) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $2f'(x_0) + 2x_0 f''(x_0) = -2$.

60. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x + \mu$ με $\mu \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

61. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x - x^2$ έχει το πολύ τρία συνευθειακά σημεία.

62. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ . να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' στο Δ υπάρχει το πολύ μία ρίζα της f .

63. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 6x^2 + ax + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της C_f σχηματίζει γωνία 50° με τον άξονα $x'x$.

64. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)} + f(x) - 2x = 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β. Να υπολογίσετε την τιμή $f(-1)$.

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x^3 + 3x) - f(1 - 3\eta\mu x) = f(-1)$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα,

η οποία ανήκει στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

δ. να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x-1}) = f(1 + \ln x)$

65. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύουν $f(1) = -2$, $f(2) = 3$

και $f(3) = \frac{f(4) + f(5)}{2} < 0$. Να αποδείξετε ότι:

α. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = 0$,

β. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [4, 5]$ τέτοιο, ώστε $2f(\xi) = f(4) + f(5)$,

γ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (3, 5)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_2) = 0$,

δ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_3 \in (1, 5)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_3) = 0$.

66. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη, και η συνάρτηση $g(x) = 2x^2 - 8x + 7$. Οι C_f και

C_g τέμνονται στα σημεία με τετμημένες 1, 2 και 3. Να αποδείξετε ότι:

α. η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο διάστημα $(1, 3)$,

β. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2020.

67. Δίνεται παραγωγίσιμη και περιττή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = 6$. Να αποδείξετε ότι:

α. η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων,

β. υπάρχουν δύο τουλάχιστον εφαπτομένες της C_f παράλληλες στην ευθεία $3x - y + 2020 = 0$.

68. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της

$A(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y = 3x - 5$. επίσης ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - x^2 + 5}{\sqrt{x+1} - 2} = -28$.

α. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.

β. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $B(3, f(3))$.

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$ ώστε $f'(\xi) = 3$.

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 3)$, ώστε $f''(x_0) = -2$.

69. Δίνεται δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$f(1) = -\frac{f(-3)}{7} = \frac{f(3)}{5}$. Να αποδείξετε ότι:

α. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (-3, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = 2f(1)$,

β. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2) = 2f(1)$,

γ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-3, 3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$

70. Δίνεται συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f(\alpha) = 2\beta$ και $f(\beta) = 2\alpha$. Να αποδείξετε ότι:

α. η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β) ,

β. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 4$

71. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 2$ και $f(3) = 8$. Να αποδείξετε ότι:

α. υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$, ώστε $f(x_0) = 6$,

β. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 3)$, διαφορετικά μεταξύ τους, ώστε $\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 1$

72. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν $f(1) = 2$ και $f(3) = f(4) = 6$. Να αποδείξετε ότι:

α. υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$, ώστε $f'(x_0) = 2$,

β. υπάρχει $\xi \in (1, 4)$, ώστε $f'(\xi) = 1$

γ. υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (3, 4)$, με $\xi_1 \neq \xi_2$, ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.

73. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + \beta x + 5$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(2, f(2))$ έχει εξίσωση $y = 36x - 55$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 7$ και $\beta = -12$.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $(0, 1]$.

γ. Έστω x_0 η ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ η οποία ανήκει στο $(0, 1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$, με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια, ώστε $x_0 f'(\xi_1) + 2020 f'(\xi_2) = -5$

74. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$, $B(2, -4)$ και $\Gamma(3, 2)$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 3)$, διαφορετικά μεταξύ τους, τέτοια, ώστε

$$f(x_1) = f(x_2) = 0.$$

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_3 \in (1, 3)$, ώστε $f''(x_3) > 0$.

γ. Αν επιπλέον ισχύει $f'(0) < f'(-1)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_4 \in (-1, 3)$ τέτοιο ώστε $f''(x_4) = 0$.

75. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και $|f'(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι $-x \leq f(x) \leq x$ για κάθε $x \geq 0$.

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{f(x) + 2x}$.

γ. Να αποδείξετε ότι $|f(2x) - f(x)| \leq x$ για κάθε $x \geq 0$.

76. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και $f^2(x) + 2f(x) = e^{2x} - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τον τύπο της f .

β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $x \leq f(x) \leq xe^x$

77. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για την f σε κατάλληλο διάστημα, ή με οποιοδήποτε άλλον τρόπο, να αποδείξετε ότι:

α. $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$

β. $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$.

γ. $\frac{2}{5} < \ln \frac{5}{3} < \frac{2}{3}$

δ. $2 - \frac{e}{\pi} \leq \ln \pi \leq \frac{\pi}{e}$