

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 15

ΜΕΛΕΤΗ – ΧΑΡΑΞΗ ΓΡΑΦ. ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

Στο παρόν φυλλάδιο υπάρχει μια επιλογή ασκήσεων από δύο εξαιρετικά βιβλία:

1. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Γ2, Β. Παπαδάκης, έκδοση 2020, εκδόσεις Σαββάλας
2. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Β' τεύχος, Αν. Μπάρλας, έκδοση 2018, εκδόσεις Μπάρλας

Κώστας Χρυσανθόπουλος, 5^ο ΓΕΛ Ηλιούπολης

Ασκήσεις

Α. Βασικές Ασκήσεις στη Μελέτη - Χάραξη Γραφικής Παράστασης

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$ και στη συνέχεια να χαράξετε τη γραφικής της παράσταση.
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-1} - x^2$.
 - α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
 - β. Να βρείτε τις οριακές τιμές της f στα άκρα του διαστήματος του πεδίου ορισμού της.
 - γ. Με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f και να σχεδιάσετε τη C_f .
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \arcsin x - x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
 - α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
 - β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
 - γ. Με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f και να σχεδιάσετε τη C_f .
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
 - α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
 - β. Να βρείτε τις οριακές τιμές της f στα άκρα του διαστήματος του πεδίου ορισμού της και τις ασύμπτωτες της C_f .
 - γ. Με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f και να σχεδιάσετε τη C_f .
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^x$, $x > 0$.
 - α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
 - β. Να βρείτε τις οριακές τιμές της f στα άκρα του διαστήματος του πεδίου ορισμού της.
 - γ. Με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f και να σχεδιάσετε τη C_f .
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$.
 - α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

β. Να βρείτε τις οριακές τιμές της f στα άκρα του διαστήματος του πεδίου ορισμού της και τις ασύμπτωτες της C_f .

γ. Με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f και να σχεδιάσετε τη C_f .

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

β. Να βρείτε τις οριακές τιμές της f στα άκρα του διαστήματος του πεδίου ορισμού της και τις ασύμπτωτες της C_f .

γ. Με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f και να σχεδιάσετε τη C_f .

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 e^{1-x}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τις θέσεις των σημείων καμπής.

β. Να βρείτε τις οριακές τιμές της f στα άκρα του διαστήματος του πεδίου ορισμού της και τις ασύμπτωτες της C_f .

γ. Με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f και να σχεδιάσετε τη C_f .

δ. Με τη βοήθεια της C_f , να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

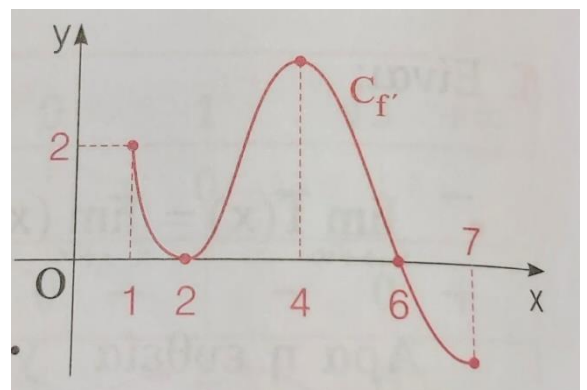
9. Έστω $f : [1, 7] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύουν $f(6) = 2f(4) = -4f(1) = 4$, $f(2) = 0$. Επίσης η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[4, 7]$.

Η γραφική παράσταση της f' , φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ. Με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της C_f .



10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

γ. Με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f και να σχεδιάσετε τη C_f .

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$ και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

β. Έστω ότι είναι $f^{-1}(x) = \frac{1}{e^x - 1}$ με $x \neq 0$.

i) Να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να μελετήσετε την f^{-1} ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f^{-1} .

iv) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f^{-1} .

12. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 1$ και $4xf'(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τον τύπο της f .

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

ε. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f (Δίνεται ότι $\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,6$)

13. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$f^2(x) - 2xf'(x) = -4x^2 + 12x$, για κάθε $x \in [0, 4]$. Επίσης η εφαπτομένη ϵ της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ τέμνει τον άξονα x' στο σημείο με τεταγμένη 2.

α. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 4$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ϵ .

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{-3x^2 + 12x}$, για κάθε $x \in [0, 4]$.

γ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

ε. Να σχεδιάσετε τη C_f και την εφαπτομένη ϵ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

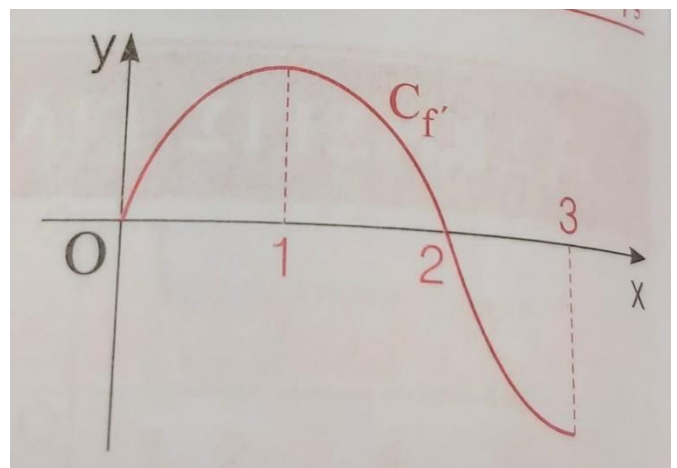
14. Έστω $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με

$f(2) = 2f(1) = 2f(3) = 4f(0) = 4$. Η γραφική παράσταση της f' φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .



15. Έστω $f : [1, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(6) = 2f(5) = 4f(1) = -4f(2) = 4$. Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[1, 3]$ και η γραφική παράσταση της f' φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

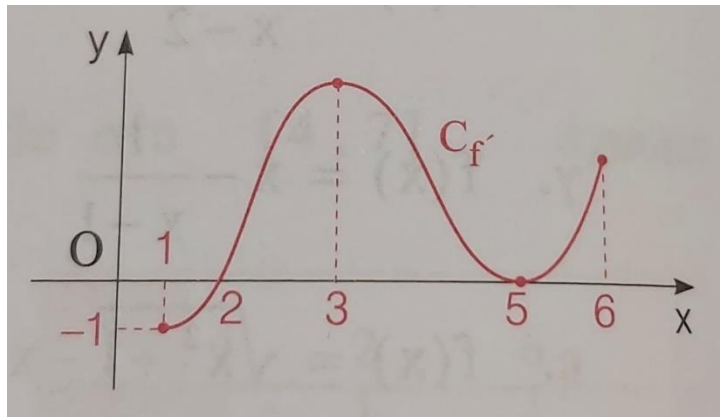
γ. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

δ. Να βρείτε (εφόσον υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x) + 1}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)}{f'(f(x))}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x) + x - 2}$



16. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα $[1, 6]$.

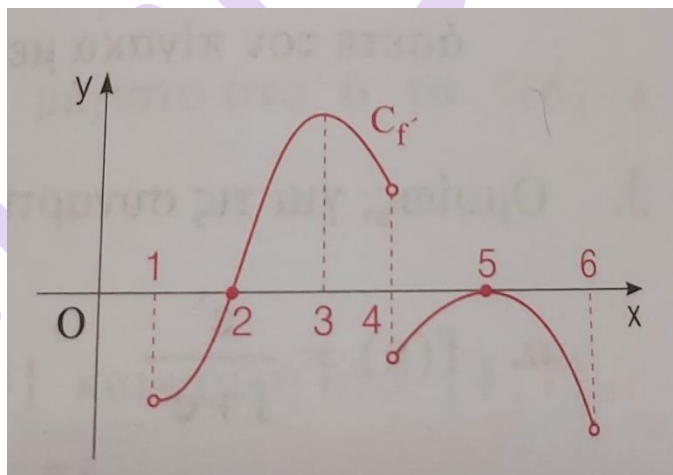
α. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων.

β. Να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής στο διάστημα $[1, 6]$.

γ. Να εξετάσετε αν υπάρχουν σημεία στα οποία η f' δεν είναι συνεχής και να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f'(x)}$ και ii) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{f'(x)}$

δ. Αν επιπλέον δίνονται $f(1) = 2f(2) = f(3) = f(5) = 2$, $f(4) = 4$ και $f(6) = 0$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .



Β. Επαναληπτικές Ασκήσεις στο Διαφορικό Λογισμό

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + a, & x \leq 1 \end{cases}$

α. Να υπολογίσετε το $a \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $a = 1$.

β. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

γ. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι κάθετη προς την ευθεία $y = 4x + 2022$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

18. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \neq 1$.

α. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

β. Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, με $x \in (0, 1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ. Αν $\Phi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση Φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

δ. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης Φ και να τη σχεδιάσετε.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{1}{4x}$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $\left(\frac{1}{e^3}, 1\right)$.

γ. Αν x_1 είναι η μικρότερη ρίζα της $f(x) = 0$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{1}{f(x)}$.

δ. Να αποδείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

ε. Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της. Να βρείτε τη γωνία ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$.

20. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(\ln 3) = \ln 2$ και

$2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε τον τύπο της f .
- β. Αν ισχύει $f(x) \geq ax$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$.
- γ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- δ. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- ε. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
- στ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f . (Δίνεται ότι $\ln 2 \approx 0.7$).

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{8 - x^2}$.

- α. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $2\sqrt{2}$.
- β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- δ. Θεωρούμε ένα σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ της C_f με $\alpha \in (0, 2\sqrt{2})$ και την εφαπτομένη ε της C_f στο M .
έστω επίσης E το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E δίνεται από τη συνάρτηση $E(\alpha) = \frac{32}{\alpha\sqrt{8 - \alpha^2}}$, $\alpha \in (0, 2\sqrt{2})$

ii) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του εμβαδού E .

ε. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Να αποδείξετε ότι από οποιοδήποτε σημείο $N(\beta, f(\beta))$ της C_f με $\beta \in (-2, 2)$ διέρχονται δύο εφαπτόμενες της C_g , οι οποίες είναι κάθετες.

22. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 2x - 4\ln x$ και $g(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 4x\ln x$.

- α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.
- γ. Να αποδείξετε ότι η g έχει ακριβώς 2 ακρότατα.
- δ. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $g(x) = 0$.

23. Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει:

$f'(x) + xf''(x) = -1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Επιπλέον η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της

$M\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ έχει εξίσωση $y = x - \ln(2e)$.

- α. Να βρείτε τον τύπο της f .
- β. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -2022$ έχει ακριβώς δύο λύσεις στο διάστημα $(0, +\infty)$.
- δ. Ένα σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση της f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό α μονάδες/sec, όπου $\alpha > 0$.

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του M τη χρονική στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι 2α μονάδες/sec.

ii) Τη χρονική στιγμή που η τετμημένη του M είναι $\frac{1}{2}$ η τεταγμένη του M μεταβάλλεται με

ρυθμό $(e^{4-\alpha} + 3)$ μονάδες/sec. Να βρείτε τον αριθμό α .

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a^x - \ln(x+1)$ με $x > -1$, όπου $a > 0$ και $a \neq 1$.

α. Αν ισχύει ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $a = e$.

β. Για $a = e$ να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f είναι κυρτή,

ii) η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$,

iii) η εξίσωση $\frac{f(\beta)-1}{\beta-1} + \frac{f(\gamma)-1}{\gamma-2} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$ αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x < 1 \\ x^3+3, & x \geq 1 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β. Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

γ. Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(4)}{x - 4}$

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x - x) = 3 + \left(\frac{x^2 + 2}{2}\right)^3$.

26. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x(\ln x)^2 + x, & x > 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$

α. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a .

β. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

γ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονotonία.

δ. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει ασύμπτωτες.

ε. Να βρείτε την εφαπτομένη ϵ_1 της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$, με $x_0 > 0$, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

στ. Να αποδείξετε ότι η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής, στο οποίο να βρείτε την εφαπτομένη ϵ_2 της C_f .

ζ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$.

η. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις εφαπτομένες ϵ_1 και ϵ_2 , καθώς και τη γραφική παράσταση της f . (Δίνεται ότι $\frac{1}{e} \approx 0,4$)

27. Δίνεται μια κυρτή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $g(x) = f(1) \cdot x^3 + f(2) \cdot x^2 - 2x + 2022$

έχει τοπικά ακρότατα στα $x_1 = -1$ και $x_2 = \frac{1}{3}$.

α. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(1)$ και $f(2)$, καθώς και το είδος των ακροτάτων της g .

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x)f'(x) = 2x - 3$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστ. $(1, 3)$

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

δ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 .

ε. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq f'(2) \cdot x - 2f'(2) + 2$ και να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

28. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη. Οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία $K(1, f(1))$ και $\Lambda(3, f(3))$ έχουν εξισώσεις $\epsilon_1: y = 6x - 3$ και $\epsilon_2: y = 3x - 2$ αντίστοιχα.

α. Να υπολογίσετε τις τιμές $f'(1)$, $f(1)$, $f'(3)$ και $f(3)$.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(\xi, f(\xi))$ να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο 1.

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 4$.

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 3)$, με $\xi_1 < \xi_2$, ώστε $\frac{2}{f''(\xi_1)} + \frac{2}{f''(\xi_2)} = -2$

29. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(1) = 1$ και

$$x^2 f'(x) + xf(x) = 2x^2 + 2 \text{ για κάθε } x > 0.$$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \frac{2 \ln x}{x}$

β. Να εξετάσετε αν η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

γ. Να βρείτε την ασύμπτωτη ϵ της C_f στο $+\infty$.

δ. Να βρείτε, αν υπάρχει, εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ϵ .

ε. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση x_0 .

στ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{x^2}{2} + \ln^2 x$ έχει ελάχιστο στο x_0 του ερωτήματος (ε), το

οποίο ελάχιστο ισούται με $\frac{x_0^4 + 2x_0^2}{4}$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2$.

α. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

β. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο σε κάποιο $x_0 \in (2, \frac{5}{2})$.

γ. Αν x_0 είναι η θέση ελαχίστου της f , να αποδείξετε ότι $f(x_0) = 4 - \frac{1}{x_0} - x_0$.

δ. Να αποδείξετε ότι: i) $f(x) > \frac{11}{10}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$,

ii) η εξίσωση $f(x) = \frac{3}{2}$ έχει ακριβώς 2 λύσεις.