

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 17

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Στο παρόν φυλλάδιο υπάρχει μια επιλογή ασκήσεων από δύο εξαιρετικά βιβλία:

1. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Γ2, Β. Παπαδάκης, έκδοση 2020, εκδόσεις Σαββάλας
2. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Β' τεύχος, Αν. Μπάρλας, έκδοση 2018, εκδόσεις Μπάρλας

Κώστας Χρυσανθόπουλος, 5^ο ΓΕΛ Ηλιούπολης

Ασκήσεις

Α. Βασικές Ασκήσεις στο Ορισμένο Ολοκλήρωμα

1. Αν $\int_1^3 f(x)dx = 1$, $\int_2^5 f(x)dx = 2$, $\int_2^3 f(x)dx = 3$ και $\int_1^3 g(x)dx = 2$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α. $\int_3^2 f(x)dx$

β. $\int_1^5 f(x)dx$

γ. $\int_1^3 (2f(x) - 3g(x))dx$

2. Να εξετάσετε αν είναι καλά ορισμένο το ολοκλήρωμα $I = \int_0^2 \frac{1}{x-1} dx$

3. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο $A(1, 2)$, να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 f'(x)dx$, εφόσον η f' είναι συνεχής.

4. Να υπολογίσετε το κ , ώστε $\int_2^{\kappa} \frac{x^2-1}{x^2+1} dx - 2 \int_{\kappa}^2 \frac{1}{x^2+1} dx = 1$

5. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ , ώστε να ισχύει: $\int_2^{\kappa} \frac{3x^2-1}{x^2+4} dx - \int_{\kappa}^2 \frac{9-x^2}{x^2+4} dx = 12$

6. Δίνονται συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν: $\int_1^2 f(x)dx = 4$, $\int_1^4 f(x)dx = 9$,

$\int_4^5 f(x)dx = 2$ και $\int_2^5 g(x)dx = 7$. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α. $\int_4^1 f(x)dx$

β. $\int_1^5 f(x)dx$

γ. $\int_2^4 f(x)dx$

δ. $\int_2^5 (3f(x) - 2g(x))dx$

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x dx$

β. $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} dx$

γ. $\int_0^1 x^2 dx$

δ. $\int_2^1 \frac{1}{x^5} dx$

ε. $\int_0^4 x\sqrt{x} dx$

στ. $\int_1^2 1 dx$

8. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(2\sigma\upsilon\nu x + \frac{3}{x} \right) dx$

β. $\int_1^2 \left(2^x + \frac{1}{x^2} \right) dx$

γ. $\int_0^1 x(3x-1) dx$

$$\delta. \int_0^{\pi} (3x^2 - \eta\mu x) dx$$

$$\epsilon. \int_0^1 (4x^3 - x^2 - 3x - 1) dx$$

9. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha. \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu 2x dx$$

$$\beta. \int_0^1 e^{2x} dx$$

$$\gamma. \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$\delta. \int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$$

$$\epsilon. \int_0^1 e^{2x-1} dx$$

$$\sigma\tau. \int_{-1}^0 \frac{du}{u+3}$$

$$\zeta. \int_0^1 \frac{1}{3x+2} dx$$

$$\eta. \int_0^1 (x-2)^4 dx$$

$$\theta. \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$$

10. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha. \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$\beta. \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$\gamma. \int_0^1 x e^{x^2} dx$$

$$\delta. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} dx$$

$$\epsilon. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x dx$$

$$\sigma\tau. \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$$

$$\zeta. \int_a^{a^2} \frac{dx}{x \ln x}, \quad a > 1$$

11. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha. \int_0^1 (4x^3 - 6x^2 + 4x + 3) dx$$

$$\beta. \int_1^2 \frac{(x-2)(x-1)}{x} dx$$

$$\gamma. \int_0^{\pi} \frac{e^x + \sigma\upsilon\nu x}{e^x + \eta\mu x} dx$$

$$\delta. \int_0^1 \frac{2x - x^2}{e^x} dx$$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x \leq 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & x > 0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{\pi} f(x) dx$

13. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha. \int_{-1}^2 (3x^2 - 2|x-1|) dx$$

$$\beta. \int_{-2}^2 (|x+1| + x - 4) dx$$

$$\gamma. \int_{-2}^4 (3|x^2 - 2x - 3| + 4) dx$$

14. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha. \int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x} dx$$

$$\beta. \int_0^2 \frac{1}{1+e^x} dx$$

$$\gamma. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$$

15. α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ e^x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$

i) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

ii) Να βρείτε το $\int_{-1}^1 f(x) dx$

β. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 |2x - 1| dx$.

16. α. Αν $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x) f'(x) dx$.

β. Αν $f(1) = 2f(0)$ και ισχύουν $f'(x) - f^2(x) = f(x)$, $f(x) > 0$, $x \in [0, 1]$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x) dx$.

17. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α. $\int_0^1 \frac{4x - 6}{x^2 - 3x + 6} dx$

β. $\int_0^1 \frac{x - 11}{x^2 - 2x - 3} dx$

18. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α. $\int_{-1}^0 \frac{x^3 + x^2 - 7x + 3}{x^2 - 3x + 2} dx$

β. $\int_1^2 \frac{6x + 5}{3x - 2} dx$

γ. $\int_2^3 \frac{x + 3}{x - 1} dx$

19. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $\int_a^3 (3x^2 - ax) dx = 14$

20. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\int_0^a \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx - a \right)$

21. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(1) = 6$ και

$\int_1^2 \frac{f'(x)}{x} dx + \int_2^1 \frac{f(x)}{x^2} dx = 1$. Να υπολογίσετε:

α. την τιμή $f(2)$,

β. το ολοκλήρωμα $I = \int_1^2 x(2f(x) + xf'(x)) dx$.

22. Δίνονται συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

α. Αν ισχύει ότι $\int_1^2 t^2 \left(\int_1^2 f(x) dx \right) dt = 14$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 f(x) dx$.

β. Αν επιπλέον ισχύει ότι $\int_0^3 g(x) dx = 2$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^3 \left(\int_1^2 f(t) g(x) dt \right) dx$

23. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) = 12x^2 - 2x \int_0^1 f(t) dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

24. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f όταν ισχύει:

α. $f(x) = x \int_0^1 e^{xt} dt, \quad x \in \mathbb{R}$ β. $f(x) = \int_0^1 \frac{1}{|x-t|+1} dt, \quad x \geq 1$

25. Να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(t) dt \right) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

26. Έστω f μία συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x) = 2x + \int_0^2 f(x) dx, \quad x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x - 4, \quad x \in \mathbb{R}$.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\beta+2)x^2 + \alpha x + \beta}{x+3}$. Η C_f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την

ευθεία $y = e^{1-\alpha}$.

α. Να αποδείξετε ότι $\beta = -2$ και $\alpha = 1$.

β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^0 f(x) dx$

γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

δ. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό $\lambda > 1$ για τον οποίο ισχύει $\int_2^{\lambda} f^{-1}(x) dx = -\ln(32e^3)$

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

α. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

β. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , όταν το x τείνει στο $-\infty$.

γ. Να αποδείξετε ότι $f'(x)\sqrt{x^2+1} + f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln(\sqrt{2}+1)$