

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 11

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

Θ.Μ.Τ.

Στο παρόν φυλλάδιο υπάρχει μια επιλογή ασκήσεων από δύο εξαιρετικά βιβλία:

1. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Γ2, Β. Παπαδάκης, έκδοση 2020, εκδόσεις Σαββάλας
2. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Β' τεύχος, Αν. Μπάρλας, έκδοση 2018, εκδόσεις Μπάρλας

Κώστας Χρυσανθόπουλος, 5^ο ΓΕΛ Ηλιούπολης

Ασκήσεις

Α. Βασικές Ασκήσεις στις Συνέπειες – Θ.Μ.Τ.

1. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x)\sigma\phi x = 2f(x)$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)\sigma\nu\nu^2 x$ είναι σταθερή στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
2. Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $xf'(x) - 2f(x) = 0$, για κάθε $x > 0$.
 - α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, $x > 0$, είναι σταθερή.
 - β) Αν επιπλέον $f(1) = 2$, να βρείτε τον τύπο της f .
3. Έστω $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 1$ η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f'(x) = x\sigma\nu\nu x$, για κάθε $x \in (0, \pi)$. Να δείξετε ότι $f(x) = x\eta\mu x + \sigma\nu\nu x$, $x \in [0, \pi]$.
4. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(1) = 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = \frac{1 - xf(x)}{x^2}$, για κάθε $x > 0$. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.
5. Έστω $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) - \sigma\phi x \cdot f(x) = 0$, $x \in (0, \pi)$. Να δείξετε ότι $f(x) = \eta\mu x$, $x \in (0, \pi)$.
6. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = f(x) - e^x \eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(x) = e^x \sigma\nu\nu x$, $x \in \mathbb{R}$.
7. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = 2xe^{-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.
8. Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες και ισχύουν $f''(x) = g''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f'(0) = g'(0)$ και $f(1) - g(1) = 1$. Να δείξετε ότι $f(0) = g(0) + 1$.
9. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(4) = 3$ και $2xf'(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
 - α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)\sqrt{x}$ είναι σταθερή στο διάστημα $(0, +\infty)$.
 - β) Να βρείτε τον τύπο της f .

10. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

$$2f(x) + 4xf'(x) + (x^2 + 9)f''(x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, f(0) = 0, \text{ και } f'(0) = \frac{1}{9}. \text{ Να δείξετε ότι}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 9}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

11. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

12. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν: $f(0) = 0, g(0) = 1, f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = -f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α) $f^2(x) + g^2(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R},$

β) $f(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}.$

13. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(2) = 2, f(-1) = -3$ και

$$f'(x) = -\frac{2f(x)}{x} \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση $g(x) = x^2 f(x)$ ισχύει $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*.$

β) να βρείτε τον τύπο της f .

14. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 - 6x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(2) = 5,$

β) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = x^2 + e^{4x} - \sigma\upsilon\nu(5x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1,$

γ) $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R},$ συνεχής, με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3$ για κάθε $x > 0$ και $f(4) = 15.$

15. Θεωρούμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(-1) = -4, f(1) = 3$

και $f'(x) = \frac{3x^2 + x + 2}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$. Να βρείτε τον τύπο της f .

16. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(2) = 11$ και

$(x-1)f'(x) = 2x^2 + 3x - 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

17. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}, f(1) = e^2$ και $f'(x) = 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R},$

β) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = \ln 3$ και $f'(x) = 4x^3 e^{-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R},$

γ) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 2$ και $xf'(x) - f(x) = x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

18. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1) = 5, f(-1) = 2$ και

$x^3 f'(x) + x^2 f(x) = 2x^3 + 1$ για κάθε $x \neq 0$.

19. Να βρείτε τη συνάρτηση f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 2$ και $f'(x) + f(x) = x^2 + 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R},$

β) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = \frac{1-e}{e}$ και $x^2 f'(x) - f(x) = 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty).$

20. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0) = 2$ και

$$f'(x)\sin x - f(x)\eta\mu x = f(x)\sin x \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right). \text{ Να βρείτε τον τύπο της } f.$$

21. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(1) = 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(x) = f(x) + \frac{e^x}{x}, \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Να δείξετε ότι } f(x) = e^x \ln x, \quad x > 0$$

22. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν

$$xf'(x) + (x^2 + 1)f''(x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, f(0) = 0 \text{ και } f'(0) = 1. \text{ Να δείξετε ότι}$$

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

B. Επιπρόσθετες Ασκήσεις στις Συνέπειες – Θ.Μ.Τ.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύουν: $f'(x) \neq 0$

$$\text{και } e^{2xf''(x)}(e^3 f(x))^{f'(x)} = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Επίσης η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } M(4, f(4)) \text{ είναι η } \varepsilon:$$

$$ex + 8y - 12e = 0.$$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(4)$ και $f'(4)$ και να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x} \cdot \ln f(x)$ είναι σταθερή στο διάστημα $(0, +\infty)$.

γ) Να βρείτε τον τύπο της f .

δ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{f(x)}.$

24. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 0$ και

$$x^2 f'(x) + \ln x = 1 \text{ για κάθε } x > 0.$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να υπολογίσετε τα όρια: i) $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf'''(x)}{f'(x)}$

25. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$. Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ και ισχύει $f'(x) - \frac{1}{\eta\mu x} = f(x) \cdot \sigma\phi x$ για κάθε $x \in (0, \pi)$. Να βρείτε:
- Τον τύπο της f ,
 - Το πρόσημο της f για τις διάφορες τιμές του $x \in (0, \pi)$.
26. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και $f'(x) = e^{\ln x + x^2 - f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε τον τύπο της f ,
 - Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x^2)$.
27. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f'(1) = 2e^2$ και $f'(x) - 2xf(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - Να βρείτε τον τύπο της f .
 - Να αποδείξετε ότι $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της C_f που σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$.
28. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(-1) = \frac{e+1}{e}$, $f(1) = e - 4$ και $x^2 f'(x) = x^2 e^x - 1$ για κάθε $x \neq 0$.
- Να βρείτε τον τύπο της f .
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi < 0$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = -2020$.
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2020$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο διάστημα $(0, +\infty)$.
29. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\ln f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \ln 2$ και $f'(x)\sigma\upsilon\nu x + f(x)\eta\mu x = f(x)\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Να βρείτε τον τύπο της f .
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)}{x} = 2\eta\mu x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
30. Δίνονται δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ και $g(1) = -1$. Επίσης για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν:
- $f(x) \neq 0$ και $g(x) \neq 0$
 - $f'(x) = -(3x^2 + 1)g(x)$
 - $g'(x) = -(3x^2 + 1)f(x)$
- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f^2(x) - g^2(x)$ είναι σταθερή.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x^3+x-2}$ και να βρείτε τον τύπο της g.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.

δ) Αν γνωρίζετε ότι η f^{-1} είναι συνεχής,, να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο 1 και να υπολογίσετε την $(f^{-1})'(1)$.

31. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(-7) = 2$. Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ και ισχύει $3f^5(x)f'(x) = x-1$ για κάθε $x < 1$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$ για κάθε $x \in (-\infty, 1]$.

β) Η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

γ) Υπάρχει μοναδικό $\rho \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = \rho$.

δ) Η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ έχει 3 τουλάχιστον ρίζες.

32. Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

$xf'(x)(xf'(x) + 2) = \frac{(1-x^2e^{f(x)})(1+x^2e^{f(x)})}{x^4e^{2f(x)}}$ για κάθε $x > 0$. Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο

σημείο της $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y = -2x + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $xf'(x) + 1 = -\frac{1}{x^2e^{f(x)}}$ για κάθε $x > 0$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{2}{x+1} < f(x) - f(x+1) < \frac{2}{x}$ για κάθε $x > 0$.

33. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h}f(x+h) - e^xf(x)}{h} = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Υπάρχουν ακριβώς 2 σημεία της C_f στα οποία οι εφαπτομένες της C_f είναι παράλληλες στην ευθεία $\zeta: x - 3y + 2020 = 0$ και επιπλέον ότι οι τετμημένες των σημείων αυτών ανήκουν στο διάστημα $(0, 2)$.