

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 16

ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ

Στο παρόν φυλλάδιο υπάρχει μια επιλογή ασκήσεων από δύο εξαιρετικά βιβλία:

1. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Γ2, Β. Παπαδάκης, έκδοση 2020, εκδόσεις Σαββάλας
2. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Β' τεύχος, Αν. Μπάρλας, έκδοση 2018, εκδόσεις Μπάρλας

Κώστας Χρυσανθόπουλος, 5^ο ΓΕΛ Ηλιούπολης

Ασκήσεις

Α. Βασικές Ασκήσεις στην Αρχική Συνάρτηση - Παράγουςα

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$. Να βρείτε:
 - Μια παράγουςα της f .
 - Όλες τις παράγουςες της f .
 - Την παράγουςα της f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$.
- Να βρείτε μια παράγουςα F των συναρτήσεων:
 - $f(x) = x^4$
 - $f(x) = \frac{1}{x^5}, \quad x > 0$
 - $f(x) = \sqrt[3]{x}$
 - $f(x) = \eta\mu x + e^x - \frac{1}{x}, \quad x > 0$
 - $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad x > 0$
 - $f(x) = x^2 + x - \frac{1}{x^2}, \quad x < 0$
- Να βρείτε μια παράγουςα F των συναρτήσεων:
 - $f(x) = 5x^2$
 - $f(x) = 4x^3$
 - $f(x) = \frac{3}{2x}, \quad x > 0$
 - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$
 - $f(x) = 3x^2 + ax + \beta$
 - $f(x) = \frac{\alpha}{x} - \beta \sigma\upsilon\nu x, \quad x > 0$
- Έστω η συνάρτηση $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \ln(\varepsilon\phi x)$ είναι μια αρχική της f .
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R}$.
 - Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, με $x \in \mathbb{R}$, είναι μια αρχική της f .
 - Να βρείτε όλες τις αρχικές της f .
- Να βρείτε μια παράγουςα F των συναρτήσεων:
 - $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{x^2}, \quad x < 0$
 - $f(x) = \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
 - $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x$
 - $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{e^x}$
 - $f(x) = \sigma\upsilon\nu x \cdot e^{\eta\mu x}$
 - $f(x) = 2x \cdot e^{x^2}$
 - $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$
 - $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
- Να βρείτε όλες τις παράγουςες των συναρτήσεων:
 - $f(x) = 12x^3 + \frac{3}{x} - \sqrt{x} + 2e^x - 5^x, \quad x \in (0, +\infty)$

$$\beta. f(x) = \frac{5}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + 2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

8. Να βρείτε μια παράγουσα F των συναρτήσεων:

$$\alpha. f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

$$\beta. f(x) = \frac{1}{x-1}, \quad x > 1$$

$$\gamma. f(x) = \varepsilon\varphi x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\delta. f(x) = \frac{1}{x \ln x}, \quad x > 1$$

$$\varepsilon. f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

$$\sigma\tau. f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

9. Να βρείτε όλες τις παράγουσες των συναρτήσεων:

$$\alpha. f(x) = (2x-3)(x^2-3x+1)^2$$

$$\beta. f(x) = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$\gamma. f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$\delta. f(x) = 2x\sqrt{x^2+1}$$

$$\varepsilon. f(x) = \varepsilon\varphi^3 x + \varepsilon\varphi^5 x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

10. Να βρείτε μια παράγουσα F των συναρτήσεων:

$$\alpha. f(x) = e^{2x}$$

$$\beta. f(x) = \frac{1}{3x+2}, \quad x > 0$$

$$\gamma. f(x) = \sigma\upsilon\nu 2x + e^{-x}$$

11. Να βρείτε τις αρχικές τής συνάρτησης $f(x) = 2|x| + 1, \quad x \in \mathbb{R}$.

12. Να βρείτε όλες τις παράγουσες των συναρτήσεων:

$$\alpha. f(x) = x^3(x-2)^2$$

$$\beta. f(x) = \frac{(x-1)^3 + 2\sqrt{x}}{x^2}, \quad x > 0$$

$$\gamma. f(x) = 2x\eta\mu x + x^2\sigma\upsilon\nu x$$

$$\delta. f(x) = e^x(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$$

$$\varepsilon. f(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2}, \quad x > 0$$

$$\sigma\tau. f(x) = \frac{2\eta\mu x}{x^3} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}, \quad x > 0$$

13. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f, για την οποία ισχύει:

$$\alpha. f'(x) = e^x - \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 2$$

$$\beta. f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - 1, \quad x > 0 \text{ και } f(1) = 1$$

$$\gamma. f'(x) = e^{-x} + \frac{1}{x+1}, \quad x > -1 \text{ και } f(0) = -1$$

$$\delta. f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = \sqrt{2}$$

14. Να βρείτε τη συνάρτηση f σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\alpha. x^2 f'(x) = x^2 + x - 1, \quad x > 0 \text{ και } f(1) = 0$$

$$\beta. f'(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0$$

$$\gamma. f'(x) = x(2\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x), \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1$$

$$\delta. f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad x > 0 \text{ και } f(1) = 0$$

$$\varepsilon. f''(x) = e^x - \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } f'(0) = f(0) = 1$$

15. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις, για τις οποίες ισχύει $f''(x) = g''(x) + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν οι C_f και C_g τέμνονται πάνω στον άξονα γ'γ και οι εφαπτομένες των C_f και C_g στο $x_0 = 1$ είναι παράλληλες, να λύσετε την ανίσωση $f(x) < g(x)$.

16. Να βρείτε τις παράγουσες των συναρτήσεων:

α. $f(x) = (x^2 + 3x + 5)^{10}(2x + 3)$ β. $f(x) = \frac{e^{\varphi x}}{\sigma \nu \nu^2 x}$, με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

γ. $f(x) = x \cdot \eta \mu(3x^2)$ δ. $f(x) = \frac{x^3}{(x^4 + 1)^5} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

ε. $f(x) = \varepsilon \varphi x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ στ. $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $x \in (1, +\infty)$

ζ. $f(x) = (2x + 3)^5 + \eta \mu 3x$ η. $f(x) = \frac{1}{3x - 6} + e^{4x} + \sigma \nu \nu \left(\frac{x - \pi}{3} \right)$, $x \in (2, +\infty)$

17. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(\pi) = 0$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x < 0 \\ \sigma \nu \nu x, & x > 0 \end{cases}. \text{ Να βρείτε τον τύπο της } f.$$

18. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει $f(0) = 2$ και $(x - 1)f'(x) = 2x^2 - x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την f .

19. Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} e^x - x, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \frac{1}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$

20. α. Να αποδείξετε ότι η $G(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$, είναι παράγουσα της $g(x) = \frac{1}{x^3 + x^2}$ με $x \in (0, +\infty)$.

β. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = \ln 2$ και

$$xf'(x) - f(x) = \frac{1}{x+1} \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Να βρείτε τον τύπο της } f.$$

21. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f , όταν ισχύουν:

α. $(x^2 + 1)f'(x) = 1 - 2xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

β. $f'(x)\eta \mu x = \eta \mu^2 x + f(x) \cdot \sigma \nu \nu x$, $x \in (0, \pi)$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

22. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f , όταν ισχύουν:

α. $f'(x) = e^{x-f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = \ln 2$

β. $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x + \frac{1}{x}$, $x > 0$, $f(1) = e$, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$.

23. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύουν $xf'(x) + (1 - x)f(x) = 0$, για κάθε $x > 0$ και $f(1) = e$. Να βρείτε την f .

24. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f , όταν ισχύουν:

α. $xf'(x) = \sigma \nu \nu x - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ β. $f'(x) - \frac{x}{f(x)} = 0$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$.

25. Από την πώληση ενός προϊόντος μιας εταιρίας, διαπιστώθηκε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους $K(t)$ του προϊόντος είναι $1000 - 0,8t$ (σε ευρώ την ημέρα), ενώ ο ρυθμός μεταβολής της εισπραξης $E(t)$ στο τέλος των t ημερών δίνεται από τον τύπο $E'(t) = 1300 + 0,4t$ (σε ευρώ την ημέρα). Να βρείτε το συνολικό κέρδος της εταιρίας από την Τρίτη έως και την έβδομη ημέρα.
26. Έστω F και G αρχικές των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x^2$ και $g(x) = e^{x^2}$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x^2) - F(x)}{G(x^3) - G(0)}$.
27. Έστω $F(x)$ μια αρχική συνάρτηση της $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x+1) - F(x))$.
28. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω F μια αρχική συνάρτηση της f για την οποία ισχύει $F(1) = -2$ και $f(x) = 2 + \frac{F(x)}{x}$ για κάθε $x > 0$. Να βρείτε τον τύπο της f .
29. Δίνεται συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(3) = 2$. Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f , να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση $g(x) = F(x^3 + 2x) - 2x^3 - 4x$.
30. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 2$, και F μια αρχική συνάρτηση της f για την οποία ισχύει $F(x)f(-x) = 2$, $x \in \mathbb{R}$.
- α. Να υπολογίσετε το $F(0)$.
- β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = F(x)F(-x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
- γ. Να βρείτε τον τύπο της f .
31. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω F μια αρχική συνάρτηση της f για την οποία ισχύει $F(1) = F(2) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $F(\xi) = \xi f(\xi)$.
32. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(4) = 6$, $f(5) = 9$ και $f'(x) > -2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f , να αποδείξετε ότι:
- α. η συνάρτηση $g(x) = F(x) + x^2 - 5x$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
- β. $5 < F(5) - F(4) < 10$.
33. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f για την οποία ισχύουν $F(6) = 0$ και $xF(x^2 + x) + 10 \ln(x-1) \geq 4 - x^2$ για κάθε $x > 1$. Να υπολογίσετε την τιμή $f(6)$.
34. Έστω E το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου με εσωτερική ακτίνα r και εξωτερική ακτίνα R . Υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $r = 2$ cm και $R = 5$ cm. Για $t > 0$ η ακτίνα r αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 3 cm/sec ενώ η ακτίνα R αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 2 cm/sec. Να βρείτε:
- α. πότε θα μηδενιστεί το εμβαδόν του δακτυλίου.
- β. πότε θα μεγιστοποιηθεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου.
35. α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $g(x) = x \ln x + (1-x) \cdot \ln(1-x)$
- β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$
- i) Έστω F αρχική της f . Η εφαπτομένη της C_F στο σημείο της $M(0, F(0))$ διέρχεται από το σημείο

$N(\ln 16, \ln 4)$. Να βρείτε τον τύπο της F .

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$ και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

iii) Να βρείτε την αρχική της f^{-1} , η οποία έχει ελάχιστο το 0.

36. Δίνεται η συνάρτηση $f: \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{1 + \eta \mu x}$. Έστω F η αρχική της f , της οποίας

η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

γ. Να βρείτε τον τύπο της F .

δ. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_F έχουν μοναδικό κοινό σημείο Σ , το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο Σ .

37. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$

α. Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}$ για κάθε $x > 0$.

β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(0, 1)$.

γ. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 2^{f(x)} - 1$ για κάθε $x > 0$.

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(a)}{x-1} + \frac{f^{-1}(a)}{x-2} + \frac{\eta \mu(\pi \alpha)}{x} = 0$, όπου $0 < \alpha < 1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x , μία στο διάστημα $(0, 1)$ και μία στο διάστημα $(1, 2)$.

ε. Αν F είναι μία αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $(0, +\infty)$ με $F(e) = e \ln 2$, να αποδείξετε ότι

$$\ln 2 < F(1) < \ln \left(\frac{2^{e+1}}{e+1} \right).$$

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ με $x > 1$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

δ. Να σχεδιάσετε τη C_f .

ε. Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f και $g(x) = F(x^2) - F(x)$

i) Να αποδείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη.

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.